



Bibliothèque  
Electronique des  
Classes Préparatoires

**Visiter notre Forum** : <http://prepa-book.forummaroc.net/>

**Visiter notre page** :

<https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa>

\*\*\*\*\*

\* © bibliothèque électronique des classes prepa™ ® \*

\*\*\*\*\*

Edmond Ramis, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de Mathématiques Spéciales MP\* au lycée Louis-le-Grand, puis Doyen de l'Inspection générale de mathématiques.

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les

établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (**CFC**, 20 rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2001  
ISBN 2 10 005412 0

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L 122-10 à L 122-12 du même Code, relatives à la reproduction par reprographie.

# Préface

Ce volume complète notre cours et, comme on le sait, s'insère dans une longue histoire remontant aux années trente, lorsque parut chez Masson le *Cours de Mathématiques Spéciales* d'Henri Commissaire, cours accompagné de *Tables de Logarithmes* fort bien conçues, qui rencontra un grand succès. Les éditions suivantes firent connaître Georges Cagnac, au rôle si important qu'ils seront à égalité sur la page de titre, ainsi que sur les volumes ultérieurs destinés aux élèves de première année. D'autres collaborateurs viendront : Joanny Commeau, et surtout Edmond Ramis. La disparition de Commissaire vit la parution, dans les années soixante, du *Nouveau Cours de Mathématiques Spéciales* de Cagnac, secondé par Ramis et Commeau. Chacun connaît enfin l'avant-dernier avatar de cette longue et fructueuse série, toujours à la disposition des candidats aux différents concours de recrutement, signé d'Edmond Ramis, Claude Deschamps et Jacques Odoux.

C'est cet héritage de haute qualité, dont nous sommes évidemment fiers, que nous avons voulu assumer sous la bannière Dunod. Comme pour nos aînés, il s'agit d'un rigoureux travail d'équipe : chacun des six auteurs a participé, d'une façon ou d'une autre, à la rédaction du cours et a pris sa part d'exercices, chacun a dit son mot dans les réunions préparatoires dégrossissant les sujets délicats, et en relisant les jeux successifs d'épreuves.

Toutefois, il serait injuste de ne pas signaler les contributions personnelles essentielles de François Moulin et de Jean François Ruaud, respectivement maîtres d'œuvre et rédacteurs principaux des volumes de première et de seconde année responsables de l'unité de niveau, de ton, et de méthodes de chacun d'eux. C'est également avec grand plaisir que nous reconnaissons ici le travail ingrat de François Moulin, T<sub>E</sub>Xpert, unifiant les travaux de chacun.

L'accueil favorable que le public a réservé à notre premier volume de 1999 qui en était déjà, à la rentrée 2001, à son troisième tirage, montre que nous avons sans doute gagné notre triple pari :

- Les modifications substantielles du système de classes préparatoires consécutives à la réforme définie en 1995 exigeaient une série adaptée aux données actuelles.
- L'état d'esprit résultant notamment de la contraction des horaires imposait de couvrir tout le programme (mais rien que le programme), et de fournir un ouvrage de référence, clair et précis, complétant le cours du professeur plus irremplaçable que jamais.
- Il fallait faire tenir exposé et exercices en un seul volume de format maniable pour chacune des deux années.

Ce pari signifiait une condition draconienne : disposer d'une équipe qualifiée et compétente, privilégiant limpidité et fluidité du texte, sans rien cacher des difficultés ni demander exagérément au lecteur. Certes, quelques rares entorses à ces principes sont visibles, par exemple dans la théorie des familles sommables présentée dans une optique un peu plus large que celle des programmes. Nous n'avons pas rendu le sujet plus complexe, le simplifiant au contraire en laissant le dénombrable en arrière-plan, et lui donnant un sens plus clair en culminant, à l'issue de démonstrations toutes très naturelles, par le théorème fondamental de sommation par paquets. Cela dit, nous avons toujours veillé à rester dans les exercices le plus possible fidèles à la lettre du programme, pour ne pas placer les étudiants en porte à faux vis-à-vis des examinateurs.

Naturellement tout lecteur qui repérerait une erreur, ou qui proposerait une simplification positive, sera le bienvenu. Nous le remercions par avance d'aider ainsi les étudiants des classes préparatoires à maîtriser les incontournables mathématiques indispensables à la suite de leur carrière. En effet, cette discipline est nécessaire à la compréhension de notre monde dominé par les sciences et les techniques et apporte une contribution essentielle à la formation des scientifiques dont notre pays a besoin.

Claude DESCHAMPS et André WARUSFEL

# Table des matières

<b>I Algèbre</b>	<b>1</b>
<b>1 Dénombrabilité</b>	<b>3</b>
1. Ensembles dénombrables . . . . .	3
2. Suites exhaustives de parties finies . . . . .	4
3. Exemples d'ensembles dénombrables . . . . .	5
4. Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ . . . . .	7
<b>2 Groupes et actions de groupe</b>	<b>13</b>
1. Généralités . . . . .	13
1.1 Groupe produit . . . . .	13
1.2 Sous-groupe engendré par une partie . . . . .	14
1.3 Partie génératrice . . . . .	16
1.4 Groupe monogène et groupe cyclique . . . . .	18
2. Action d'un groupe sur un ensemble . . . . .	19
2.1 Définitions et exemples classiques . . . . .	19
2.2 Orbites et stabilisateurs . . . . .	24
2.3 Théorème de Lagrange et formule des classes . . . . .	27
3. Groupes associés à $\mathbb{Z}$ . . . . .	30
3.1 Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ . . . . .	30
3.2 Relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}$ . . . . .	31
3.3 Groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	34
4. Ordre d'un élément d'un groupe . . . . .	36
4.1 Ordre d'un élément . . . . .	36
4.2 Structure du sous-groupe engendré par un élément . . . . .	38
5. Groupes monogènes . . . . .	39
5.1 Structure des groupes monogènes . . . . .	39
5.2 Générateurs des groupes cycliques . . . . .	40
5.3 Sous-groupes des groupes monogènes . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Anneaux et algèbres</b>	<b>47</b>
1.	Idéaux d'un anneau commutatif . . . . .	47
1.1	Idéaux . . . . .	47
1.2	Divisibilité . . . . .	49
2.	Arithmétique de $\mathbb{Z}$ . . . . .	52
2.1	Idéaux de $\mathbb{Z}$ . . . . .	52
2.2	Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux entiers relatifs . . . . .	52
2.3	Congruences dans $\mathbb{Z}$ et anneaux quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	54
2.4	Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et caractéristique d'un corps . . . . .	57
2.5	Utilisation arithmétique de la notion de congruence et des anneaux quotients . . . . .	58
2.6	Applications aux nombres premiers . . . . .	61
3.	Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	64
3.1	Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	64
3.2	Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux polynômes . . . . .	65
4.	Sous-algèbres monogènes d'une $\mathbb{K}$ -algèbre . . . . .	67
4.1	Morphismes d'évaluation . . . . .	67
4.2	Idéal annulateur et polynôme minimal . . . . .	69
4.3	Structure d'une sous-algèbre monogène . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Algèbre linéaire</b>	<b>81</b>
1.	Familles génératrices, familles libres et bases . . . . .	81
1.1	Combinaisons linéaires . . . . .	81
1.2	Familles génératrices, familles libres et bases . . . . .	83
1.3	Détermination d'une application linéaire . . . . .	89
2.	Produit, somme et somme directe . . . . .	89
2.1	Produit d'une famille d'espaces vectoriels . . . . .	89
2.2	Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels . . . . .	91
2.3	Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels . . . . .	92
2.4	Décomposition en somme directe . . . . .	93
3.	Applications linéaires . . . . .	98
3.1	Sous-espaces stables . . . . .	98
3.2	Isomorphisme associé à une application linéaire . . . . .	101
3.3	Codimension et théorème du rang . . . . .	102
3.4	Hyperplans et formes linéaires . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Matrices</b>	<b>111</b>
1.	Représentation matricielle . . . . .	111
1.1	Matrices équivalentes et rang . . . . .	111
1.2	Matrices semblables et trace . . . . .	113
1.3	Matrices par blocs . . . . .	116
1.4	Représentation matricielle par blocs . . . . .	121
2.	Opérations élémentaires . . . . .	125
2.1	Opérations élémentaires . . . . .	125
2.2	Calcul du rang, du déterminant et de l'inverse . . . . .	129
2.3	Applications à $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$ . . . . .	133

<b>6</b>	<b>Dualité en dimension finie</b>	<b>139</b>
1.	Espace dual et base duale . . . . .	139
1.1	Base duale . . . . .	139
1.2	Orthogonalité . . . . .	143
1.3	Application linéaire associée à une famille finie de vecteurs ou de formes linéaires . . . . .	145
2.	Systèmes d'équations linéaires . . . . .	147
2.1	Systèmes d'équations linéaires . . . . .	147
2.2	Résolution d'un système linéaire . . . . .	150
2.3	Représentation des sous-espaces par des systèmes d'équations . . . . .	154
<b>7</b>	<b>Formes bilinéaires symétriques</b>	<b>159</b>
1.	Définitions . . . . .	159
1.1	Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques . . . . .	159
1.2	Formes positives et définies positives . . . . .	161
1.3	Matrice d'une forme bilinéaire symétrique . . . . .	164
2.	Réduction d'une forme bilinéaire symétrique . . . . .	167
2.1	Réduction d'une forme bilinéaire symétrique . . . . .	167
2.2	Méthode de décomposition de Gauss . . . . .	169
2.3	Réduction lorsque $\mathbf{K}$ est égal à $\mathbb{C}$ . . . . .	171
2.4	Réduction lorsque $\mathbf{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ . . . . .	172
<b>8</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b>	<b>179</b>
1.	Polynômes d'endomorphisme . . . . .	179
1.1	Morphisme d'évaluation . . . . .	179
1.2	Idéal annulateur et polynôme minimal . . . . .	182
1.3	Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme . . . . .	185
1.4	Idéal annulateur d'un vecteur . . . . .	187
1.5	Lemme des noyaux . . . . .	190
2.	Éléments propres d'un endomorphisme . . . . .	195
2.1	Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	195
2.2	Sous-espaces propres . . . . .	200
2.3	Polynôme caractéristique . . . . .	201
2.4	Endomorphismes scindés et scindés simples . . . . .	208
2.5	Théorème de Hamilton-Cayley . . . . .	209
3.	Réduction des endomorphismes diagonalisables . . . . .	211
3.1	Endomorphismes diagonalisables . . . . .	211
3.2	Réduction des endomorphismes diagonalisables . . . . .	217
3.3	Caractérisation des endomorphismes diagonalisables par leur polynôme minimal . . . . .	219
4.	Réduction des endomorphismes scindés . . . . .	221
4.1	Endomorphismes trigonalisables . . . . .	221
4.2	Décomposition de Jordan des endomorphismes scindés . . . . .	227
4.3	Réduction de Jordan des endomorphismes scindés . . . . .	232

<b>II</b>	<b>Analyse 1</b>	<b>245</b>
<b>9</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>247</b>
1.	Généralités . . . . .	247
1.1	Séries convergentes . . . . .	247
1.2	Suites et séries . . . . .	250
2.	Séries à termes positifs . . . . .	251
2.1	Convergence par comparaison directe . . . . .	251
2.2	Règle de Riemann . . . . .	253
2.3	Comparaison à une série géométrique . . . . .	255
2.4	Comparaison logarithmique . . . . .	256
2.5	Complément : cas de convergence lente . . . . .	258
2.6	Sommation des relations de comparaison . . . . .	260
3.	Développement décimal d'un réel positif . . . . .	262
3.1	Valeurs approchées décimales . . . . .	262
3.2	Développements décimaux . . . . .	267
4.	Séries à termes complexes . . . . .	270
4.1	Suites de Cauchy . . . . .	270
4.2	Critère de Cauchy pour les séries . . . . .	271
4.3	Convergence absolue . . . . .	271
4.4	Comparaison série-intégrale . . . . .	273
4.5	Séries alternées . . . . .	279
4.6	Complément : la transformation d'Abel (hors programme) . . . . .	281
4.7	Sommation par tranches . . . . .	282
4.8	Complément : permutation des termes . . . . .	284
4.9	Produit de Cauchy . . . . .	286
5.	Estimation du reste d'une série convergente . . . . .	288
5.1	Développement asymptotique du reste . . . . .	288
5.2	Vitesse de convergence . . . . .	291
<b>10</b>	<b>Espaces vectoriels normés et espaces métriques : définitions générales</b>	<b>305</b>
1.	Normes et distances . . . . .	305
1.1	Espaces vectoriels normés . . . . .	305
1.2	Espaces métriques . . . . .	315
1.3	Parties bornées et applications lipschitziennes . . . . .	320
2.	Suites et séries . . . . .	328
2.1	Suites et séries convergentes . . . . .	328
2.2	Valeurs d'adhérence . . . . .	330
2.3	Relations de comparaison . . . . .	331
3.	Topologie . . . . .	333
3.1	Voisinages et ouverts . . . . .	333
3.2	Fermés . . . . .	336
3.3	Intérieur, adhérence et frontière d'une partie . . . . .	338
3.4	Topologie d'un sous-espace métrique . . . . .	345



4.	Limites et continuité . . . . .	348
4.1	Limite et continuité en un point . . . . .	348
4.2	Relations de comparaison . . . . .	356
4.3	Continuité . . . . .	357
4.4	Continuité uniforme . . . . .	362
4.5	Applications linéaires continues . . . . .	362
4.6	Normes équivalentes . . . . .	369
<b>11</b>	<b>Espaces vectoriels normés et espaces métriques :</b>	
	<b>théorèmes fondamentaux</b>	<b>377</b>
1.	Complétude . . . . .	377
1.1	Suites de Cauchy . . . . .	377
1.2	Espaces métriques complets . . . . .	380
1.3	Espaces de Banach . . . . .	383
1.4	Applications à valeurs dans un espace complet . . . . .	392
2.	Compacité . . . . .	395
2.1	Définition . . . . .	395
2.2	Propriétés des espaces métriques compacts . . . . .	403
2.3	Applications continues sur un compact . . . . .	406
3.	Connexité par arcs . . . . .	408
3.1	Arcs et connexité par arcs . . . . .	408
3.2	Propriétés des espaces connexes par arcs . . . . .	410
4.	Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	413
4.1	Complétude des espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	413
4.2	Applications linéaires . . . . .	414
4.3	Parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie . . . . .	416
4.4	Équivalence des normes en dimension finie . . . . .	418
5.	Espaces d'applications linéaires continues . . . . .	419
5.1	Espace vectoriel normé des applications linéaires continues . . . . .	420
5.2	Cas des espaces de dimension finie . . . . .	424
5.3	Suite équilipschitzienne d'applications linéaires . . . . .	427
<b>12</b>	<b>Suites et séries de fonctions</b>	<b>437</b>
1.	Suites de fonctions . . . . .	437
1.1	Différents modes de convergence . . . . .	437
1.2	Espace des applications bornées sur $A$ . . . . .	442
1.3	Conservation des propriétés par convergence uniforme . . . . .	444
1.4	Le théorème de Dini (Hors programme) . . . . .	446
2.	Espaces de fonctions classiques . . . . .	447
2.1	Les fonctions continues par morceaux . . . . .	447
2.2	Les fonctions affines par morceaux . . . . .	449
2.3	Théorème de Weierstrass . . . . .	450
2.4	Théorème de Weierstrass trigonométrique . . . . .	452
3.	Séries de fonctions . . . . .	452
3.1	Différents modes de convergence . . . . .	453
3.2	Conservation des propriétés par convergence uniforme . . . . .	460

<b>13</b>	<b>Intégration sur un segment</b>	<b>471</b>
1.	Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	472
1.1	Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	472
1.2	Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	472
2.	Propriétés de l'intégrale . . . . .	474
2.1	Inégalité triangulaire . . . . .	474
2.2	Invariance par translation . . . . .	475
2.3	Image par une application linéaire . . . . .	476
2.4	Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration . . . . .	477
2.5	Cas des fonctions réelles : positivité, croissance . . . . .	478
2.6	Inégalité de la moyenne . . . . .	480
2.7	Sommes de Riemann . . . . .	481
2.8	Notation . . . . .	482
3.	Propriétés topologiques . . . . .	484
3.1	Norme de la convergence en moyenne . . . . .	484
3.2	Intégration sur un segment d'une suite de fonctions continues . . . . .	485
3.3	Intégration terme à terme d'une série . . . . .	488
3.4	Approximation en moyenne d'une fonction continue par morceaux . . . . .	490
3.5	Norme de la convergence en moyenne quadratique . . . . .	492
3.6	Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre . . . . .	494
<b>14</b>	<b>Dérivation et intégration</b>	<b>499</b>
1.	Dérivation . . . . .	500
1.1	Dérivée en un point . . . . .	500
1.2	Caractérisation des fonctions constantes . . . . .	501
1.3	Fonctions de classe $C^1$ . . . . .	502
1.4	Fonctions de classe $C^k$ . . . . .	505
1.5	Fonctions de classe $C^k$ par morceaux . . . . .	507
2.	Primitives et intégrale . . . . .	509
2.1	Primitives des fonctions continues . . . . .	509
2.2	Théorème fondamental . . . . .	509
2.3	Cas des fonctions continues par morceaux . . . . .	510
2.4	Inégalité des accroissements finis . . . . .	512
2.5	Théorème du relèvement . . . . .	515
3.	Calcul d'intégrales . . . . .	517
3.1	Intégration par parties . . . . .	518
3.2	Changement de variable . . . . .	519
4.	Formules de Taylor . . . . .	521
4.1	Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	521
4.2	Inégalité de Taylor–Lagrange . . . . .	522
4.3	Développements limités . . . . .	523
4.4	Formule de Taylor–Young . . . . .	523
5.	Dérivation d'une limite ou d'une intégrale . . . . .	524
5.1	Primitivation et dérivation d'une limite . . . . .	524
5.2	Dérivation sous le signe $\int$ . . . . .	528
5.3	Théorème de Fubini . . . . .	533

<b>15</b>	<b>Intégration sur un intervalle quelconque</b>	<b>539</b>
1.	Intégrabilité des fonctions à valeurs réelles positives . . . . .	539
1.1	Définition . . . . .	539
1.2	Conditions d'intégrabilité . . . . .	542
1.3	Utilisation des séries . . . . .	547
2.	Intégrale des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	549
2.1	Intégrabilité . . . . .	549
2.2	Intégrale des fonctions sommables . . . . .	551
2.3	Propriétés de l'intégrale . . . . .	553
2.4	Calcul d'une intégrale . . . . .	555
2.5	Intégration des relations de comparaison . . . . .	558
2.6	Convergence en moyenne et en moyenne quadratique . . . . .	562
3.	Théorèmes de convergence . . . . .	567
3.1	Convergence uniforme . . . . .	567
3.2	Convergence monotone . . . . .	568
3.3	Convergence dominée . . . . .	574
4.	Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	577
4.1	Continuité sous le signe $\int$ . . . . .	577
4.2	Dérivation sous le signe $\int$ . . . . .	579
4.3	Un exemple : la fonction $\Gamma$ . . . . .	583
5.	Démonstration des théorèmes de convergence (hors programme)	586
5.1	Approximation par des fonctions continues . . . . .	586
5.2	Théorème de convergence monotone . . . . .	587
5.3	Théorème de convergence dominée . . . . .	589
<b>16</b>	<b>Familles sommables</b>	<b>601</b>
1.	Familles sommables positives . . . . .	602
1.1	Définition, cas des suites . . . . .	602
1.2	Propriétés . . . . .	604
1.3	Suites doubles . . . . .	610
2.	Familles sommables à valeurs vectorielles . . . . .	611
2.1	L'espace $\ell^1(I, F)$ . . . . .	611
2.2	Cas des familles à support fini . . . . .	612
2.3	Somme d'une famille sommable . . . . .	613
2.4	Propriétés . . . . .	614
2.5	Calcul d'une somme . . . . .	618
2.6	Les espaces $\ell^1(I, F)$ et $\ell^2(I, \mathbf{C})$ . . . . .	622
3.	Applications . . . . .	625
3.1	Produit de Cauchy de deux séries . . . . .	625
3.2	Support d'une famille sommable . . . . .	626

<b>17</b>	<b>Séries entières</b>	<b>637</b>
1.	Généralités . . . . .	637
1.1	Définition d'une série entière . . . . .	637
1.2	Opérations sur les séries entières . . . . .	638
2.	Convergence d'une série entière et fonction somme . . . . .	638
2.1	Rayon de convergence d'une série entière . . . . .	638
2.2	Convergence uniforme et séries entières . . . . .	646
3.	Propriétés de la fonction somme d'une série entière . . . . .	647
3.1	Continuité de la fonction somme . . . . .	647
3.2	Intégration de la fonction somme . . . . .	648
3.3	Dérivabilité de la fonction somme . . . . .	649
3.4	Problèmes sur le bord . . . . .	650
4.	Séries entières classiques . . . . .	653
4.1	Séries entières complexes . . . . .	653
4.2	Séries entières réelles . . . . .	661
5.	Fonctions développables en série entière . . . . .	665
5.1	Généralités . . . . .	665
5.2	Opérations sur les fonctions développables en série entière . . . . .	670
5.3	Méthode de l'équation différentielle . . . . .	672
<b>III</b>	<b>Analyse 2</b>	<b>683</b>
<b>18</b>	<b>Espaces préhilbertiens</b>	<b>685</b>
1.	Espaces préhilbertiens . . . . .	685
1.1	Formes sesquilinéaires . . . . .	685
1.2	Produit scalaire, espaces préhilbertiens . . . . .	687
1.3	Norme . . . . .	690
1.4	Orthogonalité . . . . .	694
2.	Espaces euclidiens ou hermitiens . . . . .	702
2.1	Bases orthonormées . . . . .	702
2.2	Calculs dans une base orthonormée . . . . .	704
2.3	Relation entre l'espace et son dual . . . . .	705
2.4	Arcs paramétrés d'un espace euclidien . . . . .	706
3.	Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie . . . . .	709
3.1	Supplémentaire orthogonal . . . . .	709
3.2	Distance à un sous-espace . . . . .	710
3.3	Inégalité de Bessel . . . . .	711
3.4	Égalité de Parseval-Bessel . . . . .	712

<b>19</b>	<b>Endomorphismes des espaces euclidiens ou hermitiens</b>	<b>721</b>
1.	Endomorphismes d'un espace euclidien . . . . .	721
1.1	Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	721
1.2	Endomorphismes symétriques . . . . .	725
1.3	Endomorphismes orthogonaux . . . . .	730
1.4	Réduction des endomorphismes symétriques . . . . .	737
1.5	Réduction des endomorphismes normaux . . . . .	744
2.	Endomorphismes d'un espace hermitien . . . . .	747
2.1	Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	747
2.2	Endomorphismes hermitiens . . . . .	750
2.3	Endomorphismes unitaires . . . . .	753
2.4	Réduction des endomorphismes hermitiens . . . . .	756
2.5	Réduction des endomorphismes normaux . . . . .	760
<b>20</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>767</b>
1.	Fonctions périodiques . . . . .	767
1.1	Espaces de fonctions périodiques . . . . .	767
1.2	Produit scalaire et semi-normes usuelles . . . . .	771
1.3	Fonctions exponentielles et polynômes trigonométriques . . . . .	773
1.4	Séries trigonométriques . . . . .	777
2.	Coefficients et sommes de Fourier . . . . .	781
2.1	Coefficients, sommes et série de Fourier . . . . .	781
2.2	Propriétés des coefficients de Fourier . . . . .	783
2.3	Inégalité de Bessel . . . . .	788
3.	Convergence ponctuelle . . . . .	790
3.1	Théorème de Dirichlet . . . . .	790
3.2	Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et continûment dérivable par morceaux . . . . .	795
3.3	Théorème de Fejér . . . . .	800
4.	Convergence en moyenne quadratique . . . . .	804
4.1	Espace des fonctions périodiques continues . . . . .	804
4.2	Espace des fonctions périodiques continues par morceaux . . . . .	809
<b>IV</b>	<b>Analyse 3</b>	<b>819</b>
<b>21</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>821</b>
1.	Applications continûment différentiables . . . . .	821
1.1	Dérivée suivant un vecteur . . . . .	821
1.2	Applications différentiables . . . . .	824
1.3	Applications continûment différentiables . . . . .	829
1.4	Caractérisation des applications continûment différentiables par leurs dérivées partielles . . . . .	831

2.	Exemples d'applications continûment différentiables . . . . .	835
2.1	Applications linéaires et bilinéaires . . . . .	835
2.2	Applications d'une variable réelle . . . . .	836
2.3	Applications à valeurs réelles . . . . .	837
3.	Opérations sur les applications de classe $C^1$ . . . . .	838
3.1	Composition . . . . .	838
3.2	Propriétés algébriques . . . . .	844
4.	Théorème des accroissements finis . . . . .	848
4.1	Formules des accroissements finis . . . . .	848
4.2	Caractérisation des applications constantes . . . . .	850
4.3	Point critique d'une application numérique . . . . .	850
5.	Applications de classe $C^k$ . . . . .	852
5.1	Applications de classe $C^k$ . . . . .	852
5.2	Théorème de Schwarz . . . . .	856
5.3	Développement de Taylor . . . . .	863
5.4	Condition suffisante d'extremum local . . . . .	864
<b>22</b>	<b>Géométrie différentielle</b> . . . . .	<b>873</b>
1.	Difféomorphismes . . . . .	873
1.1	Difféomorphismes et applications étales . . . . .	873
1.2	Théorème d'inversion locale . . . . .	874
1.3	Caractérisation globale des difféomorphismes . . . . .	878
1.4	Transformation des opérateurs différentiels linéaires par difféomorphisme . . . . .	880
2.	Théorème des fonctions implicites . . . . .	887
2.1	Théorème des fonctions implicites . . . . .	887
2.2	Courbes planes . . . . .	893
2.3	Courbes et surfaces de l'espace . . . . .	894
3.	Formes différentielles et champs de vecteurs . . . . .	901
3.1	Définitions . . . . .	901
3.2	Intégrale curviligne d'une forme différentielle . . . . .	903
3.3	Formes exactes et fermées . . . . .	907
<b>23</b>	<b>Équations différentielles : cas linéaire</b> . . . . .	<b>921</b>
1.	Équations différentielles linéaires du premier ordre . . . . .	922
1.1	Définitions et propriétés élémentaires . . . . .	922
1.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	925
1.3	Espace des solutions de l'équation homogène . . . . .	931
1.4	Espace des solutions de l'équation complète . . . . .	934
2.	Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants . . . . .	937
2.1	Espace des solutions de l'équation homogène . . . . .	937
2.2	Espace des solutions de l'équation complète . . . . .	944
2.3	Méthodes pratiques de résolution . . . . .	945

3.	Équations différentielles linéaires scalaires . . . . .	950
3.1	Définitions . . . . .	950
3.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	952
3.3	Espace des solutions de l'équation homogène . . . . .	954
3.4	Espace des solutions de l'équation complète . . . . .	963
3.5	Équations à coefficients constants . . . . .	967
<b>24</b>	<b>Équations différentielles : cas général</b>	<b>979</b>
1.	Équations différentielles autonomes du premier ordre . . . . .	979
1.1	Solutions d'une équation différentielle . . . . .	979
1.2	Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	983
1.3	Propriétés géométriques élémentaires des solutions . . . . .	988
1.4	Propriétés topologiques des solutions . . . . .	991
2.	Équations différentielles générales . . . . .	997
2.1	Solution d'une équation différentielle . . . . .	997
2.2	Théorème de Cauchy . . . . .	998
2.3	Équations différentielles particulières . . . . .	1000
<b>25</b>	<b>Quadriques</b>	<b>1013</b>
1.	Définition et équation réduite . . . . .	1013
1.1	Définitions . . . . .	1013
1.2	Équation réduite et quadriques propres . . . . .	1014
2.	Quadriques propres à centres . . . . .	1018
2.1	Quadriques propres de rang deux . . . . .	1026
2.2	Quadriques impropres . . . . .	1031
	<b>Solutions des exercices</b>	<b>1036</b>
	<b>Index</b>	<b>1447</b>





**Première partie**

**Algèbre**



# Chapitre 1

## Dénombrabilité

### 1. Ensembles dénombrables

Les ensembles dénombrables sont, à des bijections près, les parties de  $\mathbb{N}$ .

#### Définition 1

Un ensemble  $X$  est *dénombrable* s'il existe une bijection d'une partie de  $\mathbb{N}$  sur  $X$ , c'est-à-dire s'il existe une injection de  $X$  dans  $\mathbb{N}$ .

#### Exemples

1. Tout ensemble fini (y compris l'ensemble vide) est dénombrable.
2. Toutes les parties de  $\mathbb{N}$  (y compris  $\mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{N}$ ) sont dénombrables.
3. Plus généralement, toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

#### Proposition 1

Un ensemble  $X$  est dénombrable si, et seulement si, il est fini ou en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

**Démonstration** On a vu en effet dans le volume de première année que les parties infinies de  $\mathbb{N}$  sont en bijection avec  $\mathbb{N}$ . □

#### Proposition 2

Soit  $X$  un ensemble non vide. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $X$  est dénombrable,
- (ii) il existe une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $X$ ,
- (iii) il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur  $X$

**Démonstration**

(i)  $\implies$  (iii). L'identité de  $X$  dans  $X$  est surjective.

(iii)  $\implies$  (ii). Les ensembles dénombrables sont en bijection avec  $\mathbb{N}$  ou un intervalle du type  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Puisque  $X$  est non vide, il suffit de montrer que pour tout  $n \geq 1$ , il existe une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , ce qui est réalisé par l'application « reste modulo  $n$  ».

(ii)  $\implies$  (i). Supposons que  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  soit surjective. Pour tout  $x$  de  $X$ , l'ensemble  $f^{-1}(\{x\})$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , donc possède un plus petit élément  $n_x$ . L'application  $f$  induit alors une bijection entre  $A = \{n_x \mid x \in X\}$  et  $X$ .  $\square$

## 2. Suites exhaustives de parties finies

**Lemme**

La réunion d'une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ensemble finis deux à deux disjoints est dénombrable.

**Démonstration** Notons  $a_n$  le cardinal de  $X_n$  et posons  $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$  (avec en particulier  $A_0 = 0$ ).

Pour tout  $n$ , on peut trouver une bijection entre  $X_n$  et l'intervalle  $\llbracket A_n, A_{n+1} - 1 \rrbracket$ . On obtient ainsi une bijection entre  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  et  $\mathbb{N}$  si la suite  $(A_n)$  n'est pas stationnaire et  $\llbracket 0, A_{n_0} - 1 \rrbracket$  si

les  $X_n$  sont vides à partir du rang  $n_0$ .  $\square$

**Définition 2**

Soit  $X$  un ensemble. Une *suite exhaustive* de parties finies est une suite croissante  $(X_n)$  de parties finies de  $X$  dont la réunion est égale à  $X$ .

**Exemples**

1. Une suite exhaustive de parties finies de  $\mathbb{N}$  est  $(\llbracket 0, n \rrbracket)$ .
2. Une suite exhaustive de parties finies de  $\mathbb{Z}$  est  $(\llbracket -n, n \rrbracket)$ .

**Théorème 3**

Un ensemble  $X$  est dénombrable si, et seulement si, il possède une suite exhaustive de parties finies.

**Démonstration**

- ▶ Si  $X$  est fini, il suffit de poser  $X_n = X$ . Si  $X$  est dénombrable infini, il existe une bijection  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  sur  $X$ , et il suffit de prendre  $X_n = \varphi(\llbracket 0, n \rrbracket)$ .
- ▶ Réciproquement, si  $(X_n)$  est une suite exhaustive de parties finies de  $X$ , l'ensemble  $X$  est la réunion disjointe des parties finies  $X_0, X_1 \setminus X_0, \dots, X_n \setminus X_{n-1}, \dots$  ce qui prouve sa dénombrabilité d'après le lemme précédent. □

### 3. Exemples d'ensembles dénombrables

**Proposition 4**

Les ensembles  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}^2$  sont dénombrables.

**Démonstration** Des suites exhaustives de parties finies de  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}^2$  sont respectivement données par  $(\llbracket -n, n \rrbracket)$  et  $(\llbracket 0, n \rrbracket^2)$ . □

**Remarques**

- Signalons une autre suite exhaustive de parties finies de  $\mathbb{N}^2$  très utile dans la pratique, donnée par :

$$\Delta_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q \leq n\}.$$

- On peut expliciter des bijections de  $\mathbb{N}^2$  sur  $\mathbb{N}^*$ . Par exemple :
  - \*  $f(p, q) = 2^p(2q + 1)$  qui est bijective comme le prouvent l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers ;
  - \*  $f(p, q) = \frac{(p + q)(p + q + 1)}{2} + q + 1$  qui correspond à la numérotation « en diagonale » des éléments de  $\mathbb{N}^2$  :

	0	1	2	3	4	...
0	1	3	6	10	15	...
1	2	5	9	14	20	...
2	4	8	13	19	26	...
3	7	12	18	25	33	...
4	11	17	24	32	41	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

et qui est associée à la suite exhaustive  $(\Delta_n)$  ci-dessus ;

\*  $f(p, q) = \max(p, q)^2 + \max(p, q) + q - p + 1$  qui correspond à la numérotation « en carré » des éléments de  $\mathbb{N}^2$  :

	0	1	2	3	4	...
0	1	4	9	16	25	...
1	2—3	8	15	24	...	
2	5—6—7	14	23	...		
3	10—11—12—13	22	...			
4	17—18—19—20—21	...				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

et qui est associée à la suite exhaustive  $(\llbracket 0, n \rrbracket^2)$ .

### Corollaire 5

Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables, et plus généralement d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, est dénombrable.

**Démonstration** Conséquence de la dénombrabilité de  $\mathbb{N}^2$ . □

### Corollaire 6

Le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels est dénombrable.

**Démonstration** L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (p, q) &\longmapsto p/q \end{aligned}$$

est surjective. □

### Proposition 7

Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable

**Démonstration** Soit  $(X_n)$  une suite d'ensembles dénombrables. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe une application  $f_n$  surjective de  $\mathbb{N}$  sur  $X_n$ . L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \\ (n, p) &\longmapsto f_n(p) \end{aligned}$$

est alors clairement surjective, ce qui prouve que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  est dénombrable □

*Exemples*

1. Par récurrence, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
2. On montre ainsi la dénombrabilité de  $\mathbb{N}^k$ , ce que l'on pourrait aussi prouver en remarquant que l'unicité de la décomposition en facteurs premiers entraîne l'injectivité de :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^k &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (\alpha_i) &\longmapsto p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \end{aligned}$$

si les  $p_i$  sont des nombres premiers distincts deux à deux.

## 4. Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

**Lemme**

Il n'existe pas de surjection d'un ensemble  $E$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  de ses parties.

**Démonstration** Soit  $\varphi$  une application de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ . Considérons la partie de  $E$  :

$$X = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Pour tout  $x$  de  $E$ , on a l'équivalence  $x \in X \iff x \notin \varphi(x)$ , ce qui prouve :

$$\forall x \in E, \varphi(x) \neq X$$

et donc la non surjectivité de  $\varphi$ . □

**Proposition 8**

L'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  est non dénombrable.

**Démonstration** D'après le lemme précédent, il n'existe pas de surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . □

**Corollaire 9**

Si  $X$  est un ensemble contenant au moins deux points, l'ensemble  $X^{\mathbb{N}}$  des suites de  $X$  est non dénombrable.

**Démonstration**

- ▶ Si  $X = \{0, 1\}$ , c'est une conséquence de l'existence de la bijection  $A \mapsto \chi_A$  entre  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $X^{\mathbb{N}}$ , où  $\chi_A$  est la fonction caractéristique de  $A$

- Il en est donc de même si  $X$  a deux éléments.
- Dans le cas général, si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $X$  distincts, on a l'inclusion  $\{a, b\}^{\mathbb{N}} \subset X^{\mathbb{N}}$  qui prouve la non dénombrabilité de  $X^{\mathbb{N}}$ .  $\square$

**Remarque** L'ensemble  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  des suites entières est donc non dénombrable. En revanche l'ensemble  $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  des suites entières nulles à partir d'un certain rang est dénombrable, puisqu'en bijection avec  $\mathbb{N}^*$  par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (\alpha_n) &\longmapsto p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \dots \end{aligned}$$

où  $(p_n)$  est la suite des nombres premiers.

### Proposition 10

$\mathbb{R}$  est non dénombrable.

Il y a de nombreuses démonstrations de ce résultat. Nous en donnons deux ici, et d'autres plus loin dans ce livre.

**Démonstration 1** Soit  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et  $x \in ]0, 1/2[$ . Si  $a = (a_n) \in X$ , la suite  $u$  définie par :

$$u_n = \sum_{p=0}^n a_p x^p$$

est croissante et majorée par :

$$\sum_{p=0}^n x^p = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

donc converge. On peut donc définir l'application  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_n) &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n a_p x^p. \end{aligned}$$

Montrons que  $\varphi$  est injective, ce qui prouvera le résultat puisque  $X$  n'est pas dénombrable. Commençons par remarquer que si  $(a_n) \in X$ , et si  $n_0$  et  $n$  sont deux entiers tels que  $n_0 < n$  alors :

$$\sum_{p=n_0+1}^n a_p x^p \leq \frac{x^{n_0+1}}{1 - x} < x^{n_0},$$

la dernière inégalité provenant de l'hypothèse  $2x < 1$



Si  $a = (a_n)$  et  $b = (b_n)$  sont deux éléments de  $X$  distincts, on prend  $n_0$  le plus petit indice  $n$  tel que  $a_n \neq b_n$ . Quitte à échanger  $a$  et  $b$ , on peut supposer  $a_{n_0} = 0$  et  $b_{n_0} = 1$ .

On a ainsi pour  $n > n_0$

$$\sum_{p=0}^n a_p x^p = \sum_{p=0}^{n_0-1} a_p x^p + \sum_{p=n_0+1}^n a_p x^p \leq \sum_{p=0}^{n_0-1} a_p x^p + \frac{x^{n_0+1}}{1-x}$$

et donc :

$$\varphi(a) \leq \sum_{p=0}^{n_0-1} a_p x^p + \frac{x^{n_0+1}}{1-x} < \sum_{p=0}^{n_0-1} a_p x^p + x^{n_0} = \sum_{p=0}^{n_0} b_p x^p \leq \varphi(b)$$

ce qui prouve  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ . L'application  $\varphi$  est donc injective. □

**Démonstration 2** Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . On construit par récurrence une suite de segments  $J_n$  de la façon suivante :

- ▶ on prend  $J_0 = [0, 1]$  ;
- ▶ supposant construit  $J_n = [x_n, y_n]$ , on pose :

$$u_n = (2x_n + y_n)/3 \quad \text{et} \quad v_n = (x_n + 2y_n)/3,$$

et on prend :

$$J_{n+1} = [x_n, u_n] \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad J_{n+1} = [v_n, y_n] \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 1.$$

La suite de segments ainsi construite est décroissante et la longueur de  $J_n$ , égale à  $1/3^n$ , tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Son intersection est donc réduite à un seul point  $\varphi(a)$

On définit ainsi une application  $\varphi$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle est injective puisque si deux suites  $(a_n)$  et  $(a'_n)$  sont différentes, les segments  $J_n$  et  $J'_n$  correspondant au premier indice  $n$  tel que  $a_n \neq a'_n$  sont disjoints.

Comme  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  est non dénombrable, on en déduit que  $\mathbb{R}$  est non dénombrable. □

**Exemples**

- 1 Tout intervalle non vide ouvert de  $\mathbb{R}$  est non dénombrable puisque en bijection affine avec  $] -1, 1 [$ , lui même en bijection avec  $\mathbb{R}$  par l'application tangente hyperbolique ou par  $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$ .

Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant deux points distincts  $a$  et  $b$  est donc non dénombrable, puisqu'il contient l'intervalle ouvert de bornes  $a$  et  $b$ .

2. Les ensembles  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^n$  (avec  $n \geq 1$ ) sont non denombrables
3. L'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  des irrationnels est non dénombrable, puisque si non  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  serait dénombrable.

4. L'ensemble des polynômes de degré au plus  $n$  à coefficients entiers est dénombrable, puisqu'en bijection avec  $\mathbb{Z}^{n+1}$ . Par réunion dénombrable, l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable. Comme chaque polynôme n'a qu'un nombre fini de racines, l'ensemble des racines des polynômes à coefficients entiers, c'est-à-dire l'ensemble des nombres algébriques, est dénombrable.

On en déduit que l'ensemble des nombres transcendants (c'est-à-dire non algébriques) est non dénombrable (et donc en particulier non vide).

Ce raisonnement vaut autant pour les racines réelles que pour les racines complexes.

## EXERCICES

1. Montrer que lorsque  $E$  est infini, pour tout ensemble dénombrable  $D$  disjoint de  $E$ , il existe une bijection de  $E \cup D$  sur  $E$ .
2. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

1. Montrer qu'il existe une injection de  $E$  dans  $F$  si, et seulement si il existe une surjection de  $F$  sur  $E$ .
2. Soient  $f$  et  $g$  des injections de  $E$  dans  $F$  et de  $F$  dans  $E$ . On pose  $h = g \circ f$  et  $G = E \setminus g(F)$  et l'on appelle  $\mathcal{A}$  la famille des parties  $X$  de  $E$  telle que :

$$G \cup h(X) \subset X.$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{A}$  est non vide et stable par intersection quelconque.
- (b) Montrer que  $\mathcal{A}$  possède un plus petit élément  $A$ . En déduire :

$$G \cup h(A) = A.$$

- (c) On pose  $B = E \setminus A$ ,  $A' = f(A)$  et  $B' = g^{-1}(B)$ . Montrer que  $(A', B')$  est une partition de  $F$ . En déduire qu'il existe une bijection de  $E$  sur  $F$ .

3. Montrer qu'il existe une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  (on utilisera la notion de développement d'un réel en base  $a$  et l'exercice précédent).
4. Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle  $p$ .
  1. Soit  $(x_n)$  une suite de points de  $E$ . Montrer qu'il existe un hyperplan affine de  $E$  ne contenant aucun élément de  $(x_n)$ .
  2. Soit  $(H_n)$  une suite d'hyperplans affines de  $E$ . Montrer qu'il existe un élément de  $E$  n'appartenant à aucun élément de  $(H_n)$ .
  3. Soit  $(x_n)$  une suite de points de  $E$  ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe un hyperplan vectoriel de  $E$  ne contenant aucun élément de  $(x_n)$ .
5.
  1. Montrer qu'un ensemble d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints de  $\mathbb{R}$  est dénombrable.
  2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une application monotone d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est dénombrable.
  3. Déterminer les applications monotones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

6. 1. Montrer qu'il existe une famille dénombrable injective  $(I_i)_{i \in D}$  d'intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et tout point  $x$  de  $I$ , il existe  $i \in D$  tel que :

$$x \in I_i \subset I.$$

2. On dit qu'un point  $a$  d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est isolé dans  $A$  s'il existe un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $A \cap I$  soit égal à  $\{a\}$ . Montrer que l'ensemble des points isolés d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dénombrable.
3. Déterminer les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |y - x| < |z - x| \implies |f(y) - f(x)| < |f(z) - f(x)|.$$

## Chapitre 2

# Groupes et actions de groupe

Sauf mention expresse du contraire, tous les groupes considérés dans ce chapitre sont multiplicatifs et leur élément neutre noté  $e$ .

Rappelons qu'un groupe est dit *commutatif* ou *abélien* si sa loi est commutative et *additif* si sa loi est commutative et notée additivement.

Dans ce qui suit,  $G$  désigne un groupe quelconque.

## 1. Généralités

### 1.1 Groupe produit

Soient  $I$  un ensemble non vide,  $(G_i)_{i \in I}$  une famille de groupes et  $G$  l'ensemble produit  $\prod_{i \in I} G_i$ .

On appelle *loi produit* sur l'ensemble  $G$ , la loi de composition interne définie par :

$$(g_i) \cdot (g'_i) = (g_i g'_i).$$

Il est immédiat de vérifier que cette loi est associative, que la famille  $(e_i)$  où  $e_i$  désigne l'élément neutre de  $G_i$  pour tout  $i$ , est élément neutre et que  $(g_i^{-1})$  est l'inverse d'une famille  $(g_i)$  quelconque.

#### Définition 1

On appelle *groupe produit* de la famille  $(G_i)_{i \in I}$ , et l'on note :

$$\prod_{i \in I} G_i,$$

le groupe  $(G, \cdot)$ .

Le groupe produit est noté  $G^I$  lorsque les  $G_i$  sont tous égaux à un groupe  $G$ . Il est noté  $\prod_{i=1}^p G_i$  ou :

$$G_1 \times \cdots \times G_p$$

dans le cas d'une famille finie de la forme  $(G_1, \dots, G_p)$ .

Par définition même de la loi produit, les projections  $p_i : (g_j) \mapsto g_i$  de  $\prod_{j \in I} G_j$  vers  $G_i$  sont des morphismes de groupes. On obtient alors la proposition suivante :

### Proposition 1

Une application  $f : \ell \mapsto (f_i(\ell))$  d'un groupe  $L$  vers  $\prod_{i \in I} G_i$  est un morphisme de groupes si, et seulement si, ses composantes  $f_i$  sont des morphismes de groupes.

Le groupe  $\prod_{i \in I} G_i$  est évidemment commutatif si, et seulement si, les  $G_i$  le sont. On le note additivement lorsque les  $G_i$  sont notés de cette façon ; son élément neutre est alors  $(0_i)$  et l'opposé de  $(g_i)$  vaut  $(-g_i)$ .

## 1.2 Sous groupe engendré par une partie

Soit  $S$  une partie du groupe  $G$ .

### Définition

### Définition 2

Il existe un plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $S$ .  
On l'appelle le *sous-groupe engendré* par  $S$  et on le note  $\langle S \rangle$ .

**Démonstration** La famille  $\mathcal{G}$  des sous-groupes de  $G$  contenant  $S$  est non vide puisqu'elle contient  $G$ . Comme intersection de sous-groupes, l'ensemble :

$$H = \bigcap_{L \in \mathcal{G}} L$$

est un sous-groupe de  $G$ . Ce sous-groupe est le plus petit sous-groupe contenant  $S$  puisque l'on a évidemment  $S \subset H$ , ainsi que  $H \subset L$  pour tout  $L \in \mathcal{G}$ .  $\square$

**Description du sous-groupe engendré par une partie**

On dit qu'un élément  $g \in G$  peut s'écrire comme produit d'éléments de  $S$  s'il existe un entier  $p \in \mathbb{N}$  et une suite  $(s_1, \dots, s_p)$  de  $S^p$  tels que :

$$g = s_1 \cdots s_p.$$

La convention qui attribue la valeur neutre au produit de la famille vide d'éléments de  $G$  montre que  $e$  est toujours produit d'éléments de  $S$  et que c'est le seul lorsque  $S$  est vide.

On dit qu'un élément  $g \in G$  peut s'écrire comme produit d'éléments de  $S$  ou d'inverses d'éléments de  $S$  s'il peut s'écrire comme produit d'éléments de  $S \cup S^{-1}$  où  $S^{-1}$  désigne l'ensemble des inverses des éléments de  $S$ .

**Proposition 2**

Le sous-groupe engendré par  $S$  est formé des éléments de  $G$  qui peuvent s'écrire comme produit d'éléments de  $S$  ou d'inverses d'éléments de  $S$

**Démonstration** Notons  $H$  l'ensemble des éléments qui peuvent s'écrire comme produit d'éléments de  $S$  ou d'inverses d'éléments de  $S$ .

L'ensemble  $H$  est un sous-groupe de  $G$  parce qu'il contient  $e$  par convention et parce que, pour tout couple  $(h, \ell) \in H^2$ , on voit en écrivant :

$$h = s_1 \cdots s_p \quad \text{et} \quad \ell = t_1 \cdots t_q$$

avec  $s_i \in S \cup S^{-1}$  et  $t_j \in S \cup S^{-1}$  que :

$$h\ell^{-1} = s_1 \cdots s_p t_q^{-1} \cdots t_1^{-1}$$

appartient aussi à  $H$ .

C'est aussi le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $S$  parce qu'il contient tout élément de  $S$  par définition même et parce que tout sous-groupe de  $G$  contenant  $S$  contient par stabilité tout produit d'éléments de  $S$  ou d'inverses d'éléments de  $S$ . □

**Exemples**

1. Le sous-groupe engendré par la partie vide est  $\{e\}$ .
2. Le sous-groupe engendré par une partie à un élément  $\{a\}$  est, comme il a été vu dans le cours de première année :

$$a^{\mathbb{Z}} = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

On le note  $\mathbb{Z}a$ , ou  $a\mathbb{Z}$ , si  $G$  est additif.

3. De même, le sous-groupe engendré par un ensemble fini  $\{a_1, \dots, a_p\}$  d'éléments commutant deux à deux est :

$$\left\{ a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p} \mid (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p \right\}.$$

On le note :

$$\mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_p, \quad \text{ou} \quad a_1\mathbb{Z} + \dots + a_p\mathbb{Z},$$

si  $G$  est additif.

### 1.3 Partie génératrice

Soit  $S$  une partie du groupe  $G$ .

#### Définition 3

On dit que  $S$  est une *partie génératrice* de  $G$  si le sous-groupe engendré par  $S$  est égal à  $G$ .

C'est évidemment le cas si, et seulement si,  $G$  est le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $S$ . La proposition 2 du paragraphe précédent se traduit alors de la façon suivante :

#### Proposition 3

La partie  $S$  est génératrice si, et seulement si, tout élément  $g$  de  $G$  peut s'écrire comme produit d'éléments de  $S$  ou d'inverses d'éléments de  $S$ .

#### Remarques

- On dit aussi que  $S$  est un ensemble générateur ou que  $S$  engendre  $G$ .
- On dit que  $S$  est symétrique si elle contient les inverses de ses éléments ; une partie symétrique engendre  $G$  si tout élément de  $G$  est produit d'éléments de  $S$ .
- Un groupe est dit de *type fini* s'il possède une partie génératrice finie. Le groupe  $(\mathbb{Q}, +)$  n'est pas de type fini puisque le sous-groupe engendré par la famille  $\left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}\right)$  de  $\mathbb{Q}^n$  ne peut contenir le nombre :

$$\frac{1}{1 + q_1 \cdots q_n}.$$



*Exemples*

1. Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.

- Toute permutation pouvant s'écrire comme produit de transpositions l'ensemble  $\mathcal{T}$  des transpositions de  $E$  engendre le groupe  $\mathcal{S}(E)$ .

Supposons  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ . Toute transposition  $(i, j)$  ( $1 < i < j$ ) de  $\mathcal{S}_n$  pouvant s'écrire :

$$(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i),$$

l'ensemble :

$$\mathcal{T}_1 = \left\{ (1, i) \mid i \in \llbracket 2, n \rrbracket \right\}$$

engendre aussi  $\mathcal{S}_n$ . Cet ensemble a  $n - 1$  éléments. On peut montrer que tout ensemble de transpositions engendrant  $\mathcal{S}_n$  a au moins  $n - 1$  éléments.

- Tout élément du groupe alterné  $\mathcal{A}(E)$  est le produit d'un nombre pair de transpositions. Les relations :

$$(a, b)(c, d) = (a, c, b)(a, c, d)$$

lorsque  $a, b, c, d$  sont distincts et :

$$(a, b)(a, c) = (a, c, b)$$

lorsque  $a, b, c$  sont distincts montrent que le produit de deux transpositions distinctes peut s'écrire comme produit de cycles de longueur 3. Le groupe  $\mathcal{A}(E)$  est donc engendré par la famille des cycles d'ordre 3. Cela vaut même lorsque  $n$  est strictement inférieur à 3 puisqu'alors  $\mathcal{A}(E) = \{e\}$ .

Supposons  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $n \geq 3$ . Les relations :

$$(1, i)(1, j) = (1, 2, i)^{-1}(1, 2, j)(1, 2, i)$$

lorsque  $i$  et  $j$  sont distincts et supérieurs ou égaux à 3 ainsi que :

$$(1, 2)(1, i) = (1, 2, i)^{-1} \quad \text{et} \quad (1, i)(1, 2) = (1, 2, i)$$

lorsque  $i$  est supérieur ou égal à 3 montrent que l'ensemble :

$$\left\{ (1, 2, i) \mid i \in \llbracket 3, n \rrbracket \right\}$$

engendre aussi  $\mathcal{A}_n$ .

2. Soient  $\mathbf{K}$  un corps commutatif et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle matrice élémentaire de transvection, toute matrice de la forme :

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$$

où  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  sont deux indices distincts et  $\lambda \in \mathbf{K}$ , et matrice élémentaire de dilatation toute matrice de la forme :

$$D_j(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{j,j}$$

où  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\lambda \in \mathbf{K}^*$  ( $E_{i,j}$  est la matrice canonique d'indice  $(i, j)$  de  $M_n(\mathbf{K})$ ). On sait que les opérations élémentaires sur les lignes :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad \text{et} \quad L_j \leftarrow \lambda L_j$$

sont obtenues respectivement par multiplication à gauche par des matrices de transvection et de dilatation.

La méthode du pivot de Jordan (voir corollaire 20 page 134) montre que l'ensemble des matrices élémentaires de transvection engendre  $SL_n(\mathbf{K})$  et que l'ensemble des matrices élémentaires de transvection et de dilatation engendre  $GL_n(\mathbf{K})$ .

## 1.4 Groupe monogène et groupe cyclique

### Définition 4

On dit qu'un groupe est *monogène* s'il est engendré par une partie à un seul élément et qu'il est *cyclique* s'il est monogène et fini.

### Remarques

- Soit  $G$  un groupe monogène. On dit qu'un élément  $a$  est un élément *générateur* de  $G$  si  $\{a\}$  est une partie génératrice de  $G$ . En général, un groupe monogène possède plusieurs générateurs.
- Tout groupe monogène est commutatif.

### Exemples

1. Le groupe  $\mathbb{Z}$  est monogène. Il a deux générateurs 1 et  $-1$ .
2. L'ensemble :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

est un sous-groupe de  $\mathbb{C}$  appelé groupe des racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité de  $\mathbb{C}$ . Il est constitué des éléments :

$$1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{2\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{(n-1)\frac{2i\pi}{n}}.$$

est engendré par  $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . C'est donc un groupe cyclique à  $n$  éléments. Nous verrons dans le paragraphe 5.2 quels sont ses éléments générateurs.

## 2. Action d'un groupe sur un ensemble

Dans cette section  $E$  désigne un ensemble non vide.

### 2.1 Définitions et exemples classiques

#### Définitions

##### Définition 5

On appelle *action* (ou opération) de  $G$  sur  $E$  toute application (dite loi externe) :

$$\begin{aligned} G \times E &\rightarrow E \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\forall x \in E, \quad e \cdot x = x$  ;
2.  $\forall (g, h, x) \in G^2 \times E, \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ .

**Notation** On notera toujours une action de groupe en plaçant le symbole de la loi, en général multiplicatif, entre l'élément du groupe situé à gauche et l'élément de l'ensemble situé à droite. Ce n'est qu'à cette condition que le second axiome a une forme simple.

Lorsque  $G$  agit sur  $E$ , on appelle *action de l'élément*  $g \in G$  l'application :

$$\begin{aligned} \tau_g : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Les axiomes ci-dessus, qui s'écrivent alors :

$$\tau_e = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh},$$

prouvent que  $\tau_g$  est une permutation de  $E$  (d'inverse  $\tau_{g^{-1}}$ ) pour tout  $g$  de  $G$  et que l'application :

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \mathcal{S}(E) \\ g &\mapsto \tau_g \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Inversement, tout morphisme de groupes  $\varphi : G \rightarrow \mathcal{S}(E)$  provient de cette façon d'une unique action de  $G$  sur  $E$  donnée par :

$$g \cdot x = \varphi(g)(x).$$

On dit qu'une action est *fidèle* si son morphisme associé est injectif c'est-à-dire si l'on a pour tout  $g \in G$  :

$$(\forall x \in E, \quad g \cdot x = x) \implies g = e.$$

### Remarques

- Il existe une action de tout groupe sur tout ensemble, par exemple l'action triviale  $G \times E \rightarrow E$  définie par  $g \cdot x = x$  pour tout  $(g, x)$  de  $G \times E$ . Elle n'est bien sûr pas fidèle, sauf si  $G = \{e\}$ .
- Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Si  $G \times E \rightarrow E$  est une action, alors l'application restreinte  $H \times E \rightarrow E$  est une action appelée *action restreinte* de  $H$  sur  $E$ .
- Le groupe  $S(E)$  des permutations de  $E$  agit canoniquement sur  $E$  par l'application :

$$\begin{aligned} S(E) \times E &\rightarrow E \\ (\sigma, x) &\mapsto \sigma(x). \end{aligned}$$

Le morphisme qui lui est associé est l'identité. Cette action est donc fidèle.

- Lorsque  $E$  est un espace vectoriel, on appelle *représentation linéaire* de  $G$  sur  $E$  toute action dont l'action des éléments est linéaire. La donnée d'une représentation linéaire de  $G$  sur  $E$  est équivalente à celle d'un morphisme de groupes de  $G$  vers  $\mathcal{GL}(E)$ . Tout sous-groupe de  $\mathcal{GL}(E)$ , par exemple  $\mathcal{GL}(E)$ ,  $\mathcal{SL}(E)$ ,  $\mathcal{O}(E)$  (lorsque  $E$  est euclidien), possède ainsi naturellement une représentation linéaire sur  $E$ .

### Partie stable et action induite

Soit  $G \times E \rightarrow E$  une action.

Si  $A$  est une partie de  $E$  et  $g$  un élément de  $G$ , on note  $g \cdot A$  l'ensemble :

$$\{g \cdot x \mid x \in A\}.$$

*Exemple* L'application :

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \\ (g, A) &\mapsto g \cdot A \end{aligned}$$

est aussi une action. On l'appelle *action étendue* aux parties de  $E$ .

### Définition 6

On dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est *stable* par  $g \in G$ , si elle vérifie  $g \cdot A \subset A$ .

On dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est stable par  $G$  si elle l'est par tous les éléments du groupe. Dans ce cas, les inclusions  $g \cdot A \subset A$  et  $g^{-1} \cdot A \subset A$  montrent que l'on a  $g \cdot A = A$  pour tout  $g$ .

Si  $A$  est une partie non vide de  $E$  stable par  $G$ , l'application :

$$\begin{aligned} G \times A &\rightarrow A \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est bien définie et est une action de  $G$  sur  $A$ . On l'appelle action induite de  $G$  sur  $A$ .

### Actions associées à un groupe

Tout groupe agit naturellement sur lui-même de deux façons.

- L'application :

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

( $gx$  est le produit dans  $G$  des éléments  $g$  et  $x$ ) est une action appelée *action par translations à gauche*, de  $G$  sur lui-même. L'action de l'élément  $g \in G$  est la *translation à gauche*  $\tau_g : x \mapsto gx$ . Cette action est fidèle et le morphisme associé réalise un isomorphisme de  $G$  sur un sous-groupe de  $S(G)$ . On obtient en particulier le théorème de Cayley qui affirme que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique.

- L'application :

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g * h \end{aligned}$$

définie par :

$$\forall (g, h) \in G^2, \quad g * h = ghg^{-1}$$

est une action, appelée *action par automorphismes intérieurs* de  $G$  sur lui-même ; on a en effet  $e * h = ehe^{-1} = h$  pour tout  $h \in G$  et :

$$\begin{aligned} g_1 * (g_2 * h) &= g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1} \\ &= (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} \\ &= (g_1 g_2) * h \end{aligned}$$

pour tout  $(g_1, g_2, h) \in G^3$ . L'action  $\tau_g : h \mapsto ghg^{-1}$  d'un élément  $g$  de  $G$  est un automorphisme du groupe, appelé *automorphisme intérieur* associé à  $g$  et noté  $\text{Int } g$ . L'image  $ghg^{-1}$  de  $h \in G$  par  $g$  s'appelle le *conjugué* de  $h$  par  $g$ . Cette action n'est pas fidèle en général. Elle est d'ailleurs triviale si, et seulement si,  $G$  est commutatif.

**Définition 7**

On dit qu'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est *distingué* s'il est stable par tout automorphisme intérieur, c'est-à-dire si l'on a  $gHg^{-1} \subset H$  pour tout  $g \in G$ .

Puisque  $H \subset gHg^{-1}$  est équivalente à  $g^{-1}Hg \subset H$ , un sous-groupe  $H$  de  $G$  est distingué si, et seulement si, il vérifie :

$$\forall g \in G, \quad gHg^{-1} = H.$$

Les sous-groupes  $\{e\}$  et  $G$  sont évidemment des sous-groupes distingués de  $G$ . On dit que  $G$  est *simple* s'il n'en contient pas d'autres.

Tous les sous-groupes d'un groupe abélien sont distingués.

**Action associée à un anneau**

Soient  $A$  est un anneau (ou une algèbre) et  $A^*$  le groupe de ses éléments inversibles.

L'application :

$$\begin{aligned} A^* \times A &\rightarrow A \\ (u, a) &\mapsto u * a \end{aligned}$$

définie par :

$$\forall (u, a) \in A^* \times A, \quad u * a = uau^{-1}$$

est une action, appelée *action par automorphismes intérieurs*, de  $A^*$  sur  $A$ .

L'action  $\tau_u : a \mapsto uau^{-1}$  d'un élément  $u$  de  $A^*$  est un automorphisme d'anneaux de  $A$  (d'algèbre si  $A$  est une algèbre), appelé *automorphisme intérieur* associé à  $u$  et noté  $\text{Int } u$ . L'image  $uau^{-1}$  de  $a \in A$  par  $u$  s'appelle le *conjugué* de  $a$  par  $u$ . Cette action n'est pas fidèle en général. Elle est triviale si  $A$  est commutatif. La réciproque est fautive comme le montre l'exemple de l'anneau non commutatif de matrices :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a + 2ib & 2c + 2id \\ -2c + 2id & a - 2ib \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \right\}.$$

dont le groupe des unités  $A^*$  est réduit à  $\{-I_2, I_2\}$ .

Un exemple particulièrement important de ce qui précède est l'action par automorphismes intérieurs du groupe linéaire  $\mathcal{GL}(E)$  d'un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathcal{L}(E)$  (ou celle de  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$  sur  $M_n(\mathbf{K})$ ).

**Applications**

L'étude des actions d'un groupe est un moyen important d'en dégager les propriétés. L'exemple suivant montre comment on peut en déduire des isomorphismes.

*Exemple* Soit  $\mathcal{C}$  un cube de côté unité d'un espace affine euclidien orienté  $E$ . On note  $O$  le centre de gravité de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D} = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$  l'ensemble de ses quatre diagonales.

Les diagonales sont les seuls segments de droites de longueur  $\sqrt{3}$  contenus dans  $\mathcal{C}$ . Une isométrie de  $E$  laissant  $\mathcal{C}$  invariant transforme donc toute diagonale en diagonale. Elle transforme par conséquent tout sommet en sommet et laisse invariant leur isobarycentre  $O$ .

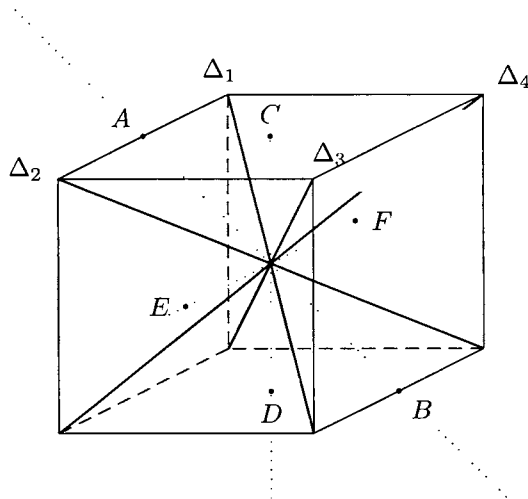
1. L'ensemble  $R$  des déplacements de  $E$  laissant  $\mathcal{C}$  invariant est évidemment un sous-groupe du groupe des déplacements de  $E$ . Comme l'image de toute diagonale  $\Delta \in \mathcal{D}$  par un élément  $u \in R$  appartient aussi à  $\mathcal{D}$ , le groupe  $R$  agit par permutation sur  $\mathcal{D}$ . Cette action induit un morphisme de groupes :

$$\varphi : R \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{D}}.$$

- (a) Tout déplacement  $u \in R$  appartenant au noyau de  $\varphi$ , est une rotation puisqu'il laisse invariant  $O$ . Il est de plus égal à l'identité puisqu'il laisse invariant quatre droites non 3 à 3 coplanaires passant par  $O$ . Ainsi  $\varphi$  est injectif.
- (b) Soit  $s_1$  un sommet de  $\mathcal{C}$  contenu dans  $\Delta_1$ . Puisque l'on peut passer de  $s_1$  à n'importe quel autre sommet par succession de quarts de tour autour d'axes passant par  $O$  et orthogonaux aux faces de  $\mathcal{C}$ , le groupe  $R$  contient au moins 8 éléments  $(u_i)_{i \in [1,8]}$ . Il contient alors les 24 éléments :

$$u_i \circ \text{Rot} \left( \Delta_1, k \frac{2\pi}{3} \right) \text{ pour } (i, k) \in [1, 8] \times [0, 2].$$

Finalement,  $R$  est isomorphe à  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  par l'application  $\varphi$  et a 24 éléments. On peut d'ailleurs sans difficulté déterminer géométriquement les rotations induisant les différentes permutations de  $\mathcal{D}$  :



- la transposition  $(\Delta_1, \Delta_2)$  provient du retournement autour de la droite passant par les milieux  $A$  et  $B$  des arêtes contenant les extrémités de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  ;
  - le cycle  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  provient de la rotation d'angle  $\pm \frac{2\pi}{3}$  autour de  $\Delta_4$  ;
  - le cycle  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$  provient de la rotation d'angle  $\pm \frac{\pi}{2}$  autour de la droite passant par les milieux  $C$  et  $D$  des faces contenant les arêtes reliant les sommets de  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  dans cet ordre ;
  - le produit  $(\Delta_1, \Delta_2) \circ (\Delta_3, \Delta_4)$  provient du retournement autour de la droite passant par les milieux  $E$  et  $F$  des faces contenant les arêtes reliant les sommets de  $\Delta_1, \Delta_4, \Delta_2, \Delta_3$  dans cet ordre.
2. L'ensemble  $I$  des isométries de  $E$  laissant  $\mathcal{C}$  invariant est, de la même façon, un sous-groupe du groupe des isométries de  $E$  agissant sur  $\mathcal{D}$ . Le morphisme :

$$\psi : I \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$$

que cette action induit n'est pas, par contre, injectif. Son noyau, ensemble des isométries laissant  $O$  et chaque diagonale  $\Delta_i$  invariants, est réduit à  $\{\text{Id}_E, S_O\}$  ( $S_O$  désigne la symétrie par rapport à  $O$ ). On vérifie alors aisément que l'application :

$$(\varepsilon, \sigma) \mapsto \varepsilon \circ \sigma$$

est un isomorphisme de  $\{\text{Id}_E, S_O\} \times R$  sur  $I$ . Finalement, le groupe  $I$  est isomorphe à  $S_2 \times S_4$  et a 48 éléments.

## 2.2 Orbites et stabilisateurs

Soit une action de  $G$  sur  $E$ .

### Définition 8

On appelle *orbite* d'un élément  $x \in E$  sous l'action de  $G$  l'ensemble :

$$\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

### Proposition 4

La relation  $x \mathcal{O} y$  définie par :

$$\exists g \in G : y = g \cdot x$$

est une relation d'équivalence sur  $E$  dont les classes d'équivalence sont les orbites de  $E$  sous l'action de  $G$ .

La famille des orbites forme donc une partition de  $E$ .



**Démonstration**

- ▶ La relation  $\mathcal{O}$  est réflexive puisque  $x = e \cdot x$ , symétrique puisque  $y = g \cdot x$  entraîne  $x = g^{-1} \cdot y$  et transitive puisque  $y = g \cdot x$  et  $z = h \cdot y$  entraînent  $z = (hg) \cdot x$ .
- ▶ Un élément  $y$  de  $E$  appartient à l'orbite de  $x$  si, et seulement si, par définition,  $x \mathcal{O} y$ , soit par symétrie si, et seulement si,  $y$  appartient à la classe de  $x$ .
- ▶ Le dernier point provient des résultats généraux sur les relations d'équivalence. □

**Remarques**

- On note aussi  $G \cdot x$  l'orbite de  $x$ .
- Une orbite est une partie stable par  $G$ .
- On dit qu'une action est *transitive* si elle n'a qu'une seule orbite (valant nécessairement  $E$ ).
- On appelle *représentant* d'une orbite tout élément de cet orbite et *système de représentants* des orbites de  $E$  toute famille d'éléments de  $E$  ayant un et un seul élément par orbite. On construit un système de représentants, comme dans le cas des classes d'équivalence, en prenant un élément et un seul par orbite.

**Définition 9**

On appelle *stabilisateur* d'un élément  $x$  de  $E$ , et l'on note  $G_x$ , le sous-groupe :

$$\{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

**Démonstration** Montrons que l'ensemble considéré est bien un sous-groupe de  $G$ .

L'élément neutre appartient à  $G_x$  par définition. Si  $g$  et  $h$  appartiennent à  $G_x$ , la relation :

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$$

montre que  $gh$  appartient à  $G_x$ . Si  $g$  appartient à  $G_x$ , la relation :

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = x$$

montre que  $g^{-1}$  appartient aussi à  $G_x$ . □

On appellera plus généralement stabilisateur d'une partie  $A$  de  $E$ , le sous-groupe :

$$G_A = \{g \in G \mid g \cdot A = A\}.$$

Lorsque l'on considère l'action d'un groupe sur lui-même par automorphismes intérieurs la terminologie est particulière. L'orbite d'un élément  $g \in G$  s'appelle

sa *classe de conjugaison* et son stabilisateur, ensemble des éléments qui commutent à  $g$ , son *centralisateur*. La classe de conjugaison de  $g \in G$  est réduite à  $\{g\}$  si, et seulement si  $g$  commute avec tous les éléments de  $G$ . On dit alors qu'il est *central*. L'ensemble des éléments centraux est un sous-groupe appelé *centre* de  $G$ .

Les relations d'équivalence que l'on rencontre en mathématiques sont fréquemment associées à l'action d'un groupe. On dit en géométrie euclidienne, par exemple, que deux figures  $A$  et  $B$  sont isométriques (resp. directement isométriques) s'il existe un élément  $u$  du groupe des isométries (resp. déplacements) tel que  $u(A) = B$ .

On cherche alors à déterminer un système de représentants remarquables de la partition de  $E$  en orbites et à construire une application particulière :

$$f : E \rightarrow X,$$

appelée système d'invariants, telle que deux éléments  $x$  et  $y$  appartiennent à la même orbite si, et seulement si ils ont même système d'invariants, c'est-à-dire vérifie :

$$f(x) = f(y).$$

### Exemples

1. Le groupe des déplacements du plan euclidien  $\mathcal{P}$  orienté agit naturellement sur l'ensemble des triangles orientés  $(a, b, c)$  de  $\mathcal{P}$ . On dit que deux triangles  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  sont égaux s'il existe un déplacement  $d$  tel que :

$$(d(a), d(b), d(c)) = (a', b', c').$$

On sait — il s'agit du premier cas d'égalité des triangles orientés — que l'application :

$$(a, b, c) \mapsto \left( ab, ac, \widehat{(\vec{ab}, \vec{ac})} \right)$$

( $ab$  désigne la distance de  $a$  à  $b$ ) est un système d'invariants de cette action.

2. Soit  $\mathbf{K}$  un corps commutatif. Le groupe  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$  agit sur  $M_{n,m}(\mathbf{K})$  par la loi :

$$(P, Q) * M = PMQ^{-1}.$$

Deux matrices de  $M_{n,m}(\mathbf{K})$  sont dites *équivalentes* si elles appartiennent à la même orbite. On sait que la famille de matrices  $(J_r)_{r \in [0, \min(n,m)]}$  et que l'application :

$$M \mapsto \mathrm{rg} M$$

forment respectivement un système de représentants et un système d'invariants de cette action.

3. Comme nous l'avons vu, le groupe  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  agit par automorphismes intérieurs sur  $M_n(\mathbf{K})$  suivant la loi :

$$P * M = PMP^{-1}.$$

Deux matrices de  $M_n(\mathbb{K})$  sont dites *semblables* si elles appartiennent à la même orbite. La construction de systèmes de représentants et d'invariants de cette action est l'objet de la théorie de la réduction des matrices.

### 2.3 Théorème de Lagrange et formule des classes

On suppose dans ce paragraphe que  $G$  est fini.

#### Théorème de Lagrange

#### Théorème 5 (Lagrange)

Le cardinal d'un sous-groupe d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

**Démonstration** Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Sous l'action de  $H$  par translations à gauche, l'ensemble  $G$  a un nombre fini d'orbites  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ . Considérons pour tout  $i$ , un élément  $g_i$  de  $\mathcal{O}_i$ .

L'application :

$$\begin{aligned} H &\rightarrow \mathcal{O}_i \\ h &\mapsto hg_i \end{aligned}$$

est surjective par définition de la notion d'orbite. Elle est injective car, tout élément d'un groupe étant simplifiable, la relation  $hg_i = h'g_i$  entraîne  $h = h'$ .

On a donc :

$$\forall i, \text{Card } \mathcal{O}_i = \text{Card } H$$

et par suite :

$$\text{Card } G = \sum_i \text{Card } \mathcal{O}_i = n \cdot \text{Card } H.$$

□

**Exemple** Soit  $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$  le groupe des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité de  $\mathbb{C}$ . On a l'équivalence :

$$\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m \iff n \mid m.$$

Le théorème de Lagrange montre, en effet, l'implication directe et la réciproque est triviale.

Le théorème de Lagrange, qui met en rapport la structure d'un groupe avec les propriétés arithmétiques du nombre de ses éléments, est évidemment très important. L'exemple suivant montre que sa réciproque est fautive.

**Exemple** Le groupe alterné  $\mathcal{A}_5$  qui a 60 éléments ne possède pas de sous-groupe à 30 éléments.

Supposons, en effet, qu'il possède un tel sous-groupe  $H$ . Pour l'action de  $H$  par translation à gauche,  $\mathcal{A}_5$  se décompose en deux orbites :  $H$  et son complémentaire  $\overline{H}$ . Soit alors  $\sigma \in \mathcal{A}_5$  un cycle d'ordre 3. Si  $\sigma$  n'appartient pas à  $H$ , les orbites de  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$ , distinctes de  $H$  puisque ni  $\sigma$  ni  $\sigma^{-1}$  n'appartiennent à  $H$ , sont égales. Cela entraîne :

$$H\sigma = H\sigma^{-1}$$

soit  $\sigma^{-2} \in H$ . Comme  $\sigma^{-2} = \sigma$ , on obtient une contradiction. Ainsi  $\sigma$  appartient à  $H$  et  $H$  contient tous les cycles d'ordres 3. La famille de ces éléments engendrant le groupe alterné, on obtient  $H = \mathcal{A}_5$ .

Le lecteur vérifiera de même que le groupe à 12 éléments  $\mathcal{A}_4$  ne possède pas de sous-groupe à 6 éléments.

### Formule des classes

Soit une action de  $G$  sur  $E$ .

#### Théorème 6

Pour tout  $x \in E$ , l'orbite de  $x$  est finie et l'on a :

$$\text{Card } G = \text{Card } G_x \cdot \text{Card } \mathcal{O}(x).$$

**Démonstration** Notons  $x_1, \dots, x_n$  les éléments de  $\mathcal{O}(x)$  et choisissons, pour tout  $i$ , un élément  $g_i \in G$  tel que  $x_i = g_i \cdot x$ . Montrons alors que pour tout élément  $g \in G$ , il existe un unique couple  $(i, h) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times G_x$  tel que  $g = g_i h$ .

L'élément  $g \cdot x$  appartenant à  $\mathcal{O}(x)$ , il existe  $i$  tel que  $g \cdot x = x_i$ . Les relations :

$$(g_i^{-1} g) \cdot x = g_i^{-1} \cdot x_i = x$$

montrent que  $g_i^{-1} g$  appartient à  $G_x$ . En le notant  $h$ , on obtient un couple  $(i, h) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times G_x$  tel que  $g = g_i h$ .

Si  $(i, h)$  et  $(j, \ell)$  sont deux éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket \times G_x$  tels que  $g_i h = g_j \ell$ , on obtient :

$$(g_i h) \cdot x = (g_j \ell) \cdot x$$

soit  $x_i = x_j$  et  $i = j$ . L'égalité  $h = \ell$  en découle.

On obtient finalement :

$$\text{Card } G = \text{Card } G_x \cdot n = \text{Card } G_x \cdot \text{Card } \mathcal{O}(x). \quad \square$$

**Remarque** Le théorème précédent montre que les stabilisateurs de deux éléments d'une même orbite ont même cardinal. Ils sont en fait conjugués : si

$y = g \cdot x$ , on a  $G_y = gG_xg^{-1}$  puisque :

$$g' \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \iff (g^{-1}g'g) \cdot x = x.$$

**Corollaire 7 (Formules de classes)**

Supposons que  $E$  soit fini. Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $E$  tels que :

$$\mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_n)$$

soit une liste des orbites de  $E$  sous l'action de  $G$ , on a la relation, dite *formule des classes* :

$$\text{Card } E = \sum_{i=1}^n \frac{\text{Card } G}{\text{Card } G_{x_i}}.$$

**Démonstration** La famille des orbites étant une partition de  $E$ , on a :

$$\text{Card } E = \sum_{i=1}^n \text{Card } \mathcal{O}(x_i).$$

La formule des classes provient alors du théorème précédent. □

*Exemple : Théorème de Burnside sur les  $p$ -groupes*

Tout  $p$ -groupe  $G$  (groupe dont le cardinal est de la forme  $p^n$  où  $p$  est un nombre premier et  $n \in \mathbb{N}$ ) contient un élément central (élément commutant avec tous les autres) différent de  $e$ .

Notons en effet  $r$  le nombre d'éléments centraux de  $G$ . Pour l'action de  $G$  sur lui-même par automorphismes intérieurs, le cardinal de l'orbite d'un élément  $x \in G$  est une puissance de  $p$  comme diviseur de  $p^n$ . Il est égal à 1 si, et seulement si,  $x$  est central. La formule des classes s'écrit donc :

$$p^n = r + \sum_{i=1}^m p^{n_i}$$

avec  $n_i > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . On en déduit que  $p$  divise  $r$ . Comme ce nombre est non nul puisque l'élément neutre est central, on obtient  $r \geq p$ .

Le groupe  $G$  contient donc un élément central différent de  $e$ .

**Corollaire 8**

Si  $\varphi : G \rightarrow H$  est un morphisme de groupes on a :

$$\text{Card } G = \text{Card}(\text{Ker } \varphi) \cdot \text{Card}(\text{Im } \varphi).$$

**Démonstration** Le groupe  $G$  agit en effet par l'application  $(g, h) \mapsto \varphi(g)h$  sur le sous groupe  $H' = \text{Im } \varphi$ . Il est évident que cette action n'a qu'une seule orbite et que le stabilisateur de tout point de  $H'$  est  $\text{Ker } \varphi$ . Il suffit donc d'appliquer la formule des classes.  $\square$

**3. Groupes associés à  $\mathbb{Z}$** **3.1 Sous-groupes de  $\mathbb{Z}$** 

Un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  est monogène de générateur  $n \in \mathbb{Z}$  si, et seulement si, il est égal à :

$$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Le théorème suivant montre réciproquement que tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  est de cette forme.

**Théorème 9**

Tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  est monogène. Il possède un seul générateur, à savoir 0, s'il est réduit à  $\{0\}$  et deux générateurs non nuls opposés sinon.

**Démonstration** Soit  $H$  un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

Si  $H$  est le sous-groupe  $\{0\}$ , on a  $H = 0\mathbb{Z}$  et  $H$  est engendré par 0. Si  $H$  contient un élément non nul, possédant aussi son opposé, il contient un élément strictement positif. Notons alors  $n$  le plus petit élément du sous-ensemble non vide  $H \cap \mathbb{N}^*$  de  $\mathbb{N}$ . L'entier  $n$  appartenant à  $H$ , le sous-groupe  $n\mathbb{Z}$  est inclus dans  $H$ . Soit alors  $h \in H$ . La division euclidienne de  $h$  par  $n \in \mathbb{N}^*$  permet d'écrire :

$$h = qn + r$$

avec  $q \in \mathbb{Z}$  et  $r \in [0, n - 1]$ . Les relations  $h \in H$  et  $-qn \in H$  montrent que  $r = h - qn$  appartient à  $H$  alors que  $0 \leq r < n$  prouve que  $r \in H \cap \mathbb{N}$  ne peut appartenir à  $H \cap \mathbb{N}^*$ . On obtient finalement  $r = 0$  et  $h = qn \in n\mathbb{Z}$ . Cela valant pour tout  $h \in H$ , il vient  $H = n\mathbb{Z}$ . L'entier  $n$  est alors un générateur de  $H$ .

Si  $n$  et  $m$  sont des générateurs de  $H$ , on a  $H = n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ . Si  $H$  est égal à  $\{0\}$  alors  $n = 0$  et  $m = 0$ . Sinon,  $|n|$  et  $|m|$  appartiennent à  $\mathbb{N}^*$  et les relations  $|m| \in |n|\mathbb{Z}$  et  $|n| \in |m|\mathbb{Z}$  montrent que l'on a  $|n| \leq |m|$  et  $|m| \leq |n|$ . On en déduit  $n = \pm m$ .  $\square$

Tout sous-groupe  $H$  de  $\mathbb{Z}$  peut donc s'écrire  $n\mathbb{Z}$  avec un unique entier  $n \in \mathbb{N}$ . Cet entier s'appelle le générateur positif de  $H$ .

### 3.2 Relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}$

#### Définition

##### Définition 10

On appelle relation de *congruence modulo  $n$* , et l'on note :

$$x \equiv y \pmod{n}$$

la relation définie sur  $\mathbb{Z}$  par  $y - x \in n\mathbb{Z}$ .

Cette relation que l'on écrit aussi  $x \equiv y$  modulo  $n$ , se lit :  $x$  congru à  $y$  modulo  $n$ . L'entier  $n$  s'appelle le *module* de la congruence.

##### Proposition 10

La relation de congruence modulo  $n$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .

**Démonstration** C'est immédiat. On peut aussi remarquer que la congruence modulo  $n$  est la relation associée à l'action par translation à gauche du sous-groupe  $n\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

#### Remarques

- Deux entiers  $x$  et  $y$  sont congrus modulo  $n$  si, et seulement si,  $n$  divise  $y - x$ , c'est-à-dire si, et seulement si, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $y = x + nk$ .
- La relation de congruence modulo 0 est simplement la relation d'égalité. La relation de congruence modulo 1 est la relation grossière pour laquelle tous les éléments sont équivalents.

► **Attention** On supposera dans ce qui suit que l'entier  $n$  est strictement positif.

#### Ensemble quotient

##### Définition 11

On appelle *ensemble quotient* de  $\mathbb{Z}$  par le sous-groupe  $n\mathbb{Z}$ , et l'on note  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , l'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathbb{Z}$  pour la relation de congruence modulo  $n$ .

On appelle application canonique, et l'on note  $\pi_n$ , l'application de  $\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  qui associe à tout entier sa classe d'équivalence.

On note usuellement  $\bar{a}$  la classe d'équivalence de l'entier  $a$ . Comme sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$ , elle vaut :

$$\bar{a} = a + n\mathbb{Z} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'application canonique  $\pi_n$  est surjective. On appelle *représentant* d'une classe  $\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tout entier  $a$  dont  $\alpha$  est la classe c'est-à-dire tout entier de  $\pi_n^{-1}(\{\alpha\})$ .

### Proposition 11

Tout entier  $a \in \mathbb{Z}$  est congru modulo  $n$  à un unique élément  $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  qui est le reste de la division de  $a$  par  $n$

**Démonstration** L'entier  $a$  est congru à  $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  si, et seulement si, il existe  $q \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = qn + r$  c'est-à-dire si, et seulement si,  $r$  est le reste de la division de  $a$  par  $n$   $\square$

### Proposition 12

Les classes  $\bar{0}, \dots, \overline{n-1}$  sont deux à deux distinctes et  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est égal à :

$$\{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

**Démonstration** Tout entier  $a$  appartient à la classe  $\bar{r}$  du reste  $r$  de la division euclidienne de  $a$  par  $n$  et seulement à celle-la.  $\square$

On peut évidemment utiliser toute suite de  $n$  entiers consécutifs de  $\mathbb{Z}$  comme système de représentants des classes d'entiers modulo  $n$ . On utilise parfois le système :

$$\{-(p-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, p\}$$

lorsque  $n = 2p$  et :

$$\{-p, \dots, -1, 0, 1, \dots, p\}$$

lorsque  $n = 2p + 1$ .

### Compatibilité avec l'addition et loi quotient

#### Proposition 13

La relation de congruence modulo  $n$  est *compatible* avec l'addition c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4, (x \equiv x' [n] \text{ et } y \equiv y' [n]) \implies x + y \equiv x' + y' [n].$$



**Démonstration** Les relations  $x' - x \in n\mathbb{Z}$  et  $y' - y \in n\mathbb{Z}$  entraînent en effet :

$$(x' + y') - (x + y) = (x' - x) + (y' - y) \in n\mathbb{Z}.$$

□

On peut donc additionner terme à terme deux congruences.

**Proposition 14**

Il existe une et une seule loi de composition interne sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , appelée *addition quotient* et notée  $+$ , telle que la projection canonique soit un morphisme pour l'addition, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad \pi_n(x + y) = \pi_n(x) + \pi_n(y).$$

**Démonstration** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Si  $x$  et  $y$  sont des représentants de  $\alpha$  et  $\beta$ , la relation exprimant que  $\pi_n$  est un morphisme pour l'addition montre que, si la loi quotient existe, la somme de  $\alpha$  et  $\beta$  est donnée par :

$$\alpha + \beta = \pi_n(x + y).$$

Cela prouve son unicité.

Soient  $x$  et  $y$  des représentants de  $\alpha$  et  $\beta$ . Si  $x'$  et  $y'$  sont deux autres représentants de ces classes, la compatibilité de la relation de congruence avec l'addition montre que l'on a :

$$\pi_n(x' + y') = \pi_n(x + y).$$

La classe  $\pi_n(x + y)$  est donc indépendante des représentants choisis pour  $\alpha$  et  $\beta$ . On peut donc l'utiliser pour définir la valeur de  $\alpha + \beta$ . La loi ainsi construite vérifie la relation de morphisme pour l'addition, justement, par cette indépendance. □

**Proposition 15**

Cette loi est associative et commutative. L'élément  $\pi_n(0)$  est neutre et tout élément de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  a un opposé.

**Démonstration** Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois classes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois de leurs représentants.

Les relations :

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \pi_n(x) + (\pi_n(y) + \pi_n(z)) = \pi_n(x) + \pi_n(y + z) = \pi_n(x + (y + z))$$

et :

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \pi_n((x + y) + z)$$

montrent l'associativité de l'addition quotient. La commutativité se démontre de même.

Les relations :

$$\alpha + \bar{0} = \pi_n(x) + \pi_n(0) = \pi_n(x + 0) = \alpha$$

et :

$$\alpha + \pi_n(-x) = \pi_n(x) + \pi_n(-x) = \pi_n(x - x) = \bar{0}$$

prouvent que  $\bar{0}$  est élément neutre et que  $\alpha$  possède un opposé □

**Remarque** La démonstration de l'existence de l'addition quotient n'utilise que la compatibilité de l'addition avec la congruence. Elle se généralise immédiatement au cas d'une loi interne  $*$  sur un ensemble  $E$  compatible avec une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ . Dans ces conditions :

- il existe une et une seule loi sur  $E/\mathcal{R}$ , appelée *loi quotient* et notée  $*$  aussi, telle que la surjection canonique soit un morphisme pour la loi  $*$  ;
- la loi quotient est associative, commutative et possède un élément neutre si la loi  $*$  de  $E$  possède ces propriétés.

Nous utiliserons en particulier cette remarque pour construire dans le chapitre suivant la multiplication quotient de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

### 3.3 Groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

#### Structure de groupe quotient de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

##### Définition 12

On appelle *groupe quotient* de  $\mathbb{Z}$  par le sous-groupe  $n\mathbb{Z}$ , et l'on note  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , le groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

**Démonstration** Nous avons vu que la loi addition quotient de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est une loi associative que  $\pi_n(0)$  est neutre et que tout élément a un opposé. □

L'unicité de la loi quotient montre que la structure de groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est la seule structure de groupe sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  telle que l'application canonique  $\pi_n$  soit un morphisme de groupes.

##### Proposition 16

Le groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est cyclique de cardinal  $n$ .

Le morphisme  $\pi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est surjectif et de noyau le sous-groupe  $n\mathbb{Z}$ .

**Démonstration**

► La relation :

$$\bar{r} = \underbrace{\bar{1} + \dots + \bar{1}}_{r \text{ fois}}$$

valable, avec les conventions habituelles, pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , montre que  $\bar{1}$  engendre  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Nous avons vu précédemment que ce groupe a  $n$  éléments.

► Le morphisme  $\pi_n$  est surjectif et son noyau la classe  $n\mathbb{Z}$  de 0. □

**Exemples**

1. Le groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est réduit à  $\{0\}$  si, et seulement si,  $n = 1$ .
2. La table d'addition du groupe :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{(n-1)}\}$$

est simple à construire : la somme des classes  $\bar{r}$  et  $\bar{s}$  avec  $(r, s) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$  est  $\bar{t}$  où  $t$  est le reste de la division de  $r + s$  par  $n$ . Pour  $n = 6$ , on obtient :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

**Théorème de factorisation des morphismes**

**Théorème 17**

Soit  $\varphi$  un morphisme de groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  dans un groupe  $(G, \cdot)$  de noyau  $N$  contenant  $n\mathbb{Z}$ .

Il existe un unique morphisme de groupes  $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ , appelé *factorisation* de  $\varphi$  par  $\pi_n$ , tel que :

$$\varphi = \psi \circ \pi_n.$$

Le noyau de  $\psi$  est le sous-groupe  $\pi_n(N)$  et son image est l'image de  $\varphi$ . En particulier,  $\psi$  est injective si et seulement si  $N$  vaut  $n\mathbb{Z}$ .

**Démonstration**

► Soient  $\alpha$  une classe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $x$  l'un de ses représentants.

Si l'application  $\psi$  existe, on a nécessairement :

$$\psi(\alpha) = \varphi(x).$$

Cela prouve l'unicité.

Si  $x'$  est un autre représentant de  $\alpha$ , on a  $x' - x \in n\mathbb{Z}$ ,  $x' - x \in N$  par inclusion et finalement  $\varphi(x') = \varphi(x)$ . On peut alors, comme dans la construction de la loi-quotient, attribuer cette valeur à l'élément  $\psi(\alpha)$ . L'application de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  vers  $G$  ainsi construite vérifie alors la relation voulue.

Soient alors  $\beta$  une autre classe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $y$  l'un de ses représentants. Les relations :

$$\begin{aligned}\psi(\alpha + \beta) &= \psi(\pi_n(x) + \pi_n(y)) \\ &= \psi(\pi_n(x + y)) \\ &= \varphi(x + y) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ &= \psi(\pi_n(x)) + \psi(\pi_n(y)) \\ &= \psi(\alpha) + \psi(\beta)\end{aligned}$$

montrent que  $\psi$  est un morphisme de groupes

- Si une classe  $\alpha$ , de représentant  $x$ , appartient au noyau de  $\psi$ ,  $x$  appartient à  $N$  et  $\alpha$  à  $\pi_n(N)$ . Si, réciproquement  $\alpha$  vaut  $\pi_n(x)$  avec  $x \in N$ , on a  $\psi(\alpha) = e$ . Le morphisme canonique étant surjectif, il vient :

$$\varphi(\mathbb{Z}) = \psi(\pi_n(\mathbb{Z})) = \psi(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \quad \square$$

## 4. Ordre d'un élément d'un groupe

Soit  $a$  un élément du groupe  $G$ .

### 4.1 Ordre d'un élément

L'application :

$$\varphi_a : k \mapsto a^k$$

est un morphisme de groupes de  $\mathbb{Z}$  vers  $G$  d'image le sous-groupe  $\langle a \rangle$  engendré par  $a$ . Lorsque  $G$  est un groupe additif, cette application est  $k \mapsto ka$ .

Le noyau de  $\text{Ker } \varphi_a$ , qui est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , est donc de la forme  $n\mathbb{Z}$  pour un unique entier  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Définition 13

On dit que  $a$  est d'ordre fini si  $\text{Ker } \varphi_a$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , d'ordre infini sinon.

Lorsque  $a$  est d'ordre fini, on appelle ordre de  $a$ , et l'on note  $\omega(a)$ , le générateur positif de  $\text{Ker } \varphi_a$ .

**Remarque** On dit que  $a$  est un élément de *torsion* de  $G$  si son ordre est fini. Dans ce cas, l'ordre de  $a$  est caractérisé par l'une des assertions suivantes :

1.  $\omega(a)$  est le plus petit entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^k = e$ .
2.  $\omega(a)$  est l'unique entier de  $\mathbb{N}^*$  tel que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \omega(a) \mid k \iff a^k = e.$$

L'ordre  $\omega(a)$  est donc le plus petit entier naturel non nul  $k$ , au sens de l'ordre naturel aussi bien que de la divisibilité, vérifiant  $a^k = e$ .

**Exemples**

1. L'ordre du neutre d'un groupe  $G$  vaut 1. Cela caractérise cet élément.
2. Un élément  $z$  non nul du groupe additif  $\mathbb{C}$  est d'ordre infini.
3. Un élément  $z$  du groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$  est d'ordre fini si, et seulement si, il existe un entier  $k > 0$  tel que  $z^k = 1$ , c'est-à-dire si, et seulement si, c'est une racine de l'unité. On peut alors l'écrire  $z = e^{2i\pi \frac{r}{n}}$  avec  $(r, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ . Lorsque la fraction  $\frac{r}{n}$  est irréductible — ce que l'on peut évidemment supposer — l'équation :

$$\left( e^{2i\pi \frac{r}{n}} \right)^k = e^{2i\pi \frac{kr}{n}} = 1$$

est équivalente à  $n \mid kr$ , soit, en utilisant le théorème de Gauss, à  $n \mid k$ . L'ordre de  $z$  est donc égal à  $n$ .

4. Soit  $\bar{r} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  avec  $r \in \mathbb{Z}$ . On peut écrire, en utilisant le PGCD  $d$  de  $r$  et  $n$ ,  $n = dn'$  et  $r = dr'$  ; on sait qu'alors,  $n'$  et  $r'$  sont premiers entre eux. L'équation :

$$k\bar{r} = \overline{kr} = \bar{0}$$

est équivalente à  $n \mid kr$ . En simplifiant par  $d$  et en utilisant ici aussi le théorème de Gauss, elle est équivalente à  $n' \mid k$ . L'ordre de  $\bar{r}$  est donc :

$$n' = \frac{n}{n \wedge r}.$$

Les deux derniers exemples relèvent en réalité de la proposition suivante :

**Proposition 18**

Si  $a \in G$  est d'ordre fini  $n$ , alors l'ordre de l'élément  $a^r$  avec  $r \in \mathbb{Z}$  est :

$$n' = \frac{n}{n \wedge r}.$$

**Démonstration** Notons  $d$  le PGCD de  $n$  et  $r$ . On a alors  $n = dn'$  et  $r = dr'$  avec  $n'$  et  $r'$  premiers entre eux. La relation  $(a^r)^k = e$  est équivalente à  $n \mid kr$ . En simplifiant par  $d$  et en utilisant le théorème de Gauss, elle est équivalente à  $n' \mid k$ . L'ordre de  $a^r$  est donc  $n'$ . □

## 4.2 Structure du sous-groupe engendré par un élément

Soit  $\langle a \rangle$  le sous-groupe engendré par l'élément  $a \in G$ . Puisque  $\langle a \rangle$  est l'ensemble des éléments de la forme  $a^k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , on a évidemment  $\langle a \rangle = \text{Im } \varphi_a$ .

### Proposition 19

Si  $a$  est d'ordre infini, le morphisme  $\varphi_a$  est injectif et réalise un isomorphisme de groupes de  $\mathbb{Z}$  sur  $\langle a \rangle$ .

Si  $a$  est d'ordre fini  $n$ , le morphisme  $\varphi_a$  se factorise par le morphisme canonique  $\pi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  en le morphisme de groupes injectif :

$$\psi_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$$

qui réalise un isomorphisme de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sur  $\langle a \rangle$ .

### Démonstration

- ▶ Lorsque l'ordre de  $a$  est infini, le noyau de  $\varphi_a$  est réduit à  $\{0\}$ . Le morphisme  $\varphi_a$  est donc un isomorphisme de groupes de  $\mathbb{Z}$  sur  $\langle a \rangle$ .
- ▶ Lorsque l'ordre de  $a$  est fini de valeur  $n$ , le noyau de  $\varphi_a$  est égal à  $n\mathbb{Z}$ . On obtient alors, par le théorème de factorisation, un unique morphisme  $\psi_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$  tel que  $\varphi_a = \psi_a \circ \pi_n$ . Ce morphisme, injectif parce que  $\text{Ker } \varphi_a = n\mathbb{Z}$ , est un isomorphisme de groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sur  $\langle a \rangle$ . □

### Corollaire 20

Le cardinal du sous-groupe engendré par  $a$  est égal à l'ordre de  $a$ .

**Remarque** Ainsi, un élément  $a$  d'un groupe  $G$  de cardinal  $n$  engendre  $G$  si, et seulement si, il est d'ordre  $n$ .

**Exemple** Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Si  $z$  est d'ordre infini, le sous-groupe  $\langle z \rangle$  de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$ . Si  $z$  est d'ordre  $n$ , il appartient au groupe  $\mathbb{U}_n$  des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité. On en déduit  $\langle z \rangle \subset \mathbb{U}_n$  et  $\langle z \rangle = \mathbb{U}_n$  puisque ces deux groupes ont  $n$  éléments.

### Corollaire 21

Supposons que  $G$  ait  $n$  éléments. L'ordre de tout élément  $a$  de  $G$  est fini et divise  $n$ . On a en particulier :

$$a^n = e.$$

**Démonstration** L'ordre de  $a$  est le cardinal du sous-groupe  $\langle a \rangle$  de  $G$ . Il est donc fini et divise  $n$  par le théorème de Lagrange.

L'ordre de  $a$  divisant  $n$ , on obtient par définition  $a^n = e$ . □

*Exemples*

1. Le groupe multiplicatif  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  possède un unique sous-groupe de cardinal  $n$  à savoir le groupe  $\mathbb{U}_n$  des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité.

Le sous-groupe  $\mathbb{U}_n$  est, en effet, d'ordre  $n$ . Si  $H$  est un sous-groupe à  $n$  éléments de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ , le corollaire précédent montre que l'on a  $H \subset \mathbb{U}_n$ . On conclut alors par cardinalité.

2. Les sous-groupes de  $\mathbb{U}_n$  sont donc les  $\mathbb{U}_k$  lorsque  $k$  parcourt l'ensemble des diviseurs positifs de  $n$ . On obtient alors les relations :

$$\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{n \wedge m}$$

et :

$$\langle \mathbb{U}_n \cup \mathbb{U}_m \rangle = \mathbb{U}_{n \vee m}$$

Le sous-groupe  $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$  est, en effet, de la forme  $\mathbb{U}_d$ . Comme l'inclusion  $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{U}_d$  équivaut à  $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{U}_n$  et  $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{U}_m$  pour tout  $x \in \mathbb{N}$ , l'entier  $d$  est le PGCD de  $n$  et de  $m$ . La démonstration de la deuxième égalité est analogue.

Le corollaire précédent n'admet évidemment pas de réciproque : un groupe non abélien à  $n$  éléments n'a pas d'élément d'ordre  $n$  puisqu'il n'est pas cyclique.

## 5. Groupes monogènes

### 5.1 Structure des groupes monogènes

La proposition suivante montre qu'il n'y a, à isomorphisme près qu'un seul groupe monogène d'ordre donné.

**Théorème 22**

- Soit  $G$  un groupe monogène.
- Si  $G$  est infini, il est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .
- Si  $G$  est d'ordre  $n$ , il est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Démonstration** Si  $a$  est un generateur de  $G$ , on a  $\langle a \rangle = G$ . Le théorème 19 montre que  $\varphi_a$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}$  sur  $G$  dans le premier cas et que  $\psi_a$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sur  $G$  dans le second □

**Corollaire 23**

Tout groupe dont le cardinal est premier est cyclique et engendré par n'importe lequel de ses éléments différent du neutre.

**Démonstration** Notons  $p$  le cardinal premier de  $G$ . Soit  $a$  un élément de  $G \setminus \{e\}$ . L'ordre  $\omega(a)$  de  $a$  est un diviseur de  $p$  strictement supérieur à 1. Il vaut donc  $p$ . Le sous-groupe  $\langle a \rangle$  ayant  $p$  éléments est alors égal à  $G$ .  $\square$

**5.2 Générateurs des groupes cycliques****Proposition 24**

Soient  $G$  un groupe cyclique d'ordre  $n$  et  $a$  l'un de ses générateurs. Un élément  $a^r$  avec  $r \in \mathbb{Z}$  engendre  $G$  si, et seulement si,  $r$  est premier avec  $n$ .

**Démonstration** L'ordre de  $a$  est  $n \in \mathbb{N}^*$ . On sait que l'ordre de  $a^r$  est :

$$n' = \frac{n}{d}$$

où  $d$  est le PGCD de  $n$  et  $r$ . L'élément  $a^r$  engendre  $G$  si, et seulement si,  $n'$  vaut  $n$ , c'est-à-dire  $d = 1$ .  $\square$

**Exemples**

1. Les générateurs de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont les classes  $\bar{r} = r\bar{1}$  avec  $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  premier avec  $n$ . Les générateurs de  $\mathbb{U}_n$  sont les nombres complexes  $e^{2i\pi \frac{r}{n}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^r$  avec  $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  premier avec  $n$ .
2. On appelle *indicateur d'Euler* l'application  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n) = \text{Card} \{r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid r \wedge n = 1\}$$

La proposition précédente montre que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et, par isomorphisme, tout groupe cyclique d'ordre  $n$  possède  $\varphi(n)$  générateurs.

**5.3 Sous-groupes des groupes monogènes****Proposition 25**

Soit  $G$  un groupe monogène à  $n$  éléments

Tout sous-groupe de  $G$  est monogène.

Le groupe  $G$  contient un et un seul sous-groupe d'ordre  $d$  pour tout diviseur  $d$  de  $n$ .



**Démonstration** Soit  $a$  un générateur de  $G$ .

- ▶ Si  $H$  un sous-groupe de  $G$ , l'image réciproque de  $H$  par  $\varphi_a$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ . Il est donc de la forme  $m\mathbb{Z}$  pour  $m \in \mathbb{N}$ . On vérifie alors que  $H$  est engendré par  $a^m$ .
- ▶ Si  $d$  est un diviseur de  $n$ , notons  $d'$  son complément multiplicatif  $\frac{n}{d}$ .

Nous avons vu que le sous-groupe  $\langle a^{d'} \rangle$  est d'ordre  $d$ . Supposons réciproquement que  $H$  soit un sous-groupe d'ordre  $d$  de  $G$ . En utilisant les notations précédentes,  $H$  est engendré par  $a^m$  où  $m$  est le générateur de  $\varphi_a^{-1}(H)$ . La relation  $a^n = e$ , qui implique  $n \in m\mathbb{Z}$ , montre que  $m$  divise  $n$  et que l'ordre de  $H$  vaut  $\frac{n}{m}$ .

Ainsi,  $m = d'$  et  $H = \langle a^{d'} \rangle$ . □

## EXERCICES

1. Montrer qu'il existe un morphisme injectif de  $(\mathbb{Z}^n, +)$  dans  $(\mathbb{Z}^m, +)$  si et seulement si,  $n \leq m$ . En déduire que  $(\mathbb{Z}^n, +)$  dans  $(\mathbb{Z}^m, +)$  sont isomorphes si, et seulement si,  $n = m$ .
2. Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Montrer que les groupes linéaires  $GL_n(\mathbb{K})$  et  $GL_m(\mathbb{K})$  sont isomorphes si, et seulement si,  $n = m$  (on considérera les classes de conjugaison des éléments involutifs de  $GL_n(\mathbb{K})$ ).
3. Déterminer le nombre de morphismes de groupes de  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  en fonction du PGCD  $d$  de  $a$  et  $b$ .
4. Soient  $a$  et  $b$  deux éléments d'un groupe  $G$  respectivement d'ordre  $n$  et  $m$ .
  1. Montrer que si  $a$  et  $b$  commutent et  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux, alors  $ab$  est d'ordre  $nm$ .
  2. Montrer que cette conclusion ne se maintient pas si  $a$  et  $b$  ne commutent pas ou si  $n$  et  $m$  ne sont pas premiers entre eux.
5. Soit  $G$  un groupe abélien fini.
  1. Montrer qu'il existe un élément de  $G$  dont l'ordre est le PPCM des ordres des éléments de  $G$ .
  2. Montrer que  $G$  est cyclique si, et seulement si pour tout entier  $m$ , le nombre d'éléments de l'ensemble :
 
$$\{g \in G \mid g^m = e\}$$
 est inférieur ou égal à  $m$ .
  3. Montrer que tout sous-groupe fini  $G$  du groupe multiplicatif  $\mathbb{K}^*$  d'un corps commutatif est cyclique.

6. Montrer que l'indicateur d'Euler vérifie la relation :

$$n = \sum_{d \in \mathbb{N}^*, d|n} \varphi(d)$$

( $\varphi(n)$  désigne le nombre d'éléments générateurs du groupe additif  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ).

7. Montrer qu'un groupe fini  $G$  dont les éléments vérifient  $x^2 = e$  est isomorphe à un produit  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$  (on montrera que  $G$  est abélien et, en le notant additivement, naturellement muni d'une structure de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel).

8. Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers impairs vérifiant :

$$q \mid 2^p - 1.$$

Montrer  $q \equiv 1$  modulo  $2p$ .

9. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes dont le nombre d'éléments est inférieur ou égal à 7.

10. Théorème de Cauchy : montrer que si  $p$  est un diviseur premier du nombre d'éléments d'un groupe fini  $G$ , alors  $G$  possède un élément d'ordre  $p$ .

11. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes  $G$  à 15 éléments (on utilisera l'exercice précédent pour montrer que  $G$  contient un unique sous-groupe à 5 éléments).

12. Soit  $H$  un sous-groupe distingué d'un groupe  $G$ .

1. Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes est un sous-groupe distingué.
2. Montrer que la relation de congruence  $x \equiv y [H]$ , définie par  $xy^{-1} \in H$ , est une relation d'équivalence sur  $G$ . On note  $G/H$  l'ensemble quotient de  $G$  par la relation  $x \equiv y [H]$  et  $\pi$  la projection canonique de  $G$  sur  $G/H$ .
3. Montrer que la relation  $x \equiv y [H]$  est compatible avec la loi de  $G$  et qu'il existe sur  $G/H$  une unique loi de groupe telle que  $\pi$  soit un morphisme. Déterminer alors le noyau de  $\pi$ .

13. Soient  $\sigma$  une permutation d'un ensemble fini et  $G$  le sous-groupe de  $S(E)$  qu'elle engendre.

1. Montrer que toute orbite  $X$  de  $E$  sous l'action de  $G$  possédant  $l$  éléments est de la forme :

$$\{a, \sigma^1(a), \dots, \sigma^{l-1}(a)\}$$

avec  $\sigma^l(a) = a$  et que l'application  $\sigma_X$  définie par les relations  $\sigma_X(x) = \sigma(x)$  pour tout  $x \in X$  et  $\sigma_X(x) = x$  pour tout  $x \notin X$  est un cycle.

2. Montrer que  $\sigma$  peut s'écrire de manière unique à l'ordre près comme produit de cycles à supports deux à deux disjoints.
3. Donner alors la signature et l'ordre de  $\sigma$  en fonction des longueurs des cycles de sa décomposition en produit de cycles à supports deux à deux disjoints.

4. Donner, par exemple, la décomposition en cycles à supports deux à deux disjoints la signature et l'ordre de la permutation :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 7 & 6 & 9 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

(l'image d'un élément est donnée par l'élément situé en dessous) de  $S_9$ .

14. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que toute partie génératrice de  $S_n$  possède au moins deux éléments. Donner un exemple de partie génératrice de  $S_n$  formée de 2 éléments.
2. Montrer que toute partie génératrice de  $S_n$  formée uniquement de transpositions possède au moins  $n - 1$  éléments. Donner un exemple de partie génératrice de  $S_n$  formée de  $n - 1$  transpositions.

15. Montrer que l'application constante sur 1 et la signature sont les seuls morphismes de groupes de  $S_n$  vers le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ .

16. Soient  $G$  le groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  et  $\mathbf{H}$  le demi-plan de Poincaré  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ .

1. Montrer que la relation :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z = \frac{az + b}{cz + d}$$

définit une action du groupe  $G$  sur  $\mathbf{H}$ .

2. Montrer que toute orbite de  $\mathbf{H}$  sous l'action de  $G$  possède un élément dans le domaine  $D$  des  $z$  de  $\mathbf{H}$  vérifiant  $|\text{Re}z| \leq \frac{1}{2}$  et  $1 \leq |z|$  (on montrera que l'ensemble des parties imaginaires des éléments de l'orbite admet un élément maximum).
3. Déterminer toutes les matrices  $g$  telles que  $g * 2i$  appartienne à  $D$ .
4. En déduire que la partie formée de :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

engendre  $G$  (on démontrera comme dans la première question que toute orbite de  $\mathbf{H}$  sous l'action du sous-groupe  $H$  engendré par  $S$  et  $T$  rencontre  $D$ ).

17. Soit  $G$  un groupe fini de cardinal  $n > 1$  éléments et  $p$  le plus petit diviseur premier de  $n$ . Montrer que tout sous-groupe  $a$   $m = \frac{n}{p}$  éléments de  $G$  est distingué (on considérera l'action de  $G$  par translation à gauche sur l'ensemble des parties de la forme  $gH$  de  $G$ ).

18. Formule de Burnside : le nombre  $r$  d'orbites d'une action d'un groupe fini  $G$  sur un ensemble fini  $E$  est donné par la formule :

$$r = \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \text{Card} \{x \mid g \cdot x = x\}.$$

19. Déterminer le nombre de façons de colorier les  $n$  secteurs d'une roue de loterie avec  $p$  couleurs, deux coloriages étant considérés comme identiques si l'on passe de l'un à l'autre par rotation (on utilisera la formule de Burnside de l'exercice précédent).

20. On appelle caractère d'un groupe abélien  $G$  fini à  $n$  éléments, tout morphisme de groupes  $\chi$  de  $G$  vers le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ .

1. Montrer que l'ensemble  $\widehat{G}$  des caractères de  $G$  est un sous-groupe du groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'algèbre  $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ .
2. Déterminer le groupe des caractères du groupe cyclique  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
3. Montrer que tout caractère  $\zeta$  d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  se prolonge en un caractère de  $G$  (on prouvera tout d'abord que pour tout  $a \in G$ , le caractère  $\zeta$  se prolonge au sous-groupe engendré par  $H \cup \{a\}$ ).



# Chapitre 3

## Anneaux et algèbres

Dans ce chapitre,  $A$  désigne un anneau commutatif d'unité  $1_A$  et  $\mathbf{K}$  un corps commutatif.

### 1. Idéaux d'un anneau commutatif

#### 1.1 Idéaux

##### Définition

##### Définition 1

On appelle *idéal* d'un anneau commutatif  $A$  tout sous-groupe additif de  $A$  vérifiant la propriété suivante, dite propriété d'absorption :

$$\forall (u, i) \in A \times I, \quad ui \in I.$$

Les sous-ensembles  $\{0\}$  et  $A$  sont des idéaux de  $A$ . Un idéal vaut  $A$  si, et seulement si, il contient  $1$  ou, plus généralement, un élément inversible.

##### Proposition 1

Une partie  $I$  de  $A$  est un idéal si, et seulement si, elle est non vide et vérifie :

$$\forall (u, v) \in A, \forall (i, j) \in I^2, \quad ui + vj \in I.$$

**Démonstration** Le sens direct est clair. La réciproque vient des relations  $i - j = (1)i + (-1)j$  et  $ui = ui + 0j$ .  $\square$

Comme dans le cas des sous-groupes, on montre généralement que  $I$  est non vide en vérifiant qu'il contient 0.

*Exemple* L'ensemble des suites réelles convergeant vers 0 est un idéal de l'algèbre des suites réelles bornées, mais pas de l'algèbre de toutes les suites.

## Propriétés

### Proposition 2

L'intersection d'une famille d'idéaux est un idéal de  $A$ .

**Démonstration** Soit  $I$  l'intersection d'une famille  $(I_x)_{x \in X}$  d'idéaux de  $A$ .

On sait que  $I$  est un sous-groupe additif de  $A$ . Soient  $i \in I$  et  $a \in A$ . Pour tout  $x$ , on a  $i \in I_x$  et, par conséquent,  $ai \in I_x$ . Ainsi,  $ai \in I$ .  $\square$

### Proposition 3

Soient  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $A$ . La somme :

$$I + J = \{i + j \mid (i, j) \in I \times J\}$$

est un idéal de  $A$ .

**Démonstration** L'élément nul que l'on peut écrire  $0 + 0$  appartient à  $I + J$ . Si  $s$  et  $t$  appartiennent à  $I + J$ , ils s'écrivent  $s = i + j$  et  $t = k + l$  avec  $(i, j) \in I \times J$  et  $(k, l) \in I \times J$ . L'expression :

$$us + vt = (ui + vk) + (uj + vl)$$

appartient donc à  $I + J$  pour tout  $(u, v) \in A^2$ .  $\square$

### Définition 2

Si  $\varphi : A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux, le noyau de  $\varphi$  :

$$\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$$

est un idéal de  $A$ .

**Démonstration** Nous savons que  $\text{Ker } \varphi$  est un sous-groupe de  $A$ . Si  $(a, n)$  appartient à  $A \times \text{Ker } \varphi$ , l'égalité :

$$\varphi(an) = \varphi(a)\varphi(n) = \varphi(a)0 = 0$$

montre que  $an$  appartient à  $\text{Ker } \varphi$ .  $\square$

■ **Notation** On note aussi conventionnellement  $\varphi^{-1}(0)$  l'image réciproque  $\varphi^{-1}(\{0\})$ .



**Remarques**

- Plus généralement, l'image réciproque de tout idéal de  $B$  est un idéal de  $A$
- En revanche, l'image de  $\varphi$ , qui contient  $1_B$ , n'est un idéal de  $B$  que lorsque  $\varphi$  est surjective.

**Idéal engendré par un élément**

Soit  $a \in A$ .

**Proposition 4**

Le sous-ensemble :

$$aA = \{au \mid u \in A\}$$

est le plus petit idéal de  $A$  contenant  $a$ . On l'appelle l'idéal engendré par  $a$ .

**Démonstration** L'écriture  $a = a1$  montre que  $a$  appartient à  $aA$ . Soient alors  $(u, v) \in A^2$  et  $(i, j) \in I^2$ . En écrivant  $i = ar$  et  $j = as$  avec  $(r, s) \in A^2$ , on obtient :

$$ui + vj = a(ur + vs) \in aA.$$

La propriété d'absorption montre que tout idéal contenant  $a$  contient aussi l'idéal  $aA$ . □

**Définition 3**

On appelle *idéal principal* de  $A$ , tout idéal de la forme  $aA$  où  $a \in A$

**Remarque** Soit  $(a, b) \in A^2$ . La somme :

$$aA + bA = \{au + bv \mid (u, v) \in A^2\}$$

est le plus petit idéal contenant  $\{a, b\}$ . On l'appelle l'idéal engendré par  $\{a, b\}$ .

**1.2 Divisibilité**

On suppose dans cette section que  $A$  est *intègre*.

**Définition et propriétés**

Soit  $(a, b) \in A^2$ .

**Définition 4**

On dit que  $a$  *divise*  $b$ , ce que l'on note  $a \mid b$ , s'il existe  $c \in A$  tel que  $ac = b$

Lorsque  $a$  divise  $b$ , on dit, comme dans le cas des entiers ou des polynômes que  $a$  est un *diviseur* de  $b$  et que  $b$  est un *multiple* de  $a$ .

**Remarques**

- Si  $K$  est le corps des fractions de  $A$ , on a lorsque  $a$  est non nul et en notant  $\frac{b}{a}$  l'élément  $ba^{-1} \in K$  :

$$a \mid b \iff \frac{b}{a} \in A.$$

- L'élément nul est un multiple de tout élément de  $A$  mais ne divise que lui-même.
- L'élément unité 1 divise tout élément mais n'est multiple que des éléments inversibles de  $A$ .

**Proposition 5**

La relation de divisibilité  $x \mid y$  est réflexive et transitive.

**Proposition 6**

On a l'équivalence :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \mid y \iff yA \subset xA.$$

**Démonstration** L'idéal principal  $xA$  est l'ensemble des multiples de  $x$ . Supposons  $x \mid y$ . Quel que soit  $i \in yA$ , on a  $y \mid i$ , soit par conséquent  $x \mid i$  et  $i \in xA$ . Si, réciproquement, on a  $yA \subset xA$ , il vient  $y \in xA$ , soit  $x \mid y$ .  $\square$

**Remarques**

- L'ensemble des multiples d'un élément  $a \in A$  est l'idéal  $aA$ .
- La divisibilité n'est pas en général antisymétrique. Ainsi 1 et  $-1$  se divisent mutuellement dans  $\mathbb{Z}$ .

**Corollaire 7**

Soit  $(a, b, c) \in A^3$ . Si  $a$  divise  $b$  et  $c$ , alors  $a$  divise l'expression  $xb + yc$  pour tout  $(x, y) \in A$ .

**Démonstration** Puisque  $aA$  est un idéal, les relations  $b \in aA$  et  $c \in aA$  entraînent  $xb + yc \in aA$ .  $\square$

## Éléments associés

### Définition 5

On dit que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $A$  sont *associés*, ce que l'on note  $x \sim y$ , s'il existe un élément inversible  $u \in A^*$  tel que  $y = xu$ .

Il s'agit de la relation d'équivalence associée à l'action :

$$\begin{aligned} A^* \times A &\rightarrow A \\ (u, a) &\mapsto ua \end{aligned}$$

du groupe des éléments inversibles de  $A$  sur  $A$  par multiplication

### Proposition 8

Soit  $(x, y) \in A^2$ . On a équivalence entre les assertions suivantes :

- (i)  $x$  et  $y$  sont associés ;
- (ii)  $x \mid y$  et  $y \mid x$  ;
- (iii)  $xA = yA$ .

Soit  $(x, x', y, y') \in A^4$ . Si  $x$  et  $x'$  ainsi que  $y$  et  $y'$  sont associés, on a l'équivalence :

$$x \mid y \iff x' \mid y'$$

**Démonstration** Si  $x$  et  $y$  sont associés, il existe  $u \in A^*$  tel que  $y = xu$  et, par conséquent,  $x = yu^{-1}$ . On a donc  $x \mid y$  et  $y \mid x$ .

Si  $x \mid y$  et  $y \mid x$ , il existe  $(a, b) \in A^2$  tel que  $y = ax$  et  $x = by$ . Si  $x$  est nul  $y$  l'est et la relation  $0 = 0 \cdot 1$  montre que  $x$  et  $y$  sont associés. Si  $x$  n'est pas nul, l'intégrité de  $A$  permet de simplifier par  $x$  la relation  $x = abx$ . On obtient alors  $1 = ab$ , ce qui montre que  $a$  est inversible et que  $x$  et  $y$  sont associés.

Cela montre l'équivalence des deux premiers points. L'équivalence des deux derniers points résulte de la proposition 6.

La deuxième assertion est évidente. □

### Remarques

- Deux éléments associés d'un anneau se comportent de façon équivalente pour la divisibilité.
- Dans de nombreux anneaux, on peut lever l'ambiguïté de la relation  $x \sim y$  en utilisant un sous-ensemble  $X$  de  $A$  contenant un et un seul élément par classe d'éléments associés. Dans  $\mathbb{Z}$ , on prendra  $X = \mathbb{N}$  et dans  $\mathbb{K}[X]$ , l'ensemble des polynômes unitaires ou nul.

## 2. Arithmétique de $\mathbb{Z}$

### 2.1 Idéaux de $\mathbb{Z}$

#### Éléments associés

##### Proposition 9

Deux entiers relatifs sont associés si, et seulement si, ils ont même valeur absolue.

Un entier relatif est associé à un unique entier positif.

**Démonstration** Le groupe des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}$  est  $\{1, -1\}$ . Deux entiers  $x$  et  $y$  sont associés si, et seulement si, on a  $y = \pm x$ , c'est-à-dire  $|x| = |y|$ .

L'entier  $x$  est associé à l'entier naturel  $|x|$  et seulement à celui-là.  $\square$

Les propriétés liées à la divisibilité des entiers sont ainsi indépendantes de leur signe. Comme il a été dit dans le deuxième point de la remarque de la page 51, on pourra se limiter en ce qui les concerne aux entiers positifs.

#### Idéaux de $\mathbb{Z}$

##### Théorème 10

Tout idéal  $I$  de  $\mathbb{Z}$  peut s'écrire de façon unique sous la forme  $n\mathbb{Z}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . L'entier naturel  $n$  s'appelle le *générateur positif* de  $I$ .

**Démonstration** L'idéal  $I$  étant un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  peut s'écrire  $n\mathbb{Z}$  pour un unique entier  $n \in \mathbb{N}$ . Nous savons que réciproquement toute partie de cette forme est un idéal de  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

On dit qu'un anneau intègre est *principal* si tous ses idéaux sont principaux. Le théorème précédent, établi à l'aide de la division euclidienne montre que  $\mathbb{Z}$  est principal.

Dans le paragraphe suivant, nous allons voir que les théorèmes fondamentaux de l'arithmétique de  $\mathbb{Z}$  peuvent se déduire de cette seule propriété. Ils se généralisent donc à tout anneau principal.

### 2.2 Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux entiers relatifs

Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .

##### Théorème 11

Le PGCD de  $a$  et  $b$  est le générateur positif ou nul de l'idéal  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

Le PPCM de  $a$  et  $b$  est le générateur positif ou nul de l'idéal  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$

**Démonstration**

► Soit  $d$  le générateur positif ou nul de l'idéal  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ . Les inclusions :

$$a\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$$

montrent que  $d$  est un diviseur commun de  $a$  et  $b$ . Comme  $d$  appartient à  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ , il existe un couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$d = ua + vb.$$

Tout diviseur commun de  $a$  et  $b$  est alors un diviseur de  $d$ . Cet élément est donc le PGCD de  $a$  et  $b$  que  $(a, b)$  soit égal à  $(0, 0)$  ou non.

► Soit  $m$  le générateur positif ou nul de l'idéal  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ . Un entier  $c$  est un multiple commun de  $a$  et  $b$  si, et seulement si,  $c\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$  et  $c\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire  $c\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$  ; cela équivaut à  $m \mid c$ . L'entier naturel  $m$  est donc le PPCM de  $(a, b)$  que ce couple soit égal à  $(0, 0)$  ou non. □

**Corollaire 12**

Si  $d$  est le PGCD de  $a$  et  $b$ , il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$d = ua + vb.$$

La relation précédente s'appelle une *relation de Bézout* entre  $a$  et  $b$ . Lorsque  $a$  et  $b$  sont strictement positifs, l'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD  $d$  de ces nombres et d'obtenir par substitutions successives un couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $d = ua + vb$ .

On retrouve, comme dans le cours de première année, les corollaires suivants :

**Corollaire 13 (Théorème de Bézout)**

Les entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$1 = ua + vb.$$

**Démonstration** Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, leur PGCD vaut 1 et il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$1 = ua + vb.$$

Si, réciproquement, il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$1 = ua + vb,$$

le PGCD de  $a$  et  $b$  divise 1 et, étant positif ou nul, vaut 1. □

**Corollaire 14 (Théorème de Gauss)**

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ .

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et si  $a$  divise  $bc$ , alors  $a$  divise  $c$ .

**Démonstration** Les entiers  $a$  et  $b$  étant premiers entre eux, il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $1 = ua + vb$ . On obtient alors :

$$c = uac + vbc.$$

L'entier  $a$  divise  $ac$  et  $bc$ , donc il divise aussi  $c = uac + vbc$  □

**2.3 Congruences dans  $\mathbb{Z}$  et anneaux quotients  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** 

Dans cette section,  $n$  désigne un entier strictement positif.

**Compatibilité de la congruence avec la multiplication****Proposition 15**

La relation de congruence modulo  $n$  est *compatible* avec le produit, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4, \quad (x \equiv x' [n] \text{ et } y \equiv y' [n]) \implies xy \equiv x'y' [n].$$

**Démonstration** Les relations  $x' - x \in n\mathbb{Z}$  et  $y' - y \in n\mathbb{Z}$  entraînent :

$$x'y' - xy = x'(y' - y) + (x' - x)y \in n\mathbb{Z}. \quad \square$$

On peut donc multiplier deux congruences et, en particulier, élever à une puissance une congruence.

**Proposition 16**

Il existe une unique loi *multiplication quotient* sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  telle que la projection canonique  $\pi_n$  soit un morphisme pour la multiplication de  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  sur  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ . Cette loi est associative, commutative et possède la classe de 1 comme élément neutre.

**Démonstration** La multiplication des entiers étant compatible avec la congruence modulo  $n$ , il existe, comme nous en avons fait la remarque suivant la construction de l'addition quotient page 34 du chapitre consacré aux groupes, une et une seule multiplication quotient sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  telle que  $\pi_n : (\mathbb{Z}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$  soit un morphisme de monoïdes. Cette loi est alors associative, commutative et possède la classe de 1 comme élément neutre. □

**Proposition 17**

La multiplication quotient est distributive sur l'addition quotient.

**Démonstration** Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des éléments de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  de représentants  $x, y$  et  $z$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \alpha(\beta + \gamma) &= \pi_n(x)(\pi_n(y) + \pi_n(z)) \\ &= \pi_n(x(y + z)) \\ &= \pi_n(xy + xz) \\ &= \alpha\beta + \alpha\gamma. \end{aligned}$$

Cela montre le résultat annoncé. □

**Anneau quotient  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

**Définition 6**

On appelle *anneau quotient* de  $\mathbb{Z}$  par  $n\mathbb{Z}$ , et l'on note  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , l'anneau  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

**Démonstration** L'ensemble  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  muni de l'addition et de la multiplication quotient est un anneau par les propositions du sous-paragraphe précédent. □

L'unicité des lois quotient montre que c'est la seule structure d'anneau sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  telle que  $\pi_n$  soit un morphisme d'anneaux.

La proposition suivante est immédiate :

**Proposition 18**

L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est commutatif de cardinal  $n$ .

Le morphisme canonique  $\pi_n : x \mapsto \bar{x}$  est surjectif et de noyau l'idéal  $n\mathbb{Z}$ .

**Remarques**

- L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est nul, c'est-à-dire réduit à  $\{0\}$ , si, et seulement si,  $n = 1$ .
- La table de multiplication de :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{(n-1)}\}$$

est simple à construire : le produit des classes  $\bar{r}$  et  $\bar{s}$  avec  $(r, s) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$

est  $\bar{t}$  où  $t$  est le reste de la division de  $rs$  par  $n$ . Pour  $n = 6$ , on obtient :

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

### Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

#### Proposition 19

La classe  $\bar{r}$  d'un entier  $r \in \mathbb{Z}$  est inversible dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , et seulement si,  $r$  et  $n$  sont premiers entre eux.

**Démonstration** La classe  $\bar{r}$  est inversible si, et seulement si, il existe  $\bar{u} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tel que  $\bar{u}\bar{r} = \bar{1}$ , c'est-à-dire si, et seulement si, il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $ur + vn = 1$ .  $\square$

Le calcul de l'inverse d'une classe  $\bar{r} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  lorsque  $r$  est premier avec  $n$  est donc équivalent à la détermination d'un couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant une relation de Bézout :

$$ur + vn = 1.$$

**Exemple** Une classe  $\bar{r}$  est donc inversible dans l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si, et seulement si, elle engendre le groupe additif  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ . Il y a donc  $\varphi(n)$  éléments inversibles dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  où  $\varphi$  est l'indicateur d'Euler.

### Théorème de factorisation des morphismes

#### Théorème 20

Soit  $\varphi$  un morphisme d'anneaux de  $\mathbb{Z}$  dans un anneau  $A$  vérifiant  $n\mathbb{Z} \subset \text{Ker } \varphi$ .

Il existe un unique morphisme d'anneaux  $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow A$ , appelé *factorisation* de  $\varphi$  par  $\pi_n$ , tel que :

$$\varphi = \psi \circ \pi_n.$$

Le noyau de  $\psi$  est l'idéal  $\pi_n(\text{Ker } \varphi)$  et son image vaut  $\text{Im } \varphi$ . En particulier  $\psi$  est injectif si et seulement si,  $\text{Ker } \varphi = n\mathbb{Z}$ .



**Démonstration** Le théorème de factorisation des morphismes de groupes montre qu'il existe un unique morphisme de groupes additifs  $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow A$  tel que  $\varphi = \psi \circ \pi_n$ . Il suffit alors de vérifier que  $\psi$  est un morphisme d'anneaux. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $x$  et  $y$  deux de leurs représentants. Les relations :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha\beta) &= \psi(\pi_n(x)\pi_n(y)) \\ &= \psi(\pi_n(xy)) \\ &= \varphi(xy) \\ &= \varphi(x)\varphi(y) \\ &= \psi(\pi_n(x))\psi(\pi_n(y)) \\ &= \psi(\alpha)\psi(\beta) \end{aligned}$$

montrent que  $\psi$  est un morphisme pour les lois multiplication. De plus :

$$\psi(\bar{1}) = \psi(\pi_n(1)) = \varphi(1) = 1_A.$$

Le deuxième point provient du théorème de factorisation des morphismes de groupes □

## 2.4 Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et caractéristique d'un corps

### Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

#### Théorème 21

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'entier  $n$  est premier,
- (ii) L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps
- (iii) L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est intègre.

**Démonstration** Supposons  $n$  premier. L'entier  $n$  étant strictement supérieur à 1,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est non nul. Une classe non nulle est de la forme  $\bar{r}$  avec  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Un tel entier étant premier avec  $n$ , la classe  $\bar{r}$  est inversible. Cela montre (i)  $\Rightarrow$  (ii).

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) est évidente.

Si  $n$  vaut 1,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est nul. Si  $n$  n'est ni égal à 1 ni premier, soit  $n = rs$  une factorisation avec  $(r, s) \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket^2$ . Les classes  $\bar{r}$  et  $\bar{s}$  sont non nulles alors que  $\bar{r}\bar{s} = \bar{n}$  est nulle. L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  n'est pas intègre. Cela montre (iii)  $\Rightarrow$  (i). □

**Remarque** En fait, et cela généralise l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) du théorème précédent, un anneau fini est intègre si, et seulement si,  $c'$  est un corps.

En effet si  $a$  est un élément non nul d'un anneau intègre  $A$ , l'application  $x \mapsto ax$  de  $A$  dans lui-même est injective et, par suite, bijective. Il existe donc un élément  $a'$  tels que  $aa' = 1$ .

## Caractéristique d'un corps

### Définition 7

On appelle *caractéristique* d'un corps commutatif  $\mathbf{K}$ , et l'on note  $\text{car } \mathbf{K}$ , le générateur positif ou nul du noyau du morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} c : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbf{K} \\ k &\mapsto k \cdot 1_{\mathbf{K}} \end{aligned}$$

**Démonstratio** Le noyau de  $c$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$ . Il est donc de la forme  $n\mathbb{Z}$ . □

### Proposition 22

La caractéristique d'un corps  $\mathbf{K}$  est soit nulle, soit un nombre premier.

**Démonstratio** Nous donnerons deux démonstration de ce résultat. Soit  $p$  la caractéristique de  $\mathbf{K}$ .

- ▶ Si  $p$  n'est pas premier, il existe un couple  $(r, s) \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket^2$  tel que  $rs = p$ . Les éléments  $r \cdot 1_{\mathbf{K}}$  et  $s \cdot 1_{\mathbf{K}}$  sont alors différents de 0 dans  $\mathbf{K}$ , alors que leur produit  $p \cdot 1_{\mathbf{K}}$  est nul. Cette contradiction montre ce que l'on voulait.
- ▶ On peut aussi remarquer que le morphisme  $k \mapsto k \cdot 1_{\mathbf{K}}$  fournit par factorisation un morphisme injectif d'anneaux de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  dans  $\mathbf{K}$ . L'intégrité de  $\mathbf{K}$  induisant celle de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , l'entier  $p$  est premier. □

Le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels est de caractéristique nulle et le corps fini  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  de caractéristique  $p$  pour tout nombre premier  $p$ .

## 2.5 Utilisation arithmétique de la notion de congruence et des anneaux quotients

On utilise aussi bien les congruences que les anneaux quotients  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  pour étudier l'arithmétique de  $\mathbb{Z}$ . Il s'agit bien sûr de méthodes essentiellement équivalentes.

On préfère néanmoins utiliser les anneaux quotients lorsque l'on considère les propriétés liées à la finitude du nombre des classes de congruence ou celles des corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $p$  premier.

**Lemme chinois**

Soit  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

L'ensemble produit  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  est naturellement un anneau pour les lois addition et multiplication produit. Son unité est  $(\bar{1}, \bar{1})$ .

**Remarque** De façon générale, le produit  $\prod_{i=1}^p A_i$  d'une famille  $(A_i)_{i \in [1,p]}$  d'anneaux est un anneau pour les lois produit.

**Proposition 23 (Lemme chinois)**

Si  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux, le morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ k &\mapsto (\pi_n(k), \pi_m(k)) \end{aligned}$$

se factorise en un isomorphisme d'anneaux :

$$\psi : \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

**Démonstration** L'application  $\varphi$  est clairement un morphisme d'anneaux. Son noyau est formé des entiers divisibles par  $n$  et  $m$ , soit par  $nm$  puisque  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux. Le théorème de factorisation nous fournit alors un morphisme d'anneaux injectif :

$$\psi : \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

Les ensembles  $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  ayant même nombre d'éléments,  $\psi$  est un isomorphisme. □

**Corollaire 24**

Si  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux, alors pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ,

1. il existe une solution  $k_1 \in \mathbb{Z}$  au système de congruences :

$$\begin{cases} k \equiv a & [n] \\ k \equiv b & [m] \end{cases}$$

2.  $k \in \mathbb{Z}$  vérifie le système précédent si, et seulement si :

$$k \equiv k_1 \quad [nm].$$

**Démonstration**

► L'application  $\varphi$  est surjective comme l'application  $\psi$  précédente. Il existe donc  $k_1 \in \mathbb{Z}$  tel

que :

$$\varphi(k_1) = (\pi_n(a), \pi_m(b)).$$

► Un entier  $\ell$  est solution du système précédent si, et seulement si,

$$(k - k_1) \in \text{Ker } \varphi = nm\mathbb{Z}.$$

□

Considérons dans les conditions précédentes, une relation de Bezout :

$$un + vm = 1.$$

Il est clair que  $k_1 = vm$  et  $k_2 = un$  vérifient :

$$\begin{cases} k_1 \equiv 1 & [n] \\ k_1 \equiv 0 & [m] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} k_2 \equiv 0 & [n] \\ k_2 \equiv 1 & [m] \end{cases}$$

On voit alors que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , l'entier  $ak_1 + bk_2$  satisfait le système considéré.

**Remarque** La proposition 23 est fautive lorsque  $n$  et  $m$  ne sont pas premiers entre eux. Les groupes additifs  $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  ne sont même pas isomorphes ; le premier contient un élément d'ordre  $nm$  alors que l'ordre de tout élément du second est un diviseur du PPCM de  $n$  et  $m$ .

## Exemples

### 1. Propriétés de l'indicateur d'Euler.

- Supposons que  $n$  et  $m$  soient premiers entre eux. L'isomorphisme du lemme chinois montre que  $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  ont même nombre d'éléments inversibles. De plus, un couple  $(\bar{r}, \bar{s}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  est inversible si, et seulement si,  $\bar{r}$  et  $\bar{s}$  le sont respectivement dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

On obtient donc :

$$\varphi(nm) = \varphi(n) \varphi(m)$$

pour tous entiers  $n$  et  $m$  premiers entre eux.

- Supposons que  $p$  soit premier. Un élément  $\bar{k}$  avec  $k \in \llbracket 0, p^k - 1 \rrbracket$  n'est pas inversible dans  $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$  si, et seulement si  $p$  divise  $k$ . Il y a donc  $p^{k-1}$  éléments non inversibles dans cet anneau.

On obtient donc :

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

pour tout nombre premier  $p$  et tout entier  $k \geq 1$  et :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \cdots (p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \end{aligned}$$

si  $p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$  est la décomposition en facteurs premiers de l'entier  $n$

2. Le lemme chinois permet aussi de ramener l'étude d'une équation sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  lorsque  $n$  n'est pas premier, à celle d'équations sur des anneaux quotients plus simples.

Recherchons, par exemple, les racines  $\alpha \in \mathbb{Z}$  modulo 143 de l'équation :

$$\alpha^2 + \alpha + 11 = 0. \tag{E}$$

L'isomorphisme d anneaux de  $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$  et de  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$  ramène ce problème à la recherche conjointe des racines de (E) dans les corps  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ .

Sur le corps  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ , le polynôme  $X^2 + X + 11$  se réduit à :

$$X^2 + X = X(X + 1)$$

de racines  $\pi_{11}(0)$  et  $\pi_{11}(10)$ .

Sur le corps  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ , le polynôme  $X^2 + X + 11$  se factorise sous la forme :

$$X^2 + X + \pi_{13}(11) = (X - \pi_{13}(1)) (X - \pi_{13}(11))$$

et possède donc  $\pi_{13}(1)$  et  $\pi_{13}(11)$  comme racines.

Les racines modulo 143 de l'équation proposée seront donc les classes modulo 143 des entiers  $k$  tels que  $(\pi_{11}(k), \pi_{13}(k))$  soit égal à  $(\pi_{11}(0), \pi_{13}(1))$ ,  $(\pi_{11}(0), \pi_{13}(11))$ ,  $(\pi_{11}(10), \pi_{13}(1))$  ou  $(\pi_{11}(10), \pi_{13}(11))$ . Utilisons alors le premier point de la remarque précédente ; la relation de Bézout  $6 \cdot 11 - 5 \cdot 13 = 1$  nous donne  $k_1 = -65$  et  $k_2 = 66$ . Les entiers dont les restes modulo 143 sont racines de (E) sont ainsi :

$$\begin{aligned} 66 &= 0 \cdot (-65) + 1 \cdot (66), & 726 &= 0 \cdot (-65) + 11 \cdot (66) \\ -584 &= 10 \cdot (-65) + 1 \cdot (66), & 76 &= 10 \cdot (-65) + 11 \cdot (66) \end{aligned}$$

Finalement, les racines de (E) dans  $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$  sont les classes modulo 143 :

$$\overline{66}, \overline{11}, \overline{131}, \overline{76}.$$

Il ne faut pas s'étonner que l'équation du second degré (E) ait 4 racines dans  $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$  puisque cet anneau n'est pas un corps.

## 2.6 Applications aux nombres premiers

Soit  $p$  un nombre premier.

### Proposition 25 (Petit théorème de Fermat)

On a  $\alpha^{p-1} = 1$  pour tout  $\alpha \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  et  $\alpha^p = \alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**Démonstration** Le groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ , formé des éléments non nuls de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , est d'ordre  $p - 1$ . Tout élément  $\alpha \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  vérifie donc  $\alpha^{p-1} = 1$ .

La relation  $\alpha^p = \alpha$  provient de la relation précédente lorsque  $\alpha$  est différent de 0 et est évidente lorsque  $\alpha$  est nul. □

**Proposition 26**

On a dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$  les factorisations :

$$X^{p-1} - \bar{1} = \prod_{r=1}^{p-1} (X - \bar{r}) \quad \text{et} \quad X^p - X = \prod_{r=0}^{p-1} (X - \bar{r}).$$

**Démonstration** Le point précédent montre que les  $p-1$  éléments de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  sont racines du polynôme  $X^{p-1} - 1$  de degré  $p-1$ . Cela montre la première factorisation. On obtient la seconde formule en multipliant la première par  $X$ .  $\square$

**Corollaire 27 (Petit théorème de Fermat)**

On a  $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  non divisible par  $p$  et  $k^p \equiv k \pmod{p}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Démonstration** Il suffit d'appliquer la proposition 25 à la classe  $\bar{k}$ .  $\square$

**Corollaire 28 (Théorème de Wilson)**

Un entier  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  est premier si, et seulement si :

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

**Démonstration** La congruence est évidente pour  $p = 2$ . Supposons maintenant que  $p$  soit impair. Le coefficient de  $X$  dans le polynôme  $\prod_{r=0}^{p-1} (X - \bar{r})$  est :

$$(-1)^{p-1} \prod_{r=1}^{p-1} \bar{r} = \overline{(p-1)!}.$$

La factorisation  $X^p - X = \prod_{r=0}^{p-1} (X - \bar{r})$  fournit alors la formule désirée

Supposons, réciproquement, que  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  vérifie  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Tout diviseur positif de  $p$  strictement inférieur à  $p$  divise  $(p-1)!$  et, en utilisant la congruence, divise 1. L'entier  $p$  est donc premier.  $\square$

**Proposition 29**

Si  $p$  est un nombre premier, on a :

$$\forall k \in [1, p-1], \quad C_p^k \equiv 0 \pmod{p}.$$

**Démonstration** La relation

$$p \cdot (p - 1) \cdots (p - k + 1) = k! C_p^k$$

montre que  $p$  divise  $C_p^k \cdot k!$ . Comme le nombre  $p$  est premier avec  $k!$  puisqu'il l'est avec tous les entiers  $k \in [1, p - 1]$ , le théorème de Gauss montre qu'il divise  $C_p^k$  □

**Exemples**

1. On veut déterminer le reste modulo 7 de :

$$a = 10^{(9^8)}.$$

L'ordre de la classe de 10 dans  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$  divise 6. Par essais successifs, on voit qu'il vaut 6. Il suffit alors d'étudier  $9^8$  modulo 6. En utilisant  $9 \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $9^2 \equiv 9 \equiv 3 \pmod{6}$  etc., on obtient :

$$9^8 \equiv 3 \pmod{6}.$$

Finalemment :

$$10^{(9^8)} \equiv 10^3 \equiv 6 \pmod{7}.$$

2. On recherche un multiple de 13 dont l'écriture décimale ne présente que des 1. Il s'agit donc de déterminer  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que l'on ait :

$$13 \mid \sum_{i=0}^{k-1} 10^i$$

soit :

$$\sum_{i=0}^{k-1} 10^i \equiv 0 \pmod{13}.$$

En multipliant cette équation par 9, inversible modulo 13, et en utilisant la formule de la progression géométrique, l'équation ci-dessus équivaut à l'équation :

$$10^k \equiv 1 \pmod{13}$$

dont les solutions  $k$  sont les multiples de l'ordre de  $\overline{10}$  dans  $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ . On sait que cet ordre divise 12. Par essais successifs, on voit qu'il vaut 6. Pour 6, on obtient l'égalité :

$$111111 = 13 \times 8547$$

et, pour 12 :

$$111111111111 = 13 \times 8547008547.$$

### 3. Arithmétique de $\mathbf{K}[X]$

#### 3.1 Idéaux de $\mathbf{K}[X]$

##### Éléments associés

###### Définition 8

Un polynôme est dit *normalisé* s'il est nul ou s'il est unitaire

###### Proposition 30

Deux polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbf{K}[X]$  sont associés si, et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbf{K}^*$  tel que  $Q = \lambda P$ .

Tout polynôme est associé à un unique polynôme normalisé.

##### Démonstration

- ▶ C'est immédiat puisque le groupe des éléments inversibles de  $\mathbf{K}[X]$  est  $\mathbf{K}^*$ .
- ▶ Le deuxième point est clair. □

Les propriétés liées à la divisibilité des polynômes ne dépendent pas d'un facteur multiplicatif scalaire non nul. Comme il a été dit dans le deuxième point de la remarque de la page 51, on pourra se limiter en ce qui les concerne aux polynômes normalisés.

##### Ideaux de $\mathbf{K}[X]$

###### Theorème 31

Tout idéal  $I$  de  $\mathbf{K}[X]$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$P \mathbf{K}[X]$$

avec  $P \in \mathbf{K}[X]$  normalisé. Le polynôme  $P$  s'appelle le *générateur normalisé* de  $I$ .

##### Démonstration

Montrons tout d'abord l'existence de  $P$ .

Si  $I$  est réduit à  $\{0\}$ , il s'écrit  $0 \mathbf{K}[X]$ .

Sinon, considérons  $P \in I \setminus \{0\}$  de degré minimal. Quitte à le multiplier par une constante non nulle, on peut supposer que  $P$  est unitaire. On a évidemment  $P \mathbf{K}[X] \subset I$ . Soient alors  $S \in I$  et :

$$S = PQ + R, \quad \deg R < \deg P$$

la division euclidienne de  $S$  par  $P$ . Le polynôme  $R$ , égal à  $S - PQ$ , appartient à  $I$ . Son degré étant strictement inférieur à  $\deg P$ , minimum des degrés des polynômes non nuls de  $I$ ,  $R$  est nul et  $S = PQ$ . Finalement  $I = P \mathbf{K}[X]$ .

Deux polynômes  $P$  et  $Q$  vérifiant  $I = P \mathbf{K}[X] = Q \cdot \mathbf{K}[X]$  sont associés et, par la proposition précédente, égaux s'ils sont normalisés. □



Ainsi, grâce à l'existence de division euclidienne,  $\mathbf{K}[X]$  est principal. Nous en deduirons dans le paragraphe suivant, ses propriétés arithmétiques comme dans le cas de  $\mathbb{Z}$  ou de tout anneau principal.

### 3.2 Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux polynômes

Soit  $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ .

#### Théorème 32

Le PGCD  $D$  de  $P$  et  $Q$  est le generateur normalisé de l'idéal :

$$P\mathbf{K}[X] + Q\mathbf{K}[X].$$

Le PPCM  $M$  de  $P$  et  $Q$  est le générateur normalisé de l'idéal :

$$P\mathbf{K}[X] \cap Q\mathbf{K}[X].$$

#### Démonstration

► Soit  $D$  le générateur normalisé de l'idéal  $P\mathbf{K}[X] + Q\mathbf{K}[X]$ . Les inclusions :

$$P\mathbf{K}[X] \subset D\mathbf{K}[X] \quad \text{et} \quad Q\mathbf{K}[X] \subset D\mathbf{K}[X]$$

montrent que  $D$  est un diviseur commun de  $P$  et  $Q$ . Comme  $D$  appartient à  $P\mathbf{K}[X] + Q\mathbf{K}[X]$ , il existe un couple  $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$  tel que :

$$D = UP + VQ.$$

Tout diviseur commun de  $P$  et  $Q$  est alors un diviseur de  $D$ . Cet élément est donc le PGCD de  $P$  et  $Q$  que  $(R, Q)$  soit égal à  $(0, 0)$  ou non.

► Soit  $M$  le générateur normalisé de l'idéal  $P\mathbf{K}[X] \cap Q\mathbf{K}[X]$ . Un polynôme  $C$  est un multiple commun de  $P$  et  $Q$  si, et seulement si,  $C\mathbf{K}[X] \subset P\mathbf{K}[X]$  et  $C\mathbf{K}[X] \subset Q\mathbf{K}[X]$ , c'est-à-dire  $C\mathbf{K}[X] \subset P\mathbf{K}[X] \cap Q\mathbf{K}[X]$ . Cela équivaut à  $M \mid C$ . Ainsi,  $M$  est le PPCM de  $P$  et  $Q$  que  $(P, Q)$  soit égal à  $(0, 0)$  ou non.  $\square$

#### Corollaire 33

Si  $D$  est le PGCD de  $P$  et  $Q$ , il existe  $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$  tel que :

$$D = UP + VQ.$$

La relation précédente s'appelle une *relation de Bézout* entre  $P$  et  $Q$

**Corollaire 34 (Théorème de Bézout)**

Les polynômes  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que :

$$1 = UP + VQ.$$

**Démonstration** Si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux, leur PGCD vaut 1 et il existe  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $1 = UP + VQ$ .

Si, réciproquement, il existe  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $1 = UP + VQ$ , le PGCD de  $P$  et  $Q$  divise 1 et, étant normalisé, vaut 1.  $\square$

**Corollaire 35 (Théorème de Gauss)**

Soit  $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ . Si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux et si  $P$  divise  $QR$ , alors  $P$  divise  $R$ .

**Démonstration** Les polynômes  $P$  et  $Q$  étant premiers entre eux, il existe  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $1 = UP + VQ$ . On obtient alors :

$$R = URP + VQR.$$

Le polynôme  $P$  divise  $RP$  et  $QR$  donc il divise  $R = URP + VQR$ .  $\square$

La proposition suivante, spécifique à  $\mathbb{K}[X]$ , précise le théorème de Bézout.

**Proposition 36**

Si  $P$  et  $Q$  sont non constants et premiers entre eux, il existe un unique couple  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que :

$$1 = UP + VQ \quad \text{avec} \quad \deg U < \deg Q \quad \text{et} \quad \deg V < \deg P.$$

**Démonstration** Soit  $(U', V') \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $1 = U'P + V'Q$ . Par division euclidienne, il existe  $(S, U) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $U' = QS + U$  avec  $\deg U < \deg Q$ . En posant  $V = V' + PS$ , on obtient la relation :

$$1 = UP + VQ.$$

En remarquant que,  $P$  et  $Q$  étant non constants,  $U$  et  $V$  sont non nuls, il vient :

$$\deg VQ = \deg(1 - UP) \leq \deg UP$$

puisque  $UP$  est différent de 0 puis, grâce à  $\deg U < \deg Q$  :

$$\deg V < \deg P.$$

Si  $1 = UP + VQ$  et  $1 = U'P + V'Q$  sont deux relations de Bézout vérifiant ces conditions de degré, il vient par différence :

$$P(U - U') = Q(V' - V).$$

Le théorème de Gauss montre alors que  $P$  divise  $V' - V$ . Comme le degré de  $V' - V$  est strictement inférieur à  $P$ , on obtient  $V = V'$  et, par conséquent,  $U = U'$ .  $\square$

**Remarque** Dans les conditions précédentes, le couple de polynômes que l'on obtient par substitution à partir de l'algorithme d'Euclide vérifie la relation de Bézout et les contraintes de degré de la proposition précédente.

Soient en effet  $(P_0, P_1)$  un couple de polynômes premiers entre eux non constants et :

$$P_0 = P_1Q_1 + P_2 \quad \text{avec} \quad \deg P_2 < \deg P_1$$

$$P_1 = P_2Q_2 + P_3 \quad \text{avec} \quad \deg P_3 < \deg P_2$$

$$P_{r-1} = P_rQ_r + P_{r+1} \quad \text{avec} \quad \deg P_{r+1} = 0$$

leur algorithme d'Euclide avec  $r \geq 2$  et  $P_{r+1} = \alpha \in \mathbf{K}^*$ . On peut supposer par récurrence sur  $r$  que l'on a obtenu par substitutions successives des  $r - 1$  dernières lignes la relation :

$$1 = U'P_1 + V'P_2 \quad \text{avec} \quad \deg U' < \deg P_2 \quad \text{et} \quad \deg V' < \deg P_1.$$

Il vient alors :

$$1 = UP_0 + VP_1 \quad \text{avec} \quad U = V' \quad \text{et} \quad V = U' - V'Q_1.$$

Le degré de  $U$ , égal à celui de  $V'$ , est bien strictement inférieur à celui de  $P_1$ . Nous avons vu dans la démonstration de la proposition concernée que cela implique  $\deg V < \deg P_0$ .

## 4. Sous-algèbres monogènes d'une $\mathbf{K}$ -algèbre

Dans ce paragraphe,  $E$  désigne une  $\mathbf{K}$ -algèbre (non nécessairement commutative).

Soit  $a$  un élément de  $E$ .

### 4.1 Morphismes d'évaluation

#### Définition

#### Définition 9

Pour tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ , on appelle *valeur* de  $P$  en  $a$ , et l'on note  $P(a)$ , l'élément :

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k a^k \in E.$$

**Démonstration** L'unicité de l'écriture d'un polynôme montre que  $P(a)$  est défini sans ambiguïté. □

**Théorème 37**

L'application  $\varphi_a : P \mapsto P(a)$  est un morphisme de  $\mathbf{K}$ -algèbres, appelé morphisme d'évaluation en  $a$ , de  $\mathbf{K}[X]$  vers  $E$ .

**Démonstration** La démonstration de la linéarité de  $\varphi_a$  est immédiate.

On a évidemment  $\varphi_a(1) = 1$ . Si  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$  et  $Q = \sum_{\ell=0}^m \beta_\ell X^\ell$  sont deux polynômes on a :

$$\varphi_a(PQ) = \varphi_a \left( \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,m \rrbracket} \alpha_k \beta_\ell X^{k+\ell} \right) = \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,m \rrbracket} \alpha_k \beta_\ell a^{k+\ell}$$

et :

$$\varphi_a(P) \varphi_a(Q) = \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k a^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^m \beta_\ell a^\ell \right) = \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,m \rrbracket} \alpha_k a^k \beta_\ell a^\ell.$$

Comme dans une algèbre, on a  $\alpha_k \beta_\ell a^{k+\ell} = \alpha_k a^k \beta_\ell a^\ell$  pour tout  $(k, \ell)$ , il vient :

$$\varphi_a(PQ) = \varphi_a(P) \varphi_a(Q). \quad \square$$

**Remarques**

- On ne suppose pas en général que  $E$  est commutative. D'ailleurs, l'une des applications les plus importantes de cette notion concernera l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  qui est non commutative lorsque la dimension de l'espace vectoriel  $E$  est strictement supérieure à 1.
- Le morphisme  $\varphi_a$  est l'unique morphisme de  $\mathbf{K}$ -algèbres de  $\mathbf{K}[X]$  vers  $E$  tel que  $\varphi_a(X) = a$ . Tout morphisme  $\varphi$  de  $\mathbf{K}$ -algèbres de  $\mathbf{K}[X]$  vers  $E$  vaut  $\varphi_a$  pour l'élément  $a = \varphi(X)$ .

**Sous-algèbre engendrée par  $a$** **Définition 10**

L'image :

$$\mathbf{K}[a] = \{P(a) \mid P \in \mathbf{K}[X]\}$$

du morphisme d'évaluation  $P \mapsto P(a)$  est une sous-algèbre commutative de  $E$  contenant  $a$ . C'est la plus petite sous-algèbre de  $E$  contenant  $a$  ; on l'appelle la *sous-algèbre engendrée* par  $a$ .

**Démonstration** Comme image de l'algèbre commutative  $\mathbf{K}[X]$  par un morphisme d'algèbres,  $\mathbf{K}[a]$  est une sous-algèbre commutative de  $E$ . Elle contient évidemment  $a$ .

Toute sous-algèbre  $F$  de  $E$  contenant  $a$ , contiendra les combinaisons linéaires des puissances de  $a$ , c'est-à-dire les éléments  $P(a)$  lorsque  $P$  appartient à  $\mathbf{K}[X]$ .  $\square$

**Remarques**

- Le sous-espace vectoriel  $\mathbf{K}[a]$  est engendré par  $\{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .
- Nous avons vu que les éléments  $P(a)$  de  $\mathbf{K}[a]$  commutent entre eux. Ils commutent évidemment avec tout élément de  $E$  commutant avec  $a$ . On dit qu'ils appartiennent au bicommutant de  $a$ .

On appelle *sous-algèbre monogène* de  $E$  toute sous-algèbre de  $E$  de la forme  $\mathbf{K}[a]$  avec  $a \in E$ .

**4.2 Idéal annulateur et polynôme minimal**

**Définitions**

**Proposition 38**

Le noyau :

$$\{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(a) = 0\}$$

du morphisme d'évaluation  $P \mapsto P(a)$  est un idéal de  $\mathbf{K}[X]$ . On l'appelle *l'idéal annulateur* de  $a$ .

On appelle *polynôme annulateur* de  $u$  tout élément de l'idéal annulateur.

**Définition 11**

On dit que  $a$  est *algébriquement libre* sur  $\mathbf{K}$  si son idéal annulateur est réduit à  $\{0\}$ .

On dit que  $a$  est *algébriquement lié* sur  $\mathbf{K}$  si son idéal annulateur n'est pas réduit à  $\{0\}$ . On appelle alors *polynôme minimal* de  $a$ , et l'on note  $\Pi_a$ , le polynôme unitaire qui engendre cet idéal.

**Remarques**

- Lorsque l'algèbre  $E$  est nulle, c'est-à-dire réduite à  $\{0\}$ , le morphisme d'évaluation de 0 est nul. L'idéal annulateur de 0 est  $\mathbf{K}[X]$  et le polynôme minimal de 0 égal à 1.  
Lorsque l'algèbre  $E$  n'est pas nulle, le morphisme d'évaluation de  $a \in E$  est non nul puisque  $1(a) = 1_E$  est différent de  $0_E$ . L'idéal annulateur de  $a$  est strictement contenu dans  $\mathbf{K}[X]$  et le polynôme minimal de  $a$  toujours différent de 1 lorsqu'il existe.
- Un élément  $a$  d'une algèbre  $E$  non réduite à  $\{0\}$  est algébriquement lié de polynôme minimal du premier degré si, et seulement si, il appartient à  $\mathbf{K}1_E$  ; le seul élément annulé par le polynôme  $X - \lambda$  est, en effet,  $\lambda 1_E$ .

- Si  $a$  est algébriquement lié sur  $\mathbf{K}$ , le polynôme minimal  $\Pi_a$  de  $a$  est caractérisé par :

$$\forall P \in \mathbf{K}[X], \quad P(a) = 0 \iff \Pi_a \mid P.$$

On remarquera l'analogie avec la notion d'ordre d'un élément d'un groupe.

- Lorsque  $E$  est un corps contenant  $\mathbf{K}$ , considéré naturellement comme une  $\mathbf{K}$ -algèbre, on dit qu'un élément de  $E$  est *algébrique* respectivement *transcendant* sur  $\mathbf{K}$  s'il est algébriquement lié, respectivement algébriquement libre, sur  $\mathbf{K}$ .
- Il existe des éléments de  $\mathbf{C}$  algébriques sur  $\mathbf{Q}$  autres que les rationnels qui le sont évidemment ; par exemple  $\sqrt{2}$ ,  $i$ , ou  $j$ . Hermite en 1873 et Lindemann en 1882 ont montré respectivement que  $e$  et  $\pi$  sont transcendants sur  $\mathbf{Q}$ .

Les deux points suivants donnent des exemples d'éléments algébriquement libres. Le second fournit le premier exemple historique, dû à Liouville, de nombre réel transcendant sur  $\mathbf{Q}$ .

### Exemples

1. La fonction sin de l'algèbre réelle  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans lui-même est algébriquement libre.

En effet, si  $P(X)$  est un polynôme réel annulateur de sin, la relation  $\forall x \in \mathbb{R}, P(\sin x) = 0$  montre que  $P$  s'annule sur  $[-1, 1]$ . L'idéal annulateur de sin est donc réduit à  $\{0\}$ .

2. Les suites  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  et  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  définies par  $\lambda_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k!}}$  et  $\mu_n = \lambda_n + \frac{1}{10^n n!}$  sont adjacentes et leur limite  $\lambda$  est transcendant sur  $\mathbf{Q}$ .

On vérifie, en effet, sans difficulté que  $(\lambda_n)$  est strictement croissante,  $(\mu_n)$  strictement décroissante, que  $(\mu_n - \lambda_n)$  a pour limite 0 et que l'on a :

$$0 \leq \lambda_n \leq \mu_n \leq 1.$$

L'inégalité  $\forall n, \mu_n - \lambda_n \leq \frac{1}{10^n n!}$  montre la relation :

$$\forall n, \quad 0 < |\lambda - \lambda_n| \leq \frac{1}{10^n n!}.$$

Si  $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$  est un polynôme annulateur de  $\lambda$ , l'inégalité des accroissements finis fournit la majoration :

$$\forall n, \quad |P(\lambda_n)| = |P(\lambda) - P(\lambda_n)| \leq \frac{K}{10^n n!}$$

avec  $K = \sup_{x \in [0,1]} |P'(x)|$ . D'un autre côté, en écrivant :

$$P(X) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^r a_k X^k$$

avec  $r = \deg P$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $a_k \in \mathbb{Z}$  pour tout  $k$  et en réduisant  $\lambda_n$  au même dénominateur  $\frac{1}{10^{n!}}$ , il vient :

$$P(\lambda_n) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^r a_k \lambda_n^k = \frac{A_n}{a10^r n!}$$

avec  $A_n \in \mathbb{Z}$ . On en déduit que la suite d'entiers  $(A_n)$  vérifie :

$$\forall n, \quad |A_n| \leq \frac{aK}{10^{(n-r)n!}}$$

Il existe alors un entier naturel  $n_0$  tel que  $A_n = 0$ , et par conséquent  $P(\lambda_n) = 0$ , pour tout  $n \geq n_0$ . Le polynôme  $P(X)$  est donc nul.

Le nombre réel  $\lambda$  est donc transcendant sur  $\mathbb{Q}$ .

Les deux points suivants donnent des exemples de nombres réels algébriques et de la détermination de leur polynôme minimal.

### Exemples

1. Le nombre  $\alpha = \sqrt[n]{2} \in \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$  supérieur ou égal à 2) est algébrique sur  $\mathbb{Q}$  et son polynôme minimal est  $X^n - 2$ .

Le nombre  $\alpha$  est, en effet, algébrique puisqu'il est racine du polynôme  $P(X) = X^n - 2$  de  $\mathbb{Q}[X]$ .

Montrons alors que  $P(X)$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ . Si  $Q(X)$  est un diviseur non constant de  $P(X)$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ , la factorisation de  $P(X)$  dans  $\mathbb{C}[X]$  montre que l'on a :

$$Q(X) = \prod_{k \in K} \left( X - \sqrt[n]{2} e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right)$$

avec  $K \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ . En notant  $m$  le cardinal de  $K$ , on obtient alors :

$$2^{\frac{m}{n}} = |Q(0)| \in \mathbb{Q}.$$

Si  $\frac{p}{q}$  est la forme irréductible de  $|Q(0)|$ , il vient :

$$2^m q^n = p^n.$$

L'unicité de la factorisation en produit de nombres premiers de  $p$  et  $q$  montre que l'on a  $m = n$ ,  $K = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $Q(X) = P(X)$ . Le polynôme  $P(X)$  est donc irréductible sur  $\mathbb{Q}$ .

Le nombre  $\alpha$  est donc algébrique sur  $\mathbb{Q}$  et son polynôme minimal, qui est un diviseur non constant de  $P(X)$ , vaut :

$$M_\alpha(X) = X^n - 2.$$

2. Le nombre  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}$  et son polynôme minimal est  $X^4 - 10X^2 + 1$ .

On a, en effet,  $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ , puis :

$$(\alpha^2 - 5)^2 = 24.$$

Le nombre  $\alpha$ , racine du polynôme :

$$P(X) = X^4 - 10X^2 + 1,$$

est donc algébrique sur  $\mathbb{Q}$ .

Montrons alors que  $P(X)$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ . Le polynôme  $P(X)$  ne peut posséder de facteur du premier degré ; il aurait sinon une racine rationnelle dont le carré serait une racine rationnelle de  $X^2 - 10X + 1$ . Supposons qu'il s'écrive :

$$P(X) = (X^2 + bX + c)(X^2 + b'X + c')$$

dans  $\mathbb{Q}[X]$ . On a alors les relations :

$$b + b' = 0, \quad c + c' + bb' = -10, \quad bc' + b'c = 0, \quad cc' = 1.$$

Si  $b$  est nul, on obtient  $c + c' = -10$  et  $cc' = 1$  ; si  $b$  est non nul, il vient  $b' = -b$ ,  $c' = c$ ,  $c = \pm 1$  et finalement  $b^2 = 8$  ou  $12$ . Dans tous les cas, on obtient une contradiction puisque ces systèmes n'ont pas de solutions rationnelles. Finalement  $P(X)$  est irréductible.

Le nombre  $\alpha$  est donc algébrique sur  $\mathbb{Q}$  et son polynôme minimal, qui est un diviseur non constant de  $P(X)$ , vaut :

$$X^4 - 10X^2 + 1.$$

Il peut être intéressant de remarquer que les quatre racines complexes de  $P$  sont :

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad -\sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad -\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Elles sont donc réelles et irrationnelles par ce qui précède.

Contrairement à ce que pourraient laisser croire les exemples précédents, le polynôme minimal d'un élément algébriquement lié d'une algèbre n'est pas toujours irréductible.

### Exemples

1. La fonction caractéristique  $f$  du sous-ensemble  $\{0\}$  de  $\mathbb{R}$  est un élément algébriquement lié de l'algèbre  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans lui-même annulant le polynôme  $X^2 - X$ . Comme  $f$  n'est pas constante, son polynôme minimal est le polynôme non irréductible  $X^2 - X$ .

2. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  de l'algèbre  $M_2(\mathbb{R})$  vérifie  $(A - I_n)^2 = 0$ . Comme elle n'est pas scalaire, son polynôme minimal est :

$$(X - 1)^2.$$



L'étude des éléments algébriquement liés des algèbres d'endomorphismes ou de matrices et de leur polynôme minimal sera en grande partie l'objet du chapitre « Réduction des endomorphismes ».

### 4.3 Structure d'une sous-algèbre monogène

#### Structure de $\mathbf{K}[a]$ lorsque $a$ est algébriquement libre.

**Proposition 39**

Si  $a$  est algébriquement libre, alors la sous-algèbre  $\mathbf{K}[a]$  est de dimension infinie et  $\varphi_a$  réalise un isomorphisme d'algèbres de  $\mathbf{K}[X]$  sur  $\mathbf{K}[a]$ .

**Démonstration** Si  $a$  est algébriquement libre, l'application  $\varphi_a$  est un morphisme d'algèbres injectif de  $\mathbf{K}[X]$  vers  $E$ . Son image  $\mathbf{K}[a]$  est donc de dimension infinie. La deuxième affirmation est évidente. □

Tout élément d'une algèbre de dimension finie, est par conséquent algébriquement lié.

#### Structure de $\mathbf{K}[a]$ lorsque $a$ est algébriquement lié

Supposons que  $a$  soit algébriquement lié sur  $\mathbf{K}$ . On note  $\Pi_a$  son polynôme minimal et  $p$  le degré de  $\Pi_a$ .

**Proposition 40**

Si  $a$  est algébriquement lié, alors la sous-algèbre  $\mathbf{K}[a]$  est de dimension finie égale à  $p = \deg \Pi_a$  et la famille :

$$(1, a, \dots, a^{p-1})$$

une base de  $\mathbf{K}[a]$ .

**Démonstration** La division euclidienne nous fournit la somme directe :

$$\mathbf{K}[X] = \Pi_a \mathbf{K}[X] \oplus \mathbf{K}_{p-1}[X].$$

L'application linéaire  $\varphi_a$  de noyau  $\Pi_a \mathbf{K}[X]$  induit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathbf{K}_{p-1}[X]$  sur  $\mathbf{K}[a]$ . Cet espace est donc de dimension  $p$  et l'image  $(1, a, \dots, a^{p-1})$  de la base  $(1, X, \dots, X^{p-1})$  de  $\mathbf{K}_{p-1}[X]$  est une base de  $\mathbf{K}[a]$ . □

**Proposition 41**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) le polynôme  $\Pi_a$  est irréductible dans  $\mathbf{K}[X]$ ,
- (ii) l'algèbre  $\mathbf{K}[a]$  est un corps,
- (iii) l'algèbre  $\mathbf{K}[a]$  est intègre.

**Démonstration** Supposons  $\Pi_a$  irréductible. Soit  $b$  un élément non nul de  $\mathbf{K}[a]$ . Il existe un polynôme non nul  $P(X) \in \mathbf{K}[X]$  tel que  $b = P(a)$ . Comme  $b$  est non nul, le polynôme  $P$  n'est pas un multiple de  $\Pi_a$ . Ce dernier polynôme étant irréductible,  $P$  et  $\Pi_a$  sont premiers entre eux et il existe  $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$  tel que :

$$UP + V\Pi_a = 1.$$

L'évaluation de cette identité en  $a$  donne  $U(a)P(a) = 1$  et montre que  $b$  est inversible dans l'algèbre commutative  $\mathbf{K}[a]$ . Cela prouve (i)  $\Rightarrow$  (ii).

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) est évidente

Supposons que  $\mathbf{K}[a]$  soit intègre. Si  $\Pi_a$  est réductible, il existe deux polynômes non nuls  $P$  et  $Q$  de degré strictement inférieur au degré  $r$  de  $\Pi_a$  tels que  $\Pi_a = PQ$ . On voit alors que  $P(a)$  et  $Q(a)$  sont non nuls alors que :

$$P(a)Q(a) = 0.$$

Cela montre (iii)  $\Rightarrow$  (i). □

**Exemple** Nous avons vu que  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbf{C}$  est algébrique sur  $\mathbf{Q}$  de polynôme minimal sur  $\mathbf{Q}$  :

$$X^4 - 10X^2 + 1.$$

La sous-algèbre  $\mathbf{Q}[\alpha]$  est donc un sous-corps de  $\mathbf{C}$  de dimension 4 sur  $\mathbf{Q}$

**Remarque** En fait, et cela généralise l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) du théorème précédent, une algèbre de dimension finie est intègre si, et seulement si, c'est un corps.

En effet, si  $a$  est un élément non nul d'une algèbre  $E$  de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ , les applications  $x \mapsto ax$  et  $x \mapsto xa$  de  $E$  vers lui-même sont linéaires, injectives et, par suite, bijectives. Il existe donc des éléments  $a'$  et  $a''$  de  $E$  tels que  $aa' = 1$  et  $a''a = 1$ . La relation :

$$a' = (a''a)a' = a''(aa') = a''$$

prouve alors que  $a$  est inversible.

**Corollaire 42**

Si  $E$  est intègre, la sous-algèbre  $\mathbf{K}[a]$  est un corps.

**Démonstration** L'algèbre  $\mathbf{K}[a]$  est intègre puisque  $E$  l'est. C'est donc un corps □

**Proposition 43**

Soient  $a$  un élément d'une algèbre  $E$  et  $P$  est un élément de  $\mathbf{K}[X]$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $P(a)$  n'est pas un diviseur de 0 dans  $E$
- (ii)  $P$  est premier avec  $\Pi_a$ ,
- (iii)  $P(a)$  est inversible dans  $E$ .

Dans ces conditions l'inverse de  $P(a)$ , donné par  $U(a)$  si :

$$UP + V\Pi_a = 1$$

est une relation de Bézout entre  $P$  et  $\Pi_a$ , appartient à  $\mathbf{K}[a]$ .

**Démonstration**

- Si  $P$  et  $\Pi_a$  ne sont pas premiers entre eux, il existe  $(D, U, V) \in \mathbf{K}[X]^3$  tels que  $P = DU$  et  $\Pi_a = DV$  avec  $\deg D > 0$ . Le polynôme  $\Pi_a$  divisant  $PV$ , on a :

$$P(a)V(a) = 0$$

alors que, le degré de  $V$  étant strictement inférieur à celui de  $\Pi_a$ ,  $V(a)$  est non nul et donc  $P(a)$  est un diviseur de 0. Cela montre (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Si  $P$  est premier avec  $\Pi_a$ , il existe  $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$  tel que  $UP + V\Pi_a = 1$ . L'évaluation en  $a$  donne  $U(a)P(a) = 1$ . L'élément  $P(a)$  est donc inversible d'inverse  $U(a) \in \mathbf{K}[a]$ . Cela montre (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

Si  $P(a)$  est inversible, il n'est pas diviseur de 0. Cela montre (iii)  $\Rightarrow$  (i).

- Ce point est contenu dans la démonstration de (ii)  $\Rightarrow$  (iii). □

## EXERCICES

1. Montrer que toute suite croissante d'idéaux de  $A = \mathbb{Z}$  ou  $A = \mathbb{K}[X]$  est stationnaire.
2. Soit  $I$  un idéal d'un anneau (commutatif)  $A$ 
  1. Montrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal
  2. Montrer que la relation de congruence  $x \equiv y [I]$ , définie par  $y - x \in I$  est une relation d'équivalence sur  $A$ . On note  $A/I$  l'ensemble quotient de  $A$  par  $x \equiv y [I]$  et  $\pi$  la projection canonique de  $A$  sur  $A/I$
  3. Montrer que la relation  $x \equiv y [I]$  est compatible avec les lois de  $A$  et qu'il existe sur  $A/I$  une unique structure d'anneau telle que  $\pi$  soit un morphisme. Déterminer alors le noyau de  $\pi$ .
  4. Montrer que lorsque  $A$  est une algèbre commutative sur un corps  $\mathbb{K}$ , il existe sur  $A/I$  une unique structure algèbre commutative sur  $\mathbb{K}$  telle que  $\pi$  soit un morphisme d'algèbres.
3. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ .
  1. Montrer que l'élément  $\xi = \pi(X)$  engendre  $\mathbb{K}[X]/(P)$  (voir exercice précédent) et donner son polynôme minimal.
  2. Prouver les équivalences :
$$P \text{ irréductible} \iff \mathbb{K}[X]/(P) \text{ intègre} \iff \mathbb{K}[X]/(P) \text{ corps.}$$
  3. Montrer que  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$  est isomorphe à  $\mathbb{C}$ .
4. Soit  $P$  un polynôme non constant de  $\mathbb{K}[X]$ 
  1. Montrer qu'il existe un sur-corps  $\mathbb{L}$  de  $\mathbb{K}$ , on dit une extension de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  telle que  $P$  ait une racine dans  $\mathbb{L}$
  2. Montrer qu'il existe un sur-corps  $\mathbb{L}$  de  $\mathbb{K}$  de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  telle que  $P$  soit scindé dans  $\mathbb{L}$ .
5. On dit qu'un idéal  $I$  d'un anneau  $A$  est premier s'il est différent de  $A$  et si,  $xy \in I$  entraîne  $x \in I$  ou  $y \in I$  et qu'il est maximal s'il est différent de  $A$  et si  $A$  est le seul idéal de  $A$  contenant strictement  $I$ 
  1. Montrer qu'un idéal est premier si, et seulement si,  $A/I$  est un anneau intègre.
  2. Montrer que  $I$  est un idéal maximal si, et seulement si,  $A/I$  est un corps.
  3. Déterminer les idéaux premiers et maximaux de  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}[X]$ .

6. Soit  $\mathcal{C}$  l'algèbre des applications continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer qu'un idéal  $I$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \exists f \in I : f(x) \neq 0 \tag{*}$$

est égal à  $\mathcal{C}$ .

2. Déterminer tous les idéaux maximaux de  $\mathcal{C}$  (voir l'exercice précédent).

7. Donner la classe de congruence modulo un nombre premier  $p$  du coefficient  $C_{p-1}^k$  pour  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ .

8. Soit  $p$  un nombre premier impair supérieur ou égal à 5. On écrit :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{(p-1)!}$$

où  $a$  est un entier naturel. Montrer que  $p^2$  divise  $a$ .

9. Soit  $p$  un nombre premier impair.

1. Démontrer la relation :

$$C_{2p}^p = \sum_{k=0}^p (C_p^k)^2.$$

2. Montrer la congruence  $C_{2p}^p \equiv 2$  modulo  $p^2$ .

3. Montrer la congruence  $C_{2p}^p \equiv 2$  modulo  $p^3$  lorsque  $p$  est supérieur ou égal à 5.

10. Soit  $n$  un entier.

1. Montrer que, pour tout entier  $a$  premier avec  $n$ , on a :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \text{ modulo } n.$$

( $\varphi$  désigne l'indicateur d'Euler)

2. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $3^{2000}$

11. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de Fibonacci définie par récurrence par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k, \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k.$$

1. Montrer que la longueur  $r$  (nombre de divisions) de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{ll} a_0 = a_1 q_1 + a_2 & \text{avec} \quad a_2 < a_1 \\ \dots & \dots \quad \dots \\ a_{r-2} = a_{r-1} q_{r-1} + a_r & \text{avec} \quad a_r < a_{r-1} \\ a_{r-1} = a_r q_r + 0 & \end{array}$$

construit à partir de deux entiers positifs  $a_0$  et  $a_1$  tels que  $a_1 \leq a_0$  vérifie  $F_{r+2} \leq a_0$ .

2. En déduire que la longueur de l'algorithme d'Euclide de deux entiers positifs non nuls inférieurs ou égaux à  $m$  est inférieur ou égal à  $\ln_\alpha m$  où  $\alpha$  est le nombre d'or  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ .

12. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de Fibonacci définie par récurrence par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k, \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k.$$

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les nombres entiers  $F_k$  et  $F_{k+1}$  sont premiers entre eux.

2. Montrer que l'on a

$$\forall (k, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad F_{k+d} = F_k F_{d-1} + F_{k+1} F_d.$$

3. Montrer que le PGCD de  $F_n$  et  $F_m$  est  $F_d$  où  $d$  est le PGCD de  $n$  et  $m$ .

13. On appelle ensemble de Farey d'indice  $n \in \mathbb{N}^*$  l'ensemble  $F_n$  des nombres rationnels de  $[0, 1]$  de forme  $\frac{p}{q}$  avec  $1 \leq q \leq n$ .

1. Montrer que les formes irréductibles  $\frac{p}{q}$  et  $\frac{r}{s}$  de deux éléments consécutifs de  $F_n$  vérifient  $|rq - ps| = 1$  et  $q + s \geq n + 1$ . Montrer que l'intersection de l'intervalle  $\left] \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right[$  et de  $F_{n+1}$  est non vide si, et seulement si,  $q + s = n + 1$

et qu'elle est alors réduite à  $\left\{ \frac{p+r}{q+s} \right\}$

2. Soit  $\xi$  un nombre irrationnel de  $[0, 1]$ . Montrer qu'il existe pour tout entier  $n > 0$  une fraction irréductible  $\frac{p}{q}$  telle que  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn}$  avec  $q \leq n$ .

3. Soit  $\zeta$  un nombre irrationnel. Montrer qu'il existe une infinité de fractions irréductibles  $\frac{p}{q}$  telles que  $\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ .

14. Soient un entier  $n \geq 2$  et  $(a_1, \dots, a_n)$  un élément de  $\mathbb{Z}^n$ . Montrer qu'il existe une partie  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  telle que  $\sum_{i \in I} a_i$  soit divisible par  $n$ .

15. Soit  $r$  un nombre rationnel non décimal de  $]0, 1[$  de forme irréductible  $\frac{p}{q}$  et de développement décimal propre :

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}.$$

1. Montrer que la suite  $(c_n)_{n>0}$  devient périodique et déterminer sa plus petite période en fonction des restes modulo  $q$  des entiers  $10^n p$ .
2. Montrer que lorsque  $q$  est premier avec 10, cette plus petite période est l'ordre de la classe de 10 dans le groupe des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .

16. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme  $4k - 1$ .

17. Soit  $p$  un nombre premier différent de 2.

1. Montrer que  $-1$  est un carré dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  si, et seulement si,  $p$  est de la forme  $4k + 1$ . Dans ce cas, donner explicitement un entier de carré  $-1$  modulo  $p$  en utilisant le théorème de Wilson.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme  $4k + 1$ .

18. Soit  $p$  un nombre premier différent de 2.

1. Montrer que le groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  est cyclique.
2. Montrer que pour tout entier relatif  $a$  non divisible par  $p$ , la puissance  $a^{\frac{p-1}{2}}$  est congrue à 1 ou  $-1$  modulo  $p$  et qu'elle est congrue à 1 si, et seulement si,  $a$  est le carré d'un entier modulo  $p$ .
3. Pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ , on note  $\left(\frac{a}{p}\right)$  le nombre entier  $\pm 1$  congru à  $a^{\frac{p-1}{2}}$  modulo  $p$  lorsque  $a$  n'est pas divisible par  $p$  et, 0 lorsque  $p$  divise  $a$ . Montrer que l'on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right).$$

4. Soit  $a$  un entier relatif non divisible par  $p$ . Montrer que l'application  $x \mapsto \bar{a}x$  est une permutation de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et calculer sa signature.

19. L'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  muni du produit :

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$$

est une  $\mathbb{C}$ -algèbre notée  $\mathbb{C}^n$ .

1. Déterminer le polynôme minimal d'un élément  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  de  $\mathbb{C}^n$ .
2. Montrer que  $\mathbb{C}^n$  est monogène. Préciser ses générateurs et leurs polynômes minimaux.
3. Déterminer tous les automorphismes de  $\mathbb{C}^n$ .

20. Soient  $A$  un entier naturel non carré d'un entier naturel et  $\omega = \sqrt{A}$ . Le but de cet exercice est de déterminer tous les d'entiers positifs  $(m, n)$  vérifiant l'équation de Fermat :

$$m^2 - An^2 = \pm 1.$$

1. Montrer que  $(1, \omega)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{Q}$  et que l'ensemble :

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{x = n + m\omega \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$$

est un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que l'application :

$$N : n + m\omega \mapsto m^2 - An^2$$

de  $\mathbb{Z}[\omega]$  vers  $\mathbb{Z}$  vérifie  $N(xy) = N(x)N(y)$ . En déduire qu'un élément  $x$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[\omega]$  si, et seulement si, il vérifie  $N(x) = \pm 1$ .

3. Montrer qu'un élément inversible  $x = n + m\omega$  est strictement supérieur à 1 si, et seulement si,  $n > 0$  et  $m > 0$ . En déduire que le groupe  $G$  des éléments inversibles positifs de  $\mathbb{Z}[\omega]$  est, soit réduit à  $\{1\}$ , soit de la forme  $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  avec  $a > 1$ . Dans ce dernier cas,  $a$  s'appelle l'unité fondamentale de  $[\omega]$  (on peut montrer que  $G$  n'est jamais réduit à  $\{1\}$ ).
4. Déterminer l'unité fondamentale de  $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ . En déduire toutes les solutions  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  de :

$$m^2 - 10n^2 = \pm 1 \quad \text{et} \quad m^2 - 10n^2 = 1.$$



## Chapitre 4

# Algèbre linéaire

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre ne sont pas nécessairement de dimension finie.

Dans ce qui suit,  $\mathbf{K}$  désigne un corps commutatif et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ .

### 1. Familles génératrices, familles libres et bases

Soit  $I$  un ensemble *quelconque*.

#### 1.1 Combinaisons linéaires

##### Familles à support fini

Soient  $(G, +)$  un groupe additif.

On appelle *support* d'une famille  $(g_i) \in G^I$ , l'ensemble :

$$\text{supp}(g_i) = \{i \in I \mid g_i \neq 0\}$$

On dira que  $(g_i)$  est à *support fini*, ou est *presque nulle*, lorsque cet ensemble est fini.

L'ensemble des familles à *support fini* de  $G$  est évidemment un sous-groupe de  $G^I$  que l'on notera  $G^{(I)}$ . On a alors la définition suivante :

**Définition 1**

Si  $(g_i) \in G^{(I)}$  est de support fini  $S$ , on appelle somme de  $(g_i)$  sur  $I$ , et l'on note :

$$\sum_{i \in I} g_i,$$

la somme finie  $\sum_{i \in S} g_i$ .

Cette somme est bien sûr égale à la somme  $\sum_{i \in K} g_i$  pour toute partie  $K$  finie de  $I$  contenant le support de  $(g_i)$ .

Dans ce qui suit, nous utiliserons principalement l'ensemble  $\mathbf{K}^{(I)}$  des familles de scalaires à support fini. La relation :

$$\text{supp}(\lambda(\alpha_i) + \gamma(\beta_i)) \subset \text{supp}(\alpha_i) \cup \text{supp}(\beta_i)$$

montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}^I$ .

**Combinaisons linéaires**

Soit  $(x_i) \in E^I$  une famille quelconque.

Pour toute famille  $(\alpha_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$ , la famille  $(\alpha_i x_i)$  est à support fini. Cela permet la définition suivante :

**Définition 2**

On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs de  $(x_i)$  toute somme de la forme :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$$

où  $(\alpha_i)$  est une famille de scalaires à support fini.

La proposition suivante est immédiate :

**Proposition 1**

L'application  $(\alpha_i) \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$  est une application linéaire de  $\mathbf{K}^{(I)}$  vers  $E$  appelée application linéaire canoniquement associée à  $(x_i)$ .

**Corollaire 2**

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de  $(x_i)$  est le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble  $\{x_i \mid i \in I\}$ .

**Démonstration** L'ensemble  $F$  des combinaisons linéaires des vecteurs de  $(x_i)$  est le sous-espace vectoriel image de l'application linéaire canonique associée à  $(x_i)$ . C est évidemment le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les  $x_i$ .  $\square$

**1.2 Familles génératrices, familles libres et bases****Définitions**

Soit  $(x_i) \in E^I$ .

**Définition 3**

On dit que  $(x_i)$  est :

- une famille *génératrice* si :

$$\forall x \in E, \quad \exists (\alpha_i) \in \mathbf{K}^{(I)} : x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$$

- une famille *libre* si :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbf{K}^{(I)}, \quad \sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0 \implies (\alpha_i) = 0$$

- une *base* si c'est une famille libre et génératrice.

► **Attention** Rappelons une dernière fois que toutes les familles de scalaires utilisées sont à support fini et appartiennent donc à  $\mathbf{K}^{(I)}$ .

Soit  $\varphi$  l'application linéaire de  $\mathbf{K}^{(I)}$  vers  $E$  canoniquement associée à  $(x_i)$

**Proposition 3**

La famille  $(x_i)$  est génératrice, libre ou est une base si, et seulement si,  $\varphi$  est respectivement surjective, injective ou bijective.

On dit que la famille  $(x_i)$  est *liée* lorsqu'elle n'est pas libre. Dans ce cas, il existe une famille  $(\alpha_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$  non nulle telle que l'on ait :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0.$$

Une telle relation s'appelle une *relation de liaison* de  $(x_i)$ . C'est bien sûr une relation de liaison de la famille finie  $(x_i)_{i \in S}$  où  $S$  est le support non vide de  $(\alpha_i)_{i \in I}$ . Ainsi, une famille est libre si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.

**Exemple** Montrons que la famille  $(e^{ax})_{a \in \mathbb{C}}$  est libre dans l'espace vectoriel complexe  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

Si ce n'est pas le cas, elle est liée et on peut choisir une relation de liaison :

$$\sum_{a \in I} \alpha_a e^{ax} = 0 \quad (1)$$

dont le support  $S$ , support de  $(\alpha_a)$ , soit de cardinal minimal. Les applications  $x \rightarrow e^{ax}$  étant non nulles, l'ensemble  $S$  possède au moins deux éléments. Soit  $a_1 \in S_1$ . En dérivant (1), on obtient :

$$\sum_{a \in I} \alpha_a a e^{ax} = 0. \quad (2)$$

La combinaison linéaire (2) -  $a_1$ (1) nous fournit alors la relation de liaison

$$\sum_{a \in I} \alpha_a (a - a_1) e^{ax} = 0$$

de support  $S \setminus \{a_1\}$  strictement plus petit.

Cette contradiction montre ce que l'on voulait.

## Bases

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ .

### Proposition 4

Pour tout vecteur  $x \in E$ , il existe une unique famille  $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$  telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i.$$

La famille  $(\alpha_i)$  s'appelle la famille des *coordonnées* (ou *composantes*) de  $x$  dans  $(e_i)$ .

**Exemple** Considérons l'espace vectoriel  $\mathbb{K}[X]$ .

La famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$  ; tout polynôme  $P$  peut, en effet, être écrit :

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n X^n$$

pour une unique famille  $(\alpha_n) \in \mathbf{K}^{(\mathbb{N})}$ . La famille des coefficients de  $P$  est donc la famille des coordonnées dans la base  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Cette base s'appelle la *base canonique* de  $\mathbf{K}[X]$ .

Toute famille  $(P_n) \in \mathbf{K}[X]^{\mathbb{N}}$  vérifiant  $\deg P_n = n$  pour tout  $n$  est une base de  $\mathbf{K}[X]$ . On sait, en effet, que la famille  $(P_n)_{n \in \llbracket 0, p \rrbracket}$  est une base de  $\mathbf{K}_p[X]$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . La famille  $(P_n)$  est donc génératrice. Elle est libre parce que toutes ses sous-familles finies sont libres.

### Cas des espaces de dimension finie

La proposition suivante précise les propriétés des familles génératrices, libres ou des bases indexées par un ensemble quelconque des espaces vectoriel de dimension finie. Elle ne provient pas immédiatement des propriétés vues dans le cours de première année où l'on se limitait aux familles *finies*.

#### Proposition 5

Supposons que  $E$  soit de dimension finie  $n$ .

Toute famille génératrice contient une sous-famille génératrice finie et, par conséquent, une base de  $E$ .

Toute famille libre de  $E$  est finie et a au plus  $n$  éléments.

Toute base de  $E$  est finie et a  $n$  éléments.

#### Démonstration

- Supposons que  $(g_i) \in E^I$  soit génératrice. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , il existe pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , une partie finie  $J_k \subset I$  telle que  $e_k$  appartienne au sous-espace engendré par  $(g_i)_{i \in J_k}$ . Notons alors  $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$ . Il est clair que la famille finie  $(g_i)_{i \in J}$  engendre  $E$ . Le théorème de la base incomplète du cours de première année montre alors qu'il existe une partie  $K$  de  $J$  telle que  $(g_i)_{i \in K}$  soit une base de  $E$ .
- Supposons que  $(e_i) \in E^I$  soit libre. Pour toute partie finie  $K$  de  $I$ , la sous-famille finie  $(e_i)_{i \in K}$  est libre et, par conséquent,  $K$  a moins de  $n$  éléments. L'ensemble  $I$  ne peut donc être infini ou de cardinal strictement supérieur à  $n$ .
- Cela provient du point précédent. □

### Applications polynomiales sur $\mathbf{K}^n$

Dans ce sous-paragraphe,  $\mathbf{K}$  désigne un corps *infini* et  $n$  un entier strictement positif.

L'espace des formes linéaires sur  $\mathbf{K}^n$  est naturellement rapporté à la base des formes coordonnées :

$$\varepsilon_i^* : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n \rightarrow x_i \in \mathbf{K}$$

dans la base canonique  $(\varepsilon_i)_{i \in [1, n]}$  de  $\mathbf{K}^n$ . Dans ce qui suit, nous noterons  $x_i$  la  $i^{\text{ième}}$  forme coordonnée  $\varepsilon_i^*$ . La forme linéaire  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i^*$  s'écrira alors :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

On appelle alors *application monôme*, ou *monôme*, toute application de  $\mathbf{K}^n$  vers  $\mathbf{K}$  de la forme  $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$  pour  $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  et *application polynomiale*, ou *polynôme*, toute combinaison linéaire de monôme c'est-à-dire toute application de  $\mathbf{K}^n$  vers  $\mathbf{K}$  de la forme :

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n) \in K} \alpha_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

où  $K$  est une partie finie de  $\mathbb{N}^n$ . Il est alors immédiat que toute combinaison linéaire et tout produit d'applications polynomiales est encore une application polynomiale.

#### Définition 4

L'ensemble des applications polynomiales sur  $\mathbf{K}^n$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$ , appelée *algèbre des applications polynomiales* sur  $\mathbf{K}^n$  et notée  $\mathcal{P}(\mathbf{K}^n)$ .

#### Proposition 6

L'algèbre des applications polynomiales sur  $\mathbf{K}^n$  est la plus petite sous-algèbre de  $\mathcal{F}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$  contenant les applications coordonnées  $x_i$ . On la note aussi  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Démonstration** Toute sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{F}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$  contenant les formes coordonnées contient évidemment les monômes et, par conséquent,  $\mathcal{P}(\mathbf{K}^n)$ . □

L'algèbre  $\mathcal{P}(\mathbf{K}^n)$  est aussi la plus petite sous-algèbre de la  $\mathbf{K}$ -algèbre  $\mathcal{F}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$  contenant les formes linéaires sur  $\mathbf{K}^n$ .

Lorsque  $n = 1$ , l'application monôme  $x$  est l'application identité  $\text{Id}_{\mathbf{K}}$ . L'algèbre  $\mathbf{K}[x]$  est alors la sous-algèbre de  $\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$  image du morphisme d'évaluation de

$\mathbf{K}[X]$  vers  $\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$  qui associe à tout polynôme  $P$  la fonction polynomiale  $P(x)$  correspondante. Puisque  $\mathbf{K}$  est infini, ce morphisme réalise un isomorphisme de  $\mathbf{K}[X]$  sur  $\mathbf{K}[x]$ . On en déduit en particulier que la famille  $(x^k)_{k \in \mathbf{N}}$  est une base de  $\mathbf{K}[x]$  et que cette algèbre est intègre.

Le théorème suivant étend ces résultats au cas  $n > 1$ .

**Théorème 7**

La famille  $(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n}$  est une base de  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ .  
 L'algèbre  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$  est intègre.

**Démonstration** Soient  $a \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $\varphi_a$  l'application  $x \mapsto (1, x^a, \dots, x^{a^{n-1}})$  de  $\mathbf{K}$  vers  $\mathbf{K}^n$ .

Pour toute application polynomiale  $P = \sum \alpha_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ , l'application composée  $P \circ \varphi_a$  est l'application polynomiale :

$$\sum_{k \in K} \alpha_{k_1, \dots, k_n} x^{k_1 a^0 + k_2 a^1 + \dots + k_n a^{n-1}}$$

de  $\mathbf{K}[x]$ . Il est alors immédiat que l'application  $\Phi_a : P \mapsto P \circ \varphi_a$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$  vers  $\mathbf{K}[x]$ .

L'image par  $\Phi_a$  de la famille  $(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket^n}$  est la famille des applications monômes en :

$$(x^{k_1 a^0 + k_2 a^1 + \dots + k_n a^{n-1}})_{(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket^n}$$

L'unicité de l'écriture des entiers en base  $a$  montre alors que les exposants :

$$(k_1 a^0 + k_2 a^1 + \dots + k_n a^{n-1})_{(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket^n}$$

sont deux à deux distincts. Comme  $\mathbf{K}$  est infini, la famille des monômes :

$$(x^{k_1 a^0 + k_2 a^1 + \dots + k_n a^{n-1}})_{(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket^n}$$

est libre. On en déduit que la famille  $\mathcal{M}_a = (x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket^n}$  est libre et que  $\Phi_a$  est injective sur le sous-espace qu'elle engendre

Dans ce qui suit, on notera  $\mathcal{M}_a$  la famille  $(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket^n}$

- La famille des applications monômes engendre  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$  par définition. Pour montrer qu'elle est libre, il suffit de vérifier que toutes ses sous-familles finies le sont aussi. Cela provient évidemment du point précédent puisque toute famille finie d'applications monômes est une sous-famille de  $\mathcal{M}_a$  pour  $a$  assez grand.

- De même deux applications polynomiales  $P$  et  $Q$  de  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$  sont contenues dans le sous-espace engendré par  $\mathcal{M}_a$  pour  $a$  assez grand. Si elles sont non nulles, l'injectivité de  $\Phi_a$  sur le sous-espace engendré par  $\mathcal{M}_a$  et l'intégrité de  $\mathbf{K}[x]$  montrent que le produit  $\Phi_a(P)\Phi_a(Q)$  est différent de 0. La relation :

$$\Phi_a(P)\Phi_a(Q) = \Phi_a(PQ)$$

prouve alors que  $PQ$  est non nul. □

Le théorème précédent permet de préciser l'écriture des applications polynomiales. On obtient les points suivants :

- toute application polynomiale  $P$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$P = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n} \alpha_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

avec  $(\alpha_{k_1, \dots, k_n}) \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N}^n)}$ . On dit que l'application monôme  $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$  apparaît, ou est contenue, dans  $P$  si  $\alpha_{k_1, \dots, k_n}$  est non nul ;

- on appelle *degré* d'une application polynomiale non nulle  $P$ , et l'on note  $\deg P$ , le plus grand entier  $k_1 + \cdots + k_n$  telle que  $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$  apparaisse dans  $P$ . On pose par définition  $\deg 0 = -\infty$ . Par exemple, l'application polynomiale sur  $\mathbf{K}^2$  :

$$P = x_1x_2 + 3 + x_1 + x_1x_2^3 + x_1^3x_2$$

est de degré 4 ;

- on appelle application polynomiale *homogène* toute application polynomiale ne contenant que des applications monômes de même degré. Toute application polynomiale  $P$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$P = \sum_{p \in \mathbf{N}} P_p$$

où  $(P_p)$  est une famille à support fini d'applications polynomiales telles que  $P_p$  soit homogène de degré  $p$ . L'application polynomiale  $P_p$  s'appelle la composante homogène de degré  $p$  de  $P$ . Il est évident que le degré d'une application polynomiale non nulle  $P$  est le plus grand  $p$  tel que  $P_p$  soit non nul. Les composantes homogènes de l'application polynomiale donnée en exemple dans le point précédent sont indiquées entre parenthèses dans l'écriture :

$$P = (3) + (x_1) + (x_1x_2) + (x_1x_2^3 + x_1^3x_2)$$

- on a les relations :

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$



et :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q ;$$

On obtient immédiatement l'inégalité  $\deg(PQ) \leq \deg P + \deg Q$ . On prouve l'égalité en remarquant lorsque  $P$  et  $Q$  sont non nuls que le produit des composantes homogènes de plus haut degré de ces applications polynomiales est non nul par intégrité.

### 1.3 Détermination d'une application lineaire

Soient  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $F$ .

**Proposition 8**

Il existe une et une seule application linéaire  $u$  de  $E$  vers  $F$  telle que :

$$\forall i \in I, \quad u(e_i) = f_i$$

Cette application est surjective, injective ou bijective si, et seulement si,  $(f_i)_{i \in I}$  est respectivement génératrice, libre ou est une base

**Démonstration** On vérifie que l'application définie par :

$$u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i.$$

si  $x \in E$  s'écrit  $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$  avec  $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$  est l'unique application linéaire qui convient. La seconde assertion se démontre comme dans le cas de la dimension finie □

## 2. Produit, somme et somme directe

Soit  $I$  un ensemble fini.

### 2.1 Produit d'une famille d'espaces vectoriels

Soient  $(F_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

L'ensemble produit  $\prod_{i \in I} F_i$  muni des lois produit définies par :

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \quad \text{et} \quad \alpha(x_i) = (\alpha x_i)$$

est évidemment un espace vectoriel. Cela conduit à la définition suivante :

**Définition 5**

On appelle *espace vectoriel produit* de la famille  $(F_i)_{i \in I}$ , et l'on note :

$$\prod_{i \in I} F_i,$$

l'espace vectoriel formé de  $\prod_{i \in I} F_i$  muni des lois produits.

L'espace vectoriel produit est noté  $E^I$  lorsque les  $E_i$  sont égaux à un même espace vectoriel  $E$  et s'identifie naturellement à l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(I, E)$  des applications de  $I$  vers  $E$ .

Il est noté  $\prod_{i=1}^p F_i$  ou :

$$F_1 \times \cdots \times F_p$$

lorsque l'on considère une famille finie de la forme  $(F_1, \dots, F_p)$ .

Par définition des lois produit, les projections canoniques  $\pi_i : (x_j) \mapsto x_i$  de  $\prod_{j \in I} F_j$  vers  $F_i$  sont linéaires et une application  $u$  d'un espace vectoriel  $G$  vers  $\prod_{i \in I} F_i$  est linéaire si, et seulement si, ses composantes  $u_i = \pi_i \circ u$  sont linéaires.

L'application linéaire  $u \mapsto (\pi_i \circ u)$  de  $\mathcal{L}(G, \prod_{i \in I} F_i)$  vers  $\prod_{i \in I} \mathcal{L}(G, F_i)$  est donc un isomorphisme. On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 9**

Pour toute famille  $(u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{L}(G, F_i)$ , il existe une et une seule application linéaire  $u \in \mathcal{L}(G, \prod_{i \in I} F_i)$  telle que  $u_i = \pi_i \circ u$  pour tout  $i$ . Cette application donnée par  $u(g) = (u_i(g))_{i \in I}$  pour tout  $g \in G$ , est notée  $\prod_{i \in I} u_i$ .

**Remarque** Il n'est évidemment pas indispensable de supposer  $I$  fini dans la définition et la proposition précédentes. Par exemple, si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base finie ou non de  $E$  et  $F$  un espace vectoriel, la proposition 8 de la page 89 montre que l'application linéaire :

$$u \mapsto (u(e_i))_{i \in I}$$

est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(E, F)$  sur  $F^I$ .

L'identification canonique  $((x_1, \dots, x_{p-1}), x_p) = (x_1, \dots, x_p)$  permet d'écrire :

$$(F_1 \times \dots \times F_{p-1}) \times F_p = F_1 \times \dots \times F_p.$$

On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 10**

Si les espaces vectoriels  $F_i$  sont de dimension finie pour tout  $i$ , alors l'espace vectoriel  $\prod_{i \in I} F_i$  est de dimension finie et :

$$\dim \prod_{i \in I} F_i = \sum_{i \in I} \dim F_i.$$

**Démonstration** Cette proposition est connue lorsque  $I$  a 2 éléments. Le cas général s'en déduit par récurrence. □

## 2.2 Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels  $E$ .

**Définition 6**

On appelle *somme* des sous-espaces vectoriels de  $(E_i)_{i \in I}$  le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i \in I} E_i = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid (x_i) \in \prod_{i \in I} E_i \right\}.$$

**Démonstration** L'ensemble  $\sum_{i \in I} E_i$  est un sous-espace vectoriel comme image de l'application linéaire  $(x_i) \mapsto \sum_{i \in I} x_i$  de  $\prod_{i \in I} E_i$  vers  $E$ . □

Lorsque  $I = \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note aussi  $E_1 + \dots + E_p$  la somme  $\sum_{i \in I} E_i$ .

La somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion des  $E_i$ . De plus, si  $J$  et  $K$  sont deux ensembles de réunion  $I$ , on a :

$$\sum_{i \in I} E_i = \sum_{i \in J} E_i + \sum_{i \in K} E_i.$$

Lorsque  $E$  est de dimension finie, la surjection linéaire de  $\prod_{i \in I} E_i$  sur  $\sum_{i \in I} E_i$  montre l'inégalité :

$$\dim \sum_{i \in I} E_i \leq \sum_{i \in I} \dim E_i.$$

### 2.3 Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

#### Définition 7

On dit que la famille  $(E_i)_{i \in I}$  est en *somme directe* si l'on a :

$$\forall (x_i) \in \prod_{i \in I} E_i, \quad \sum_{i \in I} x_i = 0 \implies (x_i) = 0.$$

On désigne alors sa somme par :

$$\bigoplus_{i \in I} E_i.$$

Lorsque  $I = \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$  la somme  $\bigoplus_{i \in I} E_i$ .

#### Proposition 11

La famille  $(E_i)_{i \in I}$  est en somme directe si, et seulement si, l'application linéaire  $(x_i) \mapsto \sum_{i \in I} x_i$  de  $\prod_{i \in I} E_i$  vers  $E$  est injective.

**Démonstration** Par définition, la famille  $(E_i)_{i \in I}$  est en somme directe si le noyau de l'application considérée est réduit à  $\{0\}$ . □

Toute sous-famille d'une famille en somme directe est aussi en somme directe. De plus, si  $(J, K)$  est une partition de  $I$ , la famille  $(E_i)_{i \in I}$  est en somme directe si, et seulement si, les familles :

$$(E_i)_{i \in J}, \quad (E_i)_{i \in K} \quad \text{et} \quad \left( \sum_{i \in J} E_i, \sum_{i \in K} E_i \right)$$

le sont. Dans ces conditions, on a :

$$\bigoplus_{i \in I} E_i = \left( \bigoplus_{i \in J} E_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \in K} E_i \right).$$

**Remarques**

- Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  de vecteurs non nuls est libre si, et seulement si, la famille  $(\mathbb{K}e_i)_{i \in I}$  est en somme directe.
- Un couple  $(F, G)$  de sous-espaces vectoriels est en somme directe si, et seulement si,  $F \cap G = \{0\}$ .
- Si la famille  $(E_i)_{i \in I}$  est en somme directe, le point précédent montre que l'on a  $E_i \cap E_j = \{0\}$  pour tout  $i \neq j$ . Il prouve aussi que cette condition est suffisante lorsque  $I$  possède deux éléments. L'exemple de la famille :

$$(\mathbb{K}(1, 0), \mathbb{K}(0, 1), \mathbb{K}(1, 1))$$

de sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^2$  montre qu'elle ne l'est plus lorsque le cardinal de  $I$  est supérieur ou égal à 3.

**Proposition 12**

Supposons que les sous-espaces vectoriels  $E_i$  soient de dimension finie pour tout  $i$ . La famille  $(E_i)_{i \in I}$  est en somme directe si, et seulement si, on a :

$$\dim \sum_{i \in I} E_i = \sum_{i \in I} \dim E_i.$$

**Démonstration** L'application surjective  $(x_i) \mapsto \sum_{i \in I} x_i$  de  $\prod_{i \in I} E_i$  sur  $\sum_{i \in I} E_i$  est, en effet, un isomorphisme si, et seulement si, les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension  $\square$

**2.4 Décomposition en somme directe**

**Définition 8**

On appelle *décomposition en somme directe* de  $E$  toute famille  $(E_i)_{i \in I}$  de sous-espaces vectoriels de  $E$  telle que :

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i.$$

La famille  $(E_i)_{i \in I}$  est une décomposition en somme directe de  $E$  si et seulement si, l'application  $(x_i) \mapsto \sum_{i \in I} x_i$  est un isomorphisme de  $\prod_{i \in I} E_i$  sur  $E$  ou, pour dire les choses d'une autre façon, si, et seulement si, tout élément  $x$  de  $E$  peut s'écrire sous la forme  $x = \sum_{i \in I} x_i$  pour une unique famille  $(x_i)$  de  $\prod_{i \in I} E_i$ .

Un couple  $(F, G)$  de sous-espaces de  $E$  est une décomposition en somme directe de  $E$  si, et seulement si,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

**Exemple** Si  $P$  est un polynôme de degré  $n$ , on a la décomposition en somme directe :

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus (P)$$

où  $(P)$  est l'idéal engendré par  $P$ .

L'existence et l'unicité de division euclidienne montre, en effet, que tout polynôme  $S$  peut s'écrire de façon unique  $S = PT + R$  avec  $\deg R < \deg P$ .

Dans ce qui suit, nous supposons que  $E$  est décomposé en la somme directe :

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i. \quad (D)$$

► **Attention** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on a évidemment :

$$\bigoplus_{i \in I} (F \cap E_i) \subset F$$

mais pas nécessairement :

$$F = \bigoplus_{i \in I} (F \cap E_i).$$

Par exemple, on a  $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K}(1, 0) \oplus \mathbb{K}(0, 1)$  mais le sous-espace  $F = \mathbb{K}(1, 1)$  n'est pas égal à la somme directe :

$$\left( F \cap \mathbb{K}(1, 0) \right) \oplus \left( F \cap \mathbb{K}(0, 1) \right)$$

qui est réduit à  $\{0\}$ .

### Systeme de projecteurs

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, tout vecteur  $x$  de  $E$  peut s'écrire sous la forme  $x = \sum_{i \in I} x_i$  pour une unique famille  $(x_i)$  de  $\prod_{i \in I} E_i$ . Les éléments de  $(x_i)$  s'appellent alors les *composantes* de  $x$ .

L'application  $p_i$  qui associe à tout  $x$  sa  $i^{\text{ième}}$  composante  $x_i$  est la projection de  $\mathcal{L}(E)$  de noyau  $\bigoplus_{j \neq i} E_j$  et d'image  $E_i$ . On l'appelle le  $i^{\text{ième}}$  *projecteur* ou la  $i^{\text{ième}}$  *projection* associée à (D). On obtient aisément la proposition suivante :

**Proposition 13**

La famille  $(p_i)$  des projections associées à la décomposition (D) vérifie les points suivants :

1.  $\sum_{i \in I} p_i = \text{Id}_E$ ,
2.  $p_i^2 = p_i$  pour tout  $i$ ,
3.  $p_i \circ p_j = 0$  pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ .

*Exemple* Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $E$  et  $p$  la projection de  $E$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ , la famille de projecteurs associés à  $E = F \oplus G$  est  $(p, \text{Id}_E - p)$ .

La proposition précédente admet la réciproque suivante :

**Proposition 14**

Toute famille  $(p_i)_{i \in I}$  d'endomorphismes de  $E$  vérifiant les relations de la proposition précédente est la famille des projections associées à une unique décomposition en somme directe.

**Démonstration** Notons  $E_i = \text{Im } p_i$  pour tout  $i$ .

La première relation montre que tout  $x \in E$  s'écrit  $x = \sum_{i \in I} p_i(x)$  et qu'ainsi  $E = \sum_{i \in I} E_i$ .

Soit alors  $(x_i) \in \prod_{i \in I} E_i$  tel que  $\sum_i x_i = 0$ . L'endomorphisme  $p_i$  étant un projecteur d'image

$E_i$ , on a  $p_i(x_i) = x_i$  pour tout  $i$ . Il vient alors :

$$0 = p_i \left( \sum_{j \in I} x_j \right) = \sum_{j \in I} (p_i \circ p_j)(x_j) = x_i$$

pour tout  $i$ . Finalement  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  et  $(p_i)$  est la famille de projecteurs associés car  $\text{Ker } p_i$  est

égal à  $\bigoplus_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} E_j$ . □

**Somme directe d'une famille d'applications linéaires**

Soient  $F$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  et  $(u_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{L}(E_i, F)$  une famille d'applications linéaires.

**Proposition 15**

Il existe une et une seule application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que la restriction de  $u$  à  $E_i$  soit égale à  $u_i$  pour tout  $i$ . Si  $x \in E$  est écrit  $x = \sum_{i \in I} x_i$  dans la décomposition (D), on a  $u(x) = \sum_{i \in I} u_i(x_i)$ . On l'appelle *somme directe de la famille d'applications linéaires*  $(u_i)$  et on la note  $\bigoplus_{i \in I} u_i$ .

**Démonstration** Soit  $x = \sum_{i \in I} x_i$ . Si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  dont les restrictions aux  $E_i$  sont les  $u_i$ , on a :

$$u(x) = \sum_{i \in I} u(x_i) = \sum_{i \in I} u_i(x_i).$$

Cela montre l'unicité. On termine alors en vérifiant que cette formule définit un endomorphisme satisfaisant à nos exigences.  $\square$

**Bases adaptées à une décomposition en somme directe**

Soient  $K$  un ensemble quelconque et  $(K_i)_{i \in I}$  une partition de  $K$  indexée par  $I$ .

Toute famille  $(x_k)_{k \in K}$  est uniquement déterminée par la famille de ses sous-familles  $(x_k)_{k \in K_i}$  ; on dit par abus de langage que  $(x_k)_{k \in K}$  est la *réunion* des  $(x_k)_{k \in K_i}$ .

On dit qu'une famille  $(x_k) \in E^K$  est *adaptée* à la décomposition en somme directe (D) si l'on a :

$$\forall k \in K_i, \quad x_k \in E_i$$

pour tout  $i \in I$ . On construit évidemment une famille adaptée à (D) en réunissant des familles  $(x_k)_{k \in K_i} \in E_i^{K_i}$ .

**Définition 9**

Une famille adaptée qui est une base s'appelle une *base adaptée* à la somme directe (D).

**Proposition 16**

Une famille  $(x_k)_{k \in K} \in E^K$  adaptée à (D) est une base de  $E$  si et seulement si, pour tout  $i$ , la famille  $(x_k)_{k \in K_i}$  est une base de  $E_i$ .



**Démonstration** Supposons que, pour tout  $i$ ,  $(x_k)_{k \in K_i}$  soit une base de  $E_i$ . Il est clair que tout vecteur de  $E$ , qui s'écrit comme somme d'éléments des  $E_i$ , est une combinaison linéaire des vecteurs de  $(x_k)_{k \in K}$ . Soit maintenant  $(\alpha_k) \in \mathbf{K}^{(K)}$  telle que  $\sum_k \alpha_k x_k = 0$ . Par projection par  $p_i$ , on obtient  $\sum_{k \in K_i} \alpha_k x_k = 0$  pour tout  $i$ , soit  $\alpha_k = 0$  pour tout  $k$ . Finalement  $(x_k)_{k \in K}$  est une base de  $E$ .

Supposons que  $(x_k)_{k \in K}$  soit une base de  $E$ . Soit  $i \in I$ , la famille  $(x_k)_{k \in K_i}$ , sous-famille de  $(x_k)_{k \in K}$ , est libre. Elle engendre  $E_i$  comme famille des vecteurs non nuls de la famille image de  $(x_k)_{k \in K}$  par  $p_i$ . □

On obtient donc une base adaptée à la somme directe (D) en réunissant des bases des  $E_i$ . On fera attention à ce qu'une base de  $E$  n'est pas en général adaptée à (D).

**Remarques**

- Il est facile de montrer que lorsque  $(x_k)_{k \in K}$  est une base, la famille  $(E_i)_{i \in I}$  où  $E_i = \text{Vect}((x_k)_{k \in K_i})$  pour tout  $i$  est une décomposition en somme directe de  $E$  et que  $(x_k)_{k \in K}$  lui est adaptée.
- Si  $(x_k)_{k \in K} \in E^K$  est une base adaptée à la somme directe (D), on a évidemment, en dimension finie,  $\text{card } K_i = \dim E_i$  pour tout  $i$ . On retrouve ainsi la relation :

$$\dim E = \sum_{i \in I} \dim E_i.$$

Supposons que  $E$  soit de dimension  $n$ .

On décrit généralement les bases adaptées à une décomposition en somme directe de la forme :

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p,$$

en utilisant l'unique partition  $(K_i)_{i=1}^p$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  formée d'intervalles d'entiers consécutifs de longueurs égales aux dimensions des  $E_i$ . Cette partition est donnée, en notant  $n_i$  la dimension de  $E_i$ , par :

$$K_i = \llbracket n_1 + \dots + n_{i-1} + 1, n_1 + \dots + n_i \rrbracket$$

pour tout  $i$ .

En particulier si  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , on appelle *base adaptée au sous-espace  $F$*  toute base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $(e_1, \dots, e_r)$  soit une base de  $F$  où  $r = \dim F$ . Une telle base est alors adaptée à la décomposition en somme directe :

$$E = F \oplus \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n).$$

### 3. Applications linéaires

#### 3.1 Sous-espaces stables

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

##### Définition

##### Définition 10

Un sous-espace  $F$  de  $E$  est dit *stable* par  $u$  lorsque l'on a :

$$u(F) \subset F.$$

On dit aussi que  $u$  *stabilise*  $F$ .

##### Exemples

1. Les sous-espaces  $\{0\}$  et  $E$  sont stables par tout endomorphisme. On dit que l'action de  $u$  sur  $E$  est irréductible lorsqu'il n'y a pas d'autre sous-espace stable par  $u$ . Par exemple, l'action d'une rotation d'angle  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$  du plan euclidien est irréductible.
2. À l'opposé, une homothétie stabilise tous sous-espaces de  $E$ . Il est facile de montrer que, réciproquement, cette propriété caractérise ces endomorphismes.
3. Tout sous-espace inclus dans le noyau de  $u$  ou contenant son image est stable par  $u$ .

Il est clair que l'intersection et la somme de sous-espaces stables par  $u$  sont stables par  $u$ .

**Exemple** Soit  $x$  un vecteur de  $E$ . Le sous-espace :

$$\text{Vect} \{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $x$  et stable par  $u$ .

En effet, ce sous-espace est évidemment contenu dans tout sous-espace contenant  $x$  et stable par  $u$ . Les relations  $x = u^0(x)$  et :

$$u(u^k(x)) = u^{k+1}(x)$$

pour tout  $k$  montrent qu'il contient  $x$  et est stable par  $u$ .

##### Proposition 17

Les sous-espaces noyau et image d'un endomorphisme  $v \in \mathcal{L}(E)$  commutant avec  $u$  sont stables par  $u$ .

**Démonstration** Soit  $x \in \text{Ker } v$ . On a

$$v(u(x)) = u(v(x)) = u(0) = 0$$

et  $u(x) \in \text{Ker } v$ . Le noyau de  $v$  est donc stable par  $u$ .

Soit, de même,  $y \in \text{Im } v$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $y = v(x)$ . On obtient :

$$u(y) = u(v(x)) = v(u(x))$$

soit  $u(y) \in \text{Im } v$ . L'image de  $v$  est donc stable par  $u$ . □

### Endomorphisme induit

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$ .

#### Définition 11

Si  $F$  est stable par  $u$ , on appelle endomorphisme *induit* par  $u$  sur  $F$  l'endomorphisme  $u_F \in \mathcal{L}(F)$  associant à tout élément de  $x \in F$  la valeur  $u(x)$ .

► **Attention** On ne peut parler d'endomorphisme induit par  $u$  sur le sous-espace  $F$  que dans la mesure où  $F$  est stable par  $u$ . Dans ce cas, on distinguera soigneusement l'endomorphisme induit  $u_F$ , qui est une application linéaire de  $F$  vers  $F$ , de la restriction  $u|_F$  qui est une application linéaire de  $F$  vers  $E$ .

L'image de  $u_F$  est évidemment  $u(F)$  et son noyau  $F \cap \text{Ker } u$ .

#### Proposition 18

L'ensemble  $\mathcal{L}_F(E)$  des endomorphismes stabilisant  $F$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .

L'application  $u \mapsto u_F$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$ .

### Démonstration

► Soient  $(u, v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$ . Pour tout  $x \in F$ , on a  $u(x) \in F$ ,  $v(x) \in F$  et par suite :

$$(\alpha u + \beta v)(x) \in F.$$

L'application  $\alpha u + \beta v$  appartient donc à  $\mathcal{L}_F(E)$  et  $(\alpha u + \beta v)_F = \alpha u_F + \beta v_F$ .

Pour tout  $x \in F$  on a  $v(x) \in F$  et  $u(v(x)) \in F$  et, par conséquent :

$$(u \circ v)(x) = u_F(v_F(x)).$$

L'application  $u \circ v$  appartient donc à  $\mathcal{L}_F(E)$  et  $(u \circ v)_F = u_F \circ v_F$ .

Pour terminer, il est évident que  $\text{Id}_E$  appartient à  $\mathcal{L}_F(E)$  et que l'on a  $(\text{Id}_E)_F = \text{Id}_F$

► Les relations précédentes montrent que  $u \mapsto u_F$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$  □

**Proposition 19**

Si le sous-espace  $F$  est de dimension finie, l'inverse de tout isomorphisme  $u$  de  $\mathcal{L}_F(E)$  stabilise aussi  $F$  et l'on a :

$$(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}.$$

Si le sous-espace  $F$  possède un supplémentaire, le morphisme  $u \mapsto u_F$  de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$  est surjectif.

**Démonstration**

- Si  $u$  appartient à  $\mathcal{L}_F(E) \cap \mathcal{GL}(E)$ , la restriction  $u|_F$  est injective et son image est un sous-espace de  $F$  de dimension égale à celle de  $F$  par le théorème du rang. On a donc  $u(F) = F$ . Pour tout  $x$  de  $F$ , l'unique antécédent  $u^{-1}(x)$  de  $x$  par  $u$  appartient donc à  $F$ . Ainsi,  $u^{-1}$  appartient à  $\mathcal{L}_F(E)$ .

La relation  $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$  entraîne :

$$u_F \circ (u^{-1})_F = (u^{-1})_F \circ u_F = \text{Id}_F$$

et  $(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}$ .

- Si le sous-espace  $F$  possède un supplémentaire  $G$ , notons  $p$  la projection de  $E$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ . L'application  $u \mapsto u_F$  de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$  est surjectif puisque tout élément  $v$  de  $\mathcal{L}(F)$  est l'endomorphisme induit sur  $F$  par l'endomorphisme  $u = v \circ p$  de  $\mathcal{L}_F(E)$ . □

**Remarque**

- Le premier point de la proposition précédente est faux si  $F$  n'est pas de dimension finie. Par exemple, l'application  $m : Q \mapsto XQ$  est un endomorphisme inversible de  $\mathbb{Q}(X)$  stabilisant  $\mathbb{Q}[X]$ , mais l'endomorphisme  $m'$  qu'il induit sur  $\mathbb{Q}[X]$  n'est pas surjectif ( $1 \notin m(\mathbb{Q}[X])$ ).
- On peut montrer, et on pourra admettre, que tout sous-espace  $F$  d'un espace vectoriel de dimension quelconque possède un supplémentaire. L'application  $u \mapsto u_F$  de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$  est donc surjective même si  $E$  est de dimension infinie.

**Exemple** On dit qu'un endomorphisme est *nilpotent* si l'une de ses puissances est nulle. Un tel endomorphisme n'est évidemment pas inversible. Montrons que pour toute famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $n$  endomorphismes nilpotents commutant deux à deux d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , on a :

$$u_1 \circ \dots \circ u_n = 0.$$

Prouvons cette assertion par récurrence sur  $n$ . Elle est évidente si  $n = 1$  puisque dans ce cas tout endomorphisme nilpotent de  $\mathcal{L}(E) = \mathbf{K} \text{Id}_E$  est nul. Supposons-la acquise pour toute dimension strictement inférieure à  $n$ . L'espace  $F = \text{Im } u_n$  est de dimension  $r < n$  puisque  $u_n$  n'est pas bijective et est stable par  $u_i$  pour tout  $i$ . La famille  $(u'_1, \dots, u'_r)$  des endomorphismes induits vérifiant les mêmes hypothèses, il vient donc  $u'_1 \circ \dots \circ u'_r = 0$ . Cela implique  $u'_1 \circ \dots \circ u'_{n-1} = 0$  et, vu la définition de  $F$  :

$$u_1 \circ \dots \circ u_n = 0.$$

En particulier, tout endomorphisme nilpotent  $u$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$  vérifie la relation  $u^n = 0$ .

### 3.2 Isomorphisme associé à une application linéaire

Soient  $F$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

#### Théorème 20

Soit  $E'$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'application restreinte  $u|_{E'}$  réalise un isomorphisme de  $E'$  sur  $\text{Im } u$  si, et seulement si,  $E'$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ .

**Démonstration** Le noyau de  $u|_{E'}$  étant  $\text{Ker } u \cap E'$ , cette application est injective si, et seulement si, la famille  $(\text{Ker } u, E')$  est en somme directe

L'application  $u|_{E'}$  a même image que  $u$  si, et seulement si, pour tout  $x \in E$  il existe  $x' \in E'$  tel que  $u(x') = u(x)$ . En remarquant que cela est équivalent à  $x - x' \in \text{Ker } u$ , on voit que  $u|_{E'}$  a pour image  $\text{Im } u$  si, et seulement si,  $E = \text{Ker } u + E'$ . □

*Exemple* Polynômes interpolateurs de Lagrange.

Soient  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  une famille de  $n$  scalaires deux à deux distincts de  $\mathbf{K}$  et

$$N = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i).$$

- L'application :

$$u : P \mapsto (P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n))$$

de  $\mathbf{K}[X]$  vers  $\mathbf{K}^n$  est linéaire. Son noyau, ensemble des polynômes nuls en  $\alpha_i$  pour tout  $i$ , est l'idéal  $N \mathbf{K}[X]$ . Le polynôme  $N$  étant de degré  $n$ , le sous-espace  $\mathbf{K}_{n-1}[X]$  est un supplémentaire de  $N \mathbf{K}[X]$ . L'application  $u$  induit alors un isomorphisme de  $\mathbf{K}_{n-1}[X]$  sur  $\text{Im } u$ . Le sous-espace  $\text{Im } u$  est donc de dimension  $n$  et  $u$  induit un isomorphisme de  $\mathbf{K}_{n-1}[X]$  sur  $\mathbf{K}^n$  que l'on notera  $u_{\mathbf{K}_{n-1}[X]}$ .

- L'unique polynôme  $Q_i \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$  tel que :

$$u_{\mathbf{K}_{n-1}[X]}(Q_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

( $i^{\text{ième}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbf{K}^n$ ) s'appelle le  $i^{\text{ième}}$  polynôme interpolateur associé à  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Il est donné par :

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_{i-1})(X - \alpha_{i+1}) \cdots (X - \alpha_n)}{(\alpha_i - \alpha_1) \cdots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \cdots (\alpha_i - \alpha_n)} \\ &= \prod_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \neq i}} \frac{(X - \alpha_k)}{(\alpha_i - \alpha_k)}. \end{aligned}$$

Comme image de la base canonique de  $\mathbf{K}^n$  par  $u_{\mathbf{K}_{n-1}[X]}^{-1}$ , la famille  $(Q_1, \dots, Q_n)$  est une base de  $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ .

- Soit  $(\beta_i) \in \mathbf{K}^n$ . Par isomorphisme, il existe un unique polynôme  $\tilde{P} \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$  tel que  $u_{\mathbf{K}_{n-1}[X]}(\tilde{P}) = (\beta_i)$ , c'est-à-dire  $\tilde{P}(\alpha_i) = \beta_i$  pour tout  $i$ . Ce polynôme s'appelle le *polynôme interpolateur* des  $(\beta_i)$  et s'écrit :

$$\tilde{P} = \sum_{i=0}^n \beta_i Q_i.$$

Toute autre solution  $P \in \mathbf{K}[X]$  de  $u(P) = (\beta_i)$  est alors de la forme :

$$P = \tilde{P} + NS \quad \text{où } S \in \mathbf{K}[X].$$

### 3.3 Codimension et théorème du rang

#### Codimension

##### Proposition 21

Soient  $G$  et  $H$  deux supplémentaires d'un sous-espace vectoriel  $E'$  de  $E$ . La projection  $p$  de  $E$  sur  $H$  parallèlement à  $E'$  induit un isomorphisme de  $G$  sur  $H$ .

**Démonstration** La projection  $p$  est de noyau  $E'$  et d'image  $H$ . Elle induit un isomorphisme de  $G$  sur  $H$  par le théorème 20.  $\square$

##### Définition 12

On dit que  $E'$  est de codimension finie s'il possède un supplémentaire de dimension finie. On appelle alors *codimension* de  $E'$ , et l'on note  $\text{codim } E'$ , la dimension commune de ses supplémentaires.

**Démonstration** La proposition précédente montre que tous les supplémentaires de  $E'$  ont alors même dimension finie.  $\square$

S'il est nécessaire de préciser l'espace ambiant, on notera  $\text{codim}_E E'$  la codimension de  $E'$  dans  $E$ .

La théorie des espaces vectoriels de dimension finie montre évidemment que tout sous-espace  $E'$  d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$  est de codimension finie et vérifie  $\text{codim } E' = \dim E - \dim E'$ .

Dans le cas général, on utilisera fréquemment le résultat suivant :

**Proposition 22**

S'il existe un sous-espace de dimension finie  $M$  tel que  $E' + M = E$ , alors  $E'$  est de codimension finie dans  $E$  et :

$$\text{codim } E' \leq \dim M.$$

**Démonstration** Si  $G$  est, en effet, un supplémentaire de  $E' \cap M$  dans  $M$ , on a  $E = G \oplus E'$ . □

**Théorème du rang**

Soit  $F$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ .

**Définition 13**

On appelle *rang* d'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  la dimension de  $\text{Im } u$ .

**Théorème 23 (Théorème du rang)**

Si l'un des espaces vectoriels  $E$  ou  $F$  est de dimension finie alors le rang de  $u$  est fini le noyau de  $u$  est de codimension finie et :

$$\text{codim Ker } u = \text{rg } u.$$

**Démonstration**

- L'image de  $u$  est de dimension finie comme image d'un espace vectoriel de dimension finie dans le premier cas, comme sous-espace d'un espace de dimension finie dans le second
- Soient  $(f_1, \dots, f_r)$  une base de  $\text{Im } u$  et  $(e_1, \dots, e_r)$  une famille d'éléments de  $E$  telle que l'on ait :

$$\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad u(e_j) = f_j.$$

Notons  $E'$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(e_1, \dots, e_r)$ . Comme l'image de la famille  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $\text{Im } u$ , cette famille est libre et  $u$  induit un isomorphisme  $u|_{E'}$  de  $E'$  sur  $\text{Im } u$ . Ainsi  $E'$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$  par le théorème 20 □

**Remarque** Lorsque  $E$  est de dimension finie, on retrouve le théorème du rang classique :

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} u = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u.$$

### 3.4 Hyperplans et formes linéaires

#### Définition 14

On appelle *hyperplan* de  $E$  tout sous-espace vectoriel de  $E$  de codimension 1.

Par définition même,  $H$  est un hyperplan de  $E$  si, et seulement si, il existe une droite vectorielle  $D$  telle que  $E = H \oplus D$ .

Ainsi,  $H$  est un hyperplan de  $E$  si, et seulement si,  $H$  est un élément maximal de l'ensemble des sous-espaces stricts de  $E$ .

**Remarque** On appelle hyperplan affine de  $E$  tout sous-espace affine dont la direction est un hyperplan de  $E$ .

#### Proposition 24

Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $H$  est un hyperplan de  $E$ ,
- (ii) il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi \in E^*$  telle que  $H = \operatorname{Ker} \varphi$ .

#### Démonstration

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $D$  une droite vectorielle telle que  $E = H \oplus D$ . Si  $q'$  désigne la projection de  $E$  sur  $D$  et  $v$  un isomorphisme de  $D$  sur  $\mathbf{K}$  (rappelons que  $\dim D = 1$ ), l'application  $\varphi = v \circ q'$  est une forme linéaire non nulle (car surjective) de noyau  $H$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$  de noyau  $H$ . L'image de  $\varphi$  étant un sous-espace non nul de  $\mathbf{K}$ , l'application  $\varphi$  est surjective donc de rang 1. Son noyau  $H$  est donc de codimension 1.  $\square$

#### Proposition 25

Deux formes linéaires non nulles ont même noyau si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

**Démonstration** Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires de noyau un hyperplan  $H$ . Il existe un vecteur  $x_0$  tel que  $\mathbf{K}x_0$  soit un supplémentaire de  $H$  dans  $E$ . La forme  $\varphi(x_0)\psi - \psi(x_0)\varphi$ , nulle sur  $H$  et  $\mathbf{K}x_0$ , est nulle. Les formes  $\varphi$  et  $\psi$  sont donc proportionnelles.  $\square$



On retrouve ainsi, comme en dimension finie, les points suivants :

- toute équation  $\varphi(x) = 0$  avec  $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$  définit un hyperplan.
- tout hyperplan peut être défini par une équation de la forme  $\varphi(x) = 0$  avec  $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ , unique à une constante multiplicative non nulle près.
- si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux formes linéaires, on a  $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \psi$  si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbf{K}$  tel que  $\psi = \lambda\varphi$ .

*Exemple* Si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , alors on a  $E = H \oplus \Delta$  pour toute droite vectorielle  $\Delta$  de  $E$  non contenue dans  $H$ . En effet, si  $\varphi$  est une forme linéaire de noyau  $H$ , l'application  $\varphi|_{\Delta}$  non nulle de l'espace unidimensionnel  $\Delta$  vers  $\mathbf{K}$  est un isomorphisme. Le théorème 20 page 101 permet alors de conclure.

## EXERCICES

1. Montrer que la famille  $(\ln p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite strictement croissante des nombres premiers est libre sur  $\mathbb{Q}$
2. Soit  $E$  un espace vectoriel possédant une base dénombrable infinie. Montrer que toute famille génératrice est infinie, toute famille libre est dénombrable et que toute base de  $E$  est infinie dénombrable.
3. Soient  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbf{K}$  et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces de  $E$  différents de  $E$ .  
Montrer que si  $I$  a deux éléments ou a moins d'éléments que  $\mathbf{K}$  au sens large, alors la réunion de  $(F_i)_{i \in I}$  est différente de  $E$ .
4. Montrer que la famille des applications  $\varphi_x : t \mapsto |t - x|$  où  $x$  parcourt un segment  $[a, b]$  de longueur non nulle de  $\mathbb{R}$  est une base de l'espace  $\mathcal{A}$  des fonctions continues affines par morceaux sur l'intervalle  $[a, b]$
5. Soit  $p$  un projecteur d'un espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $u \in \mathcal{L}(E)$  commute avec  $p$  si, et seulement si, les sous-espaces  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont stables par  $u$ .
6. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$  sur un corps de caractéristique différente de 2. Montrer que  $p + q$  est un projecteur si, et seulement si, on a  $p \circ q = q \circ p = 0$ .
7. Montrer que tout corps fini de caractéristique  $p$  a  $p^r$  éléments où  $r$  est un entier non nul.
8. Soient  $\mathbf{K}$  un sous-corps d'un corps  $\mathbf{L}$  et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{L}$ . On considère évidemment que  $\mathbf{L}$  et  $E$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbf{K}$  par restriction des scalaires.
  1. Montrer que si  $(\ell_i)_{i \in I}$  est une base de  $\mathbf{L}$  sur  $\mathbf{K}$  et  $(e_j)_{j \in J}$  une base de  $E$  sur  $\mathbf{L}$ , alors  $(\ell_i e_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est une base de  $E$  sur  $\mathbf{K}$ .
  2. On suppose que  $E$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Montrer que  $E$  est de dimension finie sur  $\mathbf{K}$  si, et seulement si,  $E$  est de dimension finie sur  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{L}$  de dimension finie sur  $\mathbf{K}$  et que l'on a alors :
 
$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{L}} E \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{L}.$$

9. Soit  $\Delta$  l'application de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  définie par :

$$\forall P(X) \in E, \quad (\Delta P)(X) = P(X + 1) - P(X).$$

1. Montrer que  $\Delta$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}[X]$  de noyau  $\mathbb{R}$  et d'image  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Montrer qu'il existe une unique base  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  telle que  $H_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta H_n = H_{n-1} \quad \text{et} \quad H_n(0) = 0.$$

En déduire que tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  peut s'écrire :

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^n P)(0) H_n.$$

3. Montrer que l'on a :

$$(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k P(k). \tag{*}$$

En déduire que, pour tout polynôme  $P$  de degré  $p$ , les points suivants sont équivalents :

- (a)  $P$  prend des valeurs entières sur  $\mathbb{Z}$ ,
  - (b)  $P$  prend des valeurs entières sur  $\llbracket 0, p \rrbracket$ ,
  - (c) les coordonnées de  $P$  dans la base  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des entiers,
  - (d)  $P$  prend des valeurs entières sur  $p + 1$  entiers consécutifs.
4. Montrer que pour toute famille  $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  d'entiers, l'expression :

$$P = \prod_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 / i < j} \frac{a_j - a_i}{j - i}$$

est un entier.

10 Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  de dimension finie  $E$ . Pour tout entier  $k$ , on note  $d_k$  la dimension du noyau  $\text{Ker } u^k$ .

1. Montrer que la suite  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante et que la suite  $(d_{k+1} - d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
2. En déduire qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  soit strictement croissante lorsque  $k$  appartient à  $\llbracket 0, p \rrbracket$  et constante de valeur  $n$  lorsque  $k$  est supérieur ou égal à  $p$ .

11. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que  $u$  et  $v$  deux applications linéaires de  $E$  vers  $F$ .

Montrer l'inégalité :

$$\dim \text{Ker}(u + v) \leq \dim(\text{Ker } u \cap \text{Ker } v) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v)$$

12. Soient  $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} H$  trois applications linéaires entre des espaces vectoriels de dimension finie.

Montrer que l'on a :

$$\text{rg}(v \circ u) + \text{rg}(w \circ v) \leq \text{rg}(v) + \text{rg}(w \circ v \circ u)$$

et préciser les cas d'égalité.

13. Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie

1. Soient  $u \in \mathcal{L}(E, G)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer qu'il existe une application  $w \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u = v \circ w$  si, et seulement si,  $\text{Im } u \subset \text{Im } v$
2. Soient  $u \in \mathcal{L}(E, G)$  et  $v \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer qu'il existe une application  $w \in \mathcal{L}(F, G)$  telle que  $u = w \circ v$  si, et seulement si,  $\text{Ker } v \subset \text{Ker } u$ .

14. On dit qu'un sous-espace  $\mathcal{I}$  de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  est un idéal à droite s'il contient  $u \circ f$  pour tous  $u \in \mathcal{I}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

1. Montrer que pour tout sous-espace  $F$  de  $E$ , l'ensemble :

$$\mathcal{I}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im } u \subset F\}$$

est un idéal à droite de  $\mathcal{L}(E)$  et donner sa dimension en fonction de celle de  $F$ .

2. Déterminer alors l'intersection  $\mathcal{I}_F \cap \mathcal{I}_G$  et la somme  $\mathcal{I}_F + \mathcal{I}_G$  lorsque  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces de  $E$ .
3. Montrer que tout idéal à droite  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est de la forme  $\mathcal{I}_F$  pour un unique sous-espace  $F$  de  $E$  et qu'il peut s'écrire :

$$p \circ \mathcal{L}(E) = \{p \circ f \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$$

où  $p$  est un projecteur de  $E$ .

**15.** On dit qu'un sous-espace  $\mathcal{K}$  de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  est un idéal à gauche s'il contient  $f \circ u$  pour tous  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $u \in \mathcal{K}$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

1. Montrer que pour tout sous-espace  $F$  de  $E$ , l'ensemble :

$$\mathcal{K}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid F \subset \text{Ker } u\}$$

est un idéal à gauche de  $\mathcal{L}(E)$  et donner sa dimension en fonction de celle de  $F$ .

2. Déterminer l'intersection  $\mathcal{K}_F \cap \mathcal{K}_G$  et la somme  $\mathcal{K}_F + \mathcal{K}_G$  lorsque  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces de  $E$ .

3. Montrer que tout idéal à gauche  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est de la forme  $\mathcal{K}_F$  pour un unique sous-espace  $F$  de  $E$  et peut s'écrire :

$$\mathcal{L}(E) \circ p = \{f \circ p \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$$

où  $p$  est un projecteur de  $E$ .

**16.** Soit  $E$  un espace vectoriel. On dit qu'un sous-espace  $\mathcal{I}$  de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  est un idéal bilatère si c'est un idéal à droite et à gauche.

1. Montrer que lorsque  $E$  est de dimension finie  $n$ , les seuls idéaux bilatères de  $\mathcal{L}(E)$  sont  $\{0\}$  et  $\mathcal{L}(E)$  (on utilisera l'exercice précédent).

2. Montrer que ce n'est pas le cas lorsque  $E$  est de dimension infinie (on admettra que tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension quelconque admet un supplémentaire).

**17** On dit qu'une suite d'applications linéaires :

$$\{0\} \xrightarrow{u_0} E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \xrightarrow{u_2} E_3 \xrightarrow{u_3} \dots \xrightarrow{u_{r-1}} E_r \xrightarrow{u_r} \{0\}$$

est exacte si on a  $\text{Im } u_{i-1} = \text{Ker } u_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

Montrer, lorsque les  $E_i$  sont de dimension finie, la formule d'Euler-Poincaré :

$$\sum_{i=1}^r (-1)^i \dim E_i = 0.$$

**18.** Soient  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbf{K}$  et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces de  $E$  de même codimension finie  $r$ .

Montrer que si  $I$  a deux éléments, ou a moins d'éléments que  $\mathbf{K}$  au sens large, alors il existe un supplémentaire commun aux  $F_i$ .

19. Soit  $F$  un sous-espace d'un espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que la relation de congruence  $x \equiv y [F]$ , définie par  $y - x \in F$  est une relation d'équivalence sur  $E$ . On note  $E/F$  l'ensemble quotient de  $E$  par  $x \equiv y [F]$  et  $\pi$  la projection canonique de  $E$  sur  $E/F$ .
2. Montrer que la relation  $x \equiv y [F]$  est compatible avec les lois interne et externe de  $E$  et qu'il existe sur  $E/F$  une unique structure d'espace vectoriel que  $\pi$  soit une application linéaire. Déterminer alors le noyau de  $\pi$ .
3. Montrer que si  $u$  est une application linéaire de  $E$  vers  $G$ , il existe une unique application linéaire  $v$ , appelée factorisée de  $u$  par  $\pi$ , de  $E/F$  vers  $G$  vérifiant  $u = v \circ \pi$  si, et seulement si,  $F \subset \text{Ker } u$ . Préciser alors le noyau et l'image de  $v$ .

20. Montrer qu'un sous-espace  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  est de codimension finie si, et seulement si, l'espace vectoriel quotient  $E/F$  est de dimension finie et que dans ces conditions, on a :

$$\text{codim}_E F = \dim E/F.$$

21. Soient  $E$  un espace vectoriel.

1. Montrer qu'un sous-espace  $F$  est de codimension finie dans  $E$  si, et seulement si, il existe un sous-espace  $L$  de dimension finie tel que  $F + L = E$ .
2. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$  vérifiant  $F \subset G$ . Montrer que  $F$  est de codimension finie dans  $E$  si, et seulement si,  $F$  est de codimension finie dans  $G$  et  $G$  est de codimension finie dans  $E$  et que l'on a alors :

$$\text{codim}_G F + \text{codim}_E G = \text{codim}_E F.$$

3. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . Montrer que les sous-espaces  $F \cap G$  et  $F + G$  sont de codimension finie si, et seulement si,  $E$  et  $F$  sont de codimension finie et que l'on a alors :

$$\text{codim } F + \text{codim } G = \text{codim } (F + G) + \text{codim } (F \cap G)$$

# Chapitre 5

## Matrices

Dans ce chapitre,  $n$  et  $m$  désignent deux entiers strictement positifs,  $\mathbf{K}$  un corps commutatif et  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbf{K}$ .

### 1. Représentation matricielle

#### 1.1 Matrices équivalentes et rang

##### Équivalence des matrices

###### Définition 1

On dit que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_{n,m}(\mathbf{K})$  sont *équivalentes* s'il existe  $Q \in GL_n(\mathbf{K})$  et  $P \in GL_m(\mathbf{K})$  telles que :

$$B = QAP.$$

##### Remarques

- Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles appartiennent à la même orbite pour l'action :

$$((Q, P), A) \mapsto QAP^{-1}$$

du groupe produit  $GL_n(\mathbf{K}) \times GL_m(\mathbf{K})$  sur l'ensemble  $M_{n,m}(\mathbf{K})$ . La relation «  $A$  et  $B$  sont équivalentes » est donc une relation d'équivalence sur  $M_{n,m}(\mathbf{K})$ .

- Une matrice  $A'$  est équivalente à la matrice  $A$  représentant une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  de  $E$  et  $F$  si, et seulement si, elle représente  $u$  dans des bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$  de  $E$  et  $F$ . Par conséquent, deux matrices équivalentes ont même rang.

## Équivalence et rang

### Théorème 1

Une matrice  $A \in M_{n,m}(\mathbf{K})$  est de rang  $r$  si et seulement si elle est équivalente à la matrice :

$$J_r = (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket} \quad \text{où} \quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \text{ et } i \in \llbracket 1, r \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Démonstration** Notons  $r$  le rang de  $A$  et  $u$  l'application linéaire de  $\mathcal{L}(\mathbf{K}^m, \mathbf{K}^n)$  canoniquement associée à  $A$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$  une base de  $\mathbf{K}^m$  adaptée à une somme directe :

$$\mathbf{K}^m = F \oplus \text{Ker } u.$$

L'isomorphisme  $u|_F$  de  $F$  sur  $\text{Im } u$  transforme  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $F$  en la base  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  de  $\text{Im } u$ . Considérons alors une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbf{K}^n$  complétant  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ . La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  est  $J_r$  et, par conséquent,  $A$  est équivalente à  $J_r$ .

Si  $A$  est équivalente à  $J_r$ , son rang est égal à celui de  $J_r$ , soit  $r$ . □

### Corollaire 2

Deux matrices de  $M_{n,m}(\mathbf{K})$  sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.

Comme le montre l'exemple suivant, il peut être intéressant d'utiliser des matrices prototypes autres que les  $J_r$ .

*Exemple* Soit  $f$  une application de  $M_n(\mathbf{K})$  vers  $\mathbf{K}$  vérifiant  $f(0) = 0$ ,  $f(I_n) = 1$  et :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2, \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrons qu'une matrice  $A$  est inversible si, et seulement si,  $f(A) \neq 0$ .

Pour tout  $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la matrice  $H_r = (\beta_{i,j})$  définie par  $\beta_{i,i+1} = 1$  si  $1 \leq i \leq r$  et  $\beta_{i,j} = 0$  sinon, est nilpotente de rang  $r$ . On a donc :

$$f(H_r)^n = f(H_r^n) = 0,$$

et par suite  $f(H_r) = 0$ . Si  $A$  est une matrice non inversible, son rang  $r$  appartient à  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et il existe  $(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbf{K})^2$  tel que  $A = QH_rP$ . On en déduit :

$$f(A) = f(Q)f(H_r)f(P) = 0.$$

D'un autre côté, si  $A$  est inversible, la relation  $f(A)f(A^{-1}) = f(I_n) = 1$  montre que  $f(A)$  est non nul.



## 1.2 Matrices semblables et trace

On considère dans ce paragraphe des matrices carrées de taille  $n$

### Similitude des matrices

#### Définition 2

On dit que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbf{K})$  sont *semblables* s'il existe  $P \in GL_n(\mathbf{K})$  telle que :

$$B = PAP^{-1}.$$

#### Remarques

- Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles appartiennent à la même orbite pour l'action par automorphisme intérieur :

$$(P, A) \mapsto PAP^{-1}$$

du groupe  $GL_n(\mathbf{K})$  sur l'algèbre  $M_n(\mathbf{K})$ . La relation de similitude, que l'on note  $A \sim B$ , est donc une relation d'équivalence sur  $M_n(\mathbf{K})$ .

- Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est fautive (sauf dans le cas  $n = 1$  et  $\mathbf{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ).
- Une matrice  $A'$  est semblable à la matrice  $A$  représentant un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  si, et seulement si, elle représente  $u$  dans une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$ .
- On dit qu'une application  $f : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow X$  ( $X$  est ensemble quelconque) est invariante par similitude si elle associe la même valeur à deux matrices semblables. Dans ce cas, pour tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , la valeur :

$$f(\text{Mat}_{\mathcal{B}} u)$$

est indépendante de la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  choisie. Cela permet de construire une unique application  $F : \mathcal{L}(E) \rightarrow X$  vérifiant :

$$F(u) = f(\text{Mat}_{\mathcal{B}} u)$$

pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Nous verrons plusieurs exemples de cette construction. C'est le cas de la trace que nous allons exposer dans le point suivant et du polynôme caractéristique dans le chapitre consacré à la réduction des endomorphismes.

## Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

## Définition 3

On appelle *trace* d'une matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  de  $M_n(\mathbb{K})$  le scalaire :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i}.$$

## Proposition 3

L'application  $\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbb{K})$  vérifiant :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

et :

$$\forall (A, P) \in M_n(\mathbb{K}) \times \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{tr} A.$$

**Démonstration** La linéarité de l'application « trace » est évidente. Si l'on écrit  $A = (\alpha_{i,j})$  et  $B = (\beta_{i,j})$ , le produit  $AB$  vaut  $(\gamma_{i,j})$  avec :

$$\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \beta_{k,j}.$$

On obtient alors :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \beta_{k,i}$$

et, par symétrie,  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ .

On en déduit finalement :

$$\operatorname{tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr} A. \quad \square$$

## Proposition 4

Il existe une unique forme linéaire  $\operatorname{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$  telle que pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on ait :

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u)$$

On appelle alors *trace* d'un endomorphisme  $u$  de  $E$  le scalaire  $\operatorname{tr} u$ .

On a alors :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad \operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u).$$

**Démonstration** L'application  $\text{tr} : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$  est invariante par similitude. Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , la valeur :

$$\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}} u)$$

est donc indépendante de la base  $\mathcal{B}$  considérée. Cela définit une application  $\text{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbf{K}$  qui vérifie immédiatement les propriétés indiquées  $\square$

**Remarques**

- Toute forme linéaire  $\varphi \in M_n(\mathbf{K})^*$  est de la forme  $\varphi : M \mapsto \text{tr}(AM)$  pour une unique matrice  $A \in M_n(\mathbf{K})$  et toute forme linéaire  $\varphi \in M_n(\mathbf{K})^*$  vérifiant  $\varphi(AB) = \varphi(BA)$  pour tout  $(A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2$  est de la forme  $\varphi : A \mapsto \alpha \text{tr} A$  pour un unique  $\alpha \in \mathbf{K}$ .

Soit, en effet,  $(E_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$  la base canonique de  $M_n(\mathbf{K})$ .

1. Soit  $\varphi \in M_n(\mathbf{K})^*$ . Si  $M = (\mu_{i,j})$ , on a :

$$\varphi(M) = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} \mu_{i,j} \varphi(E_{i,j}).$$

La matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  avec  $\alpha_{i,j} = \varphi(E_{j,i})$  est donc l'unique matrice vérifiant  $\varphi(M) = \text{tr}(AM)$  pour tout  $M$ .

2. On a  $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$  pour tout  $(i, j, k, \ell)$ . Ainsi, pour tout  $(i, j)$ , il vient :

$$\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{i,j}E_{j,i}) = \varphi(E_{j,i}E_{i,j}) = \varphi(E_{j,j})$$

alors que pour tout  $(i, j)$  vérifiant  $i \neq j$ , on a :

$$\varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,i}E_{i,j}) = \varphi(E_{i,j}E_{i,i}) = \varphi(0) = 0.$$

On obtient finalement :

$$\varphi(A) = \varphi(E_{1,1}) \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i}.$$

- Le point précédent est équivalent à la proposition énonçant que toute matrice commutant avec toutes celles de  $M_n(\mathbf{K})$  est scalaire.

Soit en effet  $M$  une telle matrice ; il est simple de vérifier que l'application  $\varphi : A \mapsto \text{tr} AM$  est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbf{K})$  vérifiant  $\varphi(AB) = \varphi(BA)$  pour tout  $(A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2$ . Elle est donc de la forme  $A \mapsto \beta \text{tr} A$ , c'est-à-dire de la forme  $A \mapsto \text{tr}(\beta I_n A)$ . Cela implique  $M = \beta I_n$  par l'unicité du premier point de la proposition précédente.

**Exemples**

1. Supposons que  $\mathbf{K}$  soit de caractéristique nulle. Si  $p$  est un projecteur de  $E$ , on a :

$$\text{tr} p = \text{rg} p$$

puisque la matrice de  $p$  dans une base adaptée à  $E = \text{Im} u \oplus \text{Ker} u$  est  $J_r$  avec  $r = \text{rg} p$ .

On en déduit, par exemple, que toute famille  $(p_1, \dots, p_s)$  de projecteurs vérifiant :

$$p_1 + \dots + p_s = \text{Id}_E,$$

est la famille de projecteurs associés à une décomposition de  $E$  en somme directe ;

l'identité  $x = \sum_{i=1}^s p_i(x)$  montre, en effet, que  $E$  est la somme des sous-espaces  $E_i = \text{Im } p_i$ . La relation :

$$\sum_{i=1}^s \dim E_i = \sum_{i=1}^s \text{tr } p_i = n$$

due à la remarque précédente montre que l'on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^s E_i.$$

Il est alors immédiat que  $(p_1, \dots, p_s)$  est la famille de projecteurs associée à cette somme directe.

2. Montrons que tout hyperplan de  $M_n(\mathbb{K})$  avec  $n \geq 2$  contient une matrice inversible.

L'hyperplan  $H$  considéré est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Il existe donc  $B \in M_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$  telle que :

$$H = \left\{ M \mid \text{tr}(MB) = 0 \right\}.$$

On peut alors écrire  $B = PJ_rQ$  où  $(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})^2$  et  $r = \text{rg } B$ . Si  $r > 1$ , posons  $M = Q^{-1} \text{diag}(1-r, 1, \dots, 1)P^{-1}$ . La relation :

$$\text{tr}(MB) = \text{tr}(\text{diag}(1-r, 1, \dots, 1)J_r) = 0$$

montre alors  $M \in H \cap \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Si  $r = 1$ , on considère  $M = Q^{-1}P_{(1,2)}P^{-1}$  où  $P_{(1,2)}$  est la matrice de transposition de  $(1, 2)$ . On obtient alors :

$$\text{tr}(MB) = \text{tr}(P_{(1,2)}J_1) = 0$$

et  $M \in H \cap \text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

### 1.3 Matrices par blocs

On considère dans ce paragraphe un *partage* de  $n$ , c'est-à-dire une famille  $(n_a)_{a \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  de  $r$  entiers non nuls vérifiant :

$$n = n_1 + \dots + n_r$$

et la *partition*  $\llbracket 1, n \rrbracket = \bigcup_{a=1}^r I_a$  avec :

$$I_a = \llbracket n_1 + \dots + n_{a-1} + 1, n_1 + \dots + n_a \rrbracket$$

pour tout  $a$  (l'intervalle  $I_1$  est bien sûr égal à  $\llbracket 1, n_1 \rrbracket$ ).

**Matrices par blocs**

**Définition 4**

Soit  $A = (\alpha_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ . On appelle :

1. *bloc* d'indice  $(a, b) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$  de  $A$ , la sous-matrice de type  $n_a \times n_b$  :

$$A_{a,b} = (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in I_a \times I_b}$$

formée des éléments de  $A$  dont les indices de lignes et de colonnes appartiennent respectivement à  $I_a$  et  $I_b$ ,

2. *représentation par blocs* de  $A$ , l'écriture de  $A$  comme la matrice de type  $r \times r$  à éléments matriciels :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,r} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{r,1} & \dots & \dots & A_{r,r} \end{pmatrix}.$$

**Remarques**

- On définit de façon analogue la décomposition en blocs d'une matrice de  $M_n m(\mathbb{K})$  associée à des partages différents de  $n$  et  $m$ , que ces nombres soient égaux ou non. On dira, pour distinguer ce cas du cas défini ci-dessus, qu'il s'agit d'une décomposition rectangulaire.
- Le bloc  $A_{a,b}$  n'est pas une matrice de type  $n_a \times n_b$  puisque les indices  $i$  et  $j$  de ses éléments ne parcourent pas les intervalles de  $\llbracket 1, n_a \rrbracket$  et  $\llbracket 1, n_b \rrbracket$  de  $\mathbb{N}$ . On peut évidemment se ramener à cette situation en utilisant les réindexations :

$$k = i - (n_1 + \dots + n_{a-1}) \quad \text{et} \quad \ell = j - (n_1 + \dots + n_{b-1}).$$

Il est préférable, néanmoins, de considérer qu'il s'agit d'une matrice généralisée dont les ensembles d'indices de lignes et de colonnes sont  $I_a$  et  $I_b$ . Les opérations matricielles s'étendent immédiatement à cette situation.

**Exemples**

1. Pour le partage  $4 = 2 + 2$ , la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

de  $M_4(\mathbb{R})$  s'écrit par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

avec :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{2,2} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Réciproquement, la matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

définit un élément de  $M_{2n}(\mathbf{K})$ .

### Définition 5

Dans les conditions précédentes, on dit que  $A \in M_n(\mathbf{K})$  est :

1. diagonale par blocs si  $A_{a,b} = 0$  quel que soit  $(a, b) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$  tel que  $a \neq b$ ,
2. triangulaire supérieure (respectivement inférieure) par blocs si  $A_{a,b} = 0$  quel que soit  $(a, b) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$  tel que  $a > b$  (respectivement  $a < b$ ).

### Opérations par blocs

Soit  $(A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2$  de décompositions en blocs  $(A_{a,b})$  et  $(B_{a,b})$ .

### Proposition 5 (Combinaison linéaire par blocs)

Soit  $C = \alpha A + \beta B$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$ . Si  $(C_{a,b})$  est la décomposition en blocs de  $C$ , on a :

$$\forall (a, b) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \quad C_{a,b} = \alpha A_{a,b} + \beta B_{a,b}.$$

**Démonstration** C'est immédiat. □

### Proposition 6 (Produit par blocs)

Soit  $D = AB$ . Si  $(D_{a,b})$  est la décompositions en blocs de  $D$ , on a :

$$\forall (a, c) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \quad D_{a,c} = \sum_{b=1}^s A_{a,b} B_{b,c}.$$

**Démonstration** Soit  $(a, c) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ . On a, en désignant par  $M[i, j]$  le  $(i, j)$ <sup>ième</sup> terme d'une matrice  $M$  :

$$D_{a,c}[i, k] = D[i, k]$$

pour tout  $(i, k) \in I_a \times I_c$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} D_{a,c}[i, k] &= \sum_{j=1}^n A[i, j]B[j, k] = \sum_{b=1}^r \sum_{j \in I_b} A[i, j]B[j, k] \\ &= \sum_{b=1}^r \sum_{j \in I_b} A_{a,b}[i, j]B_{b,c}[j, k] = \sum_{b=1}^r (A_{a,b}B_{b,c})[i, k] \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée □

### Remarques

- On additionne et on multiplie donc les matrices par blocs comme les matrices à coefficients scalaires. Il faut seulement faire attention à l'ordre des facteurs puisque le produit matriciel n'est pas commutatif.
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs est une matrice triangulaire supérieure par blocs dont les blocs diagonaux sont les produits des blocs diagonaux correspondants.  
En particulier, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par blocs ainsi que l'ensemble des matrices diagonales par blocs sont des sous-algèbres de  $M_n(\mathbf{K})$ .
- Les règles de calcul par blocs restent valides dans le cas de décompositions en blocs rectangulaires compatibles.

### Exemples

1. Pour le partage  $(1, n - 1)$ , on a :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ C' & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' & 0 \\ \alpha'C + AC' & AA' \end{pmatrix}.$$

2. Pour le partage  $(n, n)$ , on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}.$$

## Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

### Théorème 7

Si  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est triangulaire supérieure par blocs de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{r,r} \end{pmatrix},$$

on a :

$$\det A = \det A_{1,1} \dots \det A_{r,r}.$$

**Démonstration** Il suffit, par récurrence, de considérer le cas  $r = 2$ . On peut alors écrire le produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{1,2} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

1. La matrice  $\begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{1,2} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}$ , triangulaire supérieure de diagonale 1 est de déterminant 1.
2. Par développement suivant la dernière ligne, on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & I_{n_2-1} \end{pmatrix}$$

et, par itération :

$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} = \det A_{1,1}.$$

3. On a de même :

$$\det \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} = \det A_{2,2}.$$

Cela donne finalement :

$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} = \det A_{1,1} \det A_{2,2}. \quad \square$$

**Remarque** On se gardera bien évidemment de croire que l'on a en général :

$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \det A_{1,1} \det A_{2,2} - \det A_{2,1} \det A_{1,2}$$

pour un partage carré.



*Exemple* Soit la matrice d'ordre  $2n$  :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 & & \beta \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & \alpha & \beta & 0 \\ & & \beta & \alpha & \\ \beta & & 0 & & \alpha \end{pmatrix}$$

(les éléments situés hors de la diagonale et de l'antidiagonale sont nuls). L'endomorphisme qu'elle représente dans la base canonique  $(E_1, \dots, E_{2n})$  de  $\mathbb{K}^{2n}$  possède dans la base  $(E_1, E_{2n}, E_2, E_{2n-1}, \dots, E_n, E_{n+1})$  la matrice diagonale par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de  $A$  est donc :

$$(\alpha^2 - \beta^2)^n.$$

### 1.4 Représentation matricielle par blocs

On suppose dans ce paragraphe que l'espace vectoriel  $E$  est décomposé en la somme directe :

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r \tag{Sd}$$

et l'on note  $(p_a)_{a \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  la famille des projections associée

La famille des dimensions  $n_a$  des sous-espaces  $E_a$  définit le partage  $(n_1, \dots, n_r)$  de  $n$ . Comme dans le point précédent, on notera  $(I_a)_{a \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  la partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  qui s'en déduit.

Considérons alors une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  adaptée à (Sd), c'est-à-dire, nous l'avons vu, une base telle que :

$$\mathcal{B}_a = (e_i)_{i \in I_a}$$

soit une base de  $E_a$  pour tout  $a \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

### Matrice par blocs d'un endomorphisme dans une base adaptée

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

#### Proposition 8

Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ , alors le bloc  $A_{a,b}$  de  $A$  est la matrice dans les bases  $\mathcal{B}_b$  et  $\mathcal{B}_a$  de l'application :

$$p_a \circ u|_{E_b} : E_b \rightarrow E_a$$

pour tout  $(a,b) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ .

**Démonstration** Soient  $(a,b) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$  et  $j \in I_b$ . Si l'on note  $A = (\alpha_{ij})$ , on a :

$$u|_{E_b}(e_j) = u(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} f_i = \sum_{a=1}^r \sum_{i \in I_a} \alpha_{i,j} f_i$$

soit après projection par  $p_a$

$$(p_a \circ u|_{E_b})(e_j) = \sum_{i \in I_a} \alpha_{i,j} f_i.$$

Cela montre ce que l'on voulait. □

Dans ces conditions, on obtient les corollaires suivants :

#### Corollaire 9

La matrice  $A$  est diagonale par blocs si, et seulement si, les sous-espaces  $E_a$  sont stables par  $u$  pour tout  $a \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

La matrice  $A$  est triangulaire supérieure par blocs si, et seulement si, les sous-espaces :

$$D_a = E_1 \oplus \cdots \oplus E_a$$

sont stables par  $u$  pour tout  $a \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

**Démonstration** Soit  $a \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

► L'espace  $E_a$  est stable par  $u$  si, et seulement si :

$$\forall b \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad b \neq a \implies \text{Im}(p_b \circ u|_{E_a}) = \{0\}$$

c'est-à-dire si, et seulement si, les blocs  $A_{b,a}$  sont nuls pour tout  $b \neq a$ .

► L'espace  $D_a$  est stable par  $u$  si, et seulement si :

$$\forall b \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad b > a \implies \text{Im}(p_b \circ u|_{E_a}) = \{0\}$$

c'est-à-dire si, et seulement si, les blocs  $A_{b,a}$  sont nuls pour tout  $b > a$ . □

**Remarque** Si  $A$  est triangulaire supérieure par blocs, la sous-matrice  $A_{1,1}$  est la matrice de l'endomorphisme  $u_1$  induit par  $u$  sur  $E_1$ .

**Corollaire 10**

Une matrice  $A$  triangulaire supérieure par blocs est inversible si, et seulement si, ses blocs diagonaux  $A_{i,i}$  sont inversibles pour tout  $i$ .

Son inverse est alors triangulaire supérieure par blocs et ses blocs diagonaux sont les inverses des blocs diagonaux  $A_{i,i}$  correspondants.

**Démonstration** La première partie du corollaire provient immédiatement de la relation :

$$\det A = \det A_{11} \cdots \det A_{r,r}.$$

Pour démontrer la seconde, on considérera que  $A$  est la matrice dans  $\mathcal{B}$  d'un automorphisme  $u$  stabilisant les sous-espaces  $D_a$ . On sait que  $u^{-1}$  stabilise aussi les  $D_a$ . La matrice  $A^{-1}$  de  $u^{-1}$  dans  $\mathcal{B}$  est donc triangulaire supérieure par blocs et ses blocs diagonaux sont les inverses des blocs diagonaux  $A_{ii}$  correspondants par la deuxième remarque de la page 119.  $\square$

**Corollaire 11**

Soit  $A$  une matrice diagonale par blocs.

La sous-matrice  $A_{a,a}$  est la matrice de l'endomorphisme  $u_a$  induit par  $u$  sur  $E_a$  pour tout  $a \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

Le déterminant de  $u$  est donné par :

$$\det u = \prod_{a=1}^r \det u_a.$$

**Matrice adaptée à un drapeau**

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et la décomposition en somme directe associée :

$$E = \mathbf{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}e_n.$$

**Définition 6**

On appelle *drapeau* d'un espace vectoriel  $E$  toute suite  $(D_1, \dots, D_n)$  strictement croissante de sous-espaces vectoriels de  $E$  non réduits à  $\{0\}$ .

On a alors  $\dim D_a = a$  pour tout  $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

La famille  $(D_1, \dots, D_n)$  définie par :

$$\forall a \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad D_a = \bigoplus_{i=1}^a \mathbf{K}e_i$$

est un drapeau appelé drapeau associé à  $\mathcal{B}$ .

Il est clair que tout drapeau peut être obtenu de cette façon à partir d'une base, non nécessairement unique, de  $E$  et que deux bases définissent le même drapeau si, et seulement si, la matrice de passage de l'une à l'autre est triangulaire supérieure.

### Proposition 12

La matrice  $A$  est diagonale si, et seulement si, la famille  $(\mathbf{K}e_a)_{a \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est stable par  $u$ .

La matrice  $A$  est triangulaire supérieure si, et seulement si, le drapeau associé à  $\mathcal{B}$  est stable par  $u$ .

### Base adaptée à un sous-espace

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$ .

Considérons alors une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  adaptée à  $F$ , c'est-à-dire, nous l'avons vu, telle que  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$  soit une base de  $F$  pour  $p = \dim F$ . Considérons aussi le partage  $(p, n - p)$  de  $n$ .

### Proposition 13

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A$  sa matrice dans  $\mathcal{B}$ .

Le sous-espace  $F$  est stable par  $u$  si, et seulement si, la matrice  $A$  est triangulaire supérieure par blocs. Dans ce cas, si l'on écrit  $A$  par blocs sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix},$$

la sous-matrice  $A_{1,1}$  est la matrice dans  $\mathcal{B}_1$  de l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur  $F$ .

**Remarque** Toute matrice de  $M_p(\mathbf{K})$  pouvant être considérée comme le premier bloc diagonal d'une matrice de  $M_n(\mathbf{K})$  triangulaire supérieure par blocs, on trouve que le morphisme d'algèbres  $u \mapsto u_F$  est surjectif de  $\mathcal{L}_F(E)$  sur  $\mathcal{L}(F)$ .

**Exemple** Montrons que pour tout couple  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$  où  $v$  est nilpotent et vérifie  $u \circ v = v \circ u$ , on a :

$$\det(u + v) = \det u.$$

Nous procéderons par récurrence. Si  $n = 1$ ,  $v$  est nul et la proposition est évidente. Supposons alors la proposition acquise en toute dimension strictement inférieure à  $n$ .

Soit donc  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$  avec  $\dim E = n$  vérifiant les hypothèses ci-dessus. Le cas  $v = 0$  étant trivial, on supposera  $v$  non nul. Comme  $v$  est nilpotent, l'endomorphisme  $v$  n'est pas inversible et la dimension  $r$  du sous-espace  $F = \text{Im } v$  appartient à  $[[1, n - 1]]$ . Choisissons alors une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  adaptée à  $F$ . Comme  $\text{Im } v$  est stable par  $u$  et  $v$ , les matrices de  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{B}$  sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $(U_{1,1}, V_{1,1}) \in M_r(\mathbf{K})^2$ . Les endomorphismes  $u_F$  et  $v_F$  induits par  $u$  et  $v$  sur  $F$  vérifient évidemment les hypothèses voulues. Comme la dimension de  $F$  est strictement inférieure à  $n$ , l'hypothèse de récurrence montre que l'on a :

$$\det(u_F + v_F) = \det u_F$$

soit, en termes de matrices :

$$\det(U_{1,1} + V_{1,1}) = \det U_{1,1}.$$

Il vient finalement :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} U_{1,1} + V_{1,1} & U_{1,2} + V_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} &= \det(U_{1,1} + V_{1,1}) \det U_{2,2} \\ &= \det U_{1,1} \det U_{2,2} \end{aligned}$$

et par suite  $\det(u + v) = \det u$ .

## 2. Opérations élémentaires

On considère dans cette section des matrices de type  $(n, m)$ .

### 2.1 Opérations élémentaires

Soit  $A = (\alpha_{i,j}) \in M_{n,m}(\mathbf{K})$ .

#### Définitions

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de  $A$  l'une des opérations suivantes :

1. ajouter à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  le produit par  $\lambda$  de sa  $j^{\text{ème}}$  ligne avec  $j \neq i$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$  ; cette opération, dite de transvection élémentaire, est notée  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  ;

2. multiplier la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $A$  par  $\lambda \in \mathbf{K}^*$  ; cette opération dite de dilatation élémentaire, est notée  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ;
3. échanger les  $i^{\text{ième}}$  et  $j^{\text{ième}}$  lignes de  $A$  ; cette opération, dite de transposition, est notée  $L_i \leftrightarrow L_j$ .

On définit de la même façon les opérations élémentaires sur les colonnes de  $A$ . Elles sont notées :

$$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j, \quad C_i \leftarrow \lambda C_i, \quad C_i \leftrightarrow C_j.$$

Leurs propriétés sont analogues à celles des opérations élémentaires sur les lignes. Elles s'en déduisent par passage aux matrices transposees.

On appelle *matrice élémentaire* ou *matrice de transvection*, toute matrice carrée de dimension  $n$  de la forme suivante :

1.  $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$  avec  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$  ;
2.  $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{i,i} = \text{diag}(1, \dots, \lambda, \dots, 1)$  avec  $\lambda \in \mathbf{K}^*$  ( $\lambda$  à la  $i^{\text{ième}}$  place) ;
3.  $P_{(i,j)} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} = (\delta_{k,\tau(\ell)})_{k,\ell}$  où  $\tau$  désigne la transposition entre  $i$  et  $j$ .

#### Proposition 14

Les opérations élémentaires sur les lignes :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, \quad L_i \leftarrow \lambda L_i, \quad L_i \leftrightarrow L_j$$

transforment  $A$  respectivement en :

$$T_{i,j}(\lambda)A, \quad D_i(\lambda)A, \quad P_{(i,j)}A.$$

**Démonstration** Simple vérification. □

#### Remarques

- Une opération élémentaire sur les lignes est obtenue par multiplication à gauche par une matrice  $T$  ; on retrouve  $T$  comme matrice transformée de l'identité par l'opération considérée.
- Les opérations élémentaires sur les lignes sont inversibles, d'inverses  $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ ,  $L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i$  et  $L_i \leftrightarrow L_j$ . Les matrices d'opérations élémentaires sont donc inversibles d'inverses :

$$T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda), \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1}) \quad \text{et} \quad P_{(i,j)}^{-1} = P_{(i,j)}.$$

- Les opérations élémentaires sur les colonnes  $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ,  $C_i \leftarrow \lambda C_i$  et  $C_i \leftrightarrow C_j$  transforment  $A$  respectivement en :

$$AT_{j,i}(\lambda), \quad AD_i(\lambda), \quad AP_{(i,j)}$$

(les matrices  $T_{j,i}(\lambda)$ ,  $D_i(\lambda)$  et  $P_{(i,j)}$  sont ici des matrices carrées de dimension  $m$ ). On fera attention à l'ordre des indices de  $T_{j,i}(\lambda)$ .

### Suite d'opérations élémentaires

Soit  $S = (\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_s)$  une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de matrices associées  $(T_1, \dots, T_s)$ .

Toute matrice  $A \in M_{n,m}(\mathbf{K})$  est transformée par  $S$  en :

$$T_s \cdots T_1 A.$$

On en déduit les invariants suivants :

#### Proposition 15

1. Si  $A \in M_{n,m}(\mathbf{K})$  est transformée par  $S$  en  $B$ , alors :

- $\text{rg } B = \text{rg } A$ ,
- $\det B = \det T_s \cdots \det T_1 \det A$  lorsque  $n = m$ .

2. Si  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$  et  $A' \in M_{n,m}(\mathbf{K})$  sont transformées par  $S$  respectivement en  $B$  et  $B'$ , alors :

- $B \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ ,
- $B^{-1}B' = A^{-1}A'$ .

### Démonstration

1. C'est immédiat puisque  $B = T_s \cdots T_1 A$  où  $T_i \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$  pour tout  $i$ .
2. Ce qui précède montre que  $B$  est inversible. Les relations  $B = T_s \cdots T_1 A$  et  $B' = T_s \cdots T_1 A'$  montrent alors :

$$B^{-1}B' = A^{-1} (T_s \cdots T_1)^{-1} (T_s \cdots T_1) A' = A^{-1}A'. \quad \square$$

**Remarque** On a une proposition analogue pour les suites d'opérations élémentaires sur les colonnes en remplaçant  $A^{-1}A'$  par  $A'A^{-1}$ . On fera attention à ce que l'expression  $A^{-1}A'$  n'est pas invariante par opérations sur les colonnes.

## Méthodes du pivot

Les différentes méthodes du pivot de Gauss que nous allons présenter utilisent le lemme fondamental suivant :

### Lemme

Si  $A = (\alpha_{i,j}) \in M_{n,m}(\mathbf{K})$  est une matrice dont la première colonne est non nulle, il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transformant  $A$  en une matrice  $B$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec  $\beta_{1,1} \neq 0$ .

On peut, si l'on veut, se limiter aux matrices élémentaires de transvection.

**Démonstration** Il existe  $i$  tel que  $\alpha_{i,1}$  soit non nul.

Si  $\alpha_{1,1} \neq 0$ , on pose  $A' = A$ . Sinon, on choisit  $i \geq 2$  tel que  $\alpha_{i,1} \neq 0$  et l'on note  $A'$  la transformée de  $A$  par  $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ . Dans tous les cas,  $A' = (\alpha'_{i,j})$  vérifie  $\alpha'_{1,1} \neq 0$ . Un tel élément non nul s'appelle un pivot.

Les opérations  $L_i \leftarrow L_i - \frac{\alpha'_{i,1}}{\alpha'_{1,1}} L_1$  pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  transforment  $A'$  en  $B$  de la forme voulue.  $\square$

Une suite d'opérations élémentaires de transvection transformant  $A$  en une matrice  $B$  de la forme indiquée dans le lemme précédent peut être obtenue par l'algorithme suivant :

Donnée :  $A \in M_{n,m}(\mathbf{K})$  de première colonne non nulle.

Resultat :  $B \in M_{n,m}(\mathbf{K})$  ;

Variables :  $U \in M_{n,m}(\mathbf{K})$ ,  $i \in \mathbb{N}$  ;

- $U \leftarrow A$  ;
- si  $U[1,1] = 0$ , alors choisir  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  tel que  $U[i,1] \neq 0$  et appliquer  $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$  à  $U$  ; ( $\epsilon$ )
- pour  $i$  allant de 2 à  $n$  appliquer  $L_i \leftarrow L_i - \frac{U[i,1]}{U[1,1]} L_1$  à  $U$  ;
- $B \leftarrow U$  ;



Si l'on ne s'impose pas d'utiliser uniquement des opérations de transvection, on peut remplacer l'instruction (€) par :

- choisir  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  tel que  $U[i, 1] \neq 0$  et appliquer  $L_1 \leftrightarrow L_i$  à  $U$  ;

En calcul numérique, lorsque  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on choisit l'indice  $i$  du pivot tel que :

$$|U[i, 1]| = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |U[k, 1]|$$

pour limiter les erreurs d'arrondis engendrées par des divisions par des nombres trop petits.

## 2.2 Calcul du rang, du déterminant et de l'inverse

### Matrices échelonnées

#### Définition 7

On dit qu'une matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  de  $M_{n,m}(\mathbf{K})$  est *échelonnée*, s'il existe  $r \in \llbracket 0, \min(n, m) \rrbracket$  et une suite strictement croissante  $(j_1, \dots, j_r) \in \llbracket 1, m \rrbracket^r$  tels que :

1.  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \alpha_{i,\ell} = 0$  pour tout  $\ell \in \llbracket 1, j_i - 1 \rrbracket$  et  $\alpha_{i,j_i} \neq 0$  ;
2.  $\forall (i, j) \in \llbracket r + 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket, \alpha_{i,j} = 0$

Cette matrice est de rang  $r$ .

**Démonstration** La matrice  $A$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,j_1} & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2,j_2} & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{r,j_r} & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha_{i,j_i} \neq 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Les  $r$  premières lignes de cette matrice étant indépendantes  $A$  est de rang  $r$ . □

La seule matrice échelonnée de rang 0 est donc la matrice nulle.

## Calcul du rang

### Proposition 16

Soit  $A \in M_{n,m}(\mathbf{K})$ .

1. Il existe une suite d'opérations élémentaires de transvection sur les lignes transformant  $A$  en une matrice échelonnée  $B$ .
2. Le rang de  $A$  est le nombre de lignes non nulles de  $B$ .

**Démonstration** On raisonne par récurrence sur le nombre de colonnes de  $A = (\alpha_{i,j})$  en convenant que la matrice vide est échelonnée.

1. Si  $A$  est nulle, la suite vide d'opérations élémentaires sur les lignes et  $B = 0$  conviennent. Sinon soit  $j_1$  l'indice de la première colonne non nulle de  $A$ . Le lemme du point précédent appliquée à la matrice  $(\alpha_{i,j})_{(i,j) \in [1,n] \times [j_1,m]}$  montre qu'il existe une suite d'opérations élémentaires de transvection sur les lignes transformant  $A$  en :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,j_1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & A'_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où  $\alpha_{1,j_1} \neq 0$ .

Le nombre de colonnes de  $A'_2$  est strictement inférieur à  $n$ . Il existe par hypothèse de récurrence une suite d'opérations élémentaires de transvection sur les lignes transformant cette matrice en une matrice échelonnée  $A''_2$ . Ces opérations transforment alors  $A'$ , sans affecter sa première ligne ni ses  $j_1 - 1$  premières colonnes en :

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,j_1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & A''_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

qui est échelonnée. Cela montre le premier point par récurrence.

2. Ce dernier point vient de ce que le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses lignes non nulles et de ce que les opérations élémentaires conservent le rang.  $\square$

**Exemple** Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 14 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Première colonne ; les opérations :  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ,  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ,  $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$  transforment  $A$  en :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Seconde colonne ; l'opération  $L_2 \leftrightarrow L_4$  transforme  $U_1$  en :

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Quatrième colonne ; l'opération  $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$  transforme  $U_2$  en :

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $U_4$  est échelonnée à 3 lignes non nulles. Le rang de  $A$  vaut 3.

### Calcul du déterminant

#### Proposition 17

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ .

Il existe une suite d'opérations élémentaires de transvection sur les lignes transformant  $A$  en une matrice  $B$  triangulaire supérieure.

Le déterminant de  $A$  est alors égal au produit des éléments diagonaux de  $B$ .

#### Démonstration

- Il existe une suite d'opérations élémentaires de transvection transformant  $A$  en une matrice  $B$  échelonnée de rang  $n$ . La matrice  $B$  est donc triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls.
- Les opérations élémentaires utilisées étant des opérations de transvection,  $\det A = \det B$ . On conclut en remarquant que le déterminant de la matrice triangulaire  $B$  est le produit de ses termes diagonaux. □

**Remarque** Dans la proposition précédente on n'est pas obligé de se limiter à des opérations élémentaires de transvection. On obtiendra alors le déterminant de  $A$  comme déterminant de  $B$  divisé par le produit des déterminants des matrices associées aux opérations effectuées.

**Calcul de l'inverse**

**Proposition 18**

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ .

1. Il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transformant  $A$  en l'identité.
2. La même suite d'opérations élémentaires sur les lignes transforme alors l'identité en  $A^{-1}$ .

**Démonstration**

1.
  - Il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transformant  $A$  en une matrice  $B$  échelonnée inversible, c'est-à-dire triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls.
  - Les opérations  $L_n \leftarrow \frac{1}{\beta_{n,n}}L_n$  et  $L_i \leftarrow L_i - \beta_{i,n}L_n$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  transforment  $B$  en :

$$B' = \begin{pmatrix} \beta'_{1,1} & \dots & * & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \beta'_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Par récurrence sur la dimension, il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transformant la matrice  $(\beta'_{i,j})_{i,j=1,\dots,n-1}$  en  $I_{n-1}$ . Elles transforment alors, sans affecter sa dernière ligne ni sa dernière colonne, la matrice  $B'$  en l'identité
2. Le couple  $(A, I_n)$  est transformé en  $(I_n, B)$ . On a alors  $A^{-1}I_n = I_n^{-1}B$ , soit  $B = A^{-1}$ . □

**Exemple** Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

de terme général  $\min(i, j)$ .

Les opérations  $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ ,  $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  transforment  $A$  et  $I_n$  en :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ ,  $L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$  donnent alors :

$$I_n \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 2.3 Applications à $GL_n(\mathbf{K})$ et $SL_n(\mathbf{K})$

**Proposition 19**

Soit  $A \in GL_n(\mathbf{K})$ .

Il existe une suite d'opérations élémentaires de transvection sur les lignes transformant  $A$  en une matrice de la forme  $\text{diag}(1, \dots, 1, \Delta)$  où  $\Delta = \det A$ .

Il existe une suite  $(T_1, \dots, T_s)$  de matrices élémentaires de transvection et un scalaire  $\Delta \in \mathbf{K}^*$  tels que :

$$A = T_1 \dots T_s \text{diag}(1, \dots, 1, \Delta)$$

avec  $\Delta = \det A$ .

**Démonstration** On suppose  $n \geq 2$ .

► On raisonne par récurrence sur  $n$ .

1. Il existe d'après le lemme page 128 une suite d'opérations élémentaires de transvection sur les lignes transformant  $A$  en :

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha'_{1,1} & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où  $\alpha'_{1,1} \neq 0$ .

Les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$  et  $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1 - \alpha'_{1,1}}{\alpha'_{1,1}} L_2$  transforment  $A'$  en :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A''_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

2. Par récurrence sur  $n$ , il existe une suite d'opérations élémentaires de transvection sur les lignes transformant  $A''_1$  en :

$$B''_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & * \\ & & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Ces opérations effectuées sur les lignes d'indices supérieurs à 2 transforment  $A''$  en :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Le scalaire  $\Delta$ , égal au déterminant de  $B$  donc à celui de  $A$ , est non nul.

3. En agissant de façon analogue en partant de la dernière colonne, on voit que l'on peut finalement transformer  $A$  en  $\text{diag}(1, \dots, 1, \Delta)$  où  $\Delta = \det A$ .

► Il existe donc une suite  $(U_1, \dots, U_s)$  de matrices élémentaires de transvection telle que  $\text{diag}(1, \dots, 1, \Delta) = U_s \cdots U_1 A$ . On obtient finalement :

$$A = U_1^{-1} \cdots U_s^{-1} \text{diag}(1, \dots, 1, \Delta)$$

avec  $\Delta = \det A$ .

□

### Ensembles générateurs de $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\text{SL}_n(\mathbf{K})$

La proposition 19 fournit le corollaire très important suivant :

#### Corollaire 20

L'ensemble des matrices élémentaires de transvection engendre le groupe  $\text{SL}_n(\mathbf{K})$ .

L'ensemble des matrices élémentaires de transvection et des matrices de la forme  $\text{diag}(1, \dots, \alpha)$  où  $\alpha \in \mathbf{K}^*$  engendre le groupe  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ .

## EXERCICES

1. Soit  $A = (\alpha_{i,j})$  une matrice inversible de  $M_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients ainsi que ceux de  $A^{-1}$  sont positifs. Montrer qu'il existe une permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et une suite  $(a_i, \dots, a_n)$  d'éléments de  $\mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \alpha_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} a_j.$$

2. Soit  $A = (\alpha_{i,j})$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont les éléments  $\alpha_{i,j}$  appartiennent à  $\{0, 1\}$  et vérifient :

$$\forall i, \quad \alpha_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad \alpha_{i,j} + \alpha_{j,i} = 1.$$

Montrer que le rang de  $A$  est supérieur ou égal à  $n - 1$ .

3. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps fini  $\mathbb{F}$  à  $q$  éléments
1. Déterminer le nombre de familles libres à  $k$  vecteurs et le nombre de bases de  $E$ .
  2. Déterminer le nombre d'éléments de  $\mathcal{GL}(E)$  et  $\mathcal{SL}(E)$ .
  3. Déterminer le nombre de sous-espaces de dimension  $k$  de  $E$
4. Montrer que le groupe  $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , égal à  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , est isomorphe à  $\mathcal{S}_3$  (on utilisera une action naturelle de ce groupe). Déterminer alors tous les morphismes de groupes de  $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  vers  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^*$  et  $\mathbb{C}^*$ .
5. Soit  $\varphi$  un morphisme de groupe de  $\text{Gl}_n(\mathbb{K})$  vers  $\mathbb{K}^*$  où  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et  $n$  un entier non nul. On suppose que l'on n'a pas  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $n = 2$ .

1. On note  $T_{i,j}(\lambda)$  la matrice d'opération élémentaire  $I_n + \lambda E_{i,j}$  avec  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

(a) Montrer que lorsque  $\mathbb{K}$  a au moins trois éléments et que  $\beta$  est choisi dans  $\mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ , on a :

$$T_{i,j}(\lambda) = (I_n - \beta E_{i,i}) T_{i,j}(-\lambda\beta^{-1}) (I_n - \beta E_{i,i})^{-1} T_{i,j}(-\lambda\beta^{-1})^{-1}.$$

(b) Montrer que lorsque  $n$  est supérieur ou égal à 3, on a pour  $k \notin \{i, j\}$  :

$$T_{i,j}(\lambda) = T_{i,k}(\lambda) T_{k,j}(1) T_{i,k}(\lambda)^{-1} T_{k,j}(1)^{-1}.$$

(c) En déduire que l'on a  $\varphi(T_{i,j}(\lambda)) = 1$  pour tout  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

2. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes  $\psi$  de  $\mathbb{K}^*$  vers  $\mathbb{K}^*$  tel que  $\varphi = \psi \circ \det$ .
3. Déterminer la signature de la permutation associée à une matrice  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  où  $p$  est un nombre premier impair.

6. Soit  $p$  un nombre premier. Montrer, pour toute matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{Z})$ , la congruence :

$$\operatorname{tr} A^p \equiv \operatorname{tr} A \pmod{p}$$

(on montrera que  $\operatorname{tr} (A + B)^p$  est congru à  $\operatorname{tr} A^p + \operatorname{tr} B^p$  modulo  $p$ ).

7. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps de caractéristique nulle vérifiant  $\operatorname{tr} u = 0$ .

1. Montrer que si  $u$  est non nul, il existe un vecteur  $x$  tel que  $(x, u(x))$  soit libre. En déduire qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de diagonale nulle.
2. En déduire qu'il existe  $v$  et  $w$  de  $\mathcal{L}(E)$  tels que  $u = v \circ w - w \circ v$  (on cherchera  $v$  de matrice diagonale dans une base de  $E$ ).

8. Soit  $A = (\alpha_{i,j})$  une matrice de  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{Q})$  à coefficients entiers

1. Montrer que l'inverse de  $A$  est aussi à coefficients entiers si et seulement si,  $\det A = \pm 1$ .
2. Montrer que si  $\det A = \pm 1$ , alors les coefficients entiers  $(\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{n,1})$  de la première colonne de  $A$  sont premiers entre eux dans leur ensemble.
3. Montrer que pour toute suite  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  d'entiers premiers entre eux dans leur ensemble, il existe une matrice  $A$  de  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{Q})$  à coefficients entiers dont le déterminant vaut 1 telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha_{i,1} = \alpha_i$$

(on procédera par récurrence).

9. Soient  $p$  un nombre premier et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que l'ensemble  $\operatorname{SL}_n(\mathbb{Z})$  des matrices de  $M_n(\mathbb{Z})$  de déterminant 1 est un groupe pour le produit usuel.
2. Montrer que l'application  $\pi_p$  de  $M_n(\mathbb{Z})$  vers  $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  qui associe à toute matrice la matrice des classes modulo  $p$  de ses éléments est un morphisme d'anneaux qui induit un morphisme de groupes surjectif de  $\operatorname{SL}_n(\mathbb{Z})$  vers  $\operatorname{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .

10. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels respectivement de dimension finie  $n$  et  $m$ , et  $\mathcal{B}_0$  une base de  $E$ .

1. Soit  $\varphi$  un morphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$ . Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $F$  adaptée à une somme directe :

$$F = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$$

où les  $F_i$  sont de même dimension  $r$  telle la matrice de  $\varphi(u)$  dans la base  $\mathcal{C}$  soit la matrice par blocs  $(\alpha_{i,j} I_r)$  si la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}_0$  est  $(\alpha_{i,j})$ .

2. En déduire la forme des automorphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}(E)$ .



11. On appelle dérivation de l'algèbre  $M_n(\mathbf{K})$  toute endomorphisme  $D$  de cet espace vérifiant :

$$\forall (M, N) \in M_n(K)^2, \quad D(MN) = D(M)N + MD(N).$$

1. Montrer que pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbf{K})$ , l'application  $D_A : M \mapsto AM - MA$  est une dérivation, appelée dérivation intérieure associée à  $A$ , de  $M_n(\mathbf{K})$ . Déterminer les matrices  $A$  telles que  $D_A$  soit nulle.
  2. Montrer que toute dérivation  $D$  de  $M_n(\mathbf{K})$  est de la forme  $D_A$  pour une matrice  $A$  de  $M_n(K)$  (on considérera les matrices  $D(E_{i,j})$  où  $E_{i,j}$  est la base canonique de  $M_n(\mathbf{K})$ ).
12. Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre matrices de  $M_n(\mathbf{K})$ . Montrer que si  $C$  et  $D$  commutent, alors :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

(on commencera par étudier le cas où  $D$  est inversible).

13. Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  une matrice carrée complexe inversible décrite par blocs pour la partition  $n = p + q$ . On écrit  $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$  avec la même partition. Montrer que l'on a :

$$\det A \det A' = \det D \det D'.$$

14. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps  $\mathbf{K}$  de caractéristique nulle. Montrer que tout sous-espace  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{L}(E)$  constitué d'endomorphismes de rang inférieur ou égal à  $r$  est de dimension inférieure ou égale à  $rn$ .



## Chapitre 6

# Dualité en dimension finie

Dans ce chapitre,  $\mathbf{K}$  désigne un corps commutatif et  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbf{K}$ .

### 1. Espace dual et base duale

On appelle *forme linéaire* sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  vers  $\mathbf{K}$ .

#### Définition 1

On appelle *espace dual* de  $E$  et l'on note  $E^*$ , l'espace  $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$  des formes linéaires sur  $E$ .

#### 1.1 Base duale

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On appelle  *$i^{\text{ième}}$  forme coordonnée* dans  $\mathcal{B}$  l'application qui associe à tout vecteur de  $E$  sa  $i^{\text{ième}}$  coordonnée dans  $\mathcal{B}$ .

On appelle famille duale de  $\mathcal{B}$ , la famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  des formes coordonnées dans  $\mathcal{B}$ . Cette famille est caractérisée par les relations de Kronecker :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

ou par l'identité :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i.$$

**Remarque** Contrairement à ce que pourrait faire penser la notation, la forme  $e_i^*$  ne dépend pas seulement de  $e_i$ , mais de tous les vecteurs de  $\mathcal{B}$ .

### Proposition 1

La famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$  appelée *base duale* de  $\mathcal{B}$  et notée  $\mathcal{B}^*$ .

**Démonstration** Considérons une relation  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0$  avec  $(\alpha_i) \in \mathbf{K}^n$ . Pour tout  $j$ , l'évaluation en  $e_j$  donne  $\alpha_j = 0$ . La famille est donc libre

Soit, maintenant,  $\varphi \in E^*$ . Si  $\psi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$ , on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \psi(e_j) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*(e_j) = \varphi(e_j).$$

Les formes linéaires  $\varphi$  et  $\psi$  prenant les mêmes valeurs sur  $e_j$  pour tout  $j$ , on obtient

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*.$$

La famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est donc une base de  $E^*$ . Cela provient aussi de ce que  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est la famille des applications linéaires de  $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$  associée aux bases  $\mathcal{B}$  de  $E$  et (1) de  $\mathbf{K}$ .  $\square$

### Corollaire 2

La dimension de  $E^*$  est égale à  $n$ .

Soient :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad \text{et} \quad \varphi = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*$$

des éléments respectivement de  $E$  et  $E^*$ .

On a, pour tout  $i$  :

$$x_i = e_i^*(x) \quad \text{et} \quad \lambda_i = \varphi(e_i).$$

Les expressions de  $x$  et de  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}^*$  prennent ainsi les formes symétriques :

$$\forall x \in E, \quad x = e_1^*(x) e_1 + \dots + e_n^*(x) e_n$$

et :

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi = \varphi(e_1) e_1^* + \dots + \varphi(e_n) e_n^*.$$

Si l'on note respectivement  $X = (x_i)$  et  $C = (\lambda_i)$  les matrices colonnes de  $x$  et  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}^*$ , on a alors :

$$\varphi(x) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = {}^t C X.$$

**Remarques**

- La matrice de la forme linéaire  $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$ , considérée comme une application linéaire dans les bases  $\mathcal{B}$  de  $E$  et (1) de  $\mathbb{K}$  est la matrice ligne :

$$L = ( \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n ).$$

Cette matrice, que l'on appelle la matrice de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ , est la transposée de la matrice de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}^*$ .

Si  $X = (x_i)$  est la matrice de  $x \in E$ , on a :

$$\varphi(x) = L X = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

- Lorsque  $\mathbb{K}$  est infini, une forme linéaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{K}^n$  s'écrit de façon unique comme un polynôme homogène de degré un :

$$\varphi = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

de l'algèbre  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  où  $(x_1, \dots, x_n)$  désigne la base duale de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

**Propriétés du dual**

**Proposition 3**

- Si  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$ , il existe un vecteur  $x$  tel que  $\varphi(x) = 1$ .
- Si  $x$  est un vecteur de  $E$  non nul, il existe une forme linéaire telle que  $\varphi(x) = 1$ .

**Démonstration**

- La forme  $\varphi$  étant non nulle, il existe  $x' \in E$  tel  $\varphi(x') \neq 0$ . Le vecteur  $x = \varphi(x')^{-1} x'$  convient alors.
- L'une des coordonnées de  $x$  étant non nulle, il existe  $i$  tel que  $e_i^*(x) \neq 0$ . La forme linéaire  $\varphi = e_i^*(x)^{-1} e_i^*$  convient alors. □

**Exemple** Soient  $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  des scalaires deux à deux distincts.

La famille  $(Q_1, \dots, Q_n)$  des polynômes d'interpolation de Lagrange associée à  $(\alpha_i)$  est une base de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ . D'un autre côté, les application  $\varphi_i : P \mapsto P(\alpha_i)$  sont des formes linéaires sur  $E$  pour tout  $i$  vérifiant les relations de Kronecker :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{i,j}.$$

La famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est donc la base duale de  $(Q_1, \dots, Q_n)$ .

## Base préduale

### Théorème 4

Toute base de  $E^*$  est la base duale d'une unique base de  $E$ , appelée *base préduale*.

**Démonstration** Soit  $\mathcal{D} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une base de  $E^*$ .

L'application  $u : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  de  $E$  vers  $\mathbf{K}^n$  est linéaire. Son noyau, forme des  $x$  sur lesquels toute forme linéaire est nulle, est réduit à  $\{0\}$  par la proposition précédente. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

Notons  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  la base canonique de  $\mathbf{K}^n$ . Pour tout  $j$ , un vecteur  $e$  de  $E$  vérifie  $\varphi_i(e) = \delta_{i,j}$  pour tout  $i$  si, et seulement si  $u(e) = \varepsilon_j$ . Comme  $u$  est un isomorphisme, la famille :

$$\mathcal{B} = (u^{-1}(\varepsilon_1), \dots, u^{-1}(\varepsilon_n))$$

est la seule famille de  $E$  satisfaisant aux conditions de Kronecker :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \varphi_i(e) = \delta_{i,j}.$$

Puisque  $\mathcal{B}$  est une base comme image de la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbf{K}^n$  par l'isomorphisme  $u^{-1}$ , c'est l'unique base de  $E$  dont  $\mathcal{D}$  soit la base duale □

### Exemples

1. Soit  $E = \mathbf{C}_n[X]$ . L'application  $\varphi_k : P \mapsto \frac{1}{k!} P^{(k)}(0)$  est une forme linéaire sur  $E$  pour tout  $k$ . La formule de Taylor :

$$\forall P \in E, \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(0) X^k$$

montre que  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est la base duale de la base  $(X^0, \dots, X^n)$  de  $E$ .

2. Soient  $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$  et  $(\psi_1, \dots, \psi_n) \in (E^*)^n$ . La matrice :

$$A = (\psi_i(f_j)) \in M_n(\mathbf{K})$$

est inversible si, et seulement si,  $(f_1, \dots, f_n)$  et  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  sont des bases de  $E$  et  $E^*$ .

On voit, en effet, qu'une relation de liaison entre les éléments de  $(f_1, \dots, f_n)$  (respectivement de  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ ) fournit une relation de liaison entre les colonnes (respectivement les lignes) de  $A$ . Inversement, si  $(f_1, \dots, f_n)$  et  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  sont des bases,  $A$  est la matrice  $(f_1, \dots, f_n)$  dans la base préduale de  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ . Elle est donc inversible.

## 1.2 Orthogonalité

Soient  $S \subset E$  et  $T \subset E^*$ .

### Définitions

#### Définition 2

On appelle *orthogonal* d'une partie  $S$  de  $E$  le sous-ensemble :

$$S^\perp = \left\{ \varphi \in E^* \mid \forall x \in S, \varphi(x) = 0 \right\}$$

de  $E^*$ .

On appelle *pre-orthogonal* d'une partie  $T$  de  $E^*$  le sous-ensemble :

$$T^\circ = \left\{ x \in E \mid \forall \varphi \in T, \varphi(x) = 0 \right\}$$

de  $E$ .

### Remarques

- On appelle parfois orthogonal, et on note  $T^\perp$ , le pré-orthogonal de  $T$ . Cela n'engendre pas de confusion si l'on fait attention à l'espace,  $E$  ou  $E^*$ , contenant  $T$ .
- Le pré-orthogonal de  $T \subset E^*$  est simplement l'intersection :

$$\bigcap_{\varphi \in T} \text{Ker } \varphi.$$

- L'orthogonal de  $S \subset E$  est l'ensemble des formes linéaires  $\varphi$  dont le noyau contient  $S$ .

#### Proposition 5

L'orthogonal de  $S$  est égal à l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par  $S$ .

L'orthogonal de  $S$  est un sous-espace vectoriel de dimension égale à  $n - \text{rg } S$ .

### Démonstration

- Il suffit de remarquer que le noyau d'une forme linéaire  $\varphi$  contient  $S$  si, et seulement si, il contient  $\text{Vect}(S)$ .
- Soient  $r$  la dimension de  $\text{Vect}(S)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base adaptée à ce sous-espace. Une forme linéaire  $\varphi = \sum_i \varphi(e_i) e_i^*$  appartient à  $S^\perp$  si, et seulement si, elle vérifie  $\varphi(e_i) = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  d'après le premier point. On a donc :

$$S^\perp = \text{Vect}(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*).$$

□

**Proposition 6**

Le pré-orthogonal de  $T$  est égal au pré-orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par  $T$ .

Le pré-orthogonal de  $T$  est un sous-espace vectoriel de dimension égale à  $n - \text{rg } T$ .

**Démonstration**

- Pour tout  $x$  de  $E$ , l'ensemble des formes linéaires nulles en  $x$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  et l'on a :

$$\forall \varphi \in T, \quad \varphi(x) = 0 \iff \forall \varphi \in \text{Vect } T, \quad \varphi(x) = 0$$

Cela montre que  $T^\circ = (\text{Vect } T)^\circ$ .

- Soient  $r$  la dimension de  $\text{Vect}(T)$  et  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  une base de  $E^*$  adaptée à ce sous-espace. Notons alors  $(e_1, \dots, e_r)$  la base préduale de  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ . Un vecteur  $x = \sum_i \varphi_i(x)e_i$  appartient à  $T^\circ$  si, et seulement si, on a  $\varphi_i(x) = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . On obtient donc :

$$T^\circ = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n).$$

□

**Corollaire 7**

On a :

$$(S^\perp)^\circ = \text{Vect}(S) \quad \text{et} \quad (T^\circ)^\perp = \text{Vect}(T).$$

**Démonstration** On a immédiatement  $S \subset (S^\perp)^\circ$ . Le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(S)$  est donc inclus dans  $(S^\perp)^\circ$ . Comme on a de plus :

$$\dim (S^\perp)^\circ = n - (n - \text{rg } S) = \text{rg } S,$$

il vient  $(S^\perp)^\circ = \text{Vect}(S)$ .

On montre  $(T^\circ)^\perp = \text{Vect}(T)$  de la même façon.

□

**Exemple** La famille  $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})^n$  est libre si, et seulement si, il existe une famille  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  telle que :

$$A = \left( f_j(x_i) \right)$$

soit inversible.

Si  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée, une relation de liaison entre les éléments de cette famille induit une relation de liaison entre les colonnes de  $A$ .



Supposons réciproquement que  $(f_1, \dots, f_n)$  soit libre. Cette famille engendre un sous-espace vectoriel  $V \subset \mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$  de dimension  $n$ . Notons alors  $\delta_x$  la forme linéaire  $f \mapsto f(x)$  de  $V$  vers  $\mathbf{K}$  pour tout  $x \in \mathbf{K}$ . Il est clair que l'orthogonal de  $\{\delta_x \mid x \in \mathbf{K}\}$ , ensemble des fonctions s'annulant en tout point de  $\mathbf{K}$ , est le sous-espace  $\{0\}$  de  $V$ . On obtient alors par le corollaire précédent :

$$\text{Vect}(\delta_x \mid x \in \mathbf{K}) = (\{\delta_x \mid x \in \mathbf{K}\}^\circ)^\perp = \{0\}^\perp = V^*.$$

On peut alors extraire de la famille génératrice  $(\delta_x)_{x \in \mathbf{K}}$  une base  $(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$  de  $V^*$ . La matrice :

$$(\delta_{x_i}(f_j)) = (f_j(x_i))$$

est inversible comme matrice de la famille  $(\delta_{x_i})$  dans la base  $(f_j)$ .

### 1.3 Application linéaire associée à une famille finie de vecteurs ou de formes linéaires

#### Cas d'une famille finie de vecteurs

Soit  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ .

L'application :

$$\begin{aligned} u : E^* &\rightarrow \mathbf{K}^p \\ \varphi &\mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)) \end{aligned}$$

est linéaire. On l'appelle l'application linéaire associée à  $(x_1, \dots, x_p)$ .

#### Proposition 8

Le rang de l'application  $u$  est égal à celui de  $(x_1, \dots, x_p)$ . En particulier elle est surjective si, et seulement si,  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.

On a dans tous les cas :

$$x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) \iff \forall \varphi \in \text{Ker } u, \quad \varphi(x) = 0.$$

#### Démonstration

► Le noyau de  $u$  est l'orthogonal de  $\{x_1, \dots, x_p\}$ . Cela entraîne :

$$n - \text{rg } u = n - \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$$

d'où le premier point.

► Un élément  $x \in E$  vérifie  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $\varphi \in \text{Ker } u$  si, et seulement si, il appartient à

$$\left(\{x_1, \dots, x_p\}^\perp\right)^\circ = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p).$$

□

**Remarque** Soit  $A = (\alpha_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbf{K})$  la matrice de  $(x_1, \dots, x_p)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . La matrice de l'application  $u$  dans la base duale  $\mathcal{B}^*$  de  $E^*$  et dans la base canonique de  $\mathbf{K}^p$  est la transposée de  $A$ . La proposition précédente montre donc que le rang de  ${}^tA$  est égal à celui de  $A$ .

### Corollaire 9

L'application linéaire  $u$  associée à  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  est un isomorphisme si, et seulement si,  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$ .

### Cas d'une famille finie de formes linéaires

Soit  $(\psi_1, \dots, \psi_p) \in (E^*)^p$ .

L'application :

$$\begin{aligned} v : E &\rightarrow \mathbf{K}^p \\ x &\mapsto (\psi_1(x), \dots, \psi_p(x)) \end{aligned}$$

est linéaire. On l'appelle l'application linéaire associée à  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ .

### Proposition 10

Le rang de l'application  $v$  est égal à celui de  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ . En particulier,  $v$  est surjective si, et seulement si,  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$  est libre.

On a dans tous les cas :

$$\psi \in \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_p) \iff \forall x \in \text{Ker } v, \quad \psi(x) = 0.$$

### Démonstration

► Le noyau de  $v$  est l'orthogonal de  $\{\psi_1, \dots, \psi_p\}$ . On obtient :

$$n - \text{rg } v = n - \dim \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_p)$$

d'où le premier point.

► Un élément  $\varphi \in E^*$  vérifie  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $x \in \text{Ker } v$  si, et seulement si, il appartient à :

$$(\{\psi_1, \dots, \psi_p\}^\circ)^\perp = \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_p).$$

□

### Corollaire 11

L'application linéaire  $v$  associée à  $(\psi_1, \dots, \psi_n) \in (E^*)^n$  est un isomorphisme si, et seulement si,  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  est une base de  $E^*$ .

**Remarques**

- Soit  $B = (\beta_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  la matrice de  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$  dans la base  $\mathcal{B}^*$ . La matrice de l'application  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et dans la base canonique de  $\mathbb{K}^p$  est la transposée de  $B$ . On obtient ici aussi que le rang de  ${}^tB$  est égal à celui de  $B$ .
- Avec les notations de la proposition 9, on a :

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \psi_i \subset \text{Ker } \psi \iff \exists (\alpha_i) \in \mathbb{K}^p : \psi = \sum_{i=1}^p \alpha_i \psi_i.$$

Les scalaires  $\alpha_i$  s'appellent alors les *multiplicateurs de Lagrange* de  $\psi$  par rapport à  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ .

## 2. Systèmes d'équations linéaires

### 2.1 Systèmes d'équations linéaires

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Définitions**

On appelle *équation linéaire* sur  $E$  toute équation en  $x \in E$  de la forme :

$$\psi(x) = \beta$$

avec  $(\psi, \beta) \in E^* \times \mathbb{K}$ . La forme linéaire  $\psi$  s'appelle la *partie linéaire* de l'équation et le scalaire  $\beta$  son *second membre*. L'équation  $\psi(x) = 0$  s'appelle l'équation *homogène* et  $\psi(x) = \beta$ , l'équation *complète*. L'identification d'une équation  $\psi(x) = \beta$  au couple  $(\psi, \beta)$  donne à l'ensemble des équations linéaires la structure de l'espace vectoriel  $E^* \times \mathbb{K}$ .

On appelle *système d'équations linéaires* sur  $E$ , tout système d'équations de la forme :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = \beta_i \tag{S}$$

où  $((\psi_i, \beta_i)) \in (E^* \times \mathbb{K})^p$ .

On appelle alors :

- *système homogène* associé à (S), le système :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = 0 \tag{Sh}$$

- *rang* de (S), le rang  $r$  de la famille des parties linéaires  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ .

On dit qu'un système est *compatible* s'il possède au moins une solution et que deux systèmes sont *équivalents* s'ils ont même ensemble de solutions

### Structure de l'ensemble des solutions

Si  $u$  désigne l'application linéaire :

$$x \mapsto (\psi_1(x), \dots, \psi_p(x))$$

de  $E$  vers  $\mathbf{K}^p$  associée à la famille  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ , le système s'écrit comme l'équation linéaire unique :

$$u(x) = (\beta_i).$$

Comme  $u$  est de rang  $r$  d'après la proposition 9 on obtient ainsi la proposition suivante :

#### Proposition 12

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires de rang  $r$  est soit vide, soit un sous-espace affine de  $E$  de direction l'ensemble des solutions du système homogène associé et de dimension  $n - r$ .

### Système d'équations à parties linéaires indépendantes

#### Théorème 13

Tout système de  $p$  équations linéaires de rang  $p$  est compatible et l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de dimension  $n - p$  de  $E$ .

**Démonstration** L'application linéaire  $u : x \mapsto (\psi_i(x))$  de  $E$  vers  $\mathbf{K}^p$  est surjective puisque la famille  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est libre. □

### Sous-système principal et théorème de Rouché-Fontené

Soit (S) le système d'équations linéaires :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = \beta_i \tag{S}$$

avec  $((\psi_i, \beta_i)) \in (E^* \times \mathbf{K})^p$ .

#### Définition 3

On appelle *sous-système principal* de (S) tout sous-système :

$$\forall i \in I, \quad \psi_i(x) = \beta_i \tag{Sp}$$

de (S) où  $I$  est une partie de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  telle que  $(\psi_i)_{i \in I}$  soit une base du sous-espace vectoriel de  $E^*$  engendré par  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ .

Les équations de (Sp) sont alors dites *principales* et les autres *secondaires*

Dans ce qui suit, nous supposerons un système principal :

$$\forall i \in I, \quad \psi_i(x) = \beta_i \tag{Sp}$$

choisi et nous noterons  $K = \llbracket 1, p \rrbracket \setminus I$ .

**Théorème 14 (de Rouché-Fontené (I))**

Si (Sp) un sous-système principal d'un système (S) d'équations linéaires les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) le système (S) est compatible
- (ii) les équations secondaires sont combinaisons linéaires des équations principales,
- (iii) le rang de la famille des equations (complètes) de (S) est égal au rang de (S).

**Démonstration** Par définition, le rang de la famille des formes linéaires  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est  $r$  et la famille  $(\psi_i)_{i \in I}$  est une base de  $\text{Vect}(\psi_i)$ . Puisque la famille  $(\psi_i, \beta_i)_{i \in I}$  est évidemment libre, le rang  $s$  de la famille  $(\psi_i, \beta_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  des équations (complètes) est supérieur ou égal à  $r$ .

- Si (S) est compatible, il existe vecteur  $x_0$  vérifiant les équations de (S). D'un autre côté, il existe une famille  $(\gamma_{i,k}) \in \mathbf{K}^{I \times K}$  unique telle que :

$$\forall k \in K, \quad \psi_k = \sum_{i \in I} \gamma_{i,k} \psi_i.$$

On obtient ainsi :

$$\beta_k = \psi_k(x_0) = \sum_{i \in I} \gamma_{i,k} \psi_i(x_0) = \sum_{i \in I} \gamma_{i,k} \beta_i$$

soit :

$$(\psi_k, \beta_k) = \sum_{i \in I} \gamma_{i,k} (\psi_i, \beta_i)$$

pour tout  $k \in K$ .

- Si les équations secondaires sont des combinaisons linéaires des équations principales, le rang de  $(\psi_i, \beta_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est inférieur ou égal à  $r$ . Il lui est donc égal.
- Si le rang de  $(\psi_i, \beta_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est égal à  $r$ , toute equation secondaire est combinaison linéaire des équations principales. Les parties linéaires des équations principales étant indépendantes le système (Sp) possède au moins une solution  $x_0$ . Il est alors immédiat de vérifier que  $x_0$  est aussi solution des équations secondaires.

□

**Théorème 15 (de Rouché-Fontené (II))**

Un système d'équations linéaires compatible est équivalent à tout sous-système principal.

**Démonstration** L'ensemble  $X_p$  des solutions du système principal (Sp) est un sous-espace affine de dimension  $n - r$  de  $E$  puisque les parties linéaires des équations de (Sp) sont indépendantes. Il en est de même de l'ensemble  $X$  des solutions de (S) puisque ce système est compatible. L'inclusion évidente  $X \subset X_p$  montre que l'on a  $X = X_p$ .  $\square$

**2.2 Résolution d'un système linéaire**

Considérons un système linéaire à  $p$  équations et  $n$  inconnues de rang  $r$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} x_j = \beta_i. \quad (\text{S})$$

On peut évidemment considérer que (S) est un système d'équations linéaires sur  $\mathbf{K}^n$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = \beta_i.$$

On appelle *matrice* du système, la matrice  $A = (\alpha_{i,j})$ . C'est la transposée de la matrice des formes linéaires  $\psi_i$  dans la base duale de la base canonique et son rang est donc égal à  $r$ .

On appelle *matrice complète* du système, la matrice  $C = (A, B)$  obtenue à en rajoutant à  $A$  la colonne des seconds membres.

**Proposition 16**

Le système (S) est compatible si, et seulement si, sa matrice complète  $C$  est de rang  $r$ .

**Démonstration** Les lignes de  $C$  représentant les couples  $((\psi_i, \beta_i))$ , le système est compatible si, et seulement si, la matrice  $C$  est de rang  $r$ .  $\square$

**Remarque** On retrouve cette condition en remarquant que (S) possède une solution si, et seulement si, la colonne  $B$  est combinaison linéaire des colonnes de  $A$

### Étude d'un système

On peut conduire l'étude du système (S) de la façon suivante.

On détermine des parties  $I \subset \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  telles que la sous-matrice  $A_{I,J} = (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  soit une sous-matrice principale de  $A$ , c'est-à-dire soit carrée inversible de rang  $r$ . Le système d'équations principales associé à  $I$  est alors :

$$\forall i \in I, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} x_j = \beta_i. \tag{Sp}$$

On vérifie si le système est compatible en étudiant le rang de la matrice complète  $C$ . Si le rang de  $C$  est strictement supérieur à  $r$ , alors (S) n'a pas de solutions. S'il vaut  $r$ , alors (S) est équivalent à (Sp). On dit alors que les équations secondaires sont *superflues*.

Dans ce dernier cas :

- on appelle *inconnues principales*, les inconnues  $(x_j)$  pour  $j \in J$  et *inconnues secondaires*, celles d'indice  $k \in K$  avec  $K = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus J$ . Un vecteur  $(x_j)$  est alors une solution de (Sp) si, et seulement si, il vérifie le système réduit :

$$\forall i \in I, \quad \sum_{j \in J} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i - \sum_{k \in K} \alpha_{i,k} x_k. \tag{Sr}$$

- le système (Sr) est un système de Cramer d'ordre  $r$  et sa résolution donne les inconnues principales comme fonctions affines des inconnues secondaires  $(x_k)$  considérées comme paramètres. L'application :

$$(x_k)_{k \in K} \mapsto (x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

est une représentation paramétrique affine de l'ensemble des solutions de (S).

### Exemples

1. Considérons le système :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 - 23x_3 + 10x_4 - 16x_5 = -2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 18x_3 - 8x_4 + 12x_5 = 0 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 + 3L_2$  et  $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 - 2L_2$  transforment la matrice des coefficients :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & -23 & 10 & -16 \\ -2 & -4 & 18 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

en :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang du système est donc égal à 2. Les mêmes opérations transforment la matrice complète :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & -23 & 10 & -16 & -2 \\ -2 & -4 & 18 & -8 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

en une matrice dont les deux dernières lignes sont nulles. Ainsi le rang de  $C$  vaut aussi 2 et le système est compatible.

La sous-matrice de  $A$  obtenue en sélectionnant les deux premières lignes et les deux premières colonnes de  $A$  étant inversible, le système principal est constitué des deux premières équations et les inconnues principales sont  $(x_1, x_2)$ . Le système réduit est alors :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \\ 2x_1 - x_2 = 1 - 7x_3 + 3x_4 - 5x_5 \end{cases}$$

d'où la paramétrisation :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_5}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de l'ensemble des solutions.

2. L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions du système homogène  $(n, n+1)$  de rang  $n$  :

$$\begin{cases} \alpha_{1,0}x_0 + \cdots + \alpha_{1,i}x_i + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n,0}x_0 + \cdots + \alpha_{n,i}x_i + \cdots + \alpha_{n,n}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

est la droite vectorielle engendrée par le vecteur :

$$X = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$



où  $A_j$  est donné par :

$$A_j = (-1)^j \begin{vmatrix} \alpha_{1,0} & \dots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,0} & \dots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Il s’agit, en effet, d’un système homogène de rang  $n$  à  $n + 1$  inconnues dont l’ensemble des solutions est une droite vectorielle de  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

Le vecteur  $X$  est non nul puisque la matrice  $(\alpha_{i,j})$  est de rang  $n$  et possède une sous-matrice carré de taille  $n$  inversible. Il est aussi solution du système puisque, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la quantité :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \alpha_{i,j} A_j$$

est nulle comme développement suivant la dernière ligne du déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,0} & \dots & \alpha_{1,j} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,0} & \dots & \alpha_{i,j} & \dots & \alpha_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,0} & \dots & \alpha_{n,j} & \dots & \alpha_{n,n} \\ \alpha_{i,0} & \dots & \alpha_{i,j} & \dots & \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

qui possède deux lignes égales.  
Finalement,  $S$  est égal à  $\mathbb{K} X$ .

**Utilisation des opérations élémentaires**

Les opérations élémentaires sur les lignes que nous avons définies sur les matrices s’appliquent évidemment aux systèmes linéaires. Elles s’identifient alors aux opérations élémentaires sur les lignes de la matrice complète associée.

Les opérations élémentaires étant inversibles, elles transforment un système en un système équivalent. On obtient la proposition suivante :

**Proposition 17**

Il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transformant le système (S) en un système équivalent :

$$UX = V \quad (S')$$

où la matrice  $U \in M_{p,n}(\mathbb{K})$  est échelonnée.

Si (S) est un système de Cramer, le système (S') est un système triangulaire dont les termes diagonaux sont non nuls. On le résout alors en calculant  $x_n$ , puis, de proche en proche,  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ .

Dans le cas général, supposons que  $U$  soit échelonnée à  $r$  lignes non nulles et, en reprenant les notations de la définition, de suite associée  $(j_1, \dots, j_r)$ . On peut évidemment choisir les  $r$  premières lignes comme équations principales. On obtient alors les points suivants :

- le système (S) est compatible si, et seulement si,  $v_i = 0$  pour tout  $i > r$  ( $V = (v_i)$ ),
- on calcule les inconnues dites principales,  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ , en fonctions des autres inconnues considérées comme paramètres et placées dans les parties droites des équations en résolvant de proche en proche un système de Cramer d'ordre  $r$  triangulaire formé des  $r$  premières lignes et des colonnes d'indices  $(j_1, \dots, j_r)$  de  $B$ .

**Remarque** On utilise en calcul numérique ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), pour limiter les erreurs d'arrondi, la méthode du pivot partiel, variante de la précédente, où l'on choisit dans chaque colonne l'indice  $i \in \llbracket j, n \rrbracket$  du pivot tel que :

$$|\alpha_{i,j}| = \max_{k \in \llbracket j, n \rrbracket} |\alpha_{k,j}|.$$

## 2.3 Représentation des sous-espaces par des systèmes d'équations

On dit qu'un ensemble est défini par un système d'équations si c'est l'ensemble des solutions du système considéré.

### Sous-espace vectoriel

Nous avons déjà vu la proposition suivante :

**Proposition 18**

L'ensemble défini par un système d'équations linéaires homogènes à parties linéaires indépendantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de codimension  $p$  de  $E$ .

**Proposition 19**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de codimension  $p$  de  $E$ .

Il existe un système de  $p$  équations linéaires homogènes à parties linéaires indépendantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = 0$$

définissant  $F$ .

Une forme linéaire  $\psi \in E^*$  s'annule sur  $F$  si et seulement si, elle est combinaison linéaire des  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ .

**Démonstration** Soit  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$  une base du sous-espace  $F^\perp$  de  $E^*$  ( $p = \text{codim } F$ ).

► On a :

$$F = \{\psi_1, \dots, \psi_p\}^\circ = \left\{ x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = 0 \right\}$$

► Une forme linéaire  $\psi$  est nulle sur  $F$  si, et seulement si, elle appartient à :

$$F^\perp = \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_p).$$

□

**Sous-espace affine**

Dans le cas affine, on obtient :

**Proposition 20**

L'ensemble défini par un système d'équations linéaires à parties linéaires indépendantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = \beta_i$$

est un sous-espace affine de codimension  $p$  de  $E$  et de direction le sous-espace vectoriel défini par le système homogène associé.

**Proposition 21**

Soit  $V$  un sous-espace affine de codimension  $p$  de  $E$ .

Il existe un système de  $p$  équations linéaires à parties linéaires indépendantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = \beta_i$$

définissant  $V$ .

L'hyperplan affine  $X$  défini par l'équation linéaire  $\psi(x) = \beta$  contient  $V$  si, et seulement si,  $(\psi, \beta)$  est combinaison linéaire des éléments de  $((\psi_1, \beta_1), \dots, (\psi_p, \beta_p))$ .

**Démonstration** Soient  $x_0 \in V$  et  $F$  la direction de  $V$ .

- Il existe une famille libre  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$  de  $E^*$  telle que  $F = \{\psi_1, \dots, \psi_p\}^\perp$ . Notons alors  $\beta_i$  la valeur  $\psi_i(x_0)$  pour tout  $i$ . La proposition précédente montre que l'ensemble des solutions  $W$  du système :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \psi_i(x) = \beta_i$$

est un sous-espace affine contenant  $x_0$  et de direction  $F$ . On a donc  $V = W$ .

- L'ensemble  $V \cap X$  est défini par le système :

$$\begin{cases} \psi_i(x) = \beta_i, & \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ \psi(x) = \beta \end{cases}$$

S'il est égal à  $V$ , alors son rang vaut  $p$  et, par compatibilité, l'équation secondaire  $\psi(x) = \beta$  est combinaison linéaire des équations  $\psi_i(x) = \beta_i$ . La réciproque est évidente.  $\square$

**Exemple** Considérons le plan affine  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{K}^4$  définie par les deux équations à parties linéaires indépendantes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Les hyperplans affines passant par  $\mathcal{P}$  sont donc les sous-espaces d'équation :

$$(3\alpha + 2\beta)x_1 + (4\alpha - 3\beta)x_2 + (-5\alpha + 3\beta)x_3 + (7\alpha - 2\beta)x_4 = 2\alpha$$

avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Les hyperplans de cette famille passant par le point  $m = (1, 0, 1, 0)$  sont ceux pour lesquels on a  $-4\alpha + 5\beta = 0$ . Les couples  $(\alpha, \beta)$  vérifiant cette relation étant proportionnels à  $(5, 4)$ , il existe un et un seul hyperplan affine contenant  $\mathcal{P}$  et  $m$ . L'une de ses équations est :

$$23x_1 + 8x_2 - 13x_3 + 27x_4 = 10.$$

## EXERCICES

1. Soit  $E$  un espace vectoriel.

1. Soit  $\varphi$  une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $E$ . Montrer que l'application de  $E^{p+1}$  vers  $E$  définie par :

$$\psi(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) x_i$$

est  $(p + 1)$ -linéaire alternée.

2. Supposons que  $E$  soit de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Montrer que, pour tout  $(x_0, \dots, x_n)$  de  $E^{n+1}$ , on a :

$$\sum_{i=0}^n (-i)^i \det_{\mathcal{B}}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i = 0.$$

2 Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Si  $u$  est une application linéaire de  $E$  vers  $F$ , on appelle application transposée de  $u$ , et l'on note  ${}^t u$ , l'application de  $F^*$  vers  $E^*$  définie par  ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$ .

1. Montrer que l'application  ${}^t u$  appartient à  $\mathcal{L}(F^*, E^*)$  et que si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des bases de  $E$  et  $F$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*} ({}^t u) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} u.$$

2. Montrer les relations  $\text{Ker } {}^t u = (\text{Im } u)^\perp$ . En déduire  $\text{rg } {}^t u = \text{rg } u$  et  $\text{Im } {}^t u = (\text{Ker } u)^\perp$

3. Étudier le système complexe :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & y_1 \\ x_2 + x_3 & = & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} + x_n & = & y_{n-1} \\ x_1 + x_n & = & y_n \end{cases} \quad (*)$$

4. Montrer que la matrice de Hilbert :

$$H = \left( \frac{1}{i + j - 1} \right)_{(i,j)^2 \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

est inversible et que son inverse est à coefficients entiers

5. Soit  $A$  de  $M_n(\mathbf{K})$ . Montrer qu'une matrice  $M$  de  $M_n(\mathbf{K})$  peut s'écrire sous la forme  $AN - NA$  avec  $N \in M_n(\mathbf{K})$  si, et seulement si, elle vérifie :

$$\forall P \in M_n(\mathbf{K}), \quad AP = PA \implies \text{tr} MP = 0. \quad (*)$$

6. Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ . Calculer le déterminant :

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1^0 & \dots & a_j^0 & \dots & a_n^0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{i-1} & \dots & a_j^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & \dots & a_j^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_j^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

(on considèrera  $\Delta_i$  comme le mineur d'un déterminant de taille  $n + 1$ )

7. Soit  $n$  supérieur ou égal à 2. Si  $A = (\alpha_{i,j})$  est une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$ , on note :

$$l_i(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k}, \quad c_j(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,j}$$

et :

$$d(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k}, \quad a(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n+1-k}.$$

1. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{N}_0$  des matrices  $A$  vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  de dimension  $(n - 1)^2$ .

2. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{N}$  des matrices  $A$  vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad l_i(A) = c_j(A)$$

est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  de dimension  $(n - 1)^2 + 1$ .

3. Montrer que pour  $n \geq 3$  l'ensemble  $\mathcal{M}_0$  des matrices  $A$  vérifiant :

$$d(A) = c(A) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  de dimension  $(n - 1)^2 - 2$ .

4. Montrer que  $n \geq 3$  l'ensemble  $\mathcal{M}$  des matrices  $A$  vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = d(A) = a(A)$$

est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  de dimension  $(n - 1)^2 - 1$ .

# Chapitre 7

## Formes bilinéaires symétriques

Dans ce chapitre,  $E$  désigne un espace vectoriel de dimension quelconque sur un corps commutatif  $\mathbf{K}$  de caractéristique nulle.

### 1. Définitions

#### 1.1 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

##### Formes bilinéaires symétriques

###### Définition 1

On appelle *forme bilinéaire symétrique* sur  $E$  toute application bilinéaire  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{K}$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(y, x) = \varphi(x, y).$$

L'ensemble, noté  $\mathcal{S}(E)$ , des formes bilinéaires symétriques est évidemment un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{BL}(E)$  des formes bilinéaires sur  $E$ .

##### Formes quadratiques

###### Définition 2

On appelle *forme quadratique* sur  $E$  toute application  $q : E \rightarrow \mathbf{K}$  de la forme :

$$x \mapsto \varphi(x, x)$$

où  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .

Notons  $\Delta$  l'application  $x \mapsto (x, x)$  de  $E$  vers  $E^2$ . La forme quadratique associée à  $\varphi \in \mathcal{S}(E)$  est  $q = \varphi \circ \Delta$ .

L'application  $\varphi \mapsto \varphi \circ \Delta$  de  $\mathcal{S}(E)$  vers  $\mathcal{F}(E, \mathbf{K})$  étant évidemment linéaire, l'ensemble, noté  $\mathcal{Q}(E)$ , des formes quadratiques est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(E, \mathbf{K})$ .

### Identités de polarisation

#### Proposition 1

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ .

Il existe une et une seule forme bilinéaire symétrique  $\varphi$ , appelée *forme polaire* de  $q$ , telle que  $q = \varphi \circ \Delta$ .

Elle est donnée par l'une des *identités de polarisation* suivantes :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \left( q(x + y) - q(x) - q(y) \right),$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \left( q(x) + q(y) - q(x - y) \right),$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} \left( q(x + y) - q(x - y) \right).$$

**Démonstration** Par définition, il existe  $\varphi \in \mathcal{S}(E)$  telle que  $q = \varphi \circ \Delta$

► La bilinéarité et la symétrie de  $\varphi$  montrent que l'on a :

$$\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y),$$

soit :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \left( q(x + y) - q(x) - q(y) \right).$$

Ainsi  $\varphi$  est déterminée par  $q$ .

► Nous venons d'obtenir la première identité de polarisation. On obtient la seconde en changeant  $y$  en  $-y$ . La relation :

$$\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 4\varphi(x, y)$$

s'obtient par la somme des deux premières

□



**Corollaire 2**

L'application  $\varphi \mapsto q = \varphi \circ \Delta$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(E)$  sur  $\mathcal{Q}(E)$ .

*Exemples*

1. La forme polaire de la forme quadratique nulle est évidemment la forme bilinéaire symétrique nulle. Ainsi, une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  vérifiant  $\varphi(x, x) = 0$  pour tout  $x$  de  $E$  est nulle.
2. Pour tout  $(\psi_1, \psi_2) \in (E^*)^2$ , l'application :

$$\psi_1\psi_2 : x \mapsto \psi_1(x)\psi_2(x)$$

est une forme quadratique sur  $E$ . Sa forme polaire est la forme bilinéaire symétrique :

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2} \left( \psi_1(x)\psi_2(y) + \psi_2(x)\psi_1(y) \right).$$

En particulier, pour tout  $\psi \in E^*$ , l'application :

$$\psi^2 : x \mapsto \psi(x)^2$$

est une forme quadratique sur  $E$ . Sa forme polaire est la forme bilinéaire symétrique :

$$(x, y) \mapsto \psi(x)\psi(y).$$

**1.2 Formes positives et définies positives**

Dans ce paragraphe, on suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Soient  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  et  $q$  la forme quadratique associée.

**Définitions**

**Définition 3**

On dit que  $\varphi$ , ou  $q$ , est *positive* si elle vérifie :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0.$$

On dit que  $\varphi$ , ou  $q$ , est *définie positive* si elle vérifie :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(x, x) > 0.$$

On note :

- $\mathcal{S}^+(E)$  et  $\mathcal{S}^{++}(E)$  les ensembles des formes bilinéaires symétriques respectivement positives et définies positives ;
- $\mathcal{Q}^+(E)$  et  $\mathcal{Q}^{++}(E)$  les ensembles des formes quadratiques respectivement positives et définies positives sur  $E$ .

### Remarques

- Une forme bilinéaire symétrique positive  $\varphi$  est définie positive si, et seulement si, elle vérifie de plus la propriété dite de separation :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0.$$

- Les ensembles  $\mathcal{S}^+(E)$  et  $\mathcal{S}^{++}(E)$  ne sont pas des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{S}(E)$ . Ils sont évidemment stables par combinaisons linéaires à coefficients positifs. On dit que ce sont des *cônes convexes* de  $\mathcal{S}(E)$ .  
On a bien sûr la même chose pour  $\mathcal{Q}^+(E)$  et  $\mathcal{Q}^{++}(E)$  dans  $\mathcal{Q}(E)$ .
- On dit qu'une forme  $\varphi \in \mathcal{S}(E)$  est *négative* (respectivement *définie négative*) si  $-\varphi$  est positive (respectivement définie positive).
- L'étude d'un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, appelé alors produit scalaire, est l'objet de la théorie des « espaces préhilbertiens réels » et des « espaces euclidiens ».

### Exemples

1. Le produit scalaire canonique :

$$\left( (x_i), (y_i) \right) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $\mathbb{R}^n$ . Par isomorphisme il existe des formes bilinéaires symétriques définies positives sur tout espace vectoriel réel de dimension finie.

2. Il existe aussi des formes bilinéaires symétriques positives ou définies positives sur des espaces de dimension infinie. L'application :

$$(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est une forme bilinéaire symétrique positive, non définie positive, de l'espace  $\mathcal{CM}([0, 1], \mathbb{R})$  des applications continues par morceaux de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ . Sa restriction à l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  des applications continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

### Inégalité de Cauchy-Schwarz

#### Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique positive.

On a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y)^2 \leq \varphi(x, x) \varphi(y, y).$$

Lorsque  $\varphi$  est définie positive, il y a égalité dans la relation de Cauchy-Schwarz si et seulement si,  $(x, y)$  est liée.

#### Démonstration

► Soit  $(x, y) \in E^2$ . L'application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  :

$$P(t) = \varphi(tx - y, tx - y) = t^2\varphi(x, x) - 2t\varphi(x, y) + \varphi(y, y)$$

est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 dont les valeurs sont, comme celles de  $\varphi \circ \Delta$ , positives.

Distinguons deux cas.

1. Si  $\varphi(x, x)$  est non nul,  $P$  est un trinôme du second degré à valeurs positives. Le scalaire :

$$\varphi(x, x)P\left(\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, x)}\right) = -\varphi(x, y)^2 + \varphi(x, x)\varphi(y, y)$$

est donc positif ou nul.

2. Si  $\varphi(x, x)$  est nul,  $P$  est une application affine à valeurs positives. L'étude de son comportement à l'infini montre que l'on a  $\varphi(x, y) = 0$  et, dans ce cas aussi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

► Supposons  $\varphi$  définie positive. Le cas  $x = 0$  étant évident, on supposera  $x \neq 0$ . Comme  $\varphi(x, x)$  est alors non nul, on voit en reprenant la première partie du point précédent qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :

$$P(\alpha) = \varphi(\alpha x - y, \alpha x - y) = 0.$$

C'est bien sûr équivalent à  $y = \alpha x$

□

**Remarque** Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique positive, on a pour tout  $x \in E$  :

$$\varphi(x, x) = 0 \iff \forall y \in E, \quad \varphi(x, y) = 0$$

### 1.3 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

On suppose dans cette section que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

Soient  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  et  $q$  la forme quadratique associée.

#### Définition

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

#### Définition 4

On appelle matrice de  $\varphi$ , ou de  $q$ , dans  $\mathcal{B}$ , la matrice symétrique :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \left( \varphi(e_i, e_j) \right) \in M_n(\mathbf{K}).$$

Si  $A = (\alpha_{i,j})$  est la matrice de  $\varphi$  ainsi que  $X = (x_i)$  et  $Y = (y_i)$  les matrices colonnes de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}$ , le développement de  $\varphi(x, y)$  par bilinéarité montre que l'on a :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} x_i y_j = {}^t X A Y$$

et :

$$q(x) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} x_i x_j = {}^t X A X.$$

On écrit en général  $q(x)$  sous la forme :

$$q(x) = \sum_i \alpha_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} \alpha_{i,j} x_i x_j.$$

L'expression analytique de  $q$  dans  $\mathcal{B}$  est donc un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées  $(x_i)$  du vecteur  $x$ . On retrouve alors :

- les *termes diagonaux*  $\alpha_{i,i}$  de la matrice de  $q$  dans  $\mathcal{B}$  comme coefficients des termes  $x_i^2$  ;
- les *termes rectangles*  $\alpha_{i,j}$  comme demi-coefficients des termes  $x_i x_j$  avec  $i < j$ .

Réciproquement, lorsque  $\mathbf{K}$  est infini, tout polynôme homogène de degré deux  $q(x_1, \dots, x_n)$  définit une forme quadratique sur  $\mathbf{K}^n$  dont la matrice dans la base canonique est obtenue à partir des coefficients de  $q$  par la règle ci-dessus.

**Proposition 4**

L'application qui associe à une forme bilinéaire symétrique (respectivement quadratique) sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(E)$  (respectivement  $\mathcal{Q}(E)$ ) sur l'ensemble  $S_n(\mathbf{K})$  des matrices symétriques.

**Démonstration** Cette application est évidemment linéaire et, par l'expression analytique de  $\varphi(x, y)$ , injective.

Si  $A = (\alpha_{i,j})$  est une matrice symétrique, il est facile de vérifier qu'avec les notations ci-dessus l'application :

$$(x, y) \mapsto \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \alpha_{i,j} x_i y_j$$

est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  de matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}$ . □

**Remarque** La dimension de  $\mathcal{S}(E)$ , ou de  $\mathcal{Q}(E)$ , est donc  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

**Exemples**

1. Toute forme quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  s'écrit :

$$q(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ . Les résultats classiques sur l'existence des racines d'un trinôme montrent que  $q$  est définie positive si, et seulement si :

$$\alpha\gamma - \beta^2 > 0 \quad \text{et} \quad \alpha > 0.$$

2. Soient  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $a + b \leq n$  et  $A$  la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & -I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'unique forme  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dont la matrice dans la base canonique est  $A$  est donnée par :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^a x_i y_i - \sum_{i=a+1}^{a+b} x_i y_i$$

et la forme quadratique associée par :

$$q(x) = \sum_{i=1}^a x_i^2 - \sum_{i=a+1}^{a+b} x_i^2.$$

Elle est définie positive si, et seulement si,  $a = n$  et positive si, et seulement si  $b = 0$ .

### Changement de bases

Soient  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .

#### Proposition 5

La matrice de  $\varphi$ , ou  $q$ , dans la base  $\mathcal{C}$  est donnée par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}} \varphi = {}^t P \text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi P.$$

**Démonstration** Si  $P$  vaut  $(\theta_{i,j})$ , on a  $f_i = \sum_{k=1}^n \theta_{k,i} e_k$  et par conséquent :

$$\varphi(f_i, f_j) = \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \theta_{k,i} \varphi(e_k, e_\ell) \theta_{\ell,j}.$$

Cela prouve la proposition. □

#### Remarques

- On dit que des matrices symétriques  $A$  et  $B$  sont *congruentes* s'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$  tel que  $B = {}^t P A P$ . Il s'agit évidemment de la relation d'équivalence associée à l'action  $(P, A) \mapsto P A {}^t P$  de  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$  sur  $\text{S}_n(\mathbf{K})$ . Deux matrices congruentes sont équivalentes. Elles ont donc même rang.
- Dans les conditions précédentes, une matrice  $B \in \text{S}_n(\mathbf{K})$  est congruente à  $A$  si, et seulement si, il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$ , ou  $q$ , vaut  $B$ .
- On appelle *discriminant* de  $\varphi$ , ou  $q$ , dans  $\mathcal{B}$ , le déterminant de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi$ . Le discriminant de  $\varphi$ , ou  $q$ , dans  $\mathcal{C}$  est égal à celui de  $\varphi$ , ou  $q$ , dans  $\mathcal{B}$  multiplié par  $(\det P)^2$ . Si  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ , ils ont donc même signe

Les remarques précédentes conduisent à la définition suivante :

#### Définition 5

On appelle *rang* de  $\varphi$ , ou  $q$ , le rang commun de ses matrices dans les bases de  $E$ .

On dit que  $\varphi$ , ou  $q$ , est *non dégénérée* si son rang vaut  $n$ .

Exemple Si :

$$q(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

est une forme quadratique sur  $\mathbb{K}^2$ , sa matrice et son discriminant dans la base canonique sont  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$  et  $\alpha\gamma - \beta^2$ . On retrouve le discriminant usuel d'un trinôme au signe près.

## 2. Réduction d'une forme bilinéaire symétrique

On suppose dans cette section que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

Soient  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  et  $q$  la forme quadratique associée.

### 2.1 Réduction d'une forme bilinéaire symétrique

#### Base orthogonale

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  sa base duale.

#### Définition 6

On dit que  $\mathcal{B}$  est *orthogonale* pour  $\varphi$ , ou  $q$ , si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi$  est diagonale.

**Remarque** On dit, par analogie avec la géométrie euclidienne, que deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux pour  $\varphi$  si  $\varphi(x, y) = 0$ . Une base  $\mathcal{B}$  est alors orthogonale si, et seulement si, ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

On a alors équivalence entre les points suivants :

- $\mathcal{B}$  est orthogonale pour  $\varphi$  (ou  $q$ ) et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi$  vaut  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ;
- on peut écrire :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i \quad \text{et} \quad q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2$$

en notant  $(x_i)$  et  $(y_i)$  les coordonnées dans  $\mathcal{B}$  des vecteurs génériques  $x$  et  $y$  de  $E$  ;

- on peut écrire :

$$q = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i^2.$$

Dans ces conditions, le rang de  $\varphi$  (ou de  $q$ ) est le nombre d'indices  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $\alpha_i \neq 0$ .

### Théorème de réduction

On appelle réduction de  $\varphi$  (ou de  $q$ ) la recherche :

- soit d'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  orthogonale pour  $\varphi$  ;
- soit d'une base  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  de  $E^*$  telle que  $q = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i^2$ .

On dit dans le second cas que  $q$  est décomposée en somme (en réalité, en combinaison linéaire) de carrés. C'est la présentation traditionnelle, due à Gauss du problème de la réduction.

### Théorème 6

Toute forme bilinéaire symétrique, ou toute forme quadratique, sur un espace vectoriel de dimension finie admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

**Démonstration** On montre ce théorème par récurrence sur la dimension de l'espace noté  $E$ . Il est évident si cette dimension vaut 0 ou 1.

Supposons qu'il soit acquis en dimension strictement inférieure à  $n > 1$  et considérons  $\varphi \in \mathcal{S}(E)$  avec  $\dim E = n$ . Si  $\varphi$  est nulle, toute base convient. Sinon, la forme quadratique associée étant non nulle, il existe  $e_1 \in E \setminus \{0\}$  tel que  $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$ .

1. Le noyau  $F$  de la forme linéaire  $x \mapsto \varphi(e_1, x)$  est un sous-espace de  $E$  de dimension supérieure ou égale à  $n - 1$  qui ne contient pas  $e_1$ . On a donc :

$$E = \mathbf{K}e_1 \oplus F.$$

2. L'application  $\varphi|_{F \times F}$  est évidemment une forme bilinéaire symétrique sur  $F$ . Par hypothèse de récurrence, il existe une base  $(e_2, \dots, e_n)$  de  $F$  telle que  $\varphi(e_i, e_j) = 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$  vérifiant  $i \neq j$ . Comme  $\varphi(e_1, x) = 0$  pour tout  $x \in F$ , la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est diagonale.

Cela termine la démonstration. □

**Remarque** Toute matrice symétrique est donc congruente à une matrice diagonale.



### 2.2 Méthode de décomposition de Gauss

Dans ce qui suit, nous supposons que  $\mathbf{K}$  est infini et nous écrivons les formes linéaires et les formes quadratiques sur  $\mathbf{K}^n$  comme des polynômes homogènes de degré 1 et 2 de  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

Le théorème de réduction appliqué à  $\mathbf{K}^n$  montre que toute forme quadratique :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_i \alpha_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} \alpha_{i,j} x_i x_j$$

peut s'écrire :

$$q = \sum_{i=1}^n \beta_i \psi_i^2$$

où les  $\psi_i$  sont des formes linéaires indépendantes.

La méthode de Gauss permet d'obtenir pratiquement la décomposition précédente par récurrence sur le nombre de monômes  $x_i$  nécessaires à leur écriture.

Nous dirons pour cela qu'un polynôme  $P$  ne dépend que de  $(x_2, \dots, x_n)$  par exemple, et l'on écrira  $P(x_2, \dots, x_n)$ , si  $P$  appartient à la sous-algèbre de  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$  engendré par  $x_2, \dots, x_n$ .

Montrons alors par récurrence sur  $m$  que toute forme quadratique :

$$q(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{i,j} x_i x_j$$

ne dépendant que de  $x_i, \dots, x_m$  peut s'écrire sous la forme :

$$q(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \beta_i \psi_i^2(x_1, \dots, x_m),$$

où  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  est une famille libre de  $m$  formes linéaires ne dépendant que de  $x_1, \dots, x_m$ .

Le résultat est évident si  $m$  est égal à 0 ou 1. Considérons alors une forme quadratique  $q(x_1, \dots, x_m)$  non nulle avec  $m \geq 2$ .

- S'il existe un indice  $i$  tel que  $\alpha_{i,i}$  soit non nul (*pivot diagonal*), on supposera, quitte à permuter les variables, que l'on a  $i = 1$ . On écrit alors :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_m) &= \alpha_{1,1} \left( x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^m \frac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{1,1}} x_1 x_i \right) + q'(x_2, \dots, x_m) \\ &= \alpha_{1,1} \left( x_1 + \sum_{i=2}^m \frac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{1,1}} x_i \right)^2 + q_2(x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

On obtient ainsi une forme linéaire  $\psi_1(x_1, \dots, x_n)$  et une forme quadratique  $q_2(x_2, \dots, x_m)$  en les indéterminées indiquées telles que :

$$q(x_1, \dots, x_m) = \alpha_{1,1}\psi_1^2(x_1, \dots, x_m) + q_2(x_2, \dots, x_m).$$

Par hypothèse de récurrence, on peut écrire  $q_2 = \sum_{i=2}^m \beta_i \psi_i^2$  où  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 2, m \rrbracket}$  est une famille de  $m - 1$  formes linéaires indépendantes en  $(x_i)_{i \in \llbracket 2, m \rrbracket}$ . La famille  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ , dont la matrice dans la base canonique est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & A' \end{pmatrix}$$

où  $A'$  est la matrice de  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 2, m \rrbracket}$ , est libre.

On obtient finalement l'écriture :

$$q = \alpha_{1,1}\psi_1^2 + \sum_{i=2}^m \beta_i \psi_i^2$$

qui exprime  $q$  comme combinaison linéaire des carrés de  $n$  formes linéaires indépendantes.

- Sinon, il existe  $(i, j)$  tel que  $\alpha_{i,j}$  soit non nul (*pivot rectangle*). On supposera, quitte à permuter les variables, que l'on a  $(i, j) = (1, 2)$ . On écrit alors :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_m) &= 2\alpha_{1,2} \left( x_1 x_2 + \sum_{i=3}^m \frac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{1,2}} x_1 x_i + \sum_{i=3}^m \frac{\alpha_{2,i}}{\alpha_{1,2}} x_2 x_i \right) \\ &\quad + q'(x_3, \dots, x_m) \\ &= 2\alpha_{1,2} \left( x_1 + \sum_{i=3}^m \frac{\alpha_{2,i}}{\alpha_{1,2}} x_i \right) \left( x_2 + \sum_{i=3}^m \frac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{1,2}} x_i \right) \\ &\quad + q_3(x_3, \dots, x_m). \end{aligned}$$

On obtient ainsi deux formes linéaires indépendantes :

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_3, \dots, x_m) &= \left( x_1 + \sum_{i=3}^m \frac{\alpha_{2,i}}{\alpha_{1,2}} x_i \right) + \left( x_2 + \sum_{i=3}^m \frac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{1,2}} x_i \right) \\ \psi_2(x_2, x_3, \dots, x_m) &= \left( x_1 + \sum_{i=3}^m \frac{\alpha_{2,i}}{\alpha_{1,2}} x_i \right) - \left( x_2 + \sum_{i=3}^m \frac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{1,2}} x_i \right) \end{aligned}$$

ainsi qu'une forme quadratique  $q_3(x_3, \dots, x_m)$  telles que :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{2}\alpha_{1,2}\psi_1^2(x_1, x_3, \dots, x_m) - \frac{1}{2}\alpha_{1,2}\psi_2^2(x_2, x_3, \dots, x_m) \\ &\quad + q_3(x_3, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on peut écrire  $q_3 = \sum_{i=3}^m \beta_i \psi_i^2$  où  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 3, m \rrbracket}$  est une famille de  $m - 2$  formes linéaires indépendantes en  $(x_3, \dots, x_m)$ . La famille  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ , dont la matrice dans la base canonique est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ * & * & A'' \end{pmatrix}$$

où  $A''$  est la matrice de  $(\psi_i)_{i \in \llbracket 3, m \rrbracket}$ , est libre.

On obtient finalement l'écriture :

$$q = \frac{1}{2} \alpha_{1,2} \psi_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_{1,2} \psi_2^2 + \sum_{i=3}^m \beta_i \psi_i^2$$

qui exprime  $q$  comme combinaison linéaire de carrés de  $m$  formes linéaires indépendantes.

*Exemple* Soit la forme quadratique :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$$

sur  $\mathbf{K}^4$ .

Le choix du pivot rectangle de position  $(1, 2)$  conduit à :

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 4(x_1 + x_3 + x_4)(x_2 + x_3 + x_4) \\ &\quad - 4x_3^2 - 4x_4^2 - 4x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)^2 \\ &\quad - (x_1 - x_2)^2 - 4x_3^2 - 4x_4^2 - 4x_3x_4. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$q_2(x_3, x_4) = -4x_3^2 - 4x_4^2 - 4x_3x_4 = -(2x_3 + x_4)^2 - 3x_4^2$$

et :

$$q = (x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (2x_3 + x_4)^2 - 3x_4^2.$$

### 2.3 Réduction lorsque $\mathbf{K}$ est égal à $\mathbf{C}$

#### Proposition 7

Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi = J_r$$

où  $r$  est le rang de  $q$ .

**Rappel** On a  $J_r = (\alpha_{i,j})$  où  $\alpha_{i,i} = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $\alpha_{i,j} = 0$  sinon.

**Démonstration** Il existe une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  avec  $\alpha_i \neq 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $\alpha_i = 0$  sinon. En notant  $\beta_i$  un nombre complexe tel que  $\alpha_i \beta_i^2 = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on voit que la matrice de  $\varphi$  dans  $(\beta_1 f_1, \dots, \beta_r f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$  est  $J_r$ .  $\square$

**Remarque** Deux matrices symétriques complexes sont donc congruentes dans  $M_n(\mathbb{C})$  si, et seulement si, elles ont même rang.

## 2.4 Réduction lorsque $K$ est égal à $\mathbb{R}$

### Proposition 8

Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \begin{pmatrix} J_p & & 0 \\ & -J_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

(matrice diagonale formée de  $p$  éléments 1 suivis de  $q$  éléments  $-1$  et de  $n - p - q$  éléments 0).

**Démonstration** Il existe une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  avec  $\alpha_i > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\alpha_i < 0$  pour tout  $i \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$  et  $\alpha_i = 0$  sinon. La matrice de  $\varphi$  dans la base :

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} f_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\alpha_p}} f_p, \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{p+1}}} f_{p+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{p+q}}} f_{p+q}, f_{p+q+1}, \dots, f_n \right)$$

est de la forme indiquée.  $\square$

### Signature

### Définition 7

On appelle *signature* de  $\varphi$  le couple  $(n^+, n^-)$  où  $n^+$  est la plus grande dimension d'un sous-espace  $F$  de  $E$  tel que  $\varphi|_{F \times F}$  soit définie positive et  $n^-$  la plus grande dimension d'un sous-espace  $G$  de  $E$  tel que  $\varphi|_{G \times G}$  soit définie négative.

### Théorème 9 (d'inertie de Sylvester)

Dans toute base de  $E$  orthogonale la matrice diagonale qui représente  $\varphi$  possède  $n^+$  éléments strictement positifs et  $n^-$  éléments strictement négatifs où  $(n^+, n^-)$  est la signature de  $\varphi$ .

**Démonstration** Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthogonale et  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  avec  $\alpha_i > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\alpha_i < 0$  pour tout  $i \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$  et  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket p+q+1, n \rrbracket$ , la matrice de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ .

La restriction de  $\varphi$  au sous-espace  $F$  engendré par  $\mathcal{B}^+ = (e_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  a  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  comme matrice dans  $\mathcal{B}'$ . Elle est donc définie positive. Cela montre  $p \leq n^+$ .

La restriction de  $\varphi$  au sous-espace  $G$  engendré par  $\mathcal{B}^0 = (e_i)_{i \in \llbracket p+1, n \rrbracket}$  a  $\text{diag}(\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}, 0, \dots, 0)$  pour matrice dans  $\mathcal{B}^0$ . Elle est donc négative. Soit alors  $F^+$  un sous-espace de  $E$  de dimension  $n^+$  tel que  $\varphi|_{F^+ \times F^+}$  soit définie positive.

- Si  $x$  appartient à  $G \cap F^+$ , les relations  $x \in G$  et  $x \in F^+$  montrent que  $\varphi(x, x)$  appartient à  $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \{0\}$ . Comme  $\varphi|_{F^+ \times F^+}$  est définie positive, on obtient  $x = 0$ .
- Les sous-espaces  $F^+$  et  $G$  sont donc en somme directe et l'on a :

$$F^+ \oplus G \subset E.$$

Cela entraîne  $n^+ + n - p \leq n$  et, par conséquent,  $n^+ \leq p$ .

Il vient finalement  $p = n^+$ . On obtient de même  $q = n^-$ . □

**Remarques**

- Le rang de  $\varphi$  est  $n^+ + n^-$ .
- La forme  $\varphi$  est de signature  $(p, q)$  si, et seulement si, il existe une base dans laquelle sa matrice est :

$$\begin{pmatrix} J_p & & \\ & -J_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- En particulier,  $\varphi$  est définie positive si, et seulement si, elle est de signature  $(n, 0)$ .

**Caractérisation des formes définies positives**

**Theorème 10**

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique de matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . La forme  $\varphi$  est définie positive si, et seulement si, les mineurs principaux :

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,1} & \dots & \alpha_{i,i} \end{vmatrix}$$

de  $A$  sont strictement positifs pour tout  $i$ .

**Démonstration** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Supposons que  $\varphi$  soit définie positive. Le déterminant  $\Delta_i$  est le discriminant de la forme bilinéaire symétrique restriction de  $\varphi$  au sous-espace  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ . Cette restriction étant définie positive, on a  $\Delta_i > 0$ .

On montre la réciproque par récurrence en supposant le résultat acquis en dimension strictement inférieure à  $n$ . Supposons donc que l'on ait  $\Delta_i > 0$  pour tout  $i$ .

1. Comme on a  $\Delta_i > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , l'hypothèse de récurrence montre que la forme  $\psi$ , restriction de  $\varphi$  au sous-espace vectoriel :

$$F = \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_{n-1},$$

est définie positive. La signature de  $\varphi$  est donc  $(n-1, 0)$ ,  $(n-1, 1)$  ou  $(n, 0)$ .

2. En tout cas, il existe une base  $(f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est de la forme :

$$\text{diag}(1, \dots, 1, \alpha)$$

avec  $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ . Comme le déterminant de cette matrice est de même signe que  $\Delta_n$ , le nombre réel  $\alpha$  est strictement positif et  $\varphi$  est de signature  $(n, 0)$ . □

## EXERCICES

1. Montrer que l'application :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|k|} P(k) Q(-k)$$

est une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}_n[X]$  et déterminer sa signature.

2. Montrer que la matrice symétrique réelle de Hilbert :

$$H = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

est définie positive.

3. Montrer que la matrice symétrique réelle :

$$A = (\min(i, j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

est définie positive et donner une décomposition Gauss de la forme quadratique  $q(X) = {}^t X A X$  associée.

4. Montrer que l'application :

$$\varphi : (A, B) \longmapsto \text{tr } AB$$

est une forme bilinéaire symétrique sur  $M_n(\mathbb{R})$  et déterminer sa signature.

5. Montrer qu'une matrice réelle symétrique  $A = (\alpha_{i,j})$  est positive si et seulement si, les *mineurs diagonaux* :

$$\Delta_I = \det (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in I^2}$$

sont positifs pour toute partie  $I$  non vide de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

6. Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, c'est-à-dire de rang  $n$ , sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ .

1. Montrer que l'application  $\Phi$  de  $E$  dans  $E^*$  qui associe à tout  $y \in E$ , la forme linéaire  $x \mapsto \varphi(x, y)$  est un isomorphisme.
2. Pour tout sous-espace  $F$  de dimension  $p$  de  $E$ , on appelle  $\varphi$ -orthogonal de  $F$  le sous-espace :

$$F^\perp = \{x \mid \forall f \in F, \varphi(f, x) = 0\}.$$

- (a) Montrer que  $F^\perp$  est de dimension  $n - p$  et que l'on a  $(F^\perp)^\perp = F$ .

(b) Donner un exemple de forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $\varphi$  sur un espace  $E$  et de sous-espace  $F$  de  $E$  tel que  $(F, F^\perp)$  ne soit pas en somme directe.

(c) Montrer que l'on a :

$$F \oplus F^\perp = E$$

si, et seulement si,  $\varphi|_{F \times F}$  n'est pas dégénérée.

(d) On suppose  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  et que  $F$  est un sous-espace de  $E$  tel que  $F \oplus F^\perp = E$ . Montrer que la signature de  $\varphi$  est le couple somme des signatures des restrictions de  $\varphi$  à  $F$  et  $F^\perp$

7. Soient  $p$  un nombre premier impair et  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

1. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{F}_p$  avec  $\alpha \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{F}_p$  tels que  $\alpha x^2 + y^2 = \beta$  (on comptera le nombre d'éléments de la forme  $\alpha x^2$  et  $\beta - y^2$ ).

2. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{F}_p$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{F}_p$  tels que  $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ .

3. Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée (de rang  $n$ ) sur un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  sur  $\mathbb{F}_p$ .

(a) Montrer qu'il existe un vecteur  $e_1$  tel que  $\varphi(e_1, e_1) = 1$ .

(b) Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est de la forme :

$$\text{diag}(1, \dots, 1, \alpha)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ .

8. Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique de matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  dans la base  $\mathcal{B}$  d'un espace vectoriel  $E$ .

Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C}$  dont la matrice  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure à éléments diagonaux égaux à 1 et telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}} \varphi$  soit de la forme :

$$\text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) \quad \text{avec} \quad \beta_i \in \mathbf{K}^*$$

si, et seulement si, on a :

$$\forall i, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,1} & \cdots & \alpha_{i,i} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Montrer que l'on a alors, pour tout  $i$ , la relation  $\Delta_i = \beta_1 \cdots \beta_i$ .



9. Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  sur un corps  $\mathbf{K}$  de caractéristique nulle. On suppose que  $\varphi$  est alternée, c'est-à-dire vérifie  $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0$ .

1. Montrer qu'une forme bilinéaire est alternée si, et seulement si, sa matrice  $A = (\varphi(e_i, e_j))$  dans une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est antisymétrique ( ${}^tA = -A$ ).
2. Montrer que si  $\varphi$  est non nulle, il existe deux vecteurs  $(e_1, e_2)$  tels que  $\varphi(e_1, e_2) = 1$ . Montrer que si l'on note  $F$  le sous-espace des  $x$  de  $E$  vérifiant  $\varphi(e_1, x) = 0$  et  $\varphi(e_2, x) = 0$ , on a :

$$E = \mathbf{K}e_1 \oplus \mathbf{K}e_2 \oplus F.$$

3. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $E$  est diagonale par blocs de la forme :

$$H_{n,r} = \begin{pmatrix} H & & & \\ & \ddots & & \\ & & H & \\ & & & O \end{pmatrix}$$

avec  $r$  blocs  $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $O$  la matrice nulle de taille  $n - 2r$ .

4. Montrer que si  $A$  est une matrice antisymétrique, il existe une matrice inversible  $P$  et un entier  $r$  tels que  $A = {}^tPHP$  et que le déterminant est un carré de  $\mathbf{K}$ .



## Chapitre 8

# Réduction des endomorphismes

Dans tout ce chapitre,  $\mathbf{K}$  désigne un corps commutatif et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  de dimension quelconque.

### 1. Polynômes d'endomorphisme

La notion de polynôme d'un endomorphisme, ou d'une matrice, n'est qu'une application particulière de celle de polynôme d'un élément d'une algèbre que nous avons étudiée dans le chapitre « Anneaux et algèbres ».

Dans ce qui suit, nous reprenons ce développement dans le cas d'un endomorphisme. Celui d'une matrice est analogue.

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in M_n(\mathbf{K})$ .

#### 1.1 Morphisme d'évaluation

##### Définition

Rappelons que l'on a  $u^0 = \text{Id}_E$  et  $A^0 = I_n$  par convention.

##### Définition 1

Pour tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$  de  $\mathbf{K}[X]$ , on appelle valeur de  $P$  en  $u$ , et on note  $P(u)$ , l'endomorphisme :

$$\sum_{k=0}^p \alpha_k u^k.$$

**Proposition 1**

L'application  $\varphi_u : P \mapsto P(u)$  est un morphisme de  $\mathbf{K}$ -algèbres de  $\mathbf{K}[X]$  vers  $\mathcal{L}(E)$ .

Son image, notée  $\mathbf{K}[u]$ , est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$ , appelée sous-algèbre engendrée par  $u$ . C'est la plus petite sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  contenant  $u$ .

**Démonstration**

► La démonstration de la linéarité de  $\varphi_u$  est immédiate. On a évidemment  $\varphi_u(1) = \text{Id}_E$ . Si

$P = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$  et  $Q = \sum_{\ell=0}^q \beta_\ell X^\ell$  sont deux polynômes, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_u(PQ) &= \varphi_u \left( \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 0,p \rrbracket \times \llbracket 0,q \rrbracket} \alpha_k \beta_\ell X^{k+\ell} \right) \\ &= \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 0,p \rrbracket \times \llbracket 0,q \rrbracket} \alpha_k \beta_\ell u^{k+\ell}. \end{aligned}$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned} \varphi_u(P) \circ \varphi_u(Q) &= \left( \sum_{k=0}^p \alpha_k u^k \right) \circ \left( \sum_{\ell=0}^q \beta_\ell u^\ell \right) \\ &= \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 0,p \rrbracket \times \llbracket 0,q \rrbracket} (\alpha_k u^k) \circ (\beta_\ell u^\ell) \\ &= \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 0,p \rrbracket \times \llbracket 0,q \rrbracket} \alpha_k \beta_\ell u^{k+\ell} \end{aligned}$$

en utilisant la propriété d'algèbre  $(\alpha_k u^k) \circ (\beta_\ell u^\ell) = \alpha_k \beta_\ell u^{k+\ell}$ .

► L'image  $\mathbf{K}[u]$  de  $\varphi_u$  est clairement la plus petite sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  contenant  $u$ . □

**Proposition 2**

Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , alors  $P(A)$  est celle de  $P(u)$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Démonstration** L'application  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  étant un morphisme de  $\mathbf{K}$ -algèbres, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} P(u) = P(\text{Mat}_{\mathcal{B}} u). \quad \square$$

**Remarques**

- On appelle *polynôme en  $u$* , tout endomorphisme  $v$  de  $\mathbf{K}[u]$ , c'est-à-dire tout endomorphisme de la forme  $P(u)$  avec  $P \in \mathbf{K}[X]$ . En général, l'application  $\varphi_u$  n'est pas injective et il peut exister plusieurs polynômes  $P$  vérifiant  $P(u) = v$ .
- Un endomorphisme commutant avec  $u$  commute avec tout polynôme en  $u$ . En particulier, deux polynômes en  $u$  commutent. On a d'ailleurs :

$$P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (PQ)(u)$$

pour tout  $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ .

- Soit  $v \in \mathcal{GL}(E)$ . On a  $P(v^{-1} \circ u \circ v) = v^{-1} \circ P(u) \circ v$  pour tout  $P \in \mathbf{K}[X]$ .
- Soit  $A \in M_n(\mathbf{K})$ . On a  $P({}^t A) = {}^t(P(A))$  pour tout  $P \in \mathbf{K}[X]$ .
- Soit  $A \in M_n(\mathbf{C})$ . On a  $\overline{P(A)} = \overline{P}(\overline{A})$  pour tout  $P \in \mathbf{C}[X]$ .

*Exemple* Soit  $D$  l'endomorphisme de dérivation  $f \mapsto f'$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{C})$ . Pour tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$ , l'endomorphisme  $P(D)$  est l'opérateur différentiel :

$$f \mapsto \alpha_p f^{(p)} + \dots + \alpha_1 f' + \alpha_0 f$$

de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{C})$ .

**Polynômes d'endomorphisme et sous-espaces stables**

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$ .

**Proposition 3**

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F$  est stable par  $P(u)$  et, en notant  $u_F$  l'endomorphisme induit, on a :

$$P(u)_F = P(u_F)$$

pour tout  $P \in \mathbf{K}[X]$ .

**Démonstration** L'ensemble  $\mathcal{L}_F(E)$  des endomorphismes laissant  $F$  stable est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  contenant  $u$  et donc  $\mathbf{K}[u]$

On obtient  $P(u)_F = P(u_F)$  en remarquant que  $v \mapsto v_F$  est un morphisme de  $\mathbf{K}$ -algèbres de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$ . □

**Proposition 4**

Les sous-espaces  $\text{Im } P(u)$  et  $\text{Ker } P(u)$  sont stables par  $u$  pour tout  $P$  de  $\mathbf{K}[X]$ .

**Démonstration** Ce sont en effet les sous-espaces image et noyau d'un endomorphisme commutant avec  $u$ .  $\square$

## 1.2 Idéal annulateur et polynôme minimal

### Définitions

On dit que  $P \in \mathbf{K}[X]$  est un *polynôme annulateur* de  $u$  si  $P(u) = 0$ .

#### Définition 2

On appelle *idéal annulateur de  $u$*  l'ensemble des polynômes annulateurs de  $u$ .

**Démonstration** L'ensemble des polynômes annulateurs de  $u$  est par définition le noyau du morphisme d'évaluation  $\varphi_u$ . C'est donc un idéal de  $\mathbf{K}[X]$   $\square$

L'anneau  $\mathbf{K}[X]$  étant principal, l'idéal annulateur de  $u$  est engendré par un unique polynôme normalisé. Ce polynôme est nul lorsque cet idéal est nul unitaire (non nul par conséquent) sinon.

Cela conduit à la définition suivante :

#### Définition 3

On dit qu'un endomorphisme  $u$  possède un polynôme minimal si son idéal annulateur n'est pas réduit à  $\{0\}$ . On appelle alors *polynôme minimal de  $u$* , et on note  $M_u$ , le générateur unitaire de cet idéal.

L'endomorphisme  $u$  possède donc un polynôme minimal  $M_u$  si, et seulement si  $c$ 'est un élément de  $\mathcal{L}(E)$  algébriquement lié sur  $\mathbf{K}$ . Dans ces conditions, le polynôme minimal  $M_u$  est, par définition, caractérisé parmi les polynômes normalisés par l'équivalence :

$$\forall P \in \mathbf{K}[X], \quad M_u \mid P \iff P(u) = 0.$$

#### Proposition 5

L'endomorphisme  $u$  possède un polynôme minimal si, et seulement si  $\mathbf{K}[u]$  est de dimension finie.

**Démonstration** Si  $u$  ne possède pas de polynôme annulateur non nul, l'application  $\varphi_u$  est injective et  $\mathbf{K}[u]$  n'est pas de dimension finie.

Si  $u$  possède un polynôme minimal de degré  $r$ ,  $\varphi_u$  induit un isomorphisme du sous-espace  $\mathbf{K}_{r-1}[X]$ , supplémentaire de son noyau  $(M_u)$ , sur  $\mathbf{K}[u]$ . Cette algèbre est donc de dimension  $r$  sur  $\mathbf{K}$ . □

**Corollaire 6**

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie possède un polynôme minimal.

Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , le polynôme minimal de  $u$  est égal à celui de  $A$ .

**Démonstration** La relation :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} P(u) = P(A)$$

montre que les idéaux annulateurs de  $u$  et  $A$  sont égaux. □

**Remarques**

- On suppose en général que l'espace  $E$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Dans ces conditions, un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  n'est pas annulé par le polynôme constant 1 puisque  $u^0 = \text{Id}_E$  est différent de  $0_E$  et son polynôme minimal, s'il en possède un, est de degré supérieur ou égal à 1. Lorsque, par contre,  $E$  est réduit à  $\{0\}$ , l'unique endomorphisme  $0$  de  $E$  possède un polynôme minimal égal au polynôme constant 1 puisque  $u^0 = \text{Id}_E$  vaut  $0_E$ .
- Soit  $v \in \mathcal{GL}(E)$ . Les endomorphismes  $u$  et  $v^{-1} \circ u \circ v$  possèdent simultanément des polynômes minimaux. Ces polynômes sont alors égaux.
- Soit  $A \in M_n(\mathbf{K})$ . Les matrices  $A$  et  ${}^tA$  ont même ensemble de polynômes annulateurs. Elles ont donc même polynôme minimal.
- Soit  $A \in M_n(\mathbf{C})$ . Les matrices  $A$  et  $\bar{A}$  ont des ensembles de polynômes annulateurs conjugués. Elles ont donc des polynômes minimaux conjugués.

**Exemples**

1. Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  est nul si, et seulement si, il possède le polynôme  $X$  comme polynôme minimal
2. Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  est égal à l'homothétie  $\lambda \text{Id}_E$  si, et seulement si, il possède le polynôme  $X - \lambda$  comme polynôme minimal. C'est évidemment le seul endomorphisme ayant ce polynôme comme polynôme minimal.

- 3. Tout endomorphisme  $u$  de rang fini possède un polynôme minimal : si  $M(X)$  est le polynôme minimal de l'endomorphisme induit par  $u$  sur son image  $M(X)X$  est un polynôme annulateur de  $u$ .
- 4. Il existe des endomorphismes sans polynôme minimal. C'est le cas, par exemple, de l'endomorphisme de dérivation  $D$  de l'espace  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  : si  $P \in \mathbb{C}[X]$  est un polynôme annulateur de  $D$ , la relation :

$$P(\lambda) = e^{-\lambda x} P(D)(e^{\lambda x})$$

montre que  $P(\lambda)$  est nul quel que soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et que, par suite,  $P$  est nul.

- 5. Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 1$ . Il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^n$  est nul. Ainsi,  $u$  possède un polynôme minimal de la forme  $X^r$  avec  $r \in \mathbb{N}^*$  ( $\text{Id}_E \neq 0$  montre que  $r$  est non nul). L'entier  $r$  qui est le plus petit entier  $k$  tel que  $u^k = 0$ , s'appelle l'indice de nilpotence de  $u$ .
- 6. Soit  $a$  l'affinité de rapport  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$  associée à la décomposition en somme directe  $E = F \oplus G$  avec  $F$  et  $G$  non réduits à  $\{0\}$ . Il est immédiat que  $(X - 1)(X - \alpha)$  est un polynôme annulateur de  $a$ . Comme ses diviseurs  $(X - 1)$  et  $(X - \alpha)$ , ne sont pas des polynômes annulateurs de cet endomorphisme puisque ni  $F$  ni  $G$  ne sont nuls, le polynôme minimal de  $a$  est :

$$(X - 1)(X - \alpha).$$

- (a) Lorsque  $\alpha$  est nul,  $a$  est égal à la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et son polynôme minimal est  $X^2 - X$ .
- (b) Lorsque  $\mathbb{K}$  est de caractéristique différente de 2 et  $\alpha$  égal à  $-1$ ,  $a$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . Son polynôme minimal est  $X^2 - 1$ .

**Polynôme minimal d'un endomorphisme induit**

**Proposition 7**

Si  $u$  admet un polynôme minimal, l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur un sous-espace  $F$  stable par  $u$ , possède aussi un polynôme minimal, et on a :

$$M_{u_F} \mid M_u.$$

**Démonstration** La relation  $P(u_F) = P(u)_F$  montre que l'idéal annulateur de  $u$  est contenu dans l'idéal annulateur de  $u_F$ . Ainsi  $M_u(u_F) = 0$  et  $M_{u_F}$  divise  $M_u$ . □



### 1.3 Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme

Supposons que  $u$  possède un polynôme minimal  $M_u$  de degré  $r$ .

#### Base de $\mathbf{K}[u]$

#### Proposition 8

La famille  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{r-1})$  est une base de  $\mathbf{K}[u]$  ; en particulier,  $\dim \mathbf{K}[u] = r$ .

**Démonstration** L'application  $\varphi_u$  induit un isomorphisme de l'espace  $\mathbf{K}_{r-1}[X]$ , supplémentaire de son noyau  $(M_u)$ , sur  $\mathbf{K}[u]$ .

L'image  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{r-1})$  de la base  $(1, X, \dots, X^{r-1})$  de  $\mathbf{K}_{r-1}[X]$  par  $\varphi_u$  est donc une base de  $\mathbf{K}[u]$ . □

On décrit en général les éléments de  $\mathbf{K}[u]$  par leur expression dans la base  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{r-1})$ . On obtient celle-ci par division euclidienne par  $M_u(X)$  : pour tout  $P$  de  $\mathbf{K}[X]$ , la relation :

$$P(X) = M_u(X)Q(X) + R(X) \quad \text{où} \quad \deg R < \deg M_u$$

montre que l'on a  $P(u) = R(u)$  et permet d'écrire  $P(u)$  sous la forme :

$$\alpha_0 \text{Id}_E + \dots + \alpha_{r-1} u^{r-1}.$$

**Exemple** Considérons la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

La relation  $(I_n + J)^2 = n(I_n + J)$  montre que l on a :

$$J^2 = (n - 1)I_n + (n - 2)J.$$

Ainsi le polynôme  $M(X) = X^2 - (n - 2)X - (n - 1)$  annule  $J$ . Comme  $J$ , qui n'est pas une matrice scalaire, ne peut être annihilée par un polynôme de degré 1 il s'agit du polynôme minimal de  $J$ .

Calculons alors  $J^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . La division euclidienne de  $X^k$  par  $M(X)$  s'écrit *a priori* :

$$X^k = M(X)Q(X) + \alpha_k X + \beta_k.$$

On calcule  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  en évaluant cette relation en les racines  $-1$  et  $(n-1)$  de  $M(X)$ . Cela donne :

$$\alpha_k = \frac{1}{n} \left( (n-1)^k - (-1)^k \right) \quad \text{et} \quad \beta_k = (-1)^k + \frac{1}{n} \left( (n-1)^k - (-1)^k \right)$$

On obtient finalement :

$$J^k = (n-1)^k \frac{1}{n} (I_n + J) + (-1)^k \left( \frac{n-1}{n} I_n - \frac{1}{n} J \right).$$

**Propriétés de  $\mathbf{K}[u]$**

**Proposition 9**

Pour tout  $P \in \mathbf{K}[X]$ , l'endomorphisme  $P(u)$  est inversible si et seulement si,  $P$  est premier avec  $M_u$ .

**Démonstration** Si  $P$  est premier avec  $M_u$ , il existe  $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$  tel que :

$$AP + BM_u = 1.$$

L'évaluation de cette relation en  $u$  donne  $A(u)P(u) = \text{Id}_E$  ; elle fournit ainsi un procédé de calcul effectif de l'inverse de  $P(u)$ .

Si  $P$  n'est pas premier avec  $M_u$ , le polynôme  $Q$ , quotient de  $M_u$  par le PGCD de  $P$  et  $M_u$ , est un élément non nul de  $\mathbf{K}_{r-1}[X]$  tel que  $PQ$  soit divisible par  $M_u$ . Ainsi,  $Q(u)$  est différent de 0 et  $P(u) \circ Q(u)$  est nul. Cela montre que  $P(u)$  n'est pas inversible □

**Corollaire 10**

L'algèbre  $\mathbf{K}[u]$  est un corps si, et seulement si,  $M_u$  est irréductible.

**Démonstration** Tout élément non nul de  $\mathbf{K}[u]$  est de la forme  $P(u)$  où  $P$  n'est pas divisible par  $M_u$ . Le corollaire vient donc de ce que  $M_u$  est irréductible si, et seulement si, il est premier avec tous les polynômes qu'il ne divise pas. □

**Remarque** La proposition précédente montre que l'inverse d'un élément  $u$  de  $\mathcal{GL}(E)$  possédant un polynôme minimal appartient à  $\mathbf{K}[u]$  puisque qu'il est égal à  $P(u)$  si :

$$XP + AM_u = 1$$

est une relation de Bézout entre  $X$  et  $M_u$ .

### 1.4 Idéal annulateur d'un vecteur

Dans ce qui suit, l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est fixé.

#### Définitions

Soit  $x \in E$ .

Il est clair que l'application  $\psi_x : P \mapsto P(u)(x)$  est une application linéaire de  $\mathbb{K}[X]$  vers  $E$ . Son noyau, qui est évidemment un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ , est aussi un idéal de cette algèbre puisque la relation  $P(u)(x) = 0$  entraîne :

$$((QP)(u))(x) = (Q(u) \circ P(u))(x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$$

pour tout  $Q \in \mathbb{K}[X]$ . Son image  $\mathbb{K}[u](x)$ , égale au sous-espace :

$$\text{Vect} \{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\},$$

est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  et contenant  $x$ .

#### Définition 4

On appelle :

- idéal annulateur de  $x$  sous l'action de  $u$ , le noyau de  $\psi_x$  ;
- sous-espace engendré par  $x$  sous l'action de  $u$ , le sous-espace vectoriel  $\mathbb{K}[u](x)$  image de  $\psi_x$ .

Comme précédemment, la principalité de  $\mathbb{K}[X]$  montre que l'idéal annulateur de  $x$  est engendré par un unique polynôme normalisé. Cela conduit à la définition suivante :

#### Définition 5

On dit que le vecteur  $x$  possède un *polynôme minimal* sous l'action de  $u$  si son idéal annulateur n'est pas réduit à  $\{0\}$ . On appelle alors *polynôme minimal de  $x$  sous l'action de  $u$*  le générateur unitaire de cet idéal.

#### Remarques

- Lorsque  $x$  est non nul, le sous-espace engendré par  $x$  est non nul et le polynôme constant 1 n'est pas un polynôme annulateur de  $x$  puisque  $u^0(x) = x$  est différent de zéro. Si  $x$  possède un polynôme minimal, celui-ci est donc de degré supérieur ou égal à 1. On remarquera, par contre, que le vecteur nul engendre le sous-espace réduit à  $\{0\}$  sous l'action de  $u$  et possède un polynôme minimal égal au polynôme constant 1.

- Pour simplifier la terminologie et éviter d'écrire « sous l'action de  $u$  », on dira  $u$ -annulateur de  $x$ ,  $u$ -engendré par  $x$ ,  $u$ -minimal, etc.
- Si  $u$  possède un polynôme minimal  $M_u$ , tout vecteur  $x \in E$  possède un polynôme  $u$ -minimal divisant  $M_u$ .

### Proposition 11

Le vecteur  $x \in E$  possède un polynôme  $u$ -minimal si, et seulement si, le sous-espace  $u$ -engendré par  $x$  est de dimension finie. Dans ces conditions, si  $p$  désigne le degré du polynôme  $u$ -minimal de  $x$ , alors la famille :

$$(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$$

est une base de  $\mathbf{K}[u](x)$ .

**Démonstration** Si  $x$  ne possède pas de polynôme  $u$ -annulateur non nul, l'application  $\psi_x$  est injective et  $\mathbf{K}[u](x)$  n'est pas de dimension finie.

Si  $x$  admet un polynôme  $u$ -minimal de degré  $p$ ,  $\psi_x$  induit un isomorphisme du sous-espace  $\mathbf{K}_{p-1}[X]$ , supplémentaire de son noyau ( $P$ ), sur  $\mathbf{K}[u](x)$ . La famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ , image de la base  $(1, X, \dots, X^{p-1})$  de  $\mathbf{K}_{p-1}[X]$ , est alors une base de  $\mathbf{K}[u](x)$ .  $\square$

### Définition 6

On dit que l'espace  $E$  est *monogène* sous l'action de  $u$  s'il existe un vecteur  $x$  engendrant  $E$  sous l'action de  $u$ .

Il est clair que le sous-espace engendré par  $x$  est monogène sous l'action de l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$ . On se limitera donc à l'étude des espaces monogènes.

### Matrice compagnon et espace monogène

Soit :

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$$

un polynôme unitaire de  $\mathbf{K}[X]$ .

**Définition 7**

On appelle *matrice compagnon* de  $P$ , la matrice :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

**Proposition 12**

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n > 0$  monogène  $u$ -engendré par le vecteur non nul  $x$ , alors :

- le vecteur  $x$  admet un polynôme  $u$ -minimal  $P$  de degré  $n$ ,
- la famille  $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ ,
- la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice compagnon  $C_P$  du polynôme  $P$ .

**Démonstration** Puisque  $E$  est de dimension finie, le vecteur  $x$  admet un polynôme  $u$ -minimal  $P$  dont le degré, égal à la dimension de  $\mathbf{K}[u](x) = E$ , est  $n$ . Nous avons vu dans la proposition précédente que la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

Si  $P$  est écrit  $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ , la relation  $P(u)(x) = 0$  donne :

$$u^n(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 u(x) - \dots - \alpha_{n-1} u^{n-1}(x).$$

Comme on a  $u(u^{k-1}(x)) = u^k(x)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice compagnon de  $P$ . □

Cette proposition admet la réciproque suivante :

**Proposition 13**

Si la matrice de  $u$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est la matrice compagnon  $C_P$ , alors  $E$  est  $u$ -monogène engendré par  $e_1$  et le polynôme  $u$ -minimal de  $e_1$  est égal à  $P$ .

**Démonstration** La relation  $e_k = u^{k-1}(e_1)$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  montre que  $E$  est monogène  $u$ -engendré par  $e_1$  et que l'on a :

$$\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1)).$$

Si  $Q$  est le polynôme  $u$ -minimal de  $e_1$ , la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc  $C_Q$ . Comme cette matrice est aussi  $C_P$ , on obtient  $Q = P$  en considérant la dernière colonne  $\square$

### Proposition 14

Le polynôme minimal d'un endomorphisme dont la matrice dans une base est la matrice compagnon  $C_P$  d'un polynôme unitaire  $P$  est égal à  $P$ .

**Démonstration** Soit  $x$  un vecteur  $u$ -engendrant  $E$  sous l'action de  $u$ . Nous avons vu que  $P$  est le polynôme  $u$ -minimal de  $x$ .

La relation  $M_u(u)(x) = 0$  montre que  $P$  divise  $M_u$ . Comme, d'autre part, le noyau de  $P(u)$  est un sous-espace de  $E$  contenant  $x$  et stable par  $u$ , ce sous-espace est égal à l'espace monogène  $E$ . Ainsi  $P(u) = 0$  et  $M_u$  divise  $P$ . On a donc  $M_u = P$ .  $\square$

**Exemple** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Montrons que lorsque  $E$  est monogène sous l'action de  $u$ , la sous-algèbre des endomorphismes commutant avec  $u$  est  $\mathbf{K}[u]$ .

Nous avons vu que les éléments de  $\mathbf{K}[u]$  commutent avec  $u$ . Considérons alors un élément  $v \in \mathcal{L}(E)$  commutant avec  $u$ . Puisque  $E$  est monogène sous l'action de  $u$ , il existe  $x \in E$  tel que  $(u^k(x))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  soit une base de  $E$ . Il existe, par conséquent, une famille  $(\alpha_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  de  $\mathbf{K}^n$  telle que l'on ait :

$$v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x).$$

Cela permet d'écrire  $v(x) = R(u)(x)$  avec  $R = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ . Le noyau de  $v - R(u)$  est stable par  $u$ . Comme il contient  $x$ , il est égal à  $E$ . On a donc  $v = R(u)$ .

## 1.5 Lemme des noyaux

### Théorème 15 (Lemme des noyaux)

Soient  $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbf{K}[X]^r$  une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux et  $P$  leur produit.

On a la décomposition en somme directe :

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u).$$

La projection  $p_k$  de  $\text{Ker } P(u)$  sur  $\text{Ker } P_k(u)$  associée est l'endomorphisme induit sur  $\text{Ker } P(u)$  par un polynôme en  $u$  pour tout  $k$ .

**Démonstration**

► Supposons tout d’abord  $r = 2$ . Le théorème de Bézout nous fournit un couple  $(A_1, A_2) \in \mathbf{K}[X]^2$  tel que

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 = 1. \tag{B}$$

La valeur en  $u$  de cette relation donne :  $(A_1 P_1)(u) + (A_2 P_2)(u) = \text{Id}_E$ .

Soit  $x \in \text{Ker } P_1(u)$ . La relation  $P(u)(x) = (P_2(u) \circ P_1(u))(x) = 0$  montre que  $x$  appartient aussi à  $\text{Ker } P(u)$ . On obtient la même chose si  $x$  appartient à  $\text{Ker } P_2(u)$ . Il vient donc :

$$\text{Ker } P_1(u) + \text{Ker } P_2(u) \subset \text{Ker } P(u).$$

D’un autre côté, soit  $x \in \text{Ker } P(u)$ . La relation (B) nous permet d’écrire  $x = x_1 + x_2$  avec

$$x_1 = (A_2 P_2)(u)(x) \text{ et } x_2 = (A_1 P_1)(u)(x). \tag{P}$$

L’égalité :

$$(P_1)(u)(x_1) = (P_1 A_2 P_2)(u)(x) = \left( (A_2)(u) \circ (P)(u) \right)(x) = 0$$

montre alors que  $x_1$  appartient à  $\text{Ker } P_1(u)$ . Comme on a de la même façon  $x_2 \in \text{Ker } P_2(u)$ , il vient :

$$\text{Ker } P_1(u) + \text{Ker } P_2(u) = \text{Ker } P(u).$$

Soit maintenant  $x \in \text{Ker } P_1(u) \cap \text{Ker } P_2(u)$ . La relation (B) appliquée à  $x$ , soit :

$$x = \left( A_2(u) \circ P_2(u) \right)(x) + \left( A_1(u) \circ P_1(u) \right)(x),$$

montre que  $x$  est nul. On obtient finalement :

$$\text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u) = \text{Ker } P(u).$$

De plus les relations (P) montrent que les projections  $p_1$  et  $p_2$  associées à cette somme directe sont les restrictions à  $\text{Ker } P(u)$  des endomorphismes  $(A_1 P_1)(u)$  et  $(A_2 P_2)(u)$ .

► On montre le cas général par récurrence sur  $r > 2$  en supposant le théorème acquis pour  $r - 1$ . Sous les hypothèses du théorème, les polynômes  $P_1$  et  $R_2 = P_2 \cdots P_r$  sont premiers entre eux ; en effet, si leur PGCD ne vaut pas 1, il existe un polynôme irréductible  $I$  divisant  $P_1$  et  $R_2$ . Par le lemme de Gauss,  $I$  divisera  $P_1$  et  $P_k$  pour un  $k \in \llbracket 2, r \rrbracket$ . Cela est impossible. On a donc :

$$\text{Ker } P(u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } R_2(u) \tag{R}$$

par le premier point.

L’hypothèse de récurrence nous fournit alors la décomposition :

$$\text{Ker } R_2(u) = \bigoplus_{k=2}^r \text{Ker } P_k(u).$$

Cela montre la somme directe désirée. De plus, la projection de  $\text{Ker } P(u)$  sur  $\text{Ker } P_1(u)$  associée à cette somme directe est celle associée à la somme directe (R). C’est donc la restriction à cet espace d’un polynôme en  $u$ . Par permutation, c’est le cas de toutes les projections.  $\square$

On utilise particulièrement le corollaire suivant :

### Corollaire 16

Si un polynôme  $P$  annulateur de  $u$  est égal au produit  $P_1 \cdots P_r$  d'une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux, alors l'espace  $E$  se décompose en la somme directe :

$$E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u)$$

et les projections associées sont des polynômes en  $u$ .

### Application aux équations différentielles

Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre  $p$  :

$$f^{(p)} + \alpha_{p-1}f^{(p-1)} + \cdots + \alpha_1f' + \alpha_0f = 0 \quad (\text{ED})$$

où  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$  d'inconnue  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

On appelle polynôme caractéristique de (ED) le polynôme :

$$C(X) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k.$$

Sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  sera notée :

$$C(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{p_k}$$

(les  $\lambda_k$  sont deux à deux distincts et les  $p_k > 0$ ).

Si  $D$  désigne l'endomorphisme de dérivation de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (ED) est le sous-espace vectoriel noyau de l'endomorphisme  $C(D)$ .

Le lemme des noyaux nous fournit alors la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } (D - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k}.$$

On prouve alors par récurrence la relation suivante :

$$(D - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k} (f(x)e^{\lambda_k x}) = e^{\lambda_k x} D^{p_k}(f)(x)$$

pour tout  $(k, f) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times E$ . On en déduit alors :

$$\text{Ker } (D - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k} = \{x \mapsto P(x)e^{\lambda_k x} \mid P \in \mathbb{C}_{p_k-1}[X]\}.$$



Ainsi tout élément  $f$  de  $\mathcal{S}$  s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=1}^r P_k(x)e^{\lambda_k x}$$

pour une unique famille  $(P_k) \in \prod_{k=1}^r \mathbb{C}_{p_k-1}[X]$  et l'espace  $\mathcal{S}$  est de dimension  $p$ .

Nous retrouverons ce dernier point comme conséquence du théorème de Cauchy sur les équations linéaires à coefficients constants d'ordre  $p$ .

**Application aux équations récurrentes linéaires à coefficients constants**

On suppose dans ce point que  $\mathbb{K}$  est un sur-corps de  $\mathbb{Q}$  ou, ce qui revient au même, que  $\mathbb{K}$  est de caractéristique nulle.

Considérons l'équation récurrente linéaire à coefficients constants d'ordre  $p$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} + \alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + \alpha_1u_{n+1} + \alpha_0u_n = 0 \quad (\text{ER})$$

où  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$  d'inconnue  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

On appelle polynôme caractéristique de (ER) le polynôme :

$$C(X) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k.$$

Sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  sera notée :

$$C(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{p_k}$$

(les  $\lambda_k$  sont deux à deux distincts et les  $p_k > 0$ ).

Désignons alors par  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$  l'endomorphisme de translation de défini par la formule  $T((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (ER) est le sous-espace vectoriel noyau de l'endomorphisme  $C(T)$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Comme une suite de  $\mathcal{S}$  est déterminée par ses  $p$  premiers termes, l'application  $u \mapsto (u_0, \dots, u_{p-1})$  de  $\mathcal{S}$  vers  $\mathbb{K}^p$  est un isomorphisme et la dimension de  $\mathcal{S}$  est égale à  $p$ . De plus, le lemme des noyaux nous fournit la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker} (T - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer pour tout  $k$ , le noyau de l'endomorphisme  $(T - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k}$ . Nous venons de voir que cet espace est de dimension  $p_k$ .

- Si  $\lambda_k = 0$ , il s'agit du noyau de  $T^{p_k}$ . C'est évidemment l'espace vectoriel de suites  $(u_n)$  telle que  $u_n = 0$  pour tout  $n \geq p_k$ . On retrouve qu'il est de dimension  $p_k$ .
- Supposons  $\lambda_k \neq 0$ . Pour tout polynôme  $U \in \mathbf{K}[X]$ , un simple calcul montre que la suite image de  $(\lambda_k^n U(n))_{n \in \mathbf{N}}$  par  $T - \lambda_k \text{Id}_E$  est :

$$(\lambda_k^{n+1} V(n))_{n \in \mathbf{N}}$$

où  $V(X)$  est le polynôme  $U(X + 1) - U(X)$ . Le degré de  $V(X)$  étant égal à  $\deg U - 1$ , on voit par itération que  $\text{Ker}(T - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k}$  contient l'ensemble :

$$\left\{ (\lambda_k^n U(n))_{n \in \mathbf{N}} \mid U \in \mathbf{K}_{p_k-1}[X] \right\}.$$

Comme d'un autre côté, cet ensemble est un sous-espace vectoriel de dimension  $p_k$  puisqu'il est l'image de  $\mathbf{K}_{p_k-1}[X]$  par l'application linéaire injective  $U \mapsto (\lambda_k^n U(n))_{n \in \mathbf{N}}$  (on utilise ici que  $\mathbf{N}$  est une partie infinie de  $\mathbf{K}$ ), il vient :

$$\text{Ker}(T - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k} = \left\{ (\lambda_k^n U(n))_{n \in \mathbf{N}} \mid U \in \mathbf{K}_{p_k-1}[X] \right\}$$

puisque le noyau de  $(T - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k}$  est aussi de dimension  $p_k$ .

En supposant  $\alpha_0 \neq 0$ , on voit finalement que toute solution  $u$  de (ER) s'écrit :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^r \lambda_k^n U_k(n)$$

pour une unique famille  $(U_k) \in \prod_{k=1}^r \mathbf{K}_{p_k-1}[X]$ . On retrouve que l'espace  $\mathcal{S}$  est de dimension  $p$ .

**Remarque** La conclusion du développement précédent est fautive lorsque  $\mathbf{K}$  n'est pas de caractéristique nulle. Considérons en effet l'équation :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+4} + u_n = 0$$

sur  $\mathbf{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Comme précédemment le sous-espace  $\mathcal{S}$  de ses solutions égal au sous-espace des suites 4-périodiques de  $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ , est de dimension 4.

La factorisation  $X^4 + \bar{1} = (X + \bar{1})^4$  montre alors que le polynôme caractéristique possède l'unique racine 1 de multiplicité est 4. La difficulté vient alors de ce que l'espace vectoriel des applications polynomiales de  $\mathbf{N}$  vers  $\mathbf{K}$  de degré inférieur ou égal à 3 :

$$n \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 \bar{n} + \alpha_2 \bar{n}^2 + \alpha_3 \bar{n}^3$$

avec  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{K}^4$  n est que de dimension 2 sur  $\mathbf{K}$  puisque le petit théorème de Fermat (trivial dans ce cas particulier) montre que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bar{n}^3 = \bar{n}^2 = \bar{n}.$$

On ne peut donc pas écrire toute suite  $u = (u_n)$  de  $S$  sous la forme  $(\bar{1}^n P(\bar{n}))_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $P \in \mathbf{K}_3[X]$ .

## 2. Éléments propres d'un endomorphisme

Les notions développées dans cette section concernent les endomorphismes. Elles s'appliquent aux matrices en considérant les endomorphismes canoniquement associés.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### 2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

#### Définitions

##### Définition 8

On dit qu'un scalaire  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $u$  s'il existe un vecteur *non nul*  $x$  de  $E$  tel que  $u(x) = \lambda x$

Dans ce cas, tout vecteur non nul  $x$  de  $E$  tel que  $u(x) = \lambda x$  s'appelle un *vecteur propre* associé à  $\lambda$ .

##### Définition 9

On appelle *sous-espace propre* associé à une valeur propre  $\lambda$ , le sous-espace :

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E).$$

Un scalaire  $\lambda$  est donc une valeur propre de  $u$  si et seulement si, l'endomorphisme  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas injectif ou, ce qui revient au même, si, et seulement si,  $E_\lambda(u)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  ; les vecteurs propres associés à  $\lambda$  sont alors les éléments non nuls de  $E_\lambda(u)$ .

Un vecteur est appelé un vecteur propre de  $u$  si c'est un vecteur propre associé à une valeur propre. Celle-ci est évidemment unique puisque  $\lambda x = \mu x$  et  $x \neq 0$  entraîne  $\lambda = \mu$ . Les vecteurs propres sont caractérisés géométriquement par la proposition suivante :

**Proposition 17**

Un vecteur non nul  $x \in E$  est un vecteur propre de  $u$  si et seulement si, la droite qu'il engendre est stable par  $u$ .

**Démonstration** La droite  $\mathbf{K}x$  est stable par  $u$  si, et seulement si, il existe  $\lambda$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . □

Soit  $\varphi$  un isomorphisme de  $E$  sur un espace vectoriel  $F$ . Si  $x$  est un vecteur propre de  $u$  associé à  $\lambda$ , la relation :

$$(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = \varphi(u(x)) = \lambda \varphi(x)$$

montre que  $\varphi(x)$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$  de  $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ . La réciproque étant évidente, les endomorphismes  $u$  et  $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$  ont les mêmes valeurs propres et leurs sous-espaces propres sont reliés par :

$$F_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \varphi(E_\lambda(u)).$$

On utilise particulièrement cette remarque dans les deux cas suivants.

- Deux endomorphismes, ou deux matrices, semblables ont mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres isomorphes. Nous verrons que la réciproque à cette proposition est fausse.
- Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , l'endomorphisme  $u$  et sa matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}$  ont mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres isomorphes par l'isomorphisme  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : E \rightarrow \mathbf{K}^n$  qui associe à tout vecteur la famille de ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ .

On recherche pratiquement les éléments (valeurs, vecteurs ou sous-espaces) propres d'un endomorphisme en étudiant l'équation  $u(x) = \lambda x$ . Dans le cas d'une matrice  $A$ , situation à laquelle on se ramènera d'après la remarque précédente par le choix d'une base de  $E$ , on considèrera bien sûr l'équation  $AX = \lambda X$  où  $(A - \lambda I_n)X = 0$ .

**Remarques**

- L'unique endomorphisme de l'espace vectoriel réduit à  $\{0\}$  ne possède pas de valeur propre puisque tout élément de  $\mathcal{L}(\{0\})$  est bijectif.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  n'admet pas nécessairement de valeur propre ; une rotation d'angle  $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$  du plan euclidien n'en possède pas puisqu'aucun vecteur non nul n'est transformé en un vecteur colinéaire.

- Le scalaire 0 est valeur propre de  $u$  si, et seulement si,  $u$  n'est pas injectif. Les vecteurs propres associés sont les éléments non nuls de  $\text{Ker } u$ .

**Exemples**

1. On obtient les valeurs et vecteurs propres de la matrice compagnon  $C_P$  d'un polynôme unitaire  $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$  en étudiant  $C_P X = \lambda X$ . En notant  $X = (x_k)_{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$ , cette équation s'écrit sous la forme du système :

$$\begin{cases} -\alpha_0 x_{p-1} & = & \lambda x_0 \\ x_0 - \alpha_1 x_{p-1} & = & \lambda x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p-3} - \alpha_{p-2} x_{p-1} & = & \lambda x_{p-2} \\ x_{p-2} - \alpha_{p-1} x_{p-1} & = & \lambda x_{p-1} \end{cases}$$

Les  $(p-1)$ <sup>ières</sup> dernières équations donnent par substitution à partir du bas, les expressions :

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad x_{p-1-k} = (\lambda^k + \alpha_{p-1} \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_{p-k+1} \lambda^1 + \alpha_{p-k}) x_{p-1}.$$

et la première, la relation :

$$(\lambda^p + \alpha_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + \alpha_1 \lambda^1 + \alpha_0) x_{p-1} = 0.$$

Le vecteur  $X$  étant alors non nul si, et seulement si,  $x_{p-1}$  est différent de zéro, on voit que :

- $\lambda$  est valeur propre si, et seulement si, elle vérifie :

$$\lambda^p + \alpha_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + \alpha_1 \lambda^1 + \alpha_0 = 0$$

c'est-à-dire est racine de  $P$ ,

- $X$  est un vecteur propre associé si, et seulement si  $X$  appartient à la droite engendrée par :

$$X_\lambda = (\lambda^k + \alpha_{p-1} \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_{p-k+1} \lambda^1 + \alpha_{p-k})_{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}.$$

2. On obtient les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de dérivation  $D$  de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  en étudiant l'équation :

$$f' = \lambda f.$$

La théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre montre que tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $D$  et que le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est la droite engendrée par la fonction  $e^{\lambda x}$ .

**Éléments propres en dimension finie**

Lorsque  $E$  est de dimension finie,  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si,  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas inversible.

On utilise alors la définition suivante :

**Définition 10**

Lorsque  $E$  est de dimension finie, on appelle *spectre* de  $u$ , et l'on note  $\text{sp } u$ , l'ensemble des valeurs propres de  $u$ .

► **Attention** Lorsque  $A$  est une matrice à coefficients réels, on peut considérer que  $A$  appartient à  $M_n(\mathbb{R})$  ou à  $M_n(\mathbb{C})$ .

- On obtient dans le premier cas, les éléments propres réels, dans le second, les éléments propres complexes de  $A$ .
- On distinguera donc le spectre réel de  $A$ , noté  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$  et formé des  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $(A - \lambda I_n)$  ne soit pas inversible, du spectre complexe,  $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , de cette matrice. Une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  étant inversible dans cette algèbre si, et seulement si, elle l'est dans  $M_n(\mathbb{C})$ , on a :

$$\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}.$$

**Éléments propres et sous-espaces stables**

**Proposition 18**

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ , les valeurs propres de l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur  $F$  sont les valeurs propres de  $u$  telles que  $E_{\lambda}(u) \cap F$  soit différent de  $\{0\}$ . On a alors :

$$F_{\lambda}(u_F) = E_{\lambda}(u) \cap F.$$

**Valeurs propres et polynômes annulateurs**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

**Proposition 19**

- Si  $x$  appartient à  $E_{\lambda}(u)$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .
- En particulier, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ ,  $P(\lambda)$  est une valeur propre de  $P(u)$ .

**Démonstration**

► On a  $u^k(x) = \lambda^k x$  pour tout  $k$  et :

$$\left( \sum_{k=0}^p \alpha_k u^k \right) (x) = \left( \sum_{k=0}^p \alpha_k \lambda^k \right) x.$$

► Si l'on a  $u(x) = \lambda x$  avec  $x \neq 0$ , on obtient  $P(u)(x) = P(\lambda)x$  avec  $x \neq 0$  □

**Corollaire 20**

Les valeurs propres de  $u$  sont racines de tout polynôme annulateur de  $u$ .

**Démonstration** Soit  $P$  un polynôme annulateur de  $u$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ , la proposition précédente montre que l'on a  $P(\lambda)x = 0$  si  $x$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda$ . On en déduit  $P(\lambda) = 0$  puisque  $x$  est non nul □

**Théorème 21**

Lorsque  $u$  possède un polynôme minimal, les valeurs propres de  $u$  sont les racines dans  $\mathbf{K}$  de ce polynôme.

**Démonstration** Notons  $M_u$  le polynôme minimal de  $u$ .

Le corollaire précédent montre que toute valeur propre de  $u$  est racine de  $M_u$ .

Pour montrer la réciproque, supposons  $\lambda$  racine de  $M_u$  mais pas valeur propre de  $u$ . On peut écrire :

$$M = (X - \lambda) N$$

avec  $N \in \mathbf{K}[X]$ . L'évaluation en  $u$ , donne :

$$(u - \lambda \text{Id}_E) \circ N(u) = M_u(u) = 0.$$

Comme l'application  $u - \lambda \text{Id}_E$  est injective, on obtient  $N(u) = 0$ , ce qui contredit la minimalité de  $M_u$ . □

**Exemples**

1. Soit  $E = F \oplus G$  une décomposition en somme directe de deux sous-espaces non réduits à  $\{0\}$  et  $a$  l'affinité de rapport  $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{1\}$  par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . Nous savons que le polynôme minimal de  $a$  est :

$$(X - 1)(X - \alpha).$$

L'ensemble des valeurs propres de  $a$  est donc  $\{1, \alpha\}$ . Les sous-espaces propres sont alors  $E_1(a) = F$  et  $E_\alpha(a) = G$

2. Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent de  $E$ . Le polynôme minimal de  $u$  est  $X^r$  où  $r$  est l'indice de nilpotence de  $u$  et, par conséquent, le spectre de  $u$  est  $\{0\}$ . S'il est non nul,  $u$  a donc le même ensemble de valeurs propres que l'endomorphisme nul sans lui être semblable.

## 2.2 Sous-espaces propres

### Stabilité des sous-espaces propres

Pour tout scalaire  $\lambda$ , on notera  $E_\lambda(u)$  le sous-espace  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ . Rappelons que  $E_\lambda(u)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  si, et seulement si,  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  et qu'on l'appelle alors le sous-espace propre associé à  $\lambda$ .

#### Proposition 22

Les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par tout endomorphisme  $v \in \mathcal{L}(E)$  commutant avec  $u$ .

**Démonstration** L'endomorphisme  $v$  commute avec  $u - \lambda \text{Id}_E$ . Il stabilise donc son noyau. □

### Indépendance des sous-espaces propres

#### Theorème 23

Si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$  est une famille de scalaires deux à deux distincts alors la famille des sous-espaces vectoriels :

$$(E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u))$$

est directe.

**Démonstration** Les polynômes de la famille  $(X - \lambda_i)_{i \in [1, p]}$  sont deux à deux premiers entre eux. Par le lemme des noyaux, la famille des sous-espaces :

$$( \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E) )_{i \in [1, p]}$$

est en somme directe.

On peut éviter l'utilisation du lemme des noyaux de la façon suivante. Si la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de vecteurs vérifiant  $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$  pour tout  $i$  satisfait la relation

$$x_1 + \dots + x_p = 0,$$

on obtient :

$$P(\lambda_1)x_1 + \dots + P(\lambda_p)x_p = 0$$

en appliquant  $P(u)$  pour tout polynôme  $P$ . Pour le  $i^{\text{ième}}$  polynôme d'interpolation de Lagrange  $Q_i$  de la famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ , il vient :

$$x_i = 0$$

puisque l'on a  $Q_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ . □



**Corollaire 24**

Toute famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est en somme directe

**Démonstration** C'est une simple conséquence de ce qui précède □

**Théorème 25**

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

**Démonstration** Une relation de liaison entre les vecteurs propres de la famille considérée donnerait, en effet, une famille finie  $(x_1, \dots, x_p)$  de vecteurs appartenant à des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes vérifiant  $x_1 + \dots + x_p = 0$ . □

*Exemple* La fonction  $e^{\lambda x}$  est un vecteur propre de valeur propre  $\lambda$  de l'opérateur de dérivation  $D$  de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La famille  $(e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{C}}$  est donc libre.

**Corollaire 26**

Si  $E$  est de dimension finie, le nombre des valeurs propres de  $u$  est inférieur ou égal à la dimension de  $E$ .

**Démonstration** C'est clair puisqu'à toute famille de  $p$  valeurs propres deux à deux distinctes on peut associer une famille libre de  $p$  vecteurs propres □

**2.3 Polynôme caractéristique**

On suppose dans ce paragraphe que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Définition**

**Proposition 27**

Soit  $A \in M_n(\mathbf{K})$ .

Le déterminant  $\det(XI_n - A)$  de la matrice  $XI_n - A$  de  $M_n(\mathbf{K}(X))$  est un polynôme, appelé *polynôme caractéristique de  $A$*  et noté  $C_A(X)$ .

C'est un polynôme unitaire de degré  $n$  de la forme :

$$C_A(X) = X^n - (\text{tr } A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

**Démonstration** Soit  $A = (\alpha_{i,j})$ .

► La matrice  $(XI_n - A)$  est une matrice à coefficient dans le corps des fractions rationnelles  $\mathbf{K}(X)$ . Son déterminant, donné par .

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (X\delta_{\sigma(1),1} - \alpha_{\sigma(1),1}) \cdots (X\delta_{\sigma(n),n} - \alpha_{\sigma(n),n}),$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ .

► Lorsque  $\sigma$  n'est pas l'identité, il existe au moins deux éléments distincts  $i$  et  $j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $\delta_{\sigma(i),i}$  et  $\delta_{\sigma(j),j}$  soient nuls et le terme :

$$\varepsilon(\sigma) (X\delta_{\sigma(1),1} - \alpha_{\sigma(1),1}) \cdots (X\delta_{\sigma(n),n} - \alpha_{\sigma(n),n})$$

est de degré inférieur ou égal à  $n - 2$ . Les termes de degré  $n$  et  $n - 1$  de  $C_A(X)$  sont donc ceux du produit :

$$(X - \alpha_{1,1}) \cdots (X - \alpha_{n,n}),$$

soit  $X^n$  et  $-(\alpha_{1,1} + \cdots + \alpha_{n,n}) X^{n-1}$  respectivement. On obtient finalement le terme constant de  $C_A(X)$  en évaluant en 0.  $\square$

**Lemme**

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

**Démonstration** On a en effet :

$$\det(XI_n - PAP^{-1}) = \det(P(XI_n - A)P^{-1}) = \det(XI_n - A). \quad \square$$

**Proposition 28**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Il existe un polynôme, appelé *polynôme caractéristique* de  $u$  et noté  $C_u(X)$ , égal au polynôme caractéristique de toute matrice représentant  $u$ .

C'est un polynôme unitaire de degré  $n$  de la forme :

$$C_u(X) = X^n - (\text{tr } u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

**Démonstration** Les matrices représentant  $u$  dans des bases différentes sont semblables. Elles ont donc même polynôme caractéristique. On appelle alors polynôme caractéristique de  $u$  ce polynôme indépendant de la base choisie. Le reste de la proposition est clair.  $\square$

*Exemples*

1. Par convention, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme d'un espace vectoriel réduit à  $\{0\}$  ainsi que celui de la matrice vide, est le polynôme 1.

2. Le polynôme caractéristique de  $(\alpha)$  de  $M_1(\mathbf{K})$  est  $X - \alpha$ , celui de  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  de  $M_2(\mathbf{K})$  est :

$$X^2 - (\alpha + \beta)X + (\alpha\delta - \beta\gamma).$$

3. Le polynôme caractéristique de  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$  de  $M_3(\mathbf{K})$  est :

$$X^3 - (\alpha + \beta' + \gamma'')X^2 + ((\alpha\beta' - \alpha'\beta) + (\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma) + (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'))X - \det A.$$

On remarquera que le coefficient de  $X$  est la trace de la comatrice de  $A$ .

4. On a  $C_{\iota A} = C_A$  et  $C_{\bar{A}} = \overline{C_A}$  lorsque  $A$  est à coefficients complexes.  
 5. Soit  $u$  un endomorphisme de rang 1. Dans une base adaptée au sous-espace  $\text{Im } u$ , la matrice de  $u$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc  $X^{n-1}(X - \alpha_{1,1})$ . Comme  $\alpha_{1,1}$  est la trace de  $u$ , on obtient :

$$C_u(X) = X^{n-1}(X - \text{Tr } u).$$

**Proposition 29**

Le polynôme caractéristique d’une matrice triangulaire supérieure de diagonale  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est :

$$\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k).$$

**Démonstration** Le déterminant de la matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} X - \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & * \\ 0 & \dots & 0 & X - \alpha_n \end{pmatrix}$$

est en effet le produit  $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ . □

**Proposition 30**

Le polynôme caractéristique de la matrice compagnon d’un polynôme unitaire  $P$  de  $\mathbf{K}_n[X]$  est égal à  $P$ .

**Démonstration** Soit  $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . Le polynôme caractéristique de la matrice compagnon  $C_P$  est égal à :

$$\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & X & & & & \alpha_1 \\ 0 & -1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -1 & X & \alpha_{p-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & X + \alpha_{p-1} \end{vmatrix}.$$

L'opération  $L_0 \leftarrow L_0 + XL_1 + \cdots + X^{p-1}L_{p-1}$  ( $L_i$  désigne ligne contenant  $\alpha_i$ ) transforme ce déterminant en :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & & & \vdots & \alpha_1 \\ 0 & -1 & & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ \vdots & & & -1 & X & \alpha_{p-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + \alpha_{p-1} \end{vmatrix}$$

dont le développement suivant la première ligne est  $(-1)^{n+1} P(X) (-1)^{n-1} = P(X)$ . □

**Exemple** Calculons le polynôme caractéristique de la matrice par blocs  $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$  où  $A \in M_n(\mathbb{K})$  en transformant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -A & XI_n \end{vmatrix}$$

par opérations élémentaires par blocs.

L'opération élémentaire par blocs  $C_2 \leftarrow C_2 + X^{-1}AC_1$  ( $X$  est inversible dans  $\mathbb{K}(X)$ ) s'obtient par multiplication à gauche par  $\begin{pmatrix} I_n & X^{-1}A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ . Elle fournit la relation .

$$C_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -A & XI_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & X^{-1}A \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n & 0 \\ -A & XI_n - X^{-1}A^2 \end{vmatrix}$$

et, par conséquent :

$$C_B(X) = \det(X^2I_n - A^2) = C_A(X)C_A(-X).$$

### Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

#### Proposition 31

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $u_F$ , induit par  $u$  sur un sous-espace vectoriel  $F$  stable par  $u$ , divise le polynôme caractéristique de  $u$ .

**Démonstration** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  adaptée à  $F$ . La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$  où  $A$  est la matrice de  $u_F$  dans  $(e_1, \dots, e_p)$ . Le polynôme caractéristique de  $u$ , égal à :

$$\det \begin{pmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_{n-p} - D \end{pmatrix} = \det(XI_p - A) \det(XI_{n-p} - D),$$

est donc divisible par le polynôme caractéristique  $\det(XI_p - A)$  de  $u_F$ . □

#### Proposition 32

Si  $u$  stabilise les sous-espaces d'une famille  $(E_1, \dots, E_r)$  telle que  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ , le polynôme caractéristique de  $u$  est donnée par :

$$C_u(X) = C_{u_1}(X) \cdots C_{u_r}(X)$$

où  $u_i$  est l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_i$  quel que soit  $i$ .

**Démonstration** Dans une base adaptée à la somme directe considérée, la matrice de  $u$  est une matrice diagonale par blocs dont le  $i^{\text{ème}}$  bloc diagonal est la matrice  $A_i$  de  $u_i$ . Le déterminant de la matrice diagonale par blocs  $XI_n - A$  est donc le produit des polynômes caractéristiques des  $u_i$ . □

### Polynôme caractéristique et valeur propre

#### Théorème 33

Un scalaire  $\lambda \in \mathbf{K}$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de  $u$ .

**Démonstration** Un scalaire  $\lambda \in \mathbf{K}$  est une valeur propre si, et seulement si,  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas régulière c'est-à-dire :

$$C_u(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0.$$

□

Le théorème précédent montre l'importance pratique d'obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On réalise dans les cas concrets cet objectif en calculant le déterminant  $\det(XI_n - A)$  par opérations élémentaires afin de faire apparaître des facteurs communs dans les lignes ou les colonnes.

*Exemple* Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est donné par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} X-2 & -5 & 6 \\ -4 & X-6 & 9 \\ -3 & -6 & X+8 \end{vmatrix}.$$

La somme des coefficients des lignes du déterminant ci-dessus étant  $X - 1$ , l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$  montre que l'on a :

$$C_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & X-6 & 9 \\ 1 & -6 & X+8 \end{vmatrix}.$$

Les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$  conduisent à :

$$C_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & X-1 & 3 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 + X + 1).$$

Le spectre de  $A$  est donc  $\{1, j, j^2\}$  dans  $\mathbb{C}$  et seulement  $\{1\}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Il implique aussi les corollaires suivants. On remarquera que le premier d'entre eux à déjà été démontré en utilisant l'indépendance des sous-espaces propres (corollaire 26 page 201).

#### Corollaire 34

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  a au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

#### Corollaire 35

- Si  $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ , alors  $u$  a au moins une valeur propre.
- Si  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  et si  $n$  est impair, alors  $u$  a au moins une valeur propre

### Ordre de multiplicité d'une valeur propre

#### Définition 11

On appelle *ordre de multiplicité* d'une valeur propre  $\lambda$  de  $u$ , et l'on note  $m(\lambda)$ , sa multiplicité dans le polynôme caractéristique de  $u$ .

#### Corollaire 36

On a :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$$

pour tout  $\lambda \in \text{sp } u$ .

**Démonstration** Notons  $n(\lambda)$  la dimension du sous-espace propre  $E_\lambda(u)$ .

Le sous-espace  $E_\lambda(u)$  étant non réduit à  $\{0\}$ , on a  $1 \leq n(\lambda)$ . Il est aussi stable par  $u$  et l'endomorphisme  $u_1$  induit par  $u$  sur  $E_\lambda(u)$  est l'homothétie  $\lambda \text{Id}_{E_\lambda(u)}$ . Le polynôme caractéristique de  $u_1$  vaut donc  $(X - \lambda)^{n(\lambda)}$ . Comme il divise  $C_u(X)$ , on obtient  $n(\lambda) \leq m(\lambda)$ . □

**Exemple** Si  $u$  est de rang  $r$ , le polynôme  $C_u(X)$  est divisible par  $X^{n-r}$  puisque son noyau  $E_0(u)$  est de dimension  $n - r$ .

Ainsi, le polynôme caractéristique de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

de rang inférieur ou égal à 2 est de la forme :

$$C_A(X) = X^{n-2} (X^2 + uX + v).$$

Le coefficient  $u$ , égal à l'opposé de la trace de  $A$ , est nul. Dans le développement du déterminant :

$$\begin{vmatrix} X & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & X & -\alpha_{n-1} \\ -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} & X \end{vmatrix}$$

les termes de degré  $n - 2$  sont obtenus pour les transpositions  $\tau_{i,n}$  avec  $i < n$ . Il vient alors :

$$v = -\alpha_1^2 - \dots - \alpha_{n-1}^2.$$

Le spectre de  $u$  est, par définition, l'ensemble des racines dans  $\mathbf{K}$  de  $C_u(X)$ . Comme dans le cas des polynômes, on distinguera soigneusement les notions d'ensemble et de liste des valeurs propres de  $u$ .

- L'ensemble des valeurs propres est le spectre de  $u$  ; s'il est égal à  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ , on a :

$$C_u(X) = S(X) \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m(\lambda_i)}$$

où  $S \in \mathbf{K}[X]$  n'a pas de racine dans  $\mathbf{K}$ .

- Une liste des valeurs propres est une famille de scalaires répétant les valeurs propres avec leurs multiplicités. Si  $(\mu_1, \dots, \mu_s)$  est une liste des valeurs propres de  $u$ , il vient :

$$C_u(X) = S(X) \prod_{i=1}^s (X - \mu_i).$$

Une telle liste est unique à l'ordre près.

- Bien sûr, la liste  $(\mu_1, \dots, \mu_s)$  est à l'ordre près formée des  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  répétés autant de fois que leur multiplicité. On a donc :

$$s = m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_r).$$

## 2.4 Endomorphismes scindés et scindés simples

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Rappelons que l'on dit qu'un polynôme  $P(X) \in \mathbf{K}[X]$  est *scindé* sur  $\mathbf{K}$  s'il peut s'écrire comme produit de facteurs du premier degré de  $\mathbf{K}[X]$  et qu'il est *scindé simple* sur  $\mathbf{K}$  si de plus ses racines sont simples.

### Définition 12

On dit que  $u$  est *scinde* si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbf{K}$  et qu'il est *scindé simple* si son polynôme caractéristique est scindé simple sur  $\mathbf{K}$ .

### Proposition 37

Si  $\mathbf{K}$  est égal à  $\mathbb{C}$ , alors  $u$  est scindé.

### Proposition 38

Si  $u$  est scindé alors l'endomorphisme induit par  $u$  sur tout sous-espace stable de  $E$  est scindé.



**Démonstration** Le polynôme  $C_{u_F}$  divise en effet le polynôme scindé  $C_u$ . □

Supposons que  $u$  soit scindé.

Si  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  est le spectre de  $u$ , le polynôme caractéristique de  $u$  est :

$$\prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m(\lambda_k)}$$

où  $m(\lambda_k)$  est la multiplicité de  $\lambda_k$  pour tout  $k$ . Si  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  est une liste des valeurs propres, il est égal à :

$$\prod_{i=1}^n (X - \mu_i).$$

En considérant les termes de degré  $n - 1$  et de degré 1 de  $C_u(X)$ , on obtient la proposition suivante :

**Proposition 39**

Si  $u$  est scindé alors toute liste de valeurs propres est de longueur  $n$  et si  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  est une telle liste, on a :

$$\text{tr } u = \mu_1 + \dots + \mu_n \quad \text{et} \quad \det u = \mu_1 \dots \mu_n.$$

**Proposition 40**

Une matrice supérieure triangulaire  $A$  est scindée et la diagonale de  $A$  est une liste de ses valeurs propres.

**Démonstration** Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire supérieure de diagonale  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est en effet  $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ . □

**Corollaire 41**

S'il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme  $u$  est triangulaire supérieure, alors  $u$  est scindé.

## 2.5 Théorème de Hamilton-Cayley

**Theorème 42 (Hamilton-Cayley)**

On a : 
$$C_u(u) = 0.$$

**Démonstration** Soit  $x \in E$ . Notons  $F$  le sous-espace  $\mathbf{K}[u](x)$  et  $P$  le polynôme annulateur de  $x$ .

On sait que  $F$  est stable par  $u$  et que dans une base convenable l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur  $F$  a comme matrice la matrice compagnon de  $P$ . Son polynôme caractéristique vaut donc  $P$ .

Le sous-espace  $F$  étant stable par  $u$ , il existe un polynôme  $M$  tel que l'on ait  $C_u = C_{u_F} M$ . On obtient alors  $C_u = PM$  et :

$$C_u(u)(x) = (M(u) \circ P(u))(x) = 0$$

puisque  $P(u)(x) = 0$ .

Cela valant pour tout  $x$ , l'endomorphisme  $C_u(u)$  est nul. □

**Corollaire 43**

Le polynôme minimal  $M_u(X)$  divise le polynôme caractéristique  $C_u(X)$ .

Si  $u$  est scindé de spectre  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ , le polynôme minimal de  $u$  est de la forme :

$$\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{r(\lambda_i)}$$

où  $1 \leq r(\lambda_i) \leq m(\lambda_i)$  pour tout  $i$ . On appelle  $r(\lambda_i)$  l'indice de la valeur propre  $\lambda_i$ .

*Exemple* Si  $u$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie, alors il existe une droite ou un plan de  $F$  stable par  $u$ .

Si  $u$  possède une valeur propre  $\lambda$ , il existe un vecteur  $x$  non nul dans  $E$  tel que  $u(x) = \lambda x$  et, comme nous l'avons vu, la droite  $\mathbb{R}x$  est un sous-espace de dimension 1 stable par  $u$ .

Si  $u$  ne possède pas de valeur propre réelle, son polynôme caractéristique se factorise sur  $\mathbb{R}$  sous la forme d'un produit de trinômes irréductibles non nécessairement distincts :

$$C_u(X) = \prod_{k=1}^t (X^2 + p_k X + q_k).$$

Le théorème de Hamilton-Cayley montre que l'on a :

$$\prod_{k=1}^t (u^2 + p_k u + q_k \text{Id}_E) = C_u(u) = 0.$$

Il existe donc un  $k$  tel que  $u^2 + p_k u + q_k \text{Id}_E$  ne soit pas inversible. Si  $x$  non nul de  $E$  appartient au noyau de  $u^2 + p_k u + q_k \text{Id}_E$ , alors le polynôme minimal de  $x$  sous l'action de  $u$  divise  $X^2 + p_k X + q_k$  et le sous-espace stable par  $u$  engendré par  $x$ , c'est-à-dire :

$$\mathbb{R}[u](x),$$

est de dimension 1 ou 2.

### 3. Réduction des endomorphismes diagonalisables

On suppose dans cette section que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

Les notions développées dans cette section concernent les endomorphismes. Elles s'appliquent aux matrices en considérant les endomorphismes canoniquement associés.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

#### 3.1 Endomorphismes diagonalisables

##### Définition 13

On dit qu'un endomorphisme  $u$  est *diagonalisable* s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

Une base dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale s'appelle une *base de diagonalisation* de  $u$ . C'est évidemment le cas si, et seulement si, elle est formée de vecteurs propres.

En ce qui concerne les matrices, on dit, comme nous l'avons déjà indiqué, que  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , est diagonalisable si l'endomorphisme  $u_A$  de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé est diagonalisable. On voit, en considérant la matrice de passage de la base canonique à une base de diagonalisation de  $u_A$ , que c'est équivalent à l'existence d'une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

##### Proposition 44

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $E$  est la somme d'une famille  $(F_i)$  de sous-espaces vectoriels stables sur lesquels il induit des homothéties.

##### Démonstration

- Si  $(e_i)$  une base de diagonalisation de  $u$ , la famille  $(\mathbb{K}e_i)$  vérifie évidemment les conditions voulues.
- Si, réciproquement,  $(F_i)$  est une famille de sous-espaces vectoriels sur lesquels  $u$  induit des homothéties, toute base de  $E$  formée de vecteurs de la réunion des  $F_i$  est une base de diagonalisation de  $u$ . □

**Caractérisation immédiate**

**Théorème 45**

Si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $u$  est diagonalisable,
- (ii)  $E$  est la somme de ses sous-espaces propres,
- (iii)  $E$  est la somme directe de ses sous-espaces propres.

**Démonstration**

- ▶ Si  $u$  est diagonalisable, l'ensemble des vecteurs non nuls de la réunion des sous-espaces propres contient une base de  $E$  et, par conséquent, engendre  $E$ . La somme des sous-espaces propres de  $u$  est donc égale à  $E$ .
- ▶ La famille des sous-espaces propres est toujours en somme directe. Si la somme de cette famille est égale à  $E$ , l'espace  $E$  est la somme directe de ses sous-espaces propres.
- ▶ Si  $E$  est la somme directe de ses sous-espaces propres, toute base de  $E$  adaptée à cette somme directe est une base de diagonalisation de  $u$ . □

On en déduit les corollaires suivants où l'on notera  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  le spectre de  $u$  :

**Corollaire 46**

L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si, on a :

$$\sum_{k=1}^r \dim E_{\lambda_k}(u) = n.$$

**Démonstration** Il suffit de remarquer que la dimension de la somme directe  $\bigoplus_{k=1}^r E_{\lambda_k}(u)$  est

$$\sum_{k=1}^r \dim E_{\lambda_k}(u).$$

□

**Corollaire 47**

L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si, il est scindé et vérifie :

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \dim E_{\lambda_k}(u) = m(\lambda_k).$$

**Démonstration** On a de façon générale  $\dim E_{\lambda_k}(u) \leq m(\lambda_k)$  pour tout  $k$  et donc :

$$\sum_{k=1}^r \dim E_{\lambda_k}(u) \leq \sum_{k=1}^r m(\lambda_k).$$

Comme la factorisation du polynôme caractéristique de  $u$  montre que l'on a :

$$\sum_{k=1}^r m(\lambda_k) \leq n,$$

l'égalité  $\sum_{k=1}^r \dim E_{\lambda_k}(u) = n$  est équivalente à :

$$\sum_{k=1}^r m(\lambda_k) = n \quad \text{et} \quad \forall k, \dim E_{\lambda_k}(u) = m(\lambda_k). \quad \square$$

**Corollaire 48**

Si  $u$  est scindé simple, alors  $u$  est diagonalisable et possède  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  telles que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \dim E_{\lambda_k}(u) = 1.$$

*Exemple* Soit la matrice complexe :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que son polynôme caractéristique vaut  $X^2(X^2 - kX - 3)$ .

Le sous espace-propre associé à 0 s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{cases} y & = 0 \\ x + ky + z + t & = 0 \end{cases}$$

Il est de dimension 2 engendre par les vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve d'ailleurs que  $A$  est de rang 2.

Si  $k$  vérifie  $k^2 + 12 \neq 0$ , le trinôme  $X^2 - kX - 3$  à deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  distinctes non nulles. Les sous-espaces propres associés étant de dimension supérieure ou égale à 1, la matrice  $A$  est diagonalisable.

Si  $k$  est égal à  $\pm 2i\sqrt{3}$ , le trinôme  $X^2 - kX - 3$  à une seule racine  $\lambda = \frac{k}{2}$ . Le sous-espace propre est donné en résolvant :

$$\begin{cases} -\lambda x + y & = 0 \\ x + \lambda y + z + t & = 0 \\ y - \lambda z & = 0 \\ y - \lambda t & = 0 \end{cases}$$

Il est donc de dimension 1 engendré par  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La dimension de la somme des sous-espaces propres valant 3, la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

**Remarque** Un endomorphisme scindé n'ayant qu'une valeur propre  $\lambda$  n'est diagonalisable que s'il vaut  $\lambda \text{Id}_E$ . En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est diagonalisable que s'il est nul.

### Étude d'un endomorphisme diagonalisable

Pour étudier la diagonalisabilité (*sic*) de l'endomorphisme  $u$ , on procédera en général de la façon suivante. On déterminera :

1. le polynôme caractéristique, si possible, ou un polynôme annulateur de  $u$  et son spectre,
2. le sous-espace propre  $E_\lambda(u)$  et une base  $B_\lambda$  de cet espace pour tout  $\lambda \in \text{sp } u$ .

Si la réunion  $\mathcal{B}$  des bases  $B_\lambda$  est une base de  $E$ , alors  $u$  est diagonalisable et  $\mathcal{B}$  est une base de diagonalisation.

### Exemples

1. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à :

$$X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X - 2)^2(X - 1).$$

Une liste de ses valeurs propres est donc  $(1, 2, 2)$ .

On obtient le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 en résolvant le système  $AX = X$  soit :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à  $x = y = -z$ . Ainsi  $E_1(A) = \mathbb{K}v_1$  où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

équivalent à  $2x - 3y - 2z = 0$ . On obtient  $E_2(A) = \mathbb{K}v_2 \oplus \mathbb{K}v_3$  avec par exemple :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres valant 3, la matrice  $A$  est diagonalisable et une base de diagonalisation est  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ . La matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{C}$  est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de l'endomorphisme  $u_A$  dans  $\mathcal{C}$  est  $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 2)$ . On obtient alors  $A = PDP^{-1}$ , soit après calcul de  $P^{-1}$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable de  $E$ . Montrons que  $E$  est monogène sous l'action de  $u$  si, et seulement si,  $u$  est scindé simple.

Si  $E$  est cyclique sous l'action de  $u$ , il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  dans laquelle la matrice de  $u$  est la matrice compagnon d'un polynôme

$P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$  nécessairement égal au polynôme caractéristique de  $u$  par

la proposition 30 de la page 203. Nous avons vu alors dans l'exemple de la page 197, que pour toute racine  $\lambda$  de  $P$ , le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est l'espace de dimension 1 engendré par le vecteur :

$$X_\lambda = \left( \sum_{i=0}^k \alpha_{p-i} \lambda^{k-i} \right)_{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}.$$

Comme  $u$  est diagonalisable,  $P$  possède  $n$  racines distinctes. Supposons maintenant que  $u$  possède  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et considérons une base  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  telle que  $u(f_i) = \lambda_i f_i$  pour tout  $i$ . Posons alors  $x = f_1 + \dots + f_n$ . La famille  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$  puisque

sa matrice dans  $\mathcal{C}$  est la matrice de Vandermonde :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $E$  est engendré par  $x$  sous l'action de  $u$ .

3. L'endomorphisme  $v : P \mapsto (1 - X^2)P' + nXP$  de  $\mathbb{R}[X]$  laisse stable le sous-espace  $E = \mathbb{R}_n[X]$  puisque :

$$v(X^k) = (n - k)X^{k+1} + kX^{k-1}$$

appartient à  $E$  pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Considérons alors l'endomorphisme  $u$  induit par  $v$  sur  $E$ .

La matrice de  $v$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique ne paraissant pas facile à calculer on recherchera les valeurs propres de  $v$  directement.

Un polynôme  $P$  non nul de  $E$  est un vecteur propre de  $u$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que l'on ait :

$$(1 - X^2)P' + nXP = \lambda P,$$

soit :

$$\frac{P'}{P} = \frac{nX - \lambda}{X^2 - 1} = \frac{n - \lambda}{2(X - 1)} + \frac{n + \lambda}{2(X + 1)}$$

dans  $\mathbb{R}(X)$ . Si la factorisation de  $P$  sur  $\mathbb{C}$  est  $\alpha \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{n_k}$ , on a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^r \frac{n_k}{X - \alpha_k}.$$

Ainsi, le polynôme  $P$  est de degré  $n$  et a un ensemble de racines complexes contenu dans  $\{1, -1\}$ .

Soit  $P_k = (X - 1)^k (x + 1)^{n-k}$  pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Un simple calcul montre que l'on a :

$$u(P_k) = (n - 2k)P_k.$$

Comme les nombres réels  $(n - 2k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  sont deux à deux distincts, la famille  $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de vecteurs propres de  $u$ . Cet endomorphisme est donc diagonalisable de liste de valeur propre  $(n - 2k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .



### 3.2 Réduction des endomorphismes diagonalisables

Supposons que  $u$  soit diagonalisable de spectre  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ .

Nous avons alors la décomposition en somme directe :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(u).$$

L'endomorphisme  $u'_k$ , induit par  $u$  sur le sous-espace stable  $E_{\lambda_k}(u)$ , est l'homothétie  $\lambda_k \text{Id}_{E_{\lambda_k}(u)}$ .

On appelle famille des *projecteurs propres* de  $u$ , la famille  $(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_r})$  des projecteurs associée à la somme directe des sous-espaces propres.

#### Proposition 49

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable.

On a :

$$u = \lambda_1 p_{\lambda_1} + \dots + \lambda_r p_{\lambda_r}.$$

Dans toute base  $\mathcal{B}$  adaptée à la somme directe précédente la matrice de  $u$  est diagonale par blocs de la forme :

$$\text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$$

où  $n_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$ .

#### Démonstration

► Soit  $x \in E$ . On a  $x = p_{\lambda_1}(x) + \dots + p_{\lambda_r}(x)$ . Comme  $p_{\lambda_k}(x)$  appartient à  $E_{\lambda_k}(u)$  pour tout  $k$ , on obtient :

$$u(x) = \lambda_1 p_{\lambda_1}(x) + \dots + \lambda_r p_{\lambda_r}(x).$$

► Dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  adaptée à la somme directe des sous-espaces propres, la matrice de  $u$  est diagonale par blocs. Son  $k^{\text{ième}}$  bloc est la matrice dans  $\mathcal{B}_k$  de l'homothétie  $u'_k$ , soit  $\lambda_k I_{n_k}$  avec  $n_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$ . □

#### Proposition 50

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable.

- Le polynôme caractéristique de  $u$  est :

$$C_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\dim E_{\lambda_k}(u)}.$$

- L'endomorphisme  $u$  est scindé et  $\dim E_{\lambda_k}(u) = m(\lambda_k)$  pour tout  $k$ .

**Démonstration** Le polynôme caractéristique  $C_u(X)$  est le produit des polynômes caractéristiques :

$$C_{u_k}(X) = (X - \lambda_k)^{\dim E_{\lambda_k}(u)}.$$

Les deux autres points, que nous avons déjà vus, s'en déduisent immédiatement.  $\square$

L'écriture de  $u$  en fonction des projecteurs propres ou sa description matricielle permet le calcul aisé des polynômes en  $u$ . Si  $P$  est un élément de  $\mathbf{K}[X]$ , on a en effet :

$$P(u) = P(\lambda_1)p_{\lambda_1} + \cdots + P(\lambda_r)p_{\lambda_r}$$

et :

$$M_B P(u) = \text{diag}(P(D_1), \dots, P(D_r)).$$

### Proposition 51

Le polynôme minimal d'un endomorphisme  $u$  diagonalisable de valeur propre  $\lambda_1 \cdots \lambda_n$  est :

$$M_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k).$$

**Démonstration** Notons :

$$P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k).$$

- La relation précédente montre que  $P(u) = P(\lambda_1)p_{\lambda_1} + \cdots + P(\lambda_r)p_{\lambda_r}$  est nul. Ainsi  $M_u$  divise  $P$ .
- Comme  $M_u$  a toutes les valeurs propres comme racines, on a  $M_u = P$   $\square$

Ainsi, le polynôme minimal de  $u$  est scindé simple (scindé à racines simples).

**Exemple** Reprenons le premier exemple de la page 214. Nous avons vu que la

matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  peut s'écrire  $A = P \text{diag}(1, 2, 2) P^{-1}$  avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors les puissances de  $A$  par la relation  $A^k = P \text{diag}(1, 2, 2)^k P^{-1}$ . Cela donne :

$$A^k = 1^k \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On remarquera que les matrices facteurs de  $1^k$  et  $2^k$  dans l'écriture ci-dessus sont les matrices dans la base canonique des projections associées à la somme directe propre  $\mathbf{K}^3 = E_1(A) \oplus E_2(A)$ .

**Remarques**

- Si  $(Q_1, \dots, Q_r)$  est la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associée à la famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , on a :

$$\forall k, \quad p_{\lambda_k} = Q_k(u).$$

Ainsi, la projection  $p_{\lambda_k}$  est un polynôme en  $u$  pour tout  $k$ . Ce résultat est aussi une conséquence du lemme des noyaux.

- On peut montrer que l'existence de familles  $(\lambda_k) \in \mathbf{K}^r$  ( $\lambda_k$  deux à deux distincts) et  $(p_k) \in \mathcal{L}(E)^r$  telles que l'on ait :

$$P(u) = P(\lambda_1)p_1 + \dots + P(\lambda_r)p_r$$

pour tout  $P$  de  $\mathbf{K}[X]$  est équivalente à la diagonalisabilité de  $u$  et qu'alors,  $\{\lambda_k\}$  est le spectre de  $u$  et  $(p_k)$  la famille des projecteurs propres.

### 3.3 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables par leur polynôme minimal

**Théorème 52**

Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, il annule un polynôme scindé simple.

**Démonstration** Nous avons vu que le polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable est scindé simple.

Supposons réciproquement que  $u$  soit annulé par un polynôme scindé simple :

$$N = \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)$$

Le lemme des noyaux montre la décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{k=1}^s \text{Ker}(u - \alpha_k \text{Id}_E).$$

Comme  $u$  induit l'homothétie de rapport  $\alpha_k$  sur  $\text{Ker}(u - \alpha_k \text{Id}_E)$  pour tout  $k$ , une base de  $E$  adaptée à cette somme directe est une base de diagonalisation de  $u$  □

**Corollaire 53**

Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples.

**Endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable****Proposition 54**

L'endomorphisme induit sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est aussi diagonalisable

**Démonstration** Il suffit, en effet, de remarquer que l'endomorphisme induit est annulé par le polynôme minimal, scindé simple, de l'endomorphisme diagonalisable considéré  $\square$

**Diagonalisation simultanée**

On dit qu'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'endomorphismes de  $E$  est *simultanément diagonalisable* s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle les matrices des  $u_i$  sont diagonales. Une telle base s'appelle alors une base de *diagonalisation simultanée*.

**Proposition 55**

Une famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'endomorphismes de  $E$  est simultanément diagonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme  $u_i$  est diagonalisable pour tout  $i$  et  $u_i$  commute avec  $u_j$  pour tout  $(i, j)$ .

**Démonstration** Le sens direct est clair puisque dans une base de diagonalisation simultanée, les matrices diagonales des endomorphismes commutent deux à deux.

Montrons la réciproque par récurrence sur la dimension de  $E$ . Elle est évidente en dimension inférieure ou égale à 1.

1. Si tous les  $u_i$  sont des homothéties, n'importe quelle base convient.
2. Supposons alors que  $u_{i_0}$  avec  $i_0 \in I$  ne soit pas une homothétie. On peut alors écrire

$$E = F \oplus G$$

où  $F$  est un sous-espace propre de  $u_{i_0}$  et  $G$  la somme non réduite à  $\{0\}$  des autres sous-espaces propres de cet endomorphisme. Ces sous-espaces sont stables par  $u_i$  pour tout  $i$  par hypothèse de commutation. Les familles  $(u'_i)$  et  $(u''_i)$  d'endomorphismes induits sur  $F$  et  $G$  sont alors formées d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Les dimensions de  $F$  et  $G$  étant strictement inférieures à celle de  $E$ , elles possèdent des bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  de diagonalisation simultanée. La réunion  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  fournit une base de diagonalisation simultanée des  $(u_i)$ .  $\square$

## 4. Réduction des endomorphismes scindés

On suppose dans cette section que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

Les notions développées dans cette section concernent les endomorphismes. Elles s'appliquent aux matrices en considérant les endomorphismes canoniquement associés.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### 4.1 Endomorphismes trigonalisables

#### Définition 14

On dit que  $u$  est *trigonalisable* s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.

Une base dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure s'appelle une *base de trigonalisation* de  $u$ . Nous avons vu dans le chapitre « Algèbre linéaire » que c'est le cas si, et seulement si, le drapeau associé à cette base est stable par  $u$ .

On dit comme nous l'avons déjà précisé, qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est *trigonalisable* si l'endomorphisme  $u_A$  de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé est trigonalisable. On voit, en considérant la matrice de passage de la base canonique à une base de trigonalisation de  $u_A$ , que c'est équivalent à l'existence d'une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure.

**Remarque** Si la matrice de  $u$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est triangulaire supérieure, la matrice de  $u$  dans la base inversée  $(e_n, \dots, e_1)$  est une matrice triangulaire inférieure.

### Endomorphismes trigonalisables et endomorphismes scindés

#### Proposition 56

Si un endomorphisme est scindé de liste de valeur propres  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  à la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

**Démonstration** Nous montrons cette assertion par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ . Elle est évidente lorsque  $n$  est inférieur ou égal à 1. Supposons-la acquise pour toute dimension strictement inférieure à  $n$  avec  $n > 1$ .

Par hypothèse, le polynôme caractéristique de  $u$  est :

$$C_u(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n).$$

- ▶ Puisque  $\alpha_n$  est valeur propre de  $u$ , l'endomorphisme  $u - \alpha_n \text{Id}_E$  n'étant pas inversible et il existe un hyperplan  $F$  de  $E$  contenant son image. Le sous-espace  $F$  est stable par  $u - \alpha_n \text{Id}_E$  et, donc, par  $u$ .
- ▶ Dans une base adaptée  $(e_1, \dots, e_n)$  à  $F$ , la matrice de  $u$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où  $A$  est la matrice de l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur  $F$ .

Puisque  $f = (u - \alpha_n \text{Id}_E)(e_n)$  est un élément de  $F$ , on peut écrire  $u(e_n) = f + \alpha_n e_n$ . On a donc  $\lambda = \alpha_n$  et :

$$C_{u_F}(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_{n-1}).$$

- ▶ Par hypothèse de récurrence, il existe une base  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  de  $F$  dans laquelle la matrice de  $u_F$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Finalement, la matrice de  $u$  dans la base  $(f_1, \dots, f_{n-1}, e_n)$  de  $E$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

□

**Théorème 57**

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, il est scindé.

**Démonstration** L'implication directe a été démontrée dans le corollaire 41 page 209. La réciproque provient de la proposition précédente. □

**Exemples**

1. La démonstration de la proposition précédente fournit un procédé pratique de trigonalisation. Soit la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est  $X(X + 1)^2$ .

Soit la valeur propre 0. L'image  $F_2$  de  $u_A$  a pour base  $(v_1, v_2)$  avec :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Considérons alors la base  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 2 & -14 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de  $u_A$  dans  $\mathcal{C}$  est :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & -25 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme  $u'_A$  induit par  $u_A$  sur  $F_2$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 4 & -25 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$  dans la base  $(v_1, v_2)$ . Son polynôme caractéristique est  $(X + 1)^2$ . L'image de  $u'_A + \text{Id}_{F_2}$  est engendré par  $w_1 = 5v_1 + v_2$ . Dans la base  $(w_1, w_2)$  de matrice  $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  dans

$(v_1, v_2)$ , la matrice de  $u'_A$  est  $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Considérons alors la base  $\mathcal{D} = (w_1, w_2, v_3)$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{C}$  est :

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de  $u_A$  dans  $\mathcal{D}$  est :

$$B = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2/5 \\ 0 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Si deux endomorphismes scindés  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{L}(E)$  commutent, il existe une base  $\mathcal{B}$  (de trigonalisation simultanée) dans laquelle les matrices de  $u$  et  $v$  sont trigonales supérieures.

Pour changer, nous raisonnerons sur les matrices. La proposition est évidente si les matrices sont de taille 1. Nous supposons le résultat acquis pour des matrices de taille strictement inférieures à  $n$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices scindées de  $M_n(\mathbf{K})$  vérifiant  $AB = BA$ . Considérons alors une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  et le sous-espace propre  $E_\lambda$  de l'endomorphisme  $u_A$  canoniquement associé à  $A$ . Ce sous-espace est stable par  $u_A$  et  $u_B$ . Il existe donc une matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbf{K})$  telle que l'on ait :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}$$

où  $A_1$  et  $B_1$  sont de taille  $n_1 = \dim E_\lambda$  et  $A_1 = \lambda I_{n_1}$ .

- Puisque  $B_1$  est trigonalisable, il existe  $Q_1 \in GL_{n_1}(\mathbf{K})$  telle que :

$$T_1 = Q_1^{-1}B_1Q_1$$

soit triangulaire supérieure. Comme  $A_1$  est scalaire, la matrice  $S_1 = Q_1^{-1}A_1Q_1$  est aussi scalaire.

- Puisque  $n_1$  est strictement positif,  $n - n_1$  est strictement inférieur à  $n$ . Les produit par blocs :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & * \\ 0 & A_3B_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} B_1A_1 & * \\ 0 & B_3A_3 \end{pmatrix}$$

montrent que  $A_3$  et  $B_3$  commutent. Par hypothèse de récurrence il existe  $Q_3 \in GL_{n-n_1}(\mathbf{K})$  telle que

$$S_3 = Q_3^{-1}A_3Q_3 \quad \text{et} \quad T_3 = Q_3^{-1}B_3Q_3$$

soient triangulaires supérieures.

Finalement, notons  $Q$  la matrice inversible  $\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix}$  et  $R$  le produit  $PQ$ . Les matrices :

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & * \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}$$

et :

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & * \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$$

sont triangulaires supérieures.



**Remarque** Le théorème précédent permet de démontrer par simple calcul le théorème de Hamilton-Cayley pour les endomorphismes scindés.

Supposons, en effet, que  $u$  soit un endomorphisme scindé. Il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit triangulaire supérieure de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Notons alors  $F_i$  le sous-espace  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ . Les relations

$$\forall k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, \quad u(e_k) \in F_{i-1} \quad \text{et} \quad (u - \alpha_i \text{Id}_E)(e_i) \in F_{i-1}$$

montrent que l'on a :

$$(u - \alpha_i \text{Id}_E)(F_i) \subset F_{i-1}$$

pour tout  $i$ . Le sous-espace :

$$(u - \alpha_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \alpha_n \text{Id}_E)(F_n)$$

est donc contenu dans :

$$(u - \alpha_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \alpha_{n-1} \text{Id}_E)(F_{n-1})$$

et par itération dans  $(u - \alpha_1 \text{Id}_E)(F_1)$  qui est réduit à  $\{0\}$ . On a donc  $C_u(u) = 0$ .

On en déduit alors le théorème de Hamilton-Cayley pour les endomorphismes des espaces vectoriels réels ou complexes ; la matrice  $A$  d'un tel endomorphisme dans une base de  $E$  est scindé dans  $M_n(\mathbb{C})$  et vérifie donc  $C_A(A) = 0$ .

### Valeurs propres d'un polynôme d'endomorphisme

Le théorème précédent a une conséquence théorique intéressante :

#### Proposition 58

Si la liste des valeurs propres d'un endomorphisme scindé  $u$  est  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , alors l'endomorphisme  $P(u)$  est scindé et sa liste de valeurs propres est  $(P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n))$  pour tout polynôme  $P$ .

**Démonstration** Il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Le résultat provient immédiatement de ce que la matrice de  $P(u)$  dans  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{pmatrix} P(\alpha_1) & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\alpha_n) \end{pmatrix}.$$

□

## Caractérisation des endomorphismes trigonalisables par le polynôme minimal

### Théorème 59

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, il possède un polynôme annulateur non nul scindé.

**Démonstration** Si  $u$  est trigonalisable, son polynôme caractéristique est scindé. Le théorème d'Hamilton-Cayley montre alors qu'il possède un polynôme annulateur scindé

On montre la réciproque par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ . Elle est évidente lorsque  $n$  vaut 1. Supposons-la acquise pour toute dimension strictement inférieure à  $n$  avec  $n > 1$ .

Considérons alors un endomorphisme  $u$  de l'espace de dimension  $n$  et  $P$  un polynôme scindé non nul annulateur de  $u$ .

1. Le polynôme minimal  $M_u$  de  $u$  qui divise  $P$  est aussi scindé. Considérons alors une racine  $\lambda$  de  $M_u$ . Le scalaire  $\lambda$  est alors une valeur propre de  $u$  et le sous-espace  $F = \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)$  est de dimension  $p < n$  puisque  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas inversible. Comme  $F$  est stable par  $u$ , les matrices de  $u - \lambda \text{Id}_E$  et  $u$  dans une base adaptée à  $F$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & \lambda I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $u$  est donc égal à  $C_A(X)(X - \lambda)^{n-p}$ .

2. La matrice  $A$  est la matrice de l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur  $F$  dans la base adaptée. Comme  $u_F$  est annulé par le polynôme  $P$ , l'endomorphisme  $u_F$ , et sa matrice  $A$ , sont scindés par hypothèse de récurrence.

On en déduit que  $C_u(X) = C_A(X)(X - \lambda)^{n-p}$  est scindé.

□

### Corollaire 60

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé.

**Application aux endomorphismes nilpotents**

Rappelons qu'un endomorphisme  $u$  est dit *nilpotent* s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u^k = 0$ .

**Proposition 61**

Les trois points suivants sont équivalents :

- (i)  $u$  est nilpotent,
- (ii) le polynôme caractéristique de  $u$  est  $X^n$ ,
- (iii) il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure stricte.

**Démonstration**

- ▶ Si  $u$  est nilpotent, il est annulé par un polynôme de la forme  $X^r$ . Il est donc trigonalisable et, par suite, scindé, de spectre réduit à  $\{0\}$ . Son polynôme caractéristique est donc  $X^n$ .
- ▶ Si  $C_u(X)$  est égal à  $X^n$ , l'endomorphisme  $u$  est scindé et il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure. Comme la diagonale de cette matrice est formée de la liste des valeurs propres de  $u$ , cette matrice, est triangulaire supérieure stricte.
- ▶ S'il existe une base dans laquelle la matrice  $A$  de  $u$  est triangulaire supérieure stricte, on obtient  $A^n = 0$ , et par conséquent  $u^n$ , par simple calcul. □

**4.2 Décomposition de Jordan des endomorphismes scindés**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme scindé de polynôme caractéristique :

$$C_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m(\lambda_k)}$$

(les  $\lambda_k$  sont deux à deux distincts).

**Décomposition spectrale**

On appelle *sous-espaces spectraux* de  $u$ , et on note  $F_{\lambda_k}(u)$ , les sous-espaces :

$$\text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m(\lambda_k)}.$$

On posera  $F_k = F_{\lambda_k}(u)$  pour simplifier.

**Proposition 62**

La famille des sous-espaces spectraux réalise la décomposition en somme directe, appelée *décomposition spectrale* :

$$E = F_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus F_{\lambda_r}(u).$$

Les projecteurs associés, appelés *projecteurs spectraux* sont des polynômes en  $u$ .

**Démonstration** On a  $C_u(u) = 0$  par le théorème de Hamilton-Cayley  
 Le lemme des noyaux donne alors la somme directe :

$$E = \text{Ker } C_u(u) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } (u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m(\lambda_k)}$$

et montre aussi que les projecteurs associés sont des polynômes en  $u$ . □

**Theorème 63**

Pour tout  $k$ , on a les points suivants :

- le sous-espace spectral  $F_k$  est stable par  $u$  et de dimension  $m(\lambda_k)$
- l'endomorphisme  $u_k$  induit par  $u$  sur  $F_k$  est de la forme :

$$\lambda_k \text{Id}_{F_k(u)} + n_k$$

où  $n_k$  est un endomorphisme nilpotent de  $F_k$ .

**Démonstration** Comme noyaux de polynômes en  $u$ , les sous-espaces spectraux sont stables par tout endomorphisme commutant avec  $u$ .

Soit  $n_k = u_k - \lambda_k \text{Id}_{F_k}$ . L'endomorphisme  $n_k^{m(\lambda_k)}$ , induit par :

$$(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m(\lambda_k)}$$

sur  $F_k$  est nul par définition même. L'endomorphisme  $n_k$  est donc nilpotent et son polynôme caractéristique est  $X^{f(\lambda_k)}$  où  $f(\lambda_k)$  est la dimension de  $F_k$ .

Le polynôme caractéristique de  $u_k$  est donc  $(X - \lambda_k)^{f(\lambda_k)}$  On obtient ainsi :

$$C_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{f(\lambda_k)}$$

et, par conséquent,  $f(\lambda_k) = m(\lambda_k)$ . □

**Corollaire 64**

Il existe une base  $B$  de  $E$  adaptée à la décomposition spectrale dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs de la forme :

$$\text{diag } (A_1, \dots, A_r)$$

où  $A_k$  est une matrice triangulaire supérieure de dimension  $m(\lambda_k)$  de diagonale  $(\lambda_k, \dots, \lambda_k)$ .

**Démonstration** On choisit pour tout  $k$  une base  $\mathcal{B}_k$  de  $F_k$  dans laquelle l'endomorphisme nilpotent  $n_k$  à une matrice  $N_k$  triangulaire supérieure stricte de taille  $m(\lambda_k)$ .

Dans la base  $\mathcal{B}$  « réunion » des  $\mathcal{B}_k$ , la matrice de  $u$  est diagonale par blocs. Le  $k^{\text{ième}}$  bloc égal à :

$$\lambda_k I_{m(\lambda_k)} + N_k,$$

est de la forme indiquée. □

Une telle base sera appelée une *base spectrale* de  $u$ .

**Proposition 65**

Si :

$$M_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{r(\lambda_k)}$$

est le polynôme minimal de  $u$ , alors  $r(\lambda_k)$  est l'indice de nilpotence de  $n_k$  et  $F_k$  est le noyau de  $(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{r(\lambda_k)}$  pour tout  $k$ .

**Démonstration** Le polynôme minimal de  $u_k$  est  $(X - \lambda_k)^{r'(\lambda_k)}$  où  $r'(\lambda_k)$  est l'indice de nilpotence de  $n_k$ .

Un polynôme en  $u$ , disons  $P(u)$ , étant nul si, et seulement si, les polynômes  $P(u_k)$  le sont, le polynôme minimal de  $u$  est le PPCM :

$$\prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{r'(\lambda_k)}$$

des polynômes minimaux des  $u_k$ . Ainsi,  $r'(\lambda_k) = r(\lambda_k)$  et :

$$F_k = \text{Ker} (u - \lambda_k \text{Id}_E)^{r(\lambda_k)} .$$
□

Nous ne donnerons pas de méthode générale permettant de déterminer une base de réduction spectrale d'un endomorphisme. Dans les cas de petites dimensions, comme dans l'exemple suivant, on utilisera la suite croissante des sous-espaces  $\text{Ker} (u - \lambda_k \text{Id}_E)^j$  pour  $j$  allant de 1 à  $r(\lambda_k)$  pour construire une base de  $F_{\lambda_k}(u)$  dans laquelle la matrice de  $n_k$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les  $\varepsilon$  valent 0 ou 1. Nous verrons dans le paragraphe suivant que cela relève d'une méthode générale.

*Exemple* Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 4 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'endomorphisme canoniquement associé  $u$ . Son polynôme caractéristique est égal à  $(X - 1)^2 (X - 2)^2$ .

Soit la valeur propre 1. Les noyaux des puissances  $(u - \text{Id}_{\mathbb{R}^4})^j$  pour  $j$  allant de 1 à  $m(1) = 2$  sont les sous-espaces :

$$E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -111 \\ 74 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -48 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

On choisit un vecteur  $v_2$ , par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -48 \\ 32 \end{pmatrix},$$

dans  $F_1 \setminus E_1$  et on note  $v_1 = (u - \text{Id}_{\mathbb{R}^4})(v_2)$ . On a :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

La famille  $(v_1, v_2)$  est une base de  $F_1$  dans laquelle  $u_1 - \text{Id}_{F_1}$  a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit la valeur propre 2. Les noyaux des puissances  $(u - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^4})^j$  pour  $j$  allant de 1 à  $m(1) = 2$  sont les sous-espaces :

$$E_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On choisit un vecteur  $w_2$ , par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dans  $F_2 \setminus E_2$  et on note  $w_1 = (u - 2 \text{Id}_{F_4})(w_2)$ . On a :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La famille  $(w_1, w_2)$  est une base de  $F_2$  dans laquelle  $u_1 - 2 \text{Id}_{F_1}$  a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base  $(v_1, v_2, w_1, w_2)$ , la matrice de  $u$  est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La représentation matricielle spectrale du corollaire précédent permet le calcul effectif des puissances de  $u$ . On a en effet avec les notations précédentes :

$$M_B(u^p) = \text{diag}(A_1^p, \dots, A_r^p)$$

et, en utilisant la formule du binôme :

$$A_k^p = (\lambda_k I_{m(\lambda_k)} + N_k)^p = \sum_{\ell=0}^{r(\lambda_k)-1} C_p^\ell \lambda_k^{p-\ell} N_k^\ell$$

puisque  $\lambda_k I_{m(\lambda_k)}$  et  $N_k$  commutent.

*Exemple* En reprenant l'exemple précédent, on obtient :

$$A^p = P \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^p & p 2^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} P^{-1}$$

### Décomposition de Jordan

#### Théorème 66 (Decomposition de Jordan)

Il existe un unique couple  $(d, n)$  formé d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent tel que :

$$u = d + n \quad \text{et} \quad d \circ n = n \circ d.$$

De plus ces endomorphismes sont des polynômes en  $u$ .

**Démonstration** Soit  $(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_r})$  la famille des projecteurs spectraux de  $u$ .

L'endomorphisme :

$$d = \lambda_1 p_{\lambda_1} + \dots + \lambda_r p_{\lambda_r}$$

est évidemment diagonalisable. C'est un polynôme en  $u$  comme les  $p_{\lambda_k}$ . L'endomorphisme  $n = u - d$  qui induit sur les sous-espaces spectraux les endomorphismes  $n_k$  nilpotents est nilpotent. C'est aussi un polynôme en  $u$ . Le couple  $(d, n)$  vérifie les propriétés désirées.

Si  $(d', n')$  vérifie les mêmes conditions,  $d'$  et  $n'$  commutent avec  $u$  et stabilisent donc les sous-espaces spectraux. Si  $d'_k$  et  $n'_k$  désignent les endomorphismes induits par  $d'$  et  $n'$  sur  $F_{\lambda_k}(u)$ , on a :

$$d'_k - \lambda_k \text{Id}_{F_{\lambda_k}(u)} = n_k - n'_k.$$

1. L'endomorphisme  $d'_k - \lambda_k \text{Id}_{F_{\lambda_k}(u)}$  est évidemment diagonalisable.
2. Si  $p$  est un entier tel que  $n_k^p$  et  $(n'_k)^p$  sont nuls, on a, grâce à  $n_k \circ n'_k = n'_k \circ n_k$  :

$$(n_k - n'_k)^{2p} = \sum_{\ell=1}^{2p} C_{2p}^{\ell} n_k^{\ell} \circ (-n'_k)^{2p-\ell} = 0$$

Ainsi  $d'_k - \lambda_k \text{Id}_{F_{\lambda_k}(u)}$ , diagonalisable et nilpotent est nul. Cela prouve  $d' = d$ , et par conséquent  $n' = n$ . □

### 4.3 Réduction de Jordan des endomorphismes scindés

Nous utiliserons les définitions suivantes :

On appelle *matrice de Jordan* de valeur propre  $\lambda$  et de taille  $n > 0$ , la matrice carré :

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On appelle *matrice réduite de Jordan* toute matrice diagonale par blocs de matrices de Jordan. Une telle matrice est donc de la forme :

$$\text{diag} (J_{h_1}(\alpha_1), \dots, J_{h_q}(\alpha_q))$$

où  $(h_1, \dots, h_q)$  est une suite d'entiers strictement positifs et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  est une suite de scalaires non nécessairement deux à deux distincts.

#### Réduction en matrices de Jordan des endomorphismes nilpotents

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence  $r$ .

Les noyaux des puissances successives de  $u$  forment une suite croissante :

$$\{0\} = \text{Ker } u^0 \subset \text{Ker } u^1 \subset \dots \subset \text{Ker } u^{r-1} \subset \text{Ker } u^r = E$$



On notera  $n_k$  la différence des dimensions  $\dim \text{Ker } u^k - \dim \text{Ker } u^{k-1}$  pour  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

**Lemme**

Soit  $k \in \llbracket 2, r \rrbracket$ .

Si  $(e_1^k, \dots, e_{n_k}^k)$  est une base d'un supplémentaire  $H_k$  de  $\text{Ker } u^{k-1}$  dans  $\text{Ker } u^k$ , alors il existe une base  $(e_1^{k-1}, \dots, e_{n_{k-1}}^{k-1})$  d'un supplémentaire  $H_{k-1}$  de  $\text{Ker } u^{k-2}$  dans  $\text{Ker } u^{k-1}$  de la forme :

$$(u(e_1^k), \dots, u(e_{n_k}^k), f_1, \dots, f_q).$$

En particulier  $n_k \leq n_{k-1}$ .

**Démonstration**

► La somme  $\text{Ker } u^{k-2} + \mathbf{K}u(e_1^k) + \dots + \mathbf{K}u(e_{n_k}^k)$  est évidemment contenue dans  $\text{Ker } u^{k-1}$ . Pour montrer qu'elle est directe, considérons une famille  $(h, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}) \in \text{Ker } u^{k-2} \times \mathbf{K}^{n_k}$  vérifiant :

$$h + \alpha_1 u(e_1^k) + \dots + \alpha_{n_k} u(e_{n_k}^k) = 0.$$

En appliquant  $u^{k-2}$ , on obtient :

$$u^{k-1} (\alpha_1 e_1^k + \dots + \alpha_{n_k} e_{n_k}^k) = 0.$$

Comme  $\alpha_1 e_1^k + \dots + \alpha_{n_k} e_{n_k}^k$  appartient au supplémentaire  $H_k$  de  $\text{Ker } u^{k-1}$  dans  $\text{Ker } u^k$ , il vient  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$  et, par suite,  $h = 0$ .

► Le sous-espace :

$$\text{Ker } u^{k-2} \oplus \mathbf{K}u(e_1^k) \oplus \dots \oplus \mathbf{K}u(e_{n_k}^k)$$

possède un supplémentaire dans  $\text{Ker } u^{k-1}$ . Une base de ce supplémentaire fournit une famille  $(f_1, \dots, f_q)$  convenable. □

On construit alors par une récurrence descendante une suite de familles de vecteurs  $(e_1^k, \dots, e_{n_k}^k)$  vérifiant pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  :

1.  $(e_1^k, \dots, e_{n_k}^k)$  est une base d'un supplémentaire  $H_k$  de  $\text{Ker } u^{k-1}$  dans  $\text{Ker } u^k$  ;
2.  $u(e_j^k) = e_j^{k-1}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$  et  $u(e_j^1) = 0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$ .

La famille réunion des  $(e_1^k, \dots, e_{n_k}^k)$  est une base de  $E$  puisque l'on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^r H_k.$$

On dispose alors ses vecteurs par lignes superposées de la façon suivante :

$e_1^r$	$\dots$	$e_{n_r}^r$							
$e_1^{r-1}$	$\dots$	$e_{n_r}^{r-1}$	$\dots$	$e_{n_{r-1}}^{r-1}$					
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$					
$e_1^2$	$\dots$	$e_{n_r}^2$	$\dots$	$e_{n_{r-1}}^2$	$\dots\dots\dots$	$e_{n_2}^2$			
$e_1^1$	$\dots$	$e_{n_r}^1$	$\dots$	$e_{n_{r-1}}^1$	$\dots\dots\dots$	$e_{n_2}^1$	$\dots$	$e_{n_1}^1$	

On obtient ainsi un tableau  $\mathcal{T}$ , appele tableau de Young, dont la forme déterminée par la liste  $(n_1, \dots, n_r)$  des longueurs de ses lignes ne dépend que de  $u$ . On notera  $(h_1, \dots, h_p)$  la suite décroissante des hauteurs de ses colonnes ( $p = n_1$ ). On a pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$h_i = \text{Card} \{k \in \llbracket 1, r \rrbracket \mid i \leq n_k\}.$$

**Théorème 67**

Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est une matrice réduite de Jordan :

$$\text{diag}(J_{h_1}(0), \dots, J_{h_p}(0))$$

où  $(h_1, \dots, h_p)$  est une suite décroissante d'entiers non nuls

Deux matrices réduites de Jordan représentant  $u$  sont égales à l'ordre près des blocs de Jordan.

**Démonstration**

► Notons  $\mathcal{B}$  la base formée des éléments de  $\mathcal{T}$  indexés en parcourant celui-ci de bas en haut et de gauche à droite. La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$\text{diag}(J_{h_1}(0), \dots, J_{h_p}(0))$$

où  $(h_1, \dots, h_p)$  est la suite des hauteurs des colonnes de  $\mathcal{T}$ .

► Supposons que la matrice de  $u$  dans une autre base  $\mathcal{C}$  soit de la forme

$$\text{diag}(J_{s_1}(0), \dots, J_{s_q}(0))$$

où la suite  $(s_1, \dots, s_q)$  est décroissante. On construit un tableau de Young  $\mathcal{T}'$  en disposant les éléments de  $\mathcal{C}$  de bas en haut et de gauche à droite par colonnes de hauteurs  $s_i$ . On vérifie immédiatement que le noyau de  $u^k$  est engendré par les vecteurs des  $k$  premières lignes de  $\mathcal{T}'$ . Ainsi les lignes de  $\mathcal{T}'$  sont de même longueur que celle de  $\mathcal{T}$  et ces deux tableaux ont même forme. Il vient donc  $q = p$  et :

$$(s_1, \dots, s_q) = (h_1, \dots, h_p).$$

□

**Remarques**

- Toute matrice nilpotente est semblable à une et à une seule matrice réduite de Jordan :

$$\text{diag}(J_{h_1}(0), \dots, J_{h_p}(0))$$

où  $(h_1, \dots, h_p)$  est une suite décroissante d'entiers non nuls.

- Deux endomorphismes nilpotents  $u$  et  $v$  sont conjugués sous l'action de  $\mathcal{GL}(E)$  si, et seulement si, les suites de dimensions des sous-espaces  $\text{Ker } u^k$  et  $\text{Ker } v^k$  sont égales.

**Réduction en matrices de Jordan des endomorphismes scindés**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme scindé de polynôme caractéristique :

$$C_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m(\lambda_k)}$$

(les  $\lambda_k$  sont deux à deux distincts).

On reprend les notions et notations du paragraphe précédent consacré à la décomposition de Jordan.

**Théorème 68 (Réduction de Jordan)**

Il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  est une matrice réduite de Jordan.

Deux matrices réduites de Jordan représentant  $u$  sont égales à l'ordre près des blocs de Jordan.

**Démonstration**

- Pour tout  $k$ , il existe une base  $\mathcal{B}_k$  de  $F_{\lambda_k}(u)$  dans laquelle la matrice de  $n_k$  est :

$$\text{diag}(J_{h_1(\lambda_k)}(0), \dots, J_{h_{p_k}(\lambda_k)}(0)).$$

La matrice de  $u$  dans la base réunion de  $\mathcal{B}_k$  est la matrice diagonale par blocs  $\text{diag}(A_1, \dots, A_r)$  où  $A_k$  est :

$$\text{diag}(J_{h_1(\lambda_k)}(\lambda_k), \dots, J_{h_{p_k}(\lambda_k)}(\lambda_k)).$$

- Si une matrice réduite de Jordan représente  $u$ , la matrice diagonale par blocs formée des matrices de Jordan de valeur propre  $\lambda_k$  représente  $u_k$ . On se ramène alors au théorème sur les endomorphismes nilpotents en considérant  $n_k$ . □

**Remarques**

- Toute matrice scindée est donc semblable à une et à une seule matrice réduite de Jordan à l'ordre près des blocs de Jordan. Ces matrices caractérisent donc les classes de similitude de matrices scindées.
- Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, la matrice réduite de Jordan le représentant est diagonale, c'est-à-dire, si, et seulement si, on a pour tout  $k$  :

$$A_k = \text{diag} (J_1(\lambda_k), \dots, J_1(\lambda_k)).$$

## EXERCICES

1. Réduire et donner le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Diagonaliser la matrice réelle de taille  $n$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(les éléments d'indices  $(i, j)$  avec  $|i - j| = 1$  valent 1, les autres sont nuls).

3. Montrer que toute matrice réelle de taille  $n$  vérifiant :

$$A^3 - 3A + 4I_n = 0$$

est de déterminant strictement positif.

4. Soient  $u$  un endomorphisme cyclique d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$  sur un corps  $\mathbf{K}$  quelconque,  $x_0$  un vecteur engendrant  $E$  sous l'action de  $u$  et  $M$  le polynôme minimal de  $u$ .

1. Montrer que l'application :

$$\mathcal{I} \mapsto F_{\mathcal{I}} = \{R(u)(x_0) \mid R \in \mathcal{I}\}$$

est une bijection de l'ensemble des idéaux  $\mathcal{I}$  de  $\mathbf{K}[X]$  contenant  $M$  sur l'ensemble des sous-espaces stables par  $u$  de  $E$ . En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces stables par  $u$ .

2. Montrer que les sous-espaces de  $\mathbf{K}^n$  stables par l'endomorphisme  $u$  canoniquement associé à la matrice triangulaire supérieure :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

sont de la forme  $\text{Im } u^k$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

3. Montrer réciproquement que si  $\mathbf{K}$  est infini, tout endomorphisme ne possédant qu'un nombre fini de sous-espaces stables est cyclique.

5. Déterminer la limite de la suite complexe  $(x_n)$  vérifiant  $x_k = a_k$  pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$  et :

$$x_{n+p} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} x_{n+k}.$$

6. Soient  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^2$ ,
2.  $E_\lambda(u) \oplus \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E) = E$ ,
3.  $E_\lambda(u)$  possède un supplémentaire stable par  $u$ ,
4. la dimension de  $E_\lambda(u)$  est égal à la multiplicité de  $\lambda$  dans le polynôme caractéristique de  $u$ ,
5.  $\lambda$  est une racine simple du polynôme minimal de  $u$ .

Montrer que dans ces conditions,  $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)$  est le seul supplémentaire de  $E_\lambda(u)$  stable par  $u$ .

7. Soit  $u$  une application 1-lipschitzienne d'un espace vectoriel normé réel ou complexe  $E$  de dimension finie.

1. Montrer que l'on a  $E_1(u) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E) = E$  (on utilisera l'exercice précédent).
2. Montrer que la suite des endomorphismes :

$$v_k = \frac{1}{k} (\text{Id}_E + \dots + u^{k-1})$$

est convergente dans  $\mathcal{L}(E)$  et déterminer sa limite.

8. Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $B$  en fonction de celui de  $A$
2. Discuter la diagonalisabilité de  $B$  en fonction de celle de  $A$

9 Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que la matrice par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$$

est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  l'est.

10. Montrer que le coefficient de  $X^{n-k}$  dans le polynôme caractéristique d'une matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  de  $M_n(\mathbb{K})$  est :

$$c_k = (-1)^k \sum_{I \subset [1,n], \text{Card } I=k} \det (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in I^2}$$

(par convention, le déterminant de la matrice vide est égal à 1)

11. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$  ( $n > 0$ ). Montrer que le polynôme caractéristique de :

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

est le produit des polynômes caractéristiques de  $A + B$  et  $A - B$ .

12. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$  ( $n > 0$ )

1. Montrer que les polynômes caractéristiques  $C_{AB}(X)$  et  $C_{BA}(X)$  sont égaux lorsque  $A$  est inversible.
2. Montrer que les polynômes caractéristiques  $C_{J_r B}(X)$  et  $C_{B J_r}(X)$  sont égaux ( $J_r$  désigne la matrice de rang  $r$  canonique).
3. Montrer que les polynômes  $C_{AB}(X)$  et  $C_{BA}(X)$  sont égaux dans tous les cas.

13. Montrer que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbb{C})$  ( $n > 0$ ) ont une valeur propre commune si, et seulement si, il existe une matrice  $U$  non nulle de  $M_n(\mathbb{C})$  telle que l'on ait  $UA = BU$ .

14. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$  ( $n > 0$ ). Montrer que s'il existe une matrice  $U$  de rang  $r$  tel que  $AU = UB$ , alors les polynômes caractéristiques de  $A$  et  $B$  ont un facteur commun de degré  $r$  (on commencera à étudier le cas la matrice de rang  $r$  canonique  $J_r$ ).

15. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{C})$  ( $n > 0$ ).
1. Montrer que si  $AB = BA$ , alors  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun.
  2. Montrer que si  $AB - BA = \alpha A$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , alors  $A$  est nilpotente et  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun (on considérera  $A^k B - BA^k$  pour tout entier  $k$ ).
  3. Montrer que si  $AB - BA = \alpha A + \beta B$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ , alors  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun.

16. Montrer qu'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$  est diagonalisable si, et seulement si, il existe une suite  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  de scalaires deux à deux distincts et une suite  $(p_1, \dots, p_r)$  d'endomorphismes non nuls telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \lambda_1^k p_1 + \dots + \lambda_r^k p_r. \quad (*)$$

Montrer que dans ces conditions,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  est le spectre de  $u$  et  $(p_1, \dots, p_r)$  la suite des projecteurs propres associée.

17. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $AB = BA$ . Étudier la diagonalisabilité de la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

18. Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré  $n$  à coefficients entiers dont les racines complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  vérifient  $|\alpha_i| \leq 1$  pour tout  $i$ . Montrer qu'il existe un entier  $m$  tel que, pour tout  $i$ , le nombre complexe  $\alpha_i$  soit nul ou soit une racine  $m^{\text{ième}}$  de l'unité.
19. Soient  $h, u,$  et  $v$  trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{C}$  ne laissant simultanément stables que les sous-espaces  $\{0\}$  et  $E$  et vérifiant les relations :

$$h \circ u - u \circ h = 2u, \quad h \circ v - v \circ h = -2v \quad \text{et} \quad u \circ v - v \circ u = h.$$

1. Montrer que  $h(x) = \lambda x$  entraîne  $h(u(x)) = (\lambda + 2)u(x)$ . En déduire qu'il existe un vecteur non nul  $x_0$  et un scalaire  $\lambda_0$  tels que l'on ait  $h(x_0) = \lambda_0 x_0$  et  $u(x_0) = 0$ .
2. On construit la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  à partir de  $x_0$  en posant  $x_{k+1} = \frac{1}{k!} v(x_k)$  pour tout  $k$ . Montrer que l'on a :

$$\begin{aligned} h(x_k) &= (\lambda_0 - 2k)x_k \\ v(x_k) &= (k+1)x_{k+1} \\ u(x_k) &= (\lambda_0 - k + 1)x_{k-1} \end{aligned}$$

pour tout  $k$  (par convention  $x_{-1} = 0$ ).



3. Montrer qu'il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que la famille  $\mathcal{X} = (x_k)_{k \in [0, r-1]}$  soit une base de  $E$  et calculer  $r$  et  $\lambda$  en fonction de  $n$ . Donner alors les matrices de  $u$ ,  $v$  et  $h$  dans  $\mathcal{X}$ .
4. Montrer finalement que pour tout espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , il existe à similitude près un et un seul triplet  $h, u$ , et  $v$  vérifiant les conditions du début de l'exercice.

20. Soient  $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$  une suite de  $p > 1$  éléments d'un corps  $\mathbf{K}$  et :

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

la matrice circulante associée

1. Calculer le déterminant de  $C$  lorsque  $\mathbf{K} = \mathbb{C}$  (on diagonalisera la matrice circulante  $U$  associée à la suite  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ ).
2. Calculer le déterminant de  $C$  lorsque  $\mathbf{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $p$  premier.

21 Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbf{K})$ .

1. Montrer que l'ensemble  $M_n(\mathbf{K}[X])$  des matrices à coefficients polynomiaux est un sous-anneau de  $M_n(\mathbf{K}(X))$  dont tout élément peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} X^k A_k$$

pour une unique famille à support finie  $(A_k)$  d'éléments de  $M_n(\mathbf{K})$ .

2. Soit  $P(X) \in \mathbf{K}[X]$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(R(X), S)$  formé d'une matrice  $R(X)$  de  $M_n(\mathbf{K}[X])$  et d'une matrice  $S$  de  $M_n(\mathbf{K})$  tel que :

$$P(X)I_n = (XI_n - A)R(X) + S.$$

Montrer que dans ces conditions,  $R(X)$  commute avec  $A$  et  $S = P(A)$ .

3. Montrer, sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, que la valeur du polynôme caractéristique  $C_A(X)$  de  $A$  en  $A$  est nul.
4. Montrer que le polynôme minimal  $M_A(X)$  de  $A$  est le quotient de  $C_A(X)$  par le PGCD des coefficients  $\mu_{i,j}(X)$  de la matrice complémentaire de  $(XI_n - A)$ .
5. Montrer que les polynômes caractéristique et minimal de  $A$  ont leurs coefficients dans le plus petit sous-corps de  $\mathbf{K}$  contenant les coefficients de  $A$

**22.** Soit  $A \in M_n(\mathbf{K})$ . On note  $c_A(X) = \sum_{k=1}^n c_k X^{r-k}$  le polynôme caractéristique de  $A$  et  $M(X) = \sum_{k=1}^{n-1} X^{s-k} M_k$  la matrice complémentaire de  $(XI_n - A)$  (on utilise les définitions et les résultats de l'exercice précédent).

1. Montrer que l'on a  $M_0 = c_0 I_n$ ,  $-AM_{n-1} = c_n I_n$  et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad M_k - AM_{k-1} = c_k I_n$$

2. Montrer que l'on a  $c'_A(X) = \text{tr } M(X)$ . En déduire que l'on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad c_k = -\frac{1}{k} \text{tr } AM_{k-1}.$$

3. Montrer que les suites  $(c_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et  $(M_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  vérifient  $c_0 = 1$ ,  $M_0 = I_n$  et :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad c_k = -\frac{1}{k} \text{tr } AM_{k-1} \quad \text{et} \quad M_k = AM_{k-1} - \frac{1}{k} \text{tr}(AM_{k-1}) I_n.$$

(pour  $k = n$ , on ne calcule pas  $M_n$ ).

**23.** Montrer que la classe de similitude d'une matrice  $A$  de  $M_n(\mathbf{C})$  est fermée si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable.

**24.** On dit qu'une application  $f$  de  $M_n(\mathbf{C})$  vers  $\mathbf{C}$  est invariante par similitude si on a :

$$\forall P \in \text{GL}_n(\mathbf{C}), \quad f(P^{-1}AP) = f(A).$$

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes est dense dans  $M_n(\mathbf{C})$ .

2. On note  $c_A(X) = \sum_{k=0}^n c_k(A) X^{n-k}$  le polynôme caractéristique de  $A$ . Montrer que les applications  $c_k$  sont des applications de  $M_n(\mathbf{C})$  vers  $\mathbf{C}$  continues et invariantes par similitude et que toute application  $f$  de  $M_n(\mathbf{C})$  vers  $\mathbf{C}$  continue et invariante par similitude est de la forme :

$$A \mapsto f(A) = h(c_1(A), \dots, c_n(A))$$

où  $h$  est une unique application continue de  $\mathbf{C}^n$  vers  $\mathbf{C}$ .

**25.** Montrer qu'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle  $\mathbf{K}$  est nilpotent si, et seulement si, il vérifie  $\text{tr } u^k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

26. Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  formé de matrices diagonalisables tel que l'ensemble

$$\{\operatorname{tr} g \mid g \in G\}$$

soit fini. Le but de cet exercice est de montrer que  $G$  est fini.

1. Soient  $V$  le sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  engendré par  $G$  et  $(g_1, \dots, g_p)$  une base de  $V$  extraite de  $G$ . Montrer que l'application  $\varphi : g \mapsto (\operatorname{tr} gg_i)$  de  $G$  vers  $\mathbb{C}^p$  est injective (on montrera que  $\varphi(g) = \varphi(h)$  entraîne  $gh^{-1} - I_n$  nilpotent). En déduire que  $G$  est fini.
2. Montrer que tout sous-groupe  $G$  de  $GL_n(\mathbb{C})$  d'exposant fini  $m$  (tel que  $g^m = I_n$  pour tout  $g \in G$ ) est fini.

27. Soit  $(G, +)$  un groupe additif fini de cardinal  $n$ . On appelle caractère de  $G$  tout morphisme  $\chi$  de  $G$  vers le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ . On note de  $E$  l'algèbre complexe  $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ .

1. Pour tout  $g \in G$ , on note  $T(g)$  l'application qui associe à tout élément  $\varphi$  de  $E$ , l'élément  $\psi$  de  $E$  défini par :

$$\forall x \in G, \quad \psi(x) = \varphi(x + g).$$

Montrer que les applications  $T(g)$  sont des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux de  $E$ .

2. Montrer qu'il existe une base  $(\chi_1, \dots, \chi_n)$  de diagonalisation simultanée des  $T(g)$  dont les éléments sont des caractères de  $G$ .
3. Montrer que l'ensembles  $\widehat{G}$  des caractères de  $G$  est un sous-groupe du groupes des éléments inversibles de  $E$  de à  $n$  éléments.

28. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . On note alors  $Ad(u)$  l'endomorphisme

$$v \longmapsto [u, v] = u \circ v - v \circ u$$

de  $\mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que si  $u$  est diagonalisable, alors  $Ad(u)$  est aussi diagonalisable et préciser son spectre en fonction de celui de  $u$ .
2. Montrer que si  $u$  est nilpotent, alors  $Ad(u)$  est nilpotent.
3. Montrer finalement que  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $Ad(u)$  est diagonalisable.



**Deuxième partie**

**Analyse 1**



## Chapitre 9

# Séries numériques

### 1. Généralités

#### 1.1 Séries convergentes

Ici les séries envisagées sont des séries dites numériques, à savoir des séries à éléments réels ou complexes.

On notera  $\mathbf{K}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbf{K}$ . Pour tout  $n$  nous disposons de  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Pour distinguer l'étude de cette nouvelle suite  $(S_n)$  de celle de la suite  $(u_n)$  nous dirons, plutôt que d'étudier la suite  $(S_n)$ , que nous étudions la série de terme général  $u_n$ , notée  $\sum u_n$  ou  $\sum_n u_n$ , d'où :

#### Définition 1

On dit que  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  est la *somme partielle* de la série  $\sum u_n$ , et  $u_n$  son *terme général*. On dit que la série  $\sum u_n$  *converge* lorsque la suite  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge. Dans ce cas, la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$  est notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et est appelée *la somme* de la série.

► **Attention** On évitera d'utiliser la notation  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  pour désigner la somme de la série. En effet, cette notation désigne la somme de la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque cette dernière est sommable (voir chapitre 16). Cette notion n'est équivalente à la convergence de la série que pour les séries réelles positives ; dans le cas général, elle est équivalente à la convergence absolue (voir page 271).

### Remarques

- Réciproquement toute suite  $(S_n)$  est la suite des sommes partielles d'une série  $\sum u_n$ , par exemple en posant  $u_0 = S_0$  et pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = S_n - S_{n-1}$ .
- La *nature* d'une série est par définition sa *convergence* éventuelle, c'est-à-dire sa propriété d'être ou de ne pas être convergente.
- Dans l'étude d'une série convergente, l'essentiel est souvent d'en déterminer la nature convergente, et non d'en calculer la somme qui est en général hors de portée.
- On observera que la notation  $\sum u_n$  ne désigne pas la somme éventuelle de la série, mais la série elle-même. On notera  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  la *série* indexée seulement à partir de  $n_0$ . Ses sommes partielles sont alors  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ .
- L'expression «  $\sum u_n$  diverge » ne doit pas prêter à confusion. Même dans le cas de séries à termes réels, cela ne signifie pas nécessairement que la somme de la série soit infinie, mais seulement que la suite  $(S_n)$  ne converge pas, ce qu'on dit familièrement : la somme *n'existe pas*. Par exemple la série  $\sum (-1)^n$  diverge, ses sommes partielles valant alternativement 0 et 1. Cette distinction entre *divergence* et *somme infinie* est la traduction en termes de séries de la distinction, pour les suites réelles, entre suite divergente et suite de limite infinie (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ).
- De nombreux résultats de ce chapitre seront étendus dans le chapitre 11 aux séries  $\sum u_n$  où  $u_n$  appartient à un espace vectoriel normé de dimension finie, voire plus généralement à un espace de Banach.

**Exemple** Une *série géométrique*  $\sum_n \lambda^n$  à termes réels ou complexes converge si, et

seulement si,  $|\lambda| < 1$ . En effet, elle diverge si  $\lambda = 1$ . Si  $\lambda \neq 1$ ,  $\sum_{p=0}^n \lambda^p = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$ ,

qui admet une limite dans  $\mathbb{K}$  si, et seulement si,  $|\lambda| < 1$ .

### Proposition 1

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes.



**Démonstration** En effet, si  $S_n$  est la somme partielle de la série de départ et  $S'_n$  celle de la série modifiée,  $S_n - S'_n$  est constante au-delà d'un certain rang. Ainsi la suite  $(S_n)$  converge si, et seulement si, la suite  $(S'_n)$  converge. □

Ainsi la *nature* d'une série ne dépend que de ses termes au-delà d'un certain rang : c'est le caractère *asymptotique* de la série. Bien entendu, si la nature de la série n'est pas modifiée en en changeant un nombre fini de termes, la somme de la série, elle, est modifiée.

**Définition 2**

Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux scalaires, la combinaison linéaire  $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$  des deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  est, par définition, la série  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ .

La *conjuguée* de la série  $\sum z_n$  de nombres complexes est la série  $\sum \bar{z}_n$ .

L'ensemble des séries est alors un espace vectoriel sur  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 2**

Toute combinaison linéaire  $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$  de deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergentes est convergente. Sa somme est  $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

Ainsi, l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace de l'espace vectoriel des séries, et la somme est une forme linéaire sur cet espace.

La conjuguée d'une série convergente est convergente, et les deux sommes sont conjuguées l'une de l'autre.

**Remarques** Il se peut que la somme de deux séries divergentes soit convergente. Il suffit de considérer une série divergente  $\sum u_n$  et la série somme

$$\sum_n u_n + \sum_n (-u_n) = \sum_n 0.$$

**Proposition 3**

Le terme général d'une série convergente tend vers 0

**Démonstration** En effet, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = S_n - S_{n-1}$ . □

La réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de la série de terme général  $u_n = 1/n$ , qui diverge. En effet, la majoration classique  $\ln(1+x) \leq x$  appliquée à  $x = \frac{1}{n}$  implique la minoration :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1)$$

qui tend vers l'infini lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Définition 3

Soit  $\sum u_n$  une série convergente de somme  $S$ . Pour tout  $n$  la série  $\sum_{k \geq n+1} u_k$  est convergente, sa somme  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  est par définition le reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum u_n$  et l'on a :

$$R_n = S - S_n.$$

En particulier,  $u_n = R_{n-1} - R_n$ , pour  $n \geq 1$ .

## 1.2 Suites et séries

Une série est *télescopique* lorsque son terme général apparaît comme différence  $S_n - S_{n-1}$ , où la suite  $(S_n)$  est écrite sans symbole de sommation.

Cela revient à dire, en pratique, que la somme partielle  $S_n = u_0 + \dots + u_n$  est plus simple que le terme général  $u_n$  que l'on cherche à sommer.

**Exemple** Pour  $u_n = \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \arctan(n+1) - \arctan n$ , la somme partielle est  $S_n = \arctan(n+1)$  et tend vers  $\pi/2$ .

Ainsi, un moyen commode de sommer une série est de reconnaître dans sa somme partielle le terme général d'une suite naturellement convergente.

Il se peut que la démarche dans l'autre sens (considérer une suite donnée  $(s_n)$  comme la différence des termes consécutifs d'une série) soit avantageuse. Partant de  $(s_n)$ , on définit  $u_0 = s_0$ , puis,  $\forall n \geq 1$   $u_n = s_n - s_{n-1}$ , et l'étude de la série  $\sum u_n$  peut renseigner sur la convergence de la suite  $(s_n)$ .

**Exemple** Pour étudier la convergence de la suite  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  pour  $n \geq 2$ , on pose :

$$u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Nous verrons plus loin qu'il résulte de cette relation de domination que la série  $\sum u_n$  converge. Sa somme  $\lim_n s_n$  est la constante  $\gamma$  d'Euler, et vaut environ 0,577...

## 2. Séries à termes positifs

### Rappels

- $\mathbb{R}$  est un corps totalement ordonné, archimédien, qui a la propriété de la borne supérieure, c'est-à-dire que toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.
- Dans  $\mathbb{R}$ , une suite croissante est alors convergente si, et seulement si, elle est majorée. Sinon, elle tend vers  $+\infty$ .

### Proposition 4

Soit  $\sum u_n$  une série à termes réels positifs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la série  $\sum u_n$  converge ;
- (ii) la suite  $(S_n)$  est majorée

De plus, dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sup_n S_n$ .

**Démonstration** En effet, la suite croissante  $(S_n)$  de réels est convergente si, et seulement si, elle est majorée. □

## 2.1 Convergence par comparaison directe

### Proposition 5

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes réels positifs telles que, pour tout  $n \geq 0$ , on ait  $0 \leq u_n \leq v_n$ .

- Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge et  $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
- Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

**Démonstration** Si  $\sum v_n$  converge, on a pour tout  $n \geq 0$  :

$$\sum_{p=0}^n u_p \leq \sum_{p=0}^n v_p \leq \sum_{p=0}^{+\infty} v_p.$$

Les sommes partielles de  $\sum u_n$  sont donc toutes majorées, et l'on applique la proposition 4 page précédente. Par passage à la limite, on obtient l'inégalité sur les sommes

La seconde affirmation est la contraposée de la première.  $\square$

**Remarques** Il arrive souvent que la majoration  $u_n \leq v_n$  ne soit vraie qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ . Dans ce cas, en termes de convergence ou de divergence la proposition 5 page précédente reste valable mais en cas de convergence on a

$$\text{seulement } \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

### Corollaire 6

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs, telles que  $u_n = O(v_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge.

### Corollaire 7

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs, telles que  $u_n \sim v_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature

Donnons des exemples simples de preuve de convergence par comparaison directe.

#### Exemple

1. La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, car pour  $n \geq 2$ , on a  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ , et :

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{N}$$

qui tend vers 1 lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .

2. De la même manière, on voit que  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge car si  $n \geq 2$  :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

terme général d'une série télescopique divergente.

3. Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont deux séries à termes positifs convergentes ; alors la série  $\sum \max(u_n, v_n)$  converge. En effet,  $\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ .
4. Avec les mêmes hypothèses, et pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $\alpha + \beta = 1$  la série  $\sum u_n^\alpha v_n^\beta$  converge. En effet :

$$u_n^\alpha v_n^\beta \leq \max(u_n, v_n)^\alpha \max(u_n, v_n)^\beta = \max(u_n, v_n).$$

Dans le cas où  $\alpha = \beta = 1/2$ , la convergence de  $\sum \sqrt{u_n v_n}$  résulte aussi directement de l'inégalité  $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ .

La proposition 5 page 251 et ses corollaires nous amènent naturellement à comparer une série dont on cherche la nature à des séries usuelles.

## 2.2 Règle de Riemann

### Corollaire 8

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

### Démonstration

- Il est immédiat de constater que, pour tout réel  $\alpha \neq 1$  :

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha-1} \right)$$

est équivalent, au voisinage de  $+\infty$ , à  $\frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ .

Il en résulte que la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si, et seulement si, cette série télescopique de signe constant converge, donc si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

- Le cas  $\alpha = 1$  est un cas de divergence, puisque le terme général  $\frac{1}{n}$  est équivalent à  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$  qui est aussi celui d'une série positive télescopique, visiblement divergente.

On peut aussi remarquer que la différence des sommes partielles  $S_{2n}$  et  $S_n$  est supérieure ou égale à  $\frac{1}{2}$  et ne tend pas vers 0, ou reprendre la démonstration du contre-exemple de la proposition 3 page 249 □

**Corollaire 9 (règle de Riemann)**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

- S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ , alors  $\sum u_n$  converge.
- S'il existe  $\alpha \leq 1$  et  $\lambda > 0$  tels que, à partir d'un certain rang,  $u_n \geq \frac{\lambda}{n^\alpha}$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

**Corollaire 10**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

S'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  alors :

- si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum u_n$  est convergente ;
- si  $\alpha \leq 1$ , la série  $\sum u_n$  est divergente.

Cette technique revient à rechercher, très naturellement, un équivalent dans l'échelle des fonctions puissances. Toutefois cela n'est pas toujours possible et l'on peut être confronté à plusieurs situations :

- s'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $n^\alpha u_n$  tende vers 0, alors la série  $\sum u_n$  converge d'après le corollaire 9 ;
- s'il existe  $\alpha \leq 1$  tel que  $n^\alpha u_n$  tende vers  $+\infty$ , la série  $\sum u_n$  est divergente puisque  $n^\alpha u_n \geq 1$  pour  $n$  assez grand.

Enfin il est possible que, pour tout  $\alpha > 1$ ,  $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$  et que, pour tout  $\alpha \leq 1$ ,  $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ . La règle de Riemann ci-dessus n'est alors pas assez fine pour que l'on puisse trancher. Il y a de telles séries qui convergent, et d'autres qui divergent.

Celles qui convergent vont converger plus lentement que toutes les séries  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ . On cherche naturellement parmi elles des séries de référence, auxquelles comparer  $\sum u_n$ . En voici un exemple, appelé série de Bertrand.

**Exemple** La série  $\sum \frac{1}{n^{\alpha(\ln n)^\beta}}$  converge si, et seulement si, l'on a  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1 < \beta$ .

- On applique ce qui précède si  $\alpha \neq 1$  puisque si  $\alpha > 1$  alors  $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} > 1$  et  $n^\gamma u_n \rightarrow 0$  tandis que si  $\alpha < 1$ , alors  $n u_n \rightarrow +\infty$ .

- Soit maintenant  $\alpha = 1$ . Si  $\beta \leq 0$ , la série  $\sum u_n$  diverge puisque  $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$  pour  $n \geq 3$ . Si  $\beta > 0$ , il est clair que l'application définie par  $t \mapsto f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$  est positive et décroissante sur l'intervalle  $[2, +\infty[$ , et il suffit alors d'utiliser le théorème de comparaison avec une intégrale (voir théorème 35 page 275) puisqu'une primitive de  $f$  est connue : elle est de la forme  $t \mapsto \frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}$  ou  $\ln(\ln t)$  suivant que  $\beta \neq 1$  ou  $\beta = 1$ .

### 2.3 Comparaison à une série géométrique

#### Proposition 11 (règle de Cauchy)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

- S'il existe une infinité d'indices tels que  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge.
- S'il existe  $n_0$ , et  $\lambda < 1$  tels que,  $\forall n \geq n_0, \sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ , alors  $\sum u_n$  converge.

**Démonstration** Le premier cas est immédiat car  $u_n$  ne tend pas vers 0.

Le second est presque aussi évident, car  $u_n \leq \lambda^n$ , terme général d'une série géométrique convergente, et  $\sum u_n$  converge par « comparaison directe ». □

Le cas particulier suivant est le cas usuel d'application.

#### Corollaire 12 (règle de Cauchy usuelle)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

Supposons que  $\sqrt[n]{u_n}$  admette une limite  $\mu \neq 1$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

- Si  $\mu < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\mu > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge.

**Démonstration** Si  $\mu < 1$ , il existe  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, \sqrt[n]{u_n} \leq \lambda = \frac{1+\mu}{2} < 1$  et la proposition 11 permet de conclure.

Si  $\mu > 1$ , il existe  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, \sqrt[n]{u_n} \geq 1$ , et le terme général de  $\sum u_n$  ne tend même pas vers 0. □

Cette règle de Cauchy est très connue mais se révèle souvent faible. Ainsi par exemple la série de terme général  $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$  lui échappe très souvent, puisqu'elle ne donne de réponse que pour  $\alpha \geq 3$  (la série est alors convergente).

En fait, cette série converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ . En effet :

$$u_n = e^{-v_n} \quad \text{avec} \quad v_n = -n^\alpha \ln \cos(1/n) \sim \frac{n^{\alpha-2}}{2}.$$

- Pour  $\alpha \leq 2$ , le terme général  $u_n$  ne tend donc pas vers 0.
- Pour  $\alpha > 2$ , on a, à partir d'un certain rang,  $v_n \geq n^{\alpha-2}/3$  et donc :

$$u_n \leq \exp\left(-\frac{n^{\alpha-2}}{3}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui prouve la convergence de  $\sum u_n$ .

La règle de Cauchy admet une formulation différente, qui peut parfois paraître comme plus simple. En particulier, si  $\forall n, u_n > 0$ , lorsque  $\frac{1}{n} \ln u_n$  admet une limite éventuellement infinie mais *non nulle*  $L$ , la série  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $L < 0$ . On exploite donc cette règle de convergence en faisant un développement asymptotique de  $\ln u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Mais dans le cas assez fréquent où  $\frac{1}{n} \ln u_n$  tend vers  $L = 0$ , on ne peut conclure immédiatement, car c'est le cas, par exemple, pour  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ , divergente, et  $\sum \frac{1}{n^2}$ , convergente (plus généralement, elle ne permet pas de trouver la nature d'une série équivalente à une série de Riemann).

*Exemple* Soit  $u_n = \left(1 + \frac{a^2}{n}\right)^{-n^2}$ , pour  $n \geq 1$  avec  $a \neq 0$ . Ici :

$$\ln u_n = -n^2 \ln\left(1 + \frac{a^2}{n}\right) \sim -na^2.$$

Donc  $\frac{1}{n} \ln u_n \rightarrow -a^2$ , et la série  $\sum u_n$  converge puisque  $\sqrt[n]{u_n}$  admet pour limite  $\exp(-a^2) < 1$ .

## 2.4 Comparaison logarithmique

On peut nommer ainsi les règles de convergence obtenus en comparant non pas directement  $u_n$  et  $v_n$ , mais  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

### Proposition 13

Supposons, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$u_n > 0, \quad v_n > 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

- Si  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.



**Démonstration** Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$  et la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est décroissante. En particulier,  $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ , et  $u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$ , ce qui permet d'appliquer la proposition 5 page 251. □

**Corollaire 14 (règle de d'Alembert)**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs.

- S'il existe  $n_0$  tel que,  $\forall n \geq n_0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge.
- S'il existe  $n_0$  et  $\lambda < 1$  tels que  $\forall n \geq n_0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ , alors  $\sum u_n$  converge.

**Démonstration** Le premier cas est immédiat car  $u_n$  ne tend pas vers 0.

Pour le second, on prend  $v_n = \lambda^n$ , d'où  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \lambda$  et l'on applique la proposition précédente. □

Le cas particulier suivant est le cas usuel d'application.

**Corollaire 15 (règle de d'Alembert usuelle)**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs.

Supposons que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  admette une limite  $\lambda \neq 1$ .

- Si  $\lambda < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\lambda > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge.

**Exemple** La règle de d'Alembert est tout indiquée lorsque  $u_n$  est le produit d'un grand nombre (dépendant de  $n$ ) de facteurs, et  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  ne comprend qu'un nombre fini, fixé et petit de facteurs. Par exemple, si  $u_n = \frac{1}{(2n)!} \left(\prod_{k=1}^n (a+k)\right)$ , où  $a$  est un réel quelconque, alors  $\sum u_n$  converge. En effet, ou bien  $u_n$  est nulle à partir d'un certain rang, ou bien  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a+n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$  tend vers  $1/4$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Remarques** Comme la règle de Cauchy, et même de façon encore plus voyante, la règle de d'Alembert n'est pas une panacée. Elle ne s'applique nullement à la

série  $\sum u_n$ , où  $u_n = \frac{1}{2^n}$  si  $n$  est pair et  $\frac{1}{3^n}$  si  $n$  est impair. Cette série converge car, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq \frac{1}{2^n}$  (on peut également noter que la règle de Cauchy s'applique ici de manière triviale). Pourtant  $\frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = \frac{3^{2p-1}}{2^{2p}}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ .

## 2.5 Complément : cas de convergence lente

Ce paragraphe ne présente pas des *recettes à retenir*, mais des techniques à retrouver et adapter aux situations rencontrées dans les exemples.

Lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ , la règle de d'Alembert est trop grossière et ne s'applique pas. C'est déjà le cas pour  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ , où, pour tout  $\alpha$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers 1

On peut traiter ce cas par *comparaison logarithmique* avec  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . En effet, on remarque que, pour  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ , on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans le cas où  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  admet un développement asymptotique relatif aux puissances de  $n$ , la comparaison logarithmique avec la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  permet souvent de conclure comme le montre la :

### Proposition 16

Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ , avec  $\beta > 1$ , alors la suite  $(n^\alpha u_n)$  admet une limite finie non nulle, et :

- si  $\alpha > 1$ , alors  $\sum u_n$  converge ;
- si  $\alpha \leq 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

**Démonstration** Soit  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$  ; pour que la suite  $(n^\alpha u_n)$  admette une limite non nulle, il faut et il suffit que la suite de terme général  $\ln u_n - \ln v_n = \ln(n^\alpha u_n)$  converge, ou encore que

converge la série de terme général :

$$\begin{aligned} w_n &= \ln u_{n+1} - \ln v_{n+1} - (\ln u_n - \ln v_n) = \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) + \alpha \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \ln \left( 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \right) + \left( \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \end{aligned}$$

avec  $\gamma = \min(\beta, 2) > 1$ . Cette série  $\sum w_n$  étant convergente, il ne reste plus alors qu'à appliquer la règle de Riemann □

**Exemple**

1. Pour  $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,

on peut écrire  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , et la série  $\sum u_n$  diverge.

2. Pour  $u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}}$ , on peut écrire :  $\sim \sqrt{2\pi n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp \left( 1 - n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il existe donc une constante strictement positive  $K$  telle que  $n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$ .

Pour déterminer la constante  $K$  on remarque que ce développement donne

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{K \sqrt{n}}$$

lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Or l'étude des intégrales de WALLIS

$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$  (voir le volume de première année) permettent d'établir que

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Donc  $K = \sqrt{2\pi}$  et  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Dans le cas où  $\alpha \neq 1$ , on peut même démontrer un résultat un peu plus général qui présente surtout un intérêt théorique plus que pratique cité ici pour la méthode générale mise en œuvre dans sa démonstration :

**Proposition 17**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs.

Supposons  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  avec  $\alpha \neq 1$ .

- Si  $\alpha > 1$ , alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\alpha < 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

**Démonstration** On pose  $\delta = \frac{1 + \alpha}{2}$  et  $v_n = \frac{1}{n^\delta}$ .

Si  $\alpha > 1$ , alors  $\delta > 1$ , et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{\alpha - \delta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

est négatif si  $n$  est assez grand. Donc il existe  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ , et la convergence de  $\sum v_n$  entraîne celle de  $\sum u_n$ . La méthode est la même dans l'autre cas.  $\square$

## 2.6 Sommation des relations de comparaison

### Théorème 18

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. On suppose que  $\sum v_n$  diverge.

1. Si  $u_n = O(v_n)$ , on dispose de la relation :

$$\sum_{p=0}^n u_p = O\left(\sum_{p=0}^n v_p\right).$$

2. Si  $u_n = o(v_n)$ , on dispose de la relation :

$$\sum_{p=0}^n u_p = o\left(\sum_{p=0}^n v_p\right).$$

3. Si  $u_n \sim v_n$ , on dispose de la relation :

$$\sum_{p=0}^n u_p \sim \sum_{p=0}^n v_p.$$

### Démonstration

Nous noterons  $U_n = \sum_{p=0}^n u_p$ ,  $V_n = \sum_{p=0}^n v_p$ .

La suite  $V_n$  tend vers  $+\infty$  en croissant. Si  $u_n$  est dominée par  $v_n$ , il existe un rang  $n_0$  et une constante  $A > 0$  tels que, pour tout  $n \geq n_0 + 1$ , on dispose de la relation  $u_n \leq A v_n$ , et un rang  $n_1 > n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_1$ , on dispose de la relation  $A V_n \geq U_{n_0}$ . Alors il suffit de remarquer les majorations :

$$U_n \leq U_{n_0} + A (V_n - V_{n_0}) \leq 2A V_n$$

pour prouver la domination annoncée

Si  $u_n$  est négligeable devant  $v_n$ , il suffit de remplacer la constante  $A$  ci-dessus par  $\varepsilon > 0$  pour aboutir à  $U_n \leq 2\varepsilon V_n$  pour  $n$  assez grand. Enfin si  $u_n$  est équivalente à  $v_n$ , il suffit pour conclure d'appliquer ce résultat à la relation  $u_n - v_n = o(v_n)$ .  $\square$

**Théorème 19**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $\sum v_n$  converge. Alors il en est de même pour  $\sum u_n$  dans chacun des trois cas suivants et :

1. si  $u_n = O(v_n)$ , on dispose de la relation :

$$\sum_{p=n}^{+\infty} u_p = O\left(\sum_{p=n}^{+\infty} v_p\right) ;$$

2. si  $u_n = o(v_n)$ , on dispose de la relation :

$$\sum_{p=n}^{+\infty} u_p = o\left(\sum_{p=n}^{+\infty} v_p\right) ;$$

3. si  $u_n \sim v_n$ , on dispose de la relation :

$$\sum_{p=n}^{+\infty} u_p \sim \sum_{p=n}^{+\infty} v_p.$$

**Démonstration** Dans chacun des cas, la série  $\sum u_n$  converge d'après la proposition 5 page 251.

Notons  $\hat{U}_n = \sum_{p=n}^{+\infty} u_p$  et  $\hat{V}_n = \sum_{p=n}^{+\infty} v_p$ .

Si  $u_n$  est dominée par  $v_n$ , il existe un rang  $n_0$  et une constante  $A$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$ , on dispose de la relation  $u_n \leq A v_n$  d'où la majoration pour  $n \geq n_0$  :

$$\hat{U}_n \leq A \hat{V}_n.$$

La fin est identique à celle du théorème précédent.  $\square$

**Remarques**

Le caractère positif de la série  $\sum v_n$  est essentiel pour ces deux théorèmes ; en revanche, pour les relation  $O$  et  $o$ , la série  $\sum u_n$  pourrait être de signe quelconque, voire à valeurs dans  $\mathbb{C}$  ou même dans un espace de Banach : il suffit de placer des valeurs absolues, des modules ou des normes autour des  $u_n$  ou des  $V_n$  (ou de leurs différences) et d'appliquer l'inégalité triangulaire.

### 3. Développement décimal d'un réel positif

Le choix de la base 10 dans l'ensemble  $\mathbb{N}^*$  des entiers naturels non nuls conduit à l'écriture décimale bien connue dans laquelle, par exemple, 1806 représente le nombre  $1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 6$ . Les opérations sur les développements décimaux de ce genre sont faciles à mémoriser, puisque très proches des opérations sur les polynômes. Mais ils présentent également un intérêt majeur pour les *comparaisons*, par exemple pour pouvoir distinguer entre des prix affichés sur un marché ou les résultats d'un vote mettant en jeu des millions d'électeurs. Nous allons rappeler les caractéristiques de l'extension de cette représentation aux nombres réels positifs à partir de cette même base 10 (par définition, le nombre 0 est un réel positif).

#### 3.1 Valeurs approchées décimales

Nous noterons  $E(x)$  la partie entière d'un nombre réel  $x$ , c'est-à-dire l'unique entier relatif  $e$  tel que  $e \leq x < e + 1$ , et  $\mathbb{D}$  l'anneau des nombres décimaux c'est-à-dire des rationnels de la forme  $\frac{m}{10^n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Définition 4

Soit  $x$  un nombre réel positif.

On appelle *valeur décimale approchée par défaut à  $10^{-n}$  près de  $x$*  le nombre décimal  $x_n = 10^{-n}E(10^n x)$ , et *valeur décimale approchée par excès à  $10^{-n}$  près de  $x$*  le nombre décimal  $y_n = x_n + 10^{-n}$ .

Si par exemple  $x = \pi$ , il vient  $x_3 = \frac{3141}{1000}$  et  $y_3 = \frac{3142}{1000}$ .

#### Proposition 20

Les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  admettent  $x$  comme limite commune et vérifient les encadrements :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1} \leq x < y_{n+1} \leq y_n.$$

Pour tout indice  $m$ , il existe  $n > m$  tel que  $y_n < y_m$ .

Les suites de valeurs approchées sont donc monotones croissante pour la première et décroissante pour la seconde, nécessairement non stationnaire (contrairement à la première qui peut même être constante comme dans le cas du nombre 0).

**Démonstration**

La définition de la partie entière montre que  $10^n x_n \leq 10^n x < 10^n x_n + 1 = 10^n y_n$ , soit  $x_n \leq x < y_n$ .

De plus, nous disposons des inégalités suivantes dans  $\mathbb{Z}$  :

$$-1 = 10^{n+1}(-10^{-n-1}) = 10^{n+1}(x_{n+1} - y_{n+1}) < 10^{n+1}(x_{n+1} - x) \leq 10^{n+1}(x_{n+1} - x_n)$$

ce qui implique que  $x_{n+1} \geq x_n$ , et de même :

$$10^{n+1}(y_{n+1} - y_n) = 10^{n+1}(x_{n+1} - y_n) + 1 \leq 10^{n+1}(x - y_n) + 1 < 1$$

ce qui implique que  $y_{n+1} \leq y_n$ .

Enfin l'encadrement obtenu et l'égalité  $y_n - x_n = 10^{-n}$  montrent que les deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont adjacentes et admettent  $x$  comme limite commune. Il en résulte que la suite  $(y_n)$ , qui admet  $x$  comme limite, ne peut être constante au-delà du rang  $m$  puisque l'on aurait alors  $x = y_m > x$ . □

**Remarques**

Puisque chacune de ces suites admet  $x$  comme limite, il en résulte que deux réels positifs  $x$  et  $x'$  tels que  $x'_n = x_n$  pour tout  $n$  (ou tels que  $y'_n = y_n$  pour tout  $n$ ) sont nécessairement égaux.

La proposition suivante montre plus précisément comment la suite des valeurs approchées par défaut sert à reconnaître entre deux réels positifs lequel est le plus grand.

**Proposition 21**

Un réel positif  $x'$  est strictement supérieur à un autre réel strictement positif  $x$  si, et seulement si, il existe un indice  $n$  tel que  $x'_n > x_n$ .

**Démonstration**

Si  $x'_n > x_n$ , c'est que  $E(10^n x) < E(10^n x')$ , soit encore :

$$10^n x < E(10^n x) + 1 \leq E(10^n x') \leq 10^n x'$$

Inversement, si  $x' > x$ , il existe un entier  $n$  tel que  $10^n > n > \frac{1}{x' - x}$  ce qui implique :

$$10^n x_n + 1 \leq 10^n x + 1 < 10^n x' < 10^n x'_n + 1$$

et enfin  $x_n < x'_n$ . □

Dans la pratique, les suites des valeurs approchées de  $x$  permettent de définir son *développement décimal* usuel grâce à la théorie des séries.

**Définition 5**

Soit  $x$  un nombre reel positif.

On appelle *développement décimal* de  $x$  l'écriture de  $x - E(x)$  comme somme de la série convergente :

$$x - E(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où la  $n^{\text{ème}}$  décimale de  $x$  après la virgule, définie par  $a_n = 10^n(x_n - x_{n-1})$ , est un entier compris entre 0 et 9. Cette relation s'écrit encore parfois sous la forme :

$$x = E(x) + \overline{0, a_1 a_2 \dots a_n \dots}$$

Au lieu de « décimale après la virgule », on emploie également *chiffre du développement décimal*, voire le simple mot *décimale* sans préciser « après la virgule » qui reste sous-entendu.

Pour que cette définition soit cohérente, nous devons naturellement prouver que cette série est bien convergente et admet  $x$  comme somme, puis que les réels  $a_n$  sont bien des *chiffres*, c'est-à-dire des entiers appartenant à l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

**Démonstration**

La série de terme general  $\frac{a_n}{10^n} = x_n - x_{n-1}$  est une serie telescopique de somme partielle

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} = x_n - x_0 = x_n - E(x),$$

ce qui justifie à la fois sa convergence et sa somme.

D'autre part, le réel positif ou nul  $a_n = 10^n(x_n - x_{n-1}) = E(10^n x) - 10E(10^{n-1} x)$  est entier. Les inégalités suivantes dans  $\mathbb{Z}$  :

$$a_n = E(10^n x) - 10E(10^{n-1} x) < 10^n x - 10(10^{n-1} x - 1) = 10$$

montrent qu'il est inférieur ou égal à 9. □

**Remarques** Toute propriété des  $x_n$  et  $y_n$  peut se traduire en termes de  $a_n$ , et réciproquement. Par exemple, deux réels positifs  $x$  et  $x'$  égaux ayant mêmes valeurs approchées par défaut  $x'_n = x_n$ , il en résulte qu'ils ont mêmes décimales  $a'_n = a_n$  : il y a *unicité* du développement décimal.

On dispose de la même manière des égalités suivantes, où  $n > 0$  :

$$x_n = E(x) + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}, \quad y_n = E(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

(avec une dernière somme nulle puisque vide si  $n = 1$ ).



Ainsi se justifie l'encadrement suivant dont l'importance pratique est évidente :

$$E(x) + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} \leq x < E(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

**Proposition 22**

Le développement décimal d'un réel positif est *propre*, c'est-à-dire que la suite des  $a_n$  ne se stabilise pas à 9 au delà d'un certain rang.

**Démonstration**

Supposons qu'il existe un rang  $m > 0$  tel que  $a_n = 9$  pour tout  $n \geq m$ . L'expression donnée ci-dessus de la somme partielle du développement décimal de  $x$  montre qu'alors :

$$x = E(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = x_{m-1} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = x_{m-1} + 10^{m-1} = y_{m-1} > x$$

ce qui est impossible. □

Le développement décimal d'un réel positif permet de reconnaître directement si un nombre réel positif est rationnel ou même décimal.

**Proposition 23**

Un nombre positif  $x$  est décimal si, et seulement si, la suite  $(a_n)$  est nulle au-delà d'un certain rang.

Plus généralement, un nombre positif  $x$  est rationnel si, et seulement si, la suite  $(a_n)$  est périodique au-delà d'un certain rang.

**Démonstration**

- Il est évident que  $x$  est décimal si, et seulement si, la suite  $(x_n)$  est constante à partir d'un certain rang (le plus petit entier  $n$  tel que  $10^n x$  est entier), ce qui équivaut à  $a_n = 0$  au-delà de ce rang.
- Le caractère périodique au-delà d'un certain rang de la suite des décimales d'un nombre rationnel est un peu moins immédiat à obtenir. Nous supposons, ce qui est sans importance, que ce rationnel s'écrit  $x = \frac{p}{q}$  où  $0 < p < q$  ( $p$  et  $q$  peuvent être premiers entre eux, mais ce n'est pas nécessaire pour la démonstration).

La suite  $(p, 10p, 10^2p, \dots, 10^q p)$  contient  $q + 1$  entiers qui ne peuvent avoir des restes tous différents dans la division euclidienne par  $q$ . Il en résulte qu'il existe deux entiers  $N$  et  $T$  tels que  $0 \leq N < N + T \leq q$  et que  $q$  divise  $10^{N+T} p - 10^N p$ . Or il est évident que deux nombres  $\frac{p'}{q}$  et  $\frac{p}{q}$  tels que  $q$  divise  $p' - p$  diffèrent d'un entier et ont ainsi mêmes décimales, ce qui est donc le cas pour  $10^{N+T} \frac{p}{q}$  et  $10^N \frac{p}{q}$ .

Comme par ailleurs les décimales de  $x$  et de  $x' = 10^i x$  sont liées par des égalités  $a'_n = a_{n+i}$  pour tout  $n \geq 1$ , il en résulte que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_{n+N}$  est la décimale de rang  $n$  de  $10^N \frac{p}{q}$ , donc celle de  $10^{N+T} \frac{p}{q}$ , elle-même égale à  $a_{n+N+T}$  : la périodicité des décimales de  $\frac{p}{q}$  au-delà d'un certain rang est par suite établie

► Réciproquement, si les décimales du développement propre de  $x < 1$  se reproduisent périodiquement au-delà d'un certain rang, on peut écrire ce développement sous la forme suivante, où  $b_r = a_{N+r}$ .

$$\begin{aligned} x &= \overline{0, a_1 \dots a_N b_1 \dots b_T b_1 \dots b_T \dots b_1 \dots b_T \dots} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^N} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{hT}} \sum_{r=1}^T \frac{b_r}{10^r} \\ &= \frac{A}{10^N(10^T - 1)} \end{aligned}$$

où  $A$  est entier. Le cas général  $x \geq 0$  s'en déduit facilement. □

**Remarques** La preuve ci-dessus est simple et permet de montrer que  $N \leq q - 1$  et  $T \leq q$ . En fait, on peut être un peu plus précis, comme le montre la variante ci-dessous de cette démonstration.

Nous nous placerons encore dans le cas où  $x = \frac{p}{q}$  avec  $0 < p < q$  et définirons la suite  $(e_n)_{n \geq 1}$  par les égalités :

$$e_n = q \times \overline{0, a_n a_{n+1} \dots a_{n+i} \dots} = q \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n+1}} \right) = 10^{n-1} q (x - x_{n-1}) < q.$$

Écartant le cas trivial où  $x$  est décimal, les décimales  $a_n$  ne sont pas toutes nulles au-delà d'un certain rang, d'où  $x > x_{n-1}$  et l'encadrement strict  $0 < e_n < q$ . L'égalité  $e_n = 10^{n-1}(p - qx_{n-1})$  montre que  $e_n$  est entier et appartient donc à  $[[1, q - 1]]$ . La suite  $(e_1, e_2, \dots, e_q)$  ne pouvant prendre qu'au plus  $q - 1$  valeurs distinctes, il existe donc deux entiers  $m$  et  $t$  tels que  $1 \leq m < m + t \leq q$  et que  $e_m = e_{m+t}$ .

Puisque la suite  $(a_n)$  ne se stabilise pas à 9 au-delà d'un certain rang, on dispose de l'égalité générale pour  $k \geq n$  :

$$a_k = E \left( 10^{k-n+1} \frac{e_n}{q} \right) - 10 E \left( 10^{k-n} \frac{e_n}{q} \right)$$

qui implique l'égalité  $a_{k+t} = a_k$  pour tout  $k \geq m$ . On retrouve donc bien aux notations près, la périodicité déjà démontrée mais cette fois-ci avec les majorations plus fines  $N = m - 1 < q - 1$  et  $T = t \leq q - 1$ .

L'exemple  $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\dots$  où la période du développement décimal est  $T = 6$  montre que la majoration  $T \leq q - 1$  ne peut être améliorée. Dans cet exemple,  $N = 0$ , mais ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple de  $x = \frac{1}{30}$ .

Par ailleurs, l'exemple du nombre premier 3 nous montre que le développement décimal de  $1/q$  pour un nombre premier  $q$  n'a pas nécessairement  $q - 1$  pour période bien que ce soit le cas pour  $q = 7$ .

### 3.2 Developpements décimaux

Tout réel positif  $x < 1$  est donc représentable par une somme de série de la forme  $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$  où les  $a_n$  sont des chiffres entre 0 et 9. Il est naturel de se poser la question inverse : étant donnée une suite  $(a_n)$  à valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , que peut-on dire de la somme  $x$  définie par

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} ?$$

La convergence de cette série est évidente par comparaison avec la série géométrique de raison  $\frac{1}{10}$ .

Sa somme est comprise, au sens large, entre 0 et 1. En résulte la cohérence de la définition plurielle ci-dessous :

#### Définition 6

Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des suites à valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Soit  $\mathcal{D}_p$  le sous-ensemble de  $\mathcal{D}$  formé des suites telles qu'il existe une infinité d'indices  $n$  tels que  $a_n \neq 9$ .

On note  $\delta$  l'application de l'intervalle  $[0, 1[$  dans  $\mathcal{D}$  associant à un réel  $x \in [0, 1[$  la suite de ses décimales.

On note  $\sigma$  l'application de  $\mathcal{D}$  dans le segment  $[0, 1]$  associant à une suite

$$a = (a_n) \in \mathcal{D} \text{ la somme } \sigma(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

**Proposition 24**

L'application  $\delta$  est une injection de  $]0, 1[$  dans  $\mathcal{D}$  et induit une bijection de  $]0, 1[$  sur  $\mathcal{D}_p$ .

L'application  $\sigma$  est une surjection de  $\mathcal{D}$  sur  $]0, 1[$ .

Ces deux applications sont telles que  $\sigma \circ \delta(x) = x$  pour tout réel positif  $x < 1$ .

**Démonstration**

Comme on l'a vu dans la sous-section précédente, le caractère injectif de  $\delta$  provient de ce qu'un réel  $x$  est déterminé dès que l'on connaît la suite de ses décimales, qui est propre. Inversement, l'égalité  $10^n x = 10^n \sigma(a) = (10^{n-1} a_1 + \dots + 10 a_{n-1} + a_n) + \sum_{k>n} \frac{a_k}{10^{k-n}}$  montre que, si

les décimales ne sont pas toutes égales à 9 au-delà d'un certain rang, les chiffres  $a_n$  sont bien les décimales du développement du réel  $x$  qui appartient à  $]0, 1[$ .

Tout élément de  $]0, 1[$  étant somme de la série de son développement décimal, il en résulte que

$]0, 1[$  est inclus dans l'image de  $\sigma$ ; l'égalité  $1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$  montre que 1 appartient également à

cette image.

Enfin l'égalité  $x = E(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ , avec  $E(x) = 0$ , montre que  $\sigma \circ \delta$  n'est autre que l'injection canonique de  $]0, 1[$  dans  $]0, 1[$ . □

Notons que si l'on a  $a_n = 9$  pour tout entier  $n \geq N$ , les sommes  $\sum_{k>n} \frac{a_k}{10^{k-n}}$  sont égales à 1 à partir de ce rang  $N$ ; il ne s'agit plus ici d'un développement propre. Il en est ainsi dans l'exemple déjà cité  $1 = \overline{0,999\dots}$ . Il en résulte facilement la :

**Proposition 25**

Pour  $x = 0$  ou pour tout réel  $x$  non décimal appartenant à l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ , il existe une suite  $(a_n)$  et une seule dont  $x$  est l'image par  $\sigma$ .

Pour tout décimal  $x$  appartenant à l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ , il existe deux suites distinctes  $(a_n)$ ,  $(a'_n)$  et deux seulement dont  $x$  est l'image par  $\sigma$ . Il existe un indice minimal  $N$  tel que l'une de ces deux suites vérifie  $a_n = 0$  pour  $n > N$  (développement propre de  $x$ ) et l'autre  $a'_n = 9$  pour les mêmes indices (développement impropre de  $x$ ); de plus les décimales  $(a_1, a_2, \dots, a_{N-1})$  et  $(a'_1, a'_2, \dots, a'_{N-1})$  sont égales, tandis que  $a'_N = a_N - 1$ , d'où :

$$x = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_N - 1}{10^N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}.$$

**Remarques**

- On peut vérifier tout aussi facilement que, dans l’encadrement évident :

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} \leq \sigma(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

l’une de ces deux inégalités, au choix, ne peut être une égalité que si et seulement si,  $x$  est décimal et le rang  $n$  assez grand.

- À cause des restrictions imposées à  $x$ , à savoir  $0 \leq x < 1$ , les deux extrémités de l’intervalle ont ici un sort spécial : la première, 0, bien que décimale, n’admet qu’un seul antécédent par  $\sigma$ , propre, à savoir  $0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0}{10^n}$ , l’autre, 1, bien que décimale également, n’admettant également qu’un seul antécédent par  $\sigma$ , impropre cette fois-ci, à savoir  $1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$ .

Il est facile de remédier à cette seconde singularité en définissant de manière évidente  $\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathcal{D}$  et  $\sigma : \mathbb{N} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$  de façon à conserver l’égalité  $\sigma \circ \delta(x) = x$  pour tout réel positif  $x$ .

Inversement le problème est un peu plus délicat pour 0, car il est possible d’étendre de deux manières aussi légitimes l’une que l’autre la notion de développement décimal aux réels strictement négatifs, avec par exemple  $-\overline{3,14159 \dots}$  ou  $-4 + \overline{0,85840 \dots}$  pour  $x = -\pi$ . Seule la seconde possibilité donne un développement décimal impropre pour 0, à savoir  $-1 + \overline{0,99999 \dots}$ .

- L’existence de deux suites distinctes de chiffres après la virgule pour un même réel (développement propre et développement impropre) est assez rare en un certain sens, car elle n’est possible que pour les nombres décimaux, qui forment un sous-ensemble dénombrable, donc pauvre, de l’ensemble des réels.
- Tous les résultats ci-dessus s’étendent naturellement, *mutatis mutandis*, aux développements en base  $\beta$ , où  $\beta$  est un entier quelconque supérieur ou égal à 2. Soit  $A_\beta$  l’anneau des nombres  $\frac{m}{\beta^n}$ ,  $m$  et  $n$  entiers. Tout réel positif admet un développement :

$$x = E(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$$

où les  $a_n$  sont dans  $\{0, 1, \dots, \beta - 1\}$ . L’anneau  $A_\beta$  joue ici le rôle de  $\mathbb{D} = A_{10}$ . Le cas particulier  $\beta = 2$  joue un rôle important dans bien des parties des mathématiques et notamment en informatique, théorique et pratique.

## 4. Séries à termes complexes

### 4.1 Suites de Cauchy

#### Définition 7

Une suite réelle ou complexe est *de Cauchy* si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \forall m \geq N, |x_n - x_m| \leq \varepsilon.$$

Cette propriété peut aussi s'énoncer ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \forall p \geq 0, |x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon.$$

#### Proposition 26

Toute suite de Cauchy est bornée.

**Démonstration** Il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|x_n - x_N| \leq 1$ . La suite est donc bornée par  $\max(|x_0|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1)$ .  $\square$

Une caractérisation commode des suites de Cauchy est la suivante :

#### Proposition 27

La suite  $(x_n)$  est de Cauchy s'il existe une suite de réels positifs  $(\rho_n)$  tendant vers 0 telle que, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $p \geq 0$ , on ait  $|x_{n+p} - x_n| \leq \rho_n$ .

#### Théorème 28

Toute suite de Cauchy converge.

**Démonstration** En effet, la suite de Cauchy  $(x_n)$  est bornée. On a vu dans le volume I (théorème de Bolzano-Weierstrass) que toute suite réelle ou complexe bornée admettait une sous-suite convergente. Soit  $\ell$  la limite d'une sous-suite  $(x_{p_n})$  convergente.

Pour  $\varepsilon > 0$ , soit  $N$  tel que, pour tous  $m$  et  $m'$  supérieurs à  $N$ , on ait  $|x_m - x_{m'}| \leq \varepsilon$ . Il existe  $n$  tel que  $p_n > N$  et  $|\ell - x_{p_n}| \leq \varepsilon$ . Alors, pour tout  $m \geq N$  :

$$|x_m - \ell| \leq |x_m - x_{p_n}| + |x_{p_n} - \ell| \leq 2\varepsilon.$$

Donc  $(x_n)$  converge vers  $\ell$ .  $\square$

### 4.2 Critère de Cauchy pour les séries

Voici l’analogie en termes de séries du *critère de Cauchy* pour les suites :

#### Théorème 29 (critère de Cauchy)

La série numérique  $\sum u_n$  converge si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy, à savoir que, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$  et tout  $p \geq 0$ , on dispose de la majoration :

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

Cette condition signifie essentiellement que la suite  $(u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p})_{n \in \mathbb{N}}$  (qui dépend donc du paramètre  $p$ ) tend vers 0 *uniformément par rapport à  $p$* , autrement dit *indépendamment de  $p$* .

**Démonstration** Si  $S_n$  est la somme partielle de la série :

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p},$$

et si la série  $\sum u_n$  vérifie le critère de Cauchy pour les séries, la suite  $(S_n)$  est de Cauchy. Donc la suite  $(S_n)$  converge, ce qui veut dire que la série  $\sum u_n$  converge. □

### 4.3 Convergence absolue

#### Définition 8

On dit que la série numérique  $\sum u_n$  converge absolument lorsque la série  $\sum |u_n|$  converge.

Il n’est pas évident qu’une série *absolument convergente* soit convergente. Nous allons voir dans la preuve du théorème suivant que c’est une conséquence du critère de Cauchy.

#### Théorème 30

Une série  $\sum u_n$  absolument convergente de réels ou de complexes converge. De plus,  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que, pour tout  $p$  et pour tout  $n$  vérifiant  $n \geq N$ ,

$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \varepsilon$ . Mais alors  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \varepsilon$ , et la série converge d’après le

théorème 29. La majoration de la somme résulte alors du passage à la limite à partir de la relation

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \text{ vérifiée pour tout entier } n$$

□

**Exemple** Lorsque la partie réelle de  $z$  est strictement supérieure à 1, la série de terme général  $\frac{1}{n^z} = \frac{1}{e^{z \ln n}}$  converge absolument, car  $\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}}$ , terme général d'une série convergente d'après la règle de Riemann. Sa somme est notée  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ .

On verra dans l'exemple de la page 278 que la série diverge si  $\operatorname{Re} z \leq 1$ .

La convergence absolue d'une série est un moyen très commode de prouver sa convergence. Par exemple, la série de réels  $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{2^n}$  converge absolument bien que l'on contrôle mal le signe de ses termes.

Une série peut être convergente sans être absolument convergente. Par exemple la série télescopique  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$  a pour somme partielle  $S_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n+1}$  qui converge vers 1, mais la série des valeurs absolues diverge évidemment.

### Proposition 31

1. Soit  $\sum u_n$  une série de réels. On pose  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = -\min(u_n, 0) = \max(-u_n, 0)$ . Alors  $\sum u_n$  converge absolument si, et seulement si,  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent.
2. Une série  $\sum u_n$  de nombres complexes converge absolument si et seulement si, les séries de ses parties réelle et imaginaire convergent absolument.

**Démonstration** L'affirmation 1. résulte de ce que  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$  et  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ . De même, l'affirmation 2. est conséquence immédiate des inégalités :

$$\max(|\operatorname{Im}(u_n)|, |\operatorname{Re}(u_n)|) \leq |u_n| \leq 2 \max(|\operatorname{Im}(u_n)|, |\operatorname{Re}(u_n)|). \quad \square$$

### Proposition 32

L'ensemble des séries absolument convergentes d'éléments de  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé par l'application

$$\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$



La proposition suivante est immédiate

**Proposition 33**

Soit  $\sum u_n$  une série de nombres réels ou complexes,  $\sum a_n$  une série convergente de réels positifs, telles que  $u_n = O(a_n)$ . Alors la série  $\sum u_n$  converge absolument.

Si  $\sum a_n$  est une série de réels absolument convergente et si  $u_n \sim a_n$ , alors  $\sum u_n$  converge.

► **Attention** Le résultat est faux en général si la suite  $(a_n)$  n'est pas réelle positive. Par exemple la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  diverge, bien que son terme général soit équivalent à  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  qui est le terme général d'une série alternée convergente, comme on le verra dans le théorème 39 page 279.

En effet :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est le terme général d'une série alternée convergente. Le troisième est d'après la règle de Riemann, le terme général d'une série absolument convergente. Donc le terme central entraîne la divergence de  $\sum u_n$ .

### 4.4 Comparaison série-intégrale

#### Cas des fonctions positives

Voici d'abord un moyen de découper l'intégrale d'une fonction sur un intervalle non borné en série d'intégrales sur des segments.

Le chapitre 15 consacré à l'intégration montre que, si une fonction  $f$  continue par morceaux est *intégrable* sur  $[x_0, +\infty[$ , alors  $\int_{x_0}^A f$  admet une limite lorsque

$A$  tend vers  $+\infty$ . La réciproque est vraie lorsque  $f$  est positive. Comme le chapitre d'intégration n'utilise pas les résultats qui suivent, il n'y a donc pas ici de cercle vicieux.

**Proposition 34**

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux et positive. Soit  $(x_n)$  une suite de réels supérieurs ou égaux à  $a$ , tendant vers  $+\infty$ .

Alors l'existence de  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f$ , qui équivaut à l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, +\infty[$  puisque  $f$  est positive, équivaut également à la convergence de la série  $\sum u_n$ , avec  $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$ . Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^A f = \int_{[a, +\infty[} f.$$

**Démonstration** Comme  $f$  est continue par morceaux et positive, l'application  $x \mapsto F(x) = \int_{x_0}^x f$  est une application croissante de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}_+$  et le théorème de la limite monotone assure l'existence de  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$  telle que  $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

Cette limite est réelle si, et seulement si, pour une suite  $(x_n)$  tendant vers  $+\infty$ , la limite de  $F(x_n) = \sum_{k=0}^n u_k$  est réelle.  $\square$

**Exemple** Montrons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$ .

Posons  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f$ , où  $f$  est l'application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par  $t \mapsto \frac{|\sin t|}{t}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolongée par continuité en 0. Cette fonction est continue

et telle que  $u_n \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$ .

Il en résulte que la série  $\sum u_n$  diverge, et que l'intégrale tend vers l'infini.

Comme on le voit sur cet exemple, la proposition précédente permet de découper certaines intégrales dont on veut prouver la convergence en une série d'intégrales sur des segments, pour majorer chacune d'elles.

Le théorème suivant, fondamental, a un autre usage : il permet d'utiliser l'intégrale de  $f$  pour étudier la convergence d'une série qui ne contient pas d'intégrale, à savoir  $\sum f(n)$ . Il est d'autant plus important que l'on peut beaucoup plus rarement calculer la somme de  $\sum f(n)$  que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

**Théorème 35**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux positive **décroissante** sur  $[n_0, +\infty[$ , avec  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Alors la série  $\sum_{n \geq n_0+1} \left( \int_{n-1}^n f - f(n) \right)$  converge

En particulier la série  $\sum_{n \geq n_0+1} \int_{n-1}^n f$  et la série  $\sum_{n > n_0+1} f(n)$  ont même nature c'est-à-dire que  $f$  est intégrable sur  $[n_0, +\infty[$  si et seulement si, la série  $\sum_{n \geq n_0+1} f(n)$  converge.

**Démonstration** Pour tout  $n \geq n_0 + 1$ , on a  $0 \leq \int_{n-1}^n f - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$ . La série  $\sum (f(n-1) - f(n))$  est positive et télescopique, et a ses sommes majorées par  $f(n_0)$ . Elle est donc convergente et le résultat s'en déduit avec la proposition 5 page 251.  $\square$

La sommation des relations  $0 \leq \int_{k-1}^k f - f(k) \leq f(k-1) - f(k)$  de  $k = n_0 + 1$  à  $k = n$  donne, pour tout  $n \geq n_0 + 1$  :

$$0 \leq \int_{n_0}^n f - \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq f(n_0) - f(n),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k).$$

Dans le cas où l'une des séries  $\sum \int_{n-1}^n f$  ou  $\sum f(n)$  converge, on obtient :

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k).$$

On a souvent besoin d'encadrer plutôt la somme partielle de la série entre des intégrales, par les inégalités :

$$\int_{n_0}^{n+1} f \leq \sum_{p=n_0}^n f(p) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f$$

qui résultent des précédentes.

*Exemple* On peut retrouver ainsi les cas de convergence des séries de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ .

En effet, si  $\alpha < 0$ , la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0, et si  $\alpha \geq 0$ , on applique la proposition précédente à la fonction positive décroissante  $x \mapsto 1/x^\alpha$ .

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln n & \text{si } \alpha = 1 \\ -\frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette expression a une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

On obtient de plus l'encadrement (pour  $\alpha \neq 1$ ) :

$$\frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

ainsi que :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln n.$$

### Remarques

- Lorsque  $f$  est strictement décroissante  $\int_{n_0}^{+\infty} f$  n'est jamais égale à  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$   
 Par exemple, pour  $f(x) = \lambda^x$ , avec  $0 < \lambda < 1$ ,  $\int_n^{+\infty} \lambda^t dt = \frac{\lambda^n}{\ln|\lambda|}$  tandis que  $\sum_{p=n}^{+\infty} \lambda^p = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$ .
- La décroissance de  $f$  est importante dans ce théorème (elle était inutile dans la proposition précédente). Par exemple, si  $f(x) = \frac{|\sin \pi x|}{x}$ , nous avons vu que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f = +\infty$ , alors que  $f(n) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

Une variante usuelle du théorème 35 page 275 (prouvée de la même manière) est le résultat suivant :

**Proposition 36**

Si  $f$  est continue décroissante positive sur  $[1, +\infty[$ , la série

$\sum_{n \geq 1} \left( f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right)$  converge, et :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left( f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right) \\ &= \lim_n \left( f(1) + \dots + f(n) - \int_1^{n+1} f \right) \\ &\leq f(1). \end{aligned}$$

**Remarques** Si, de plus, la fonction  $f$  est *convexe*, alors on peut même préciser que la limite ci-dessus est supérieure ou égale à  $\frac{f(1)}{2}$ . En effet, pour tout  $n$  :

$$f(n) - \int_n^{n+1} f \geq f(n) - \left( \frac{f(n) + f(n+1)}{2} \right) = \frac{f(n) - f(n+1)}{2},$$

d'où le résultat par sommation.

**Exemple** Les suites de termes généraux  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  et  $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$  convergent toutes deux vers la constante  $\gamma$  d'Euler qui est donc comprise entre  $1/2$  et  $1$  (en effet la différence  $u_n - v_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$  tend vers zéro, et il suffit d'appliquer la proposition 36 à la fonction  $f$  définie par  $f(t) = \frac{1}{t}$  et à la série  $\sum v_n$ ).

**Cas des fonctions complexes**

**Proposition 37**

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction complexe de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[n_0, +\infty[$  dont la dérivée est intégrable sur cet intervalle. Alors la série de terme général

$\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  est absolument convergente.

**Démonstration** Il suffit d'utiliser la majoration :

$$\left| \int_{n-1}^n f - f(n) \right| \leq \int_{n-1}^n |f'|$$

qui résulte de la relation :

$$|f(t) - f(n)| = \left| \int_t^n f'(u) du \right| \leq \int_t^n |f'| \leq \int_{n-1}^n |f'|.$$

On peut également remarquer qu'à l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\left| \int_{n-1}^n f - f(n) \right| = \left| \int_{n-1}^n (t - n + 1) f'(t) dt \right| \leq \int_{n-1}^n |f'|. \quad \square$$

### Corollaire 38

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction complexe de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[n_0, +\infty[$  dont la dérivée est intégrable sur cet intervalle. Alors l'existence d'une limite de  $\int_{n_0}^n f$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  équivaut à la convergence de la série  $\sum_n f(n)$ .

**Exemple** On peut voir de la manière suivante que, pour  $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$  et  $z \neq 1$ , la série  $\sum \frac{1}{n^z}$  diverge. La fonction  $t \mapsto t^{-z} = \exp(-z \ln t)$  est dérivable et sa dérivée est  $t \mapsto -\frac{z}{t^{z+1}}$ , évidemment intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

La série  $\sum f(n)$  converge donc si, et seulement si l'intégrale  $\int_1^n f(t) dt$  admet une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Or  $\int_1^x \frac{dt}{t^z} = \frac{1}{1-z} (x^{1-z} - 1)$  n'a pas de limite finie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

### Remarques

- Le théorème 35 page 275 est un cas particulier de la proposition 37 page précédente et du corollaire 38, puisque si  $f$  est réelle positive décroissante elle admet une limite et donc  $\int_{n_0}^n f' = f(n) - f(n_0)$  admet aussi une limite, ce qui prouve que la fonction **négative**  $f'$  est intégrable sur  $[n_0, +\infty[$ .
- Dans la proposition 37 page précédente, on peut remplacer la condition d'existence d'une limite pour  $\int_{n_0}^n f$  lorsque l'**entier**  $n$  tend vers  $+\infty$  par l'existence d'une limite pour  $\int_{n_0}^x f$  lorsque le **réel**  $x$  tend vers  $+\infty$ .

En effet puisque la fonction  $f'$  est intégrable on peut pour tout  $\varepsilon > 0$  trouver un réel  $A$  tel que pour  $y \geq x \geq A$  on ait :

$$\int_x^y |f'(t) dt| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve :

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \int_x^y |f'(t) dt| \leq \varepsilon$$

La fonction  $f$  vérifie ainsi le critère de Cauchy continu (théorème 17 page 392) et possède donc une limite en  $+\infty$

Si cette limite est non nulle, la série diverge évidemment et aucune des deux intégrales  $\int_{n_0}^n f$  et  $\int_{n_0}^x f$  n'a de limite.

Si  $f$  tend vers 0, alors :

$$\left| \int_{E(x)}^x f \right| \leq \sup_{[x-1, x]} |f|$$

tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ce qui prouve que l'existence d'une limite pour  $\int_{n_0}^n f$  suffit pour avoir une limite pour  $\int_{n_0}^x f$ .

### 4.5 Séries alternées

#### Définition 9

La série  $\sum u_n$  de réels est *alternée* lorsque la suite de terme général  $(-1)^n u_n$  garde un signe constant.

Certains auteurs définissent une telle série comme une série pour laquelle  $(-1)^n u_n$  ne garde un signe constant qu'à partir d'un certain rang  $n_0$  : les résultats ci-dessous s'adaptent facilement à cette définition plus large.

#### Théorème 39

Soit  $\sum u_n = \sum (-1)^n v_n$  une série alternée telle que la suite  $(v_n)$  soit positive, décroissante et tende vers 0. Alors  $\sum u_n$  converge, et sa somme  $S$  vérifie  $\forall n, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ . De plus,

$$|R_n| = |S - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k \right| \leq v_{n+1}.$$

**Démonstration** Les relations  $S_{2n} = S_{2n-1} + v_{2n}$  et  $S_{2n+1} = S_{2n} - v_{2n+1}$  et l'inégalité  $v_{2n} \geq v_{2n+1}$  entraînent que  $S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n}$ . De même,  $S_{2n+1} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$ . La suite  $(S_{2n+1})$  est croissante,  $(S_{2n})$  est décroissante, et par récurrence, chaque terme de la première est majoré par chaque terme de la seconde. Elles convergent donc toutes deux, et comme  $S_{2n} - S_{2n-1} = v_{2n}$ , elles ont même limite  $S$ . De plus,  $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$  donc  $0 \leq S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = v_{2n+1}$ . De même,  $0 \leq S - S_{2n-1} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = v_{2n}$ .  $\square$

Bien sûr, lorsque  $u_n = (-1)^{n-1}v_n$ , avec  $(v_n)$  positive décroissante tendant vers 0, alors la série  $\sum u_n$  converge aussi, mais il faut changer le sens des inégalités :  $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$ . La majoration de la somme  $R_n$  de la série demeure.

**Exemple** Pour  $\alpha > 0$ , la série  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$  est alternée et vérifie les hypothèses du théorème ; elle converge donc. De plus,  $\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ .

Elle n'est absolument convergente que pour  $\alpha > 1$ .

► **Attention** Une série alternée ne converge pas nécessairement, même si son terme général tend vers 0. La décroissance de la valeur absolue de son terme général est essentielle.

Par exemple, la série de terme général  $u_n$  défini par :

$$u_{2n} = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

est divergente, puisque ses sommes partielles  $S_n$  sont telles que :

$$S_{2n} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = -\infty$ .

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{|n-a|+1}$  ( $a$  réel quelconque) est alternée, mais si  $a > 1$ , la valeur absolue  $v_n$  de son terme général ne tend en décroissant vers 0 qu'au-delà d'un certain rang. On pourra lui appliquer le théorème de convergence ci-dessus, puisque la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Mais on ne peut écrire les encadrements du théorème qu'à partir des indices pour lesquels  $(v_n)$  décroît.



### 4.6 Complément : la transformation d'Abel (hors programme)

Une série alternée  $\sum (-1)^n v_n$  est un cas de série de la forme  $\sum a_n v_n$ , où la suite  $(v_n)$  ne varie pas trop, et l'on peut contrôler en partie la suite des sommes partielles  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

La transformation d'Abel existe sous plusieurs formes légèrement différentes l'une de l'autre. En voici une, qui suffit à faire comprendre son mécanisme général ; elle ne doit jamais être utilisée comme résultant d'un théorème figurant dans le cours, mais à chaque fois reproduite en tenant soigneusement compte des spécificités du problème :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k v_k &= A_0 v_0 + \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) v_k \\ &= A_0 v_0 + \sum_{k=1}^n A_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k v_{k+1} \\ &= A_n v_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (v_k - v_{k+1}). \end{aligned}$$

Cela ramène l'étude de  $\sum a_n v_n$  à l'étude de la série  $\sum_k A_k (v_k - v_{k+1})$  et de la suite  $(A_n v_n)$ .

*Exemple* Ainsi, si la suite  $(v_n)$  est réelle décroissante et tend vers 0, et la suite  $(A_n)$  est bornée, alors la série  $\sum |v_k - v_{k+1}| = \sum (v_k - v_{k+1})$  est convergente par télescopage puisque la suite  $(v_n)$  est décroissante, et l'on dispose des majorations :

$$\sum_{k=0}^n |A_k| |v_k - v_{k+1}| \leq (\sup_m |A_m|) \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k - v_{k+1}| = (\sup_m |A_m|) v_0.$$

D'autre part, la suite  $(A_n v_n)$  tend vers 0, donc  $\sum a_n v_n$  converge.

**Application** Montrons par exemple que, si  $\alpha > 0$  et si  $\theta$  est un réel non multiple entier de  $2\pi$ , les séries  $\sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$  et  $\sum \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$  convergent. Cela équivaut à la convergence de  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ .

Dans le cas où  $\alpha > 1$  cette série converge absolument, par la règle de Riemann.

Dans le cas où  $\alpha \leq 1$ , avec les notations précédentes, pour  $a_n = e^{in\theta}$ , on peut écrire :

$$A_n = 1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{in\theta/2},$$

majoré en module par  $\frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$ , indépendant de  $n$ . Comme d'autre part  $(v_n)$  tend en décroissant vers 0, nous sommes dans les conditions de l'exemple précédent et  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  converge.

### 4.7 Sommation par tranches

Soit  $\sum u_n$  une série numérique. Lorsqu'on regroupe par tranches de termes consécutifs les termes d'une série convergente, la série obtenue converge et a même somme. Plus précisément :

**Proposition 40**

Soit  $(p_n)$  une suite strictement croissante d'entiers positifs. On pose

$$y_0 = \sum_{i=0}^{p_0} u_i, \text{ et pour tout } n \geq 1, y_n = \sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} u_i.$$

Pour tout  $m > p_0$ , notons  $N$  le plus grand entier  $n$  (dependant de  $m$ ) tel que  $m > p_n$ . Alors :

$$S_m = \sum_{i=0}^m u_i = \sum_{n=0}^N y_n + \sum_{p_N < i \leq m} u_i,$$

et la série  $\sum u_m$  converge si, et seulement si, la série  $\sum y_n$  converge et

$$\rho_m = \sum_{p_N < i \leq m} u_i \text{ tend vers 0 lorsque } m \text{ tend vers } +\infty.$$

Dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m.$

**Démonstration** Supposons que  $\sum u_m$  converge. Pour tout  $n$ ,  $\sum_{j=0}^n y_j = \sum_{i=0}^{p_n} u_i = S_{p_n}.$

C'est le terme général d'une sous-suite de  $(S_m)_{m \in \mathbf{N}}$ . Cette sous-suite converge vers la même limite que  $(S_m)$ . De plus, comme  $p_N$ , qui dépend de  $m$ , tend vers  $+\infty$  avec  $m$  d'après le critère de Cauchy pour les séries,  $\rho_m = S_m - S_{p_N}$  tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers l'infini.

Réciproquement, si  $\sum y_n$  converge de somme  $L$ , la suite  $(S_{p_n})_n$  converge vers  $L$ , et si  $(\rho_m)$  tend vers 0, la suite somme de terme général  $S_m = S_{p_N} + \rho_m$  converge vers  $L$ , puisque  $p_N$  tend vers  $+\infty$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$  □

**Remarques** Il ne suffit pas que  $\sum y_n$  converge pour que  $\sum u_m$  converge. Il suffit de prendre  $u_n = (-1)^n$  et  $p_n = 2n$ . Alors  $y_n = 0$  pour tout  $n$ , et  $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = 0$  tandis que la série  $\sum u_n$  ne converge pas puisque son terme général ne tend même pas vers 0.  
Croire que la convergence de  $\sum y_n$  entraîne celle de  $\sum u_m$  reviendrait à croire que la convergence d'une seule suite extraite entraîne la convergence de la suite.

Voici des conditions suffisantes de convergence de  $\rho_m$  vers 0 très utiles en pratique. Nous gardons les notations de la proposition précédente.

**Proposition 41**

On suppose que la série  $\sum y_n$  converge, de somme  $L$ . Avec les notations de la proposition précédente, pour que  $\rho_m$  tende vers 0 (et donc que  $\sum u_m$  converge vers  $L$ ), il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

- (a) la suite  $(u_m)$  est de signe constant ;
- (b) le signe de  $u_m$  ne change pas dans chaque tranche ;
- (c) la suite  $(u_m)$  tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ , et la taille  $p_n - p_{n-1}$  des tranches est bornée (indépendamment de  $n$ ).

**Démonstration** L'hypothèse (a) entraîne l'hypothèse (b). Sous cette dernière :

$$|\rho_m| \leq \left| \sum_{p_N < i \leq p_{N+1}} u_i \right| = |y_{N+1}|,$$

qui tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .

Sous l'hypothèse (c), si  $p_N < m \leq p_{N+1}$ ,

$$|\rho_m| \leq (p_{N+1} - p_N) \max_{p_N < i \leq p_{N+1}} |u_i|,$$

et la suite  $(p_{n+1} - p_n)$  est bornée tandis que le maximum ci-dessus tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $\rho_m$  tend vers 0. □

Cette proposition est une véritable illustration de ce qu'apporte le point de vue des séries par rapport à celui des suites.

**Exemple** Si  $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ , la suite  $|u_n|$  n'est pas décroissante, ce qui interdit d'utiliser le résultat sur les séries alternées, mais un regroupement par tranches de taille 2 donne :

$$y_n = u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2n(2n+1)} \sim -\frac{1}{4n^2},$$

et c'est l'opposé du terme général d'une série convergente à termes positifs. Donc  $\sum u_n$  converge.

**Exemple** Si  $u_n = \frac{\cos(2n\pi/3)}{n}$ , on pose  $y_n = u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}$ . Comme  $\cos(2\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -1/2$  :

$$v_n = \frac{1}{3n} - \frac{1}{2(3n+1)} - \frac{1}{2(3n+2)} \sim \frac{\lambda}{n^2}$$

où  $\lambda$  est une constante non nulle, et c'est le terme d'une série convergente. Donc  $\sum u_n$  converge.

### 4.8 Complément : permutation des termes

Cette sous-section présente, dans le cadre particulier des séries des résultats également présentés, souvent sous forme de compléments, dans le chapitre sur les familles sommables. Il est instructif de comparer, crayon en main, les méthodes utilisées dans chacune des présentations.

Aucune connaissance n'est bien entendu exigible sur ce thème, mais on pourra utiliser les résultats simples suivants sur les séries à termes réels positifs puis complexes, de démonstration facile et instructive, à condition d'en reconstruire la preuve sur l'exemple dans chacun des cas d'utilisation.

**Proposition 42**

Si  $\forall n, u_n \geq 0$ , et si  $\sum u_n$  converge, alors pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  (bijection de  $\mathbb{N}$  dans lui-même),  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge vers la même somme.

**Démonstration** Ici, pour tout  $n$ , en notant  $\varphi(n) = \max_{k \leq n} \sigma(k)$

$$\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \leq \sum_{m=0}^{\varphi(n)} u_m \leq \sum_{m=0}^{+\infty} u_m.$$

D'où la convergence de la suite  $\left( \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ , et donc de la série  $\sum u_{\sigma(n)}$ . De plus,

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} u_m$ . Avec  $\tau = \sigma^{-1}$ , on voit que si l'on note  $v_n = u_{\sigma(n)}$ , alors  $u_m = v_{\tau(m)}$  et :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_m = \sum_{m=0}^{+\infty} v_{\tau(m)} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} v_m,$$

d'où l'égalité des sommes. □

**Remarque** Lorsque le terme général d’une série ne garde pas de signe constant au-delà d’un certain indice, il se peut que  $\sum u_n$  converge, mais que  $\sum u_{\sigma(n)}$  diverge, ce qui montre bien que la notion de convergence d’une série quelconque est profondément liée à l’ordre de sommation. Décrivons sommairement un tel exemple.

Pour la série  $\sum u_n$  dont les premiers termes sont :

$$1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 1/4, -1/4, \dots$$

on définit la série  $\sum v_n$  par la règle suivante (de permutation des termes de  $u_n$ ) donnant ses termes consécutifs :

$$1, 1/2, -1, 1/3, 1/4, -1/2, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, -1/3, \dots, \\ \frac{1}{2^{p-1} + 1}, \frac{1}{2^{p-1} + 2}, \frac{1}{2^{p-1} + 3}, \dots, \frac{1}{2^p}, -1/p, \dots$$

Ces deux listes de réels définissent des bijections de  $\mathbb{N}$  sur  $\left\{ \pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$  et donc deux séries déduites l’une de l’autre par permutation *des indices*. On voit, à l’aide d’une sommation par tranches de deux termes consécutifs, que la première série converge, et la seconde diverge car elle ne vérifie pas le critère de Cauchy des séries. En effet :

$$\frac{1}{2^{p-1} + 1} + \frac{1}{2^{p-1} + 2} + \frac{1}{2^{p-1} + 3} + \dots + \frac{1}{2^p} \geq \frac{1}{2}.$$

**Proposition 43**

Soit  $\sum u_n$  une série absolument convergente d’éléments réels ou complexes. Alors, pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$ , la série  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge

et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$

**Démonstration**

Comme la série  $\sum u_n$  est absolument convergente, le résultat précédent prouve qu’il en est de même de la série  $\sum u_{\sigma(n)}$  et que les sommes de leurs modules sont égales, ainsi que le fait que la série  $\sum u_{\sigma(n)}$  est également convergente. Notant  $\Delta(n) = \max(\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n))$ , on montre alors que  $\Delta(n) \geq n$ , puis que :

$$\sum_{k=0}^{\Delta(n)} u_k - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq \Delta(n) \\ k \notin \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}}} u_k,$$

puis :

$$\left| \sum_{k=0}^{\Delta(n)} u_k - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right| \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq \Delta(n) \\ k \notin \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}}} |u_k| = \sum_{k=0}^{\Delta(n)} |u_k| - \sum_{k=0}^n |u_{\sigma(k)}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve, en passant à la limite, que les deux sommes sont égales □

**Remarques**

Dans le cas particulier d’une série à termes réels, on peut utiliser la variante suivante, dont la méthode peut être retenue pour d’autres applications. Nous utiliserons le type de démonstration de la proposition 31 page 272. Pour tout  $n$  entier, notons :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = -\min(u_n, 0) = (-u_n)^+,$$

de sorte que  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$  et  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ . Les séries  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  sont à termes positifs, et convergentes puisque  $\sum |u_n|$  converge, et  $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$  et  $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ . Donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$ , d’après la proposition 42 page 284 sur la convergence commutative et la somme des séries à termes positifs. Il ne reste plus qu’à faire la différence  $\sum u_n^+ - \sum u_n^-$  pour conclure.

**4.9 Produit de Cauchy**

**Théorème 44**

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries de complexes absolument convergentes.

On note  $c_m = \sum_{p+q=m} a_p b_q = \sum_{p=0}^m a_p b_{m-p}$ . Alors  $\sum c_m$  converge absolument, et :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} c_m = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right).$$

**Démonstration** Montrons d’abord la convergence absolue de  $\sum c_m$ . Il suffit de montrer que la suite  $C_m = \sum_{k=0}^m |c_k|$  est majorée. Notons  $T_m = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q \leq m\}$ , et  $K_m = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \leq m \text{ et } q \leq m\}$ . Alors :

$$C_m = \sum_{k=0}^m \left| \sum_{p+q=k} a_p b_q \right| \leq \sum_{(p,q) \in T_m} |a_p| |b_q| = D_m$$

donc :

$$C_m \leq \sum_{(p,q) \in K_m} |a_p| |b_q| = \left( \sum_{p=0}^m |a_p| \right) \left( \sum_{q=0}^m |b_q| \right) \leq \left( \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p| \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} |b_q| \right),$$

d'où la convergence absolue de  $(C_m)$ . Le triangle  $T_m$  et le carré  $K_m$  vont nous servir à trouver la limite de la suite  $(C_m)$ . En effet :

$$\begin{aligned} |A_m B_m - C_m| &= \left| \sum_{(p,q) \in K_m \setminus T_m} a_p b_q \right| \\ &\leq \sum_{(p,q) \in K_m \setminus T_m} |a_p| |b_q| \\ &\leq \sum_{(p,q) \in T_{2m} \setminus T_m} |a_p| |b_q| = D_{2m} - D_m. \end{aligned}$$

Dans le courant de la preuve de la convergence absolue, nous avons vu que la suite  $(D_m)$  est convergente, donc de Cauchy. Cela entraîne que la suite  $(A_m B_m - C_m)$  tend vers 0. D'où le résultat.  $\square$

**Application Multiplicativité de l'exponentielle.** Si  $z$  est un nombre complexe, la série  $\sum u_n = \sum \frac{z^n}{n!}$  converge absolument par la règle de d'Alembert pour  $z \neq 0$ , puisque  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|z|}{n+1}$ , qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . La somme est par définition  $\exp(z)$ .

**Proposition 45**

Pour tous  $a$  et  $b$  complexes,  $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$ .

**Démonstration** Si  $a_n = \frac{a^n}{n!}$  et  $b_n = \frac{b^n}{n!}$ , alors le terme général  $c_n$  de la série produit de Cauchy s'écrit :

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p+q=n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{p! q!} a^p b^q = \frac{(a + b)^n}{n!}.$$

$\square$

## 5. Estimation du reste d'une série convergente

### 5.1 Développement asymptotique du reste

On suppose que la série  $\sum u_n$  à termes positifs converge et l'on note son reste  $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ . Pour trouver un développement asymptotique de  $R_n$  en fonction de  $n$ , on a souvent intérêt à chercher une série *télescopique*  $\sum w_n$  telle que  $w_n \sim u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , et dont le reste  $\rho_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p$  (équivalent à  $R_n$ , d'après la proposition 18 page 260) soit une fonction simple explicite de  $n$ , en pratique de la forme  $\frac{\lambda}{n^\beta}$ .

Une fois trouvée la suite  $(w_n)$ , on pose  $u'_n = u_n - w_n$  et l'on recommence sur  $u'_n$  ce qu'on a fait sur  $u_n$ . Comme  $u_n \sim w_n$  et  $R_n \sim \rho_n$ , on voit que  $u'_n = o(u_n)$ , et  $\sum_{p=n+1}^{+\infty} u'_p = o(R_n) = o(\rho_n)$  : cela donnera bien un développement asymptotique de  $R_n$ , tant que l'on pourra itérer le procédé.

On utilise souvent pour cela le lemme immédiat :

**Lemme**

Si  $\alpha > 1$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Ainsi, si  $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ , alors  $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \sim \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$  et l'équivalent de  $u_n$  à prendre est  $w_n = \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha}$  plutôt que  $\frac{1}{n^\alpha}$ .

**Corollaire 46**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs telle que  $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ , avec  $\alpha > 1$ .

Alors elle converge et  $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$ .



*Exemple* Nous allons appliquer cela à l'établissement de la formule de Stirling, donnant un développement asymptotique de  $n!$  en fonction de  $n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Une première approximation de  $\ln n! = \sum_{p=1}^n \ln p$  est  $\int_1^n \ln t \, dt$ , mais la différence entre les deux tend vers l'infini. La formule des trapèzes va permettre d'affiner l'approximation. En effet, soit  $h$  la fonction continue sur  $[1, +\infty[$ , affine sur chaque intervalle  $[n-1, n]$ , qui coïncide avec  $\ln$  sur  $\mathbb{N}^*$ , c'est-à-dire telle que, pour tout  $n$  entier non nul  $h(n) = \ln n$ . Son expression exacte n'est pas essentielle, car il nous suffit de savoir que pour tout  $n > 1$ ,  $\int_{n-1}^n h(t) \, dt = \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln(n))$ , et

$$\int_1^n h(t) \, dt = \ln(n!) - \frac{\ln n}{2}.$$

En posant  $u_n = \int_{n-1}^n \ln t \, dt - \int_{n-1}^n h(t) \, dt$ , on voit par sommation que :

$$\sum_{p=1}^n u_p = \int_1^n \ln(t) \, dt - \ln(n!) + \frac{1}{2} \ln n = n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2} \ln n - \ln(n!),$$

et  $\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 - \sum_{p=1}^n u_p$ . La série  $\sum u_n$  converge, car :

$$\begin{aligned} u_n &= [t \ln t - t]_{n-1}^n - \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln(n)) \\ &= n \ln n - n - (n-1) \ln(n-1) + n - 1 - \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln(n)) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)(\ln n - \ln(n-1)) - 1 \\ &= -\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1 \\ &= -\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - 1 \\ &= \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Notons provisoirement  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  et  $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$  son reste, qui est équivalent à

$$\rho_n = \frac{1}{12n}, \text{ d'après le lemme.}$$

Pour pousser d'un cran le développement du reste  $R_n$ , nous devons pousser d'un cran le développement asymptotique de  $u_n$ , ce qui donne, après calculs :

$$u_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \text{ De plus, comme nous l'avons vu ci-dessus, posons :}$$

$$w_n = \rho_{n-1} - \rho_n = \frac{1}{12(n-1)} - \frac{1}{12n} = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

de sorte que  $u'_n = u_n - w_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ . D'après le lemme,  $\sum_{p=n+1}^{+\infty} u'_p = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ , et

$R_n = \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . D'où il résulte que :

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 - S + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

et :

$$n! = n^{n+1/2} e^{-n} e^{1-S} \exp\left(\frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

Il existe donc une constante  $K$  telle que :

$$n! = K n^{n+1/2} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

On a vu dans l'exemple 2, page 259 que  $K$  était égal à  $\sqrt{2\pi}$ , ce qui donne :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

**Remarque** Le fait que pour  $\alpha > 1$  on ait :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

n'est qu'un cas particulier du résultat plus général suivant.

**Exemple** Lorsque  $u_{n+1} \sim u_n$  pour une série à termes positifs, si  $\sum u_n$  converge, le reste  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n+k}$  de la série tend vers 0 infiniment plus lentement que le terme général  $u_n$ .

En effet, soit  $\varepsilon \in ]0, 1/2]$ . Il existe  $N$  tel que :

$$\forall n \geq N, \forall k \geq 0, u_{n+k} \geq (1 - \varepsilon)u_{n+k-1}.$$

Cela entraîne par récurrence que  $\forall k \geq 0, u_{n+k} \geq (1 - \varepsilon)^k u_n$ . On additionne ces relations de  $k = 0$  à l'infini, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n+k} \geq u_n(1 + (1 - \varepsilon) + \dots + (1 - \varepsilon)^k + \dots) = u_n \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon)} = \frac{u_n}{\varepsilon}.$$

On a donc  $u_n = o\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n+k}\right)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### 5.2 Vitesse de convergence

Si  $x$  est un réel de développement décimal  $x = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ ,

la suite  $\left(\frac{a_n}{10^n}\right)$  tend vers 0 au moins aussi vite qu’une progression géométrique de raison  $1/10$ . Mais c’est aussi le cas du reste de la série. C’est général.

On dira que la suite  $(u_n)$  converge *au moins géométriquement* vers  $\ell$  si  $\ell - u_n = O(\lambda^n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , avec  $0 \leq \lambda < 1$ .

Lorsque l’on cherche à approcher numériquement un réel par une suite  $(u_n)$ , si la convergence est au moins géométrique, la convergence est bonne : le nombre de décimales exactes sur  $x$  en prenant  $u_n$  comme approximation de  $x$  augmente en progression arithmétique avec  $n$ .

Si  $(u_n)$  converge au moins géométriquement, la suite  $(S_n)$  des sommes partielles de la série  $\sum u_n$  converge au moins géométriquement. En effet, si  $S$  est la somme de la série  $\sum u_n$ , et si, pour  $n \geq N$ ,  $|u_n| \leq a \lambda^n$ , alors pour  $n \geq N$  :

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a \lambda^k = \frac{a \lambda^n}{1 - \lambda}.$$

*Exemple* C’est le cas de l’approximation de  $\pi$  utilisant la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

et le développement en série entière  $\arctan x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2p+1}$  appliqué à  $x = 1/5$

et  $x = 1/239$ . Comme le terme général de la série tend vers 0 au moins géométriquement, il en est de même du reste de la série, et c’est ce dernier qui nous importe

**Remarques** Pour une estimation précise de la rapidité de convergence, il ne faut pas seulement savoir que  $u_n = O(\lambda^n)$ , mais disposer d’une majoration effective  $|u_n| \leq a \lambda^n$ . Dans le cas du développement de  $\arctan x$  (et dans bien d’autres cas de séries entières), l’inégalité de Taylor-Lagrange fournit la majoration voulue.

On rencontre souvent des algorithmes de calcul qui convergent beaucoup moins vite. Les méthodes d’intégration numérique, de résolution d’équations différentielles à *pas constant* convergent beaucoup plus lentement en fonction du nombre  $n$  de points pris sur le segment d’intégration : l’erreur est en  $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ , et il faut augmenter exponentiellement le nombre  $n$  de points pour augmenter linéairement le nombre de décimales gagnées sur le résultat.

Un autre exemple classique est le calcul de la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

Le corollaire 46 page 288 montre que si  $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ , il y a un ralentissement de convergence quand on passe de la suite à la série, dû à l'accumulation de termes certes petits mais dont l'ordre de grandeur varie peu. Dans le calcul numérique de  $\gamma$ , c'est très gênant. C'était un vrai problème au XVII<sup>ème</sup> siècle, lorsque Euler a découvert (ou inventé)  $\gamma$ , et qu'il fallait en chercher le développement décimal.

La méthode exposée précédemment pour déterminer un développement asymptotique du reste de la série donne un moyen d'accélérer la convergence de la série dans un tel but de calcul numérique. Reprenons-en les notations. Si  $R_n \sim \rho_n$ , nous avons vu que le reste de la série

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} u'_p = R_n - \rho_n = S - S_n - \rho_n = o(\rho_n)$$

de sorte que  $S_n + \rho_n$  est, avec très peu de calculs supplémentaires par rapport à  $S_n$ , une approximation bien meilleure de  $S$  que  $S_n$ .

Si, sans connaître la somme de la série, nous pouvons déterminer un développement asymptotique de  $R_n$ , par exemple à trois termes :

$$R_n = \rho_n + \rho'_n + \rho''_n + o(\rho''_n),$$

alors  $S_n + \rho_n + \rho'_n + \rho''_n$  est une approximation de  $S$  dont l'erreur est un  $o(\rho''_n)$ .

**Exemple** Accélération de la convergence de la série donnant  $\gamma$ . L'expression :

$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$  en fait la somme de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ , où :

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ , et l'on peut donc poser :

$$w_n = - \int_{n-1}^n \frac{dt}{2t^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right),$$

et  $\rho_n = - \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2n}$ . Pour calculer  $\rho'_n$ , soit :

$$u'_n = u_n - w_n = \frac{1}{n} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

Sa partie principale est donnée par  $u'_n \sim \frac{1}{6n^3}$  si  $n$  tend vers  $+\infty$ . On peut donc poser :

$$w'_n = \int_{n-1}^n \frac{dt}{6t^3} = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\text{et } \rho'_n = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{6t^3} = \frac{1}{12n^2}.$$

Ici, il se trouve par chance que  $u'_n - w'_n = O(1/n^5)$ , de sorte que :

$$\gamma - S_n - \rho_n - \rho'_n = O(1/n^4).$$

On s'en rendra parfaitement compte en observant le tableau suivant :

$n$	$S_n$	$S_n + \rho_n$	$S_n + \rho_n + \rho'_n$
20	0,60200738358969...	<b>0,577007383589690...</b>	<b>0,577215716923023...</b>
100	0,58220733165153...	<b>0,577207331651530...</b>	<b>0,577215664984863...</b>

alors que  $\gamma = 0,577215664901533\dots$

## EXERCICES

1. Nature de la série  $\sum u_n$  où  $u_n$  est égal à :

1.  $\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}\right)^\alpha}$  ;

2.  $\prod_{k=1}^n (2 - e^{1/k})$  ;

3.  $(-1)^n v_n$ , avec  $v_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(n-p)}$  ;

4.  $w_n = \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{k}\right)^{\ln(n)}$  .

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres  $\alpha$  et  $a > 0$  et  $b > 0$  pour que la suite  $(u_n)_n$  définie par :

$$u_n = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} - \alpha \ln n$$

soit convergente.

3. Nature des séries :

1.  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  ;

2.  $\sum_{n \geq 1} e^{-n^\alpha} \int_1^n e^{t^\alpha} dt$  ;

3.  $\sum_{n \geq 1} \sin \pi \sqrt[3]{n^3 + \lambda n^\alpha}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\alpha \leq 2$  ;

4.  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin \pi \sqrt{n}}{n^\alpha}$ .

4. Calculer les sommes de séries suivantes après en avoir prouvé la convergence :

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+4)}$  ;

2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$  ;

3.  $\sum u_n$ , où  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ , et  $0 < a < b$  : il faut déterminer  $a$  et  $b$  pour que la série converge ;

4. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}.$$

5. Soit  $(a_n)_n$  une suite de réels strictement positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = a > 0$

Étudier la série 
$$\sum_n \frac{1-a_n}{n}.$$

6. On se donne  $p \in \mathbb{R}^{*+}$ . Nature de la série de terme général :

$$u_n = n^\alpha \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{\ln(k+p)}.$$

7. Nature des séries de terme général

1.  $I_n = \int_n^{+\infty} \frac{e^{n-x}}{n+x} dx;$

2.  $J_n = (-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2) dt;$

3.  $H_n = \int_a^{+\infty} e^{-(\ln t)^n} dt$ , avec  $a \geq 1$ .

8. Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[0, a]$ . On suppose que  $f$  n'est pas identiquement nulle au voisinage de  $a$ .

Étudier la convergence de  $\sum u_n$ , où :

$$u_n = \int_0^a t^n f(t) dt.$$

9. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $x_n \in \mathbb{R}^{*+}$  tel que  $\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{n+1}{n}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , et la nature de la série  $\sum x_n$ .

10. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ , on note  $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ . Étude de la série  $\sum r_n$ .

11. Nature de la série de terme général :  $u_n = 1 - \int_0^1 (1 - t^n)^{1/n} dt$ .

12. On pose  $A_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

Nature de la série de terme général  $A_n B_n - 1$ .

13. On se donne un réel  $\alpha$ , et on définit une suite  $(u_n)$  par :

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{n^\alpha} \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Étudier la série  $\sum u_n$ .

14. Soient  $u_0, u_1, u_2, u_3$  des réels strictement positifs. À quelles conditions sur ces valeurs initiales la série de terme général récurrent :

$$u_n = \left( \frac{u_{n-2}^2 u_{n-3}^2 u_{n-4}}{u_{n-1}^2} \right)^{1/3}$$

converge-t-elle ?

15. Soit  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$  ; calculer  $u_{1000}$ , à un pour mille près ; trouver un développement asymptotique à deux termes de  $u_n$  et un équivalent en  $+\infty$  de  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k^2}$ .

16. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels par  $u_0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$ .

1. Pour quelles valeurs de  $u_0$  la série  $\sum u_n$  converge-t-elle ?

2. Montrer que, dans ce cas, si la suite  $(2^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas la suite nulle, elle converge vers une limite  $l \neq 0$ . Trouver alors un développement asymptotique à deux termes de  $u_n$ .

17. Soient  $a \in ]0, 1[$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}_+^*$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$x_0 > 0 \text{ et } \forall n, x_{n+1} = ax_n + (1-a)\sqrt{u_n + x_n^2}.$$

1. Montrer que  $(x_n)_n$  est bien définie et positive.

2. Montrer que la suite  $(x_n)_n$  et la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  sont de même nature



18. Soit  $f$  une application continue de  $[0, a]$  dans lui-même admettant un développement limité  $f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$  à droite de 0, avec  $\lambda > 0$ , et  $\alpha > 1$ . Pour simplifier, nous supposons que, pour tout  $x > 0$   $0 < f(x) < x$  (ce qui est, de toute manière, vrai localement à droite de 0).

On considère la suite définie par  $u_0 > 0$  et, pour  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Donner un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On pourra chercher un réel  $\beta$  tel que la suite de terme général  $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$  ait une limite non nulle.
  2. Pour quelles valeurs de  $\lambda$ ,  $\alpha$  et  $\gamma$  la série  $\sum n^\gamma u_n$  converge-t-elle ?
  3. Application numérique : nature de la série  $\sum u_n$  où  $u_0 \in ]0, \pi/2]$ , et  $u_{n+1} = \sin u_n$ .
19. Notons  $A$  l'ensemble des entiers naturels non nuls qui s'écrivent sans 9 dans le système décimal. On indexe  $A$  par la suite strictement croissante  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n}$ .
20. Pour  $n \in \mathbb{N}$  on note  $f(n)$  le nombre de 0 dans l'écriture de  $n$  en base 10. Condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  pour que la série de terme général  $\frac{\alpha^{f(n)}}{n^2}$  soit convergente. Indication : on étudiera pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $p$  entier compris entre 0 et  $k$  le cardinal de l'ensemble des entiers  $n$  de l'intervalle  $[10^k, 10^{k+1} - 1]$  tels que  $f(n) = p$ .
21. Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de réels positifs, et  $v_n = nu_{n^2}$ . Comparer la nature des séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .
22. Soit  $u_n = \frac{1}{\alpha_n}$  avec  $\alpha_n$  le nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 de  $n$ . Nature de cette série.
23. Soit  $(a_n)$  une suite décroissante de réels positifs.

1. Montrer que si  $\sum a_n$  converge, la série  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  converge, et la suite  $(na_n)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1}).$$

2. Réciproquement, on suppose que  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  converge. Montrer que  $\sum a_n$  converge si et seulement si,  $a_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.
3. Se peut-il que  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  converge, mais  $a_n$  ne tende pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
24. Soit  $(a_n)$  une suite de réels positifs tendant vers 0. Pour  $x > 0$ , on note  $N(x)$  le nombre de termes de la suite  $(a_n)$  supérieurs ou égaux à  $x$ . Montrer que  $N(x)$  est bien défini. Montrer que la série  $\sum a_n$  converge si, et seulement si, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} N(x) dx$  converge. Dans le cas de convergence, montrer que :
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} N(x) dx.$$
25. Soit  $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$  une fonction bijective croissante de classe  $\mathcal{C}^1$ , et soit  $g = f^{-1}$  la fonction réciproque, supposée aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $\sum \frac{1}{f(n)}$  converge si, et seulement si,  $\sum \frac{g(m)}{m^2}$  converge.
26. Soit  $\sigma$  une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur lui-même, et  $\alpha$  un réel positif. Nature de la série  $\sum \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$ .
27. Soit  $(a_n)$  une suite de nombres réels positifs telle que  $\sum a_n$  diverge. Montrer qu'il existe une suite  $(b_n)$  à termes positifs, convergente de limite 0 telle que  $\sum a_n b_n$  diverge.
28. Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs, de somme partielle  $S_n$ , avec  $u_0 > 0$ . Étudier, pour  $\alpha > 0$ , la nature de la série  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ .
29. 1. Soit  $\sum a_n$  une série à termes strictement positifs divergente, telle que, si  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , alors  $\sum_{k=0}^n A_k = O(A_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Soit  $(u_n)_n$  une suite croissante de réels strictement positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .  
Montrer que  $\sum_{k=0}^n a_k u_k \sim \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) u_n$  si  $n$  tend vers l'infini.

2. Application numérique. Soit  $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} 2^p \ln p$  ; trouver un équivalent de  $S_n$

en  $+\infty$ . On commencera par montrer que  $S_n \sim \ln n \sum_{p=1}^{p=n} 2^p$ .

3. Donner un exemple de série  $\sum a_n$  à termes positifs divergente et de suite

$(u_n)$  croissante telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , mais  $\frac{\sum_{k=0}^n a_k u_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \text{ ne}$

soit pas équivalent à  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ainsi, l'hypothèse forte de la première question, qui indique que  $\sum a_n$  « diverge assez vite », n'est pas inutile.

30. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante tendant vers 0 telle qu'il existe  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante vérifiant:  $\forall n, u_{\alpha(n)} \geq \frac{1}{\alpha(n)}$ . Montrer que la série de terme général  $u_n$  diverge.

31. Soit  $\sum u_n$  une série divergente à termes positifs. Que peut-on dire de la nature des séries  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$  ;  $\sum \frac{u_n}{1+nu_n}$  ;  $\sum \frac{u_n}{1+n^\alpha u_n}$ , avec  $\alpha > 1$  ;  $\sum \frac{u_n}{1+u_n^2}$ .

32. Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs divergentes.

1. La série  $\sum \min(u_n, v_n)$  diverge-t-elle ?
2. Si les deux suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont décroissantes, la série  $\sum \min(u_n, v_n)$  diverge-t-elle ? On pourra considérer deux suites dont les valeurs passent alternativement l'une en-dessous de l'autre sur des intervalles successifs de  $\mathbb{N}$ .

33. Soit  $\sum u_n$  une série divergente à termes positifs tendant vers 0 en décroissant,

1. Montrer que la série  $\sum \min\left(u_n, \frac{1}{n}\right)$  diverge. On pourra minorer le terme général par  $v_n$ , où  $v_n$  est stationnaire inférieure à  $1/n$  sur les intervalles où elle ne vaut pas  $1/n$ , puis appliquer l'exercice 28 à une suite  $w_n = N_n - N_{n-1}$ , où  $(N_n)_n$  est une suite croissante d'entiers tendant vers l'infini convenable.
2. En déduire que la série  $\sum \frac{u_n}{1+nu_n}$  diverge.

### 34. Mertens et les séries non absolument convergentes

Soit  $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ , et  $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ . Montrer que la série  $\sum c_n$  diverge. On montrera que son terme général n'est pas borné.

35. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive telle que  $\sum a_n$  converge. On note  $\alpha_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k$ .

1. Montrer que la suite  $\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right)$  est décroissante.
2. Limite de  $\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right)_k$  lorsque  $k$  tend vers l'infini ?

### 36. Produits infinis

Soit  $(u_n)$  une suite de réels  $\neq -1$  tous strictement supérieurs à  $-1$  à partir d'un certain rang  $n_0$  (ce qui permet de définir  $\ln(1+u_n)$  pour  $n \geq n_0$ ).

On dit que « le produit infini  $\prod(1+u_n)$  converge » lorsque la suite de terme

général  $\prod_{k=0}^n (1+u_k)$  admet une limite *non nulle*, notée alors  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ .

1. Montrer que  $\prod(1+u_n)$  converge *si, et seulement si*, la série  $\sum \ln(1+u_n)$  (définie seulement pour  $n \geq n_0$ ) est convergente. Dans ce cas, on notera que  $\lim_n u_n = 0$ .
2. On suppose que la série  $\sum u_n^2$  converge (et en particulier que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ). Montrer que  $\prod(1+u_n)$  est convergent *si, et seulement si*, la série  $\sum u_n$  converge.
3. En déduire que si la série  $\sum u_n$  est *absolument convergente*, le produit  $\prod(1+u_n)$  est convergent.
4. Montrer que si  $\forall n, u_n \geq 0$ , le produit  $\prod(1+u_n)$  est convergent *si, et seulement si*, la série  $\sum u_n$  est convergente.
5. Montrer que le produit  $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$  est divergent.

**37. Produits Euleriens**

1. Montrer que le produit  $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{t^2}{n^2 \pi^2}\right)$  est convergent, pour  $t \notin \pi \mathbb{Z}$ .

2. Pour  $n = 2p + 1$ , montrer que :

$$\begin{aligned} \sin nt &= n \sin t \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2(\pi/n)}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2(p\pi/n)}\right) \\ &= n \cos^n t \cdot \tan t \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2(\pi/n)}\right) \dots \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2(p\pi/n)}\right). \end{aligned}$$

3. Etablir, pour  $0 < x < y < \pi/2$  les inegalités :

$$\frac{\sin x}{\sin y} > \frac{x}{y}, \quad \text{et} \quad \frac{\tan x}{\tan y} < \frac{x}{y}.$$

4. En déduire que, pour  $t \notin \pi \mathbb{Z}$ ,  $t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2 \pi^2}\right) = \sin t$ .

**38.** On se donne  $\alpha > 0$  et un réel  $u_1$  non nul. On définit la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} u_k.$$

Nature de la série  $\sum u_n$  ?

**39.** Soit  $(p_n)_{n \geq 1}$  la suite croissante des nombres premiers :  $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$

1. Pour  $\alpha > 1$ , montrer que  $\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$  admet une limite *strictement positive*

Lorsque  $N$  tend vers l'infini. On la note :  $L = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$ .

2. Montrer que :  $\sum_{k=1}^{pN} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

3. En déduire que :  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)}$ .

4. Montrer que la minoration de gauche de la deuxième question reste valable lorsque  $\alpha = 1$ . En déduire que  $\sum_n \frac{1}{p_n}$  diverge.

**40. Un théorème Tauberien**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  une série à valeurs complexes. On note  $s_n = \sum_{n=0}^N c_n$ , et  $\sigma_n = \frac{1}{N+1}(s_0 + \dots + s_n)$ . On suppose que  $(nc_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par  $M$ . Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $k \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $\sigma_{N,k} = \frac{1}{k}(s_N + \dots + s_{N+k-1})$ .

1. Calculer  $\sigma_{N,k} - \left(1 + \frac{N}{k}\right) \sigma_{N+k-1} + \frac{N}{k} \sigma_{N-1}$ . Etablir que si une suite  $(k_N)_N$  tend vers l'infini de telle sorte que  $N/k_N$  tende vers une limite finie  $\ell$ , alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = s \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{N,k_N} = s.$$

2. Montrer que  $\sigma_{N,k} - s_N = \sum_{N < n < N+k} \left(1 + \frac{N-n}{k}\right) c_n$ . En déduire que :

$$|\sigma_{N,k} - s_N| \leq \frac{Mk}{2N}.$$

3. On suppose que  $(\sigma_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite  $\ell$ . Montrer que  $(c_n)_n$  converge aussi vers  $\ell$ .

**41** On considère la suite définie par :

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \\ \forall n \geq 0, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Étudier les séries de termes généraux:

$$\frac{\cos(\pi L_n)}{n}, \quad \frac{\cos(\pi L_n/2)}{n}, \quad \frac{\cos(2\pi L_n/3)}{n}, \quad \frac{\cos(\alpha_n \pi)}{n},$$

en posant  $\alpha_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$

- 42 1. Déterminer un équivalent de  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini
2. Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de réels tendant vers 0 telle que :

$$u_n - u_{n+1} \sim u_{n+1} - u_{n+2}.$$

Montrer que :

$$r_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{n+p} u_{n+p} \sim (-1)^n u_n / 2.$$

3. Application : déterminer un équivalent lorsque  $n$  tend vers l'infini de

$$\sigma_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}.$$

43 1. Montrer que la suite de terme général  $v_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$  vérifie :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\beta}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$

2. En déduire le critère de convergence suivant :

Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\delta}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$ , alors :

$$\delta < 1 \implies \sum u_n \text{ diverge};$$

$$\delta > 1 \implies \sum u_n \text{ converge}.$$

3. En déduire que si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , alors la série  $\sum u_n$  diverge.

44 **Critère de condensation de Cauchy**

Soit  $(a_n)$  une suite positive décroissante tendant vers 0, et  $\alpha$  un réel supérieur à 1. On se donne une suite d'entiers  $(p_n)_{n \geq 0}$  strictement croissante telle que :

$$\forall n \geq 1, p_{n+1} - p_n \leq \alpha(p_n - p_{n-1}).$$

1. Montrer que les deux séries  $\sum a_n$  et  $\sum_n (p_n - p_{n-1})a_{p_n}$  ont même nature.
2. En déduire que, si  $p$  est un entier supérieur (strictement) à 1, les deux séries  $\sum a_n$  et  $\sum p^n a_{p^n}$  ont même nature.
3. Donner un exemple de suite  $(a_n)$  divergente (toujours à termes décroissants tendant vers 0), mais pour laquelle il existe une suite strictement croissante  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'indices telle que  $\sum_n (p_n - p_{n-1})a_{p_n}$  converge.

45. Étudier, selon les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergence de la série  $\sum a_n$ , avec

$$a_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}.$$

46. Soit  $\sum a_n$  une série convergente de réels telle que la suite  $(|a_n|)_n$  soit décroissante. Soit  $(t_n)_n$  une suite de réels  $t_n \in [0, 1]$  telle que la suite  $(|t_n a_n|)_n$  soit décroissante. La série  $\sum t_n a_n$  converge-t-elle ?

- 47** 1. On considère une série réelle  $\sum \varepsilon_n a_n$  dans laquelle la suite  $(a_n)$  est réelle décroissante, et, pour tout  $n$ ,  $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ .

Montrer que si  $\sum \varepsilon_n a_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n) a_n = 0$ .

2. On considère une suite  $(b_n)_n$  réelle tendant vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. On définit la fonction  $N$  de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$N(x) = \begin{cases} \text{card}\{n \in \mathbb{N} / b_n \geq x\} & \text{si } x > 0, \\ -\text{card}\{n \in \mathbb{N} / b_n \leq x\} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que  $N(x)$  est bien défini pour tout  $x$  non nul.

On suppose que  $\sum b_n$  converge et que la suite  $(|b_n|)_n$  est décroissante.

Montrer que  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{-x} N(t) dt + \int_x^{+\infty} N(t) dt$ , défini pour tout  $x > 0$ ,

tend vers  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  lorsque  $x$  tend vers 0.

3. Cette égalité est-elle encore vraie lorsque la série  $\sum b_n$  converge mais la suite  $(|b_n|)_n$  n'est pas décroissante ?

- 48.** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite strictement croissante de réels strictement positifs telle que  $\sum 1/a_n$  converge, et telle que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = O\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

Montrer que :  $\sum_{k=1}^n a_k = O(a_{n+1})$ .



## Chapitre 10

# Espaces vectoriels normés et espaces métriques : définitions générales

Dans tout ce chapitre, nous ne considérerons que des espaces vectoriels sur  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1. Normes et distances

### 1.1 Espaces vectoriels normés

Dans cette sous-section,  $E$  désigne un espace vectoriel réel ou complexe de dimension quelconque.

#### Définition 1

On appelle *norme* sur un espace vectoriel  $E$  toute application  $N$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}_+$  vérifiant les axiomes suivants :

1.  $\forall (\alpha, x) \in \mathbf{K} \times E, \quad N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$  (*homogénéité*),
2.  $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (*sous-additivité*),
3.  $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \implies x = 0$  (*séparation*).

On appelle *espace vectoriel normé* tout couple  $(E, N)$  formé d'un espace vectoriel et d'une norme sur  $E$ .

Les exemples d'espaces vectoriels normés suivants ont été étudiés dans le cours de première année :

1. l'espace  $\mathbf{K}$  muni de l'application *valeur absolue* ou *module*  $\alpha \mapsto |\alpha|$  de  $\mathbf{K}$  vers  $\mathbb{R}_+$  ;
2. un espace vectoriel euclidien  $(E, (x | y))$  muni de l'application *norme euclidienne* :

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)} ;$$

3. l'espace  $\mathbb{R}^2$  muni de l'application *norme infinie*  $\| \cdot \|_\infty$  de  $\mathbf{K}^2$  vers  $\mathbb{R}_+$  définie par :

$$\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) .$$

Par analogie avec ces exemples on note parfois  $x \mapsto \|x\|$  la norme d'un espace vectoriel  $E$ . Dans ce chapitre, nous préférons la notation fonctionnelle  $N$ .

### Definition 2

On dit qu'une norme  $N$  sur une algèbre  $A$  est une *norme d'algèbre* si elle vérifie les deux axiomes suivants :

1.  $\forall (x, y) \in A^2, \quad N(xy) \leq N(x)N(y)$  (*sous-multiplicativité*)
2.  $N(1_A) = 1$ .

On appelle *algèbre normée* tout couple  $(A, N)$  formé d'une algèbre et d'une norme d'algèbre  $N$  sur  $A$ .

L'application *valeur absolue* ou *module*  $\alpha \mapsto |\alpha|$  de  $\mathbf{K}$  vers  $\mathbb{R}_+$  est une norme d'algèbre. Le couple  $(\mathbf{K}, | \cdot |)$  s'appelle alors la structure d'*algèbre normée canonique* de  $\mathbf{K}$ .

#### ► Attention

- Dans une algèbre normée, on ne suppose pas l'égalité :

$$N(xy) = N(x)N(y)$$

pour tout  $(x, y) \in A^2$ . Cela entraînerait en effet que tout élément non nul soit simplifiable à droite et à gauche et limiterait considérablement l'intérêt de la notion.

- Si l'algèbre  $A$  n'est pas unitaire, ce qui est contraire à notre définition mais peu se rencontrer dans la littérature, le deuxième axiome de la définition ci-dessus est évidemment omis.

**Propriétés fondamentales**

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

On appelle *norme* du vecteur  $x$  de  $E$  le nombre  $N(x)$ . On dit qu'un vecteur  $x \in E$  est *unitaire*, ou *normé*, si sa norme est égale à 1.

La propriété d'homogénéité suivante est importante et a de nombreuses applications.

**Proposition 1**

Si  $E$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , tout vecteur  $x$  peut s'écrire  $x = \alpha u$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  et  $u \in E$  unitaire. Lorsque  $x$  est non nul, cette décomposition est unique et est donnée par :

$$\alpha = N(x) \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{N(x)}x.$$

Dans tout espace vectoriel normé  $(E, N)$ , on a les inégalités fondamentales suivantes :

**Proposition 2 (Inégalité de sous-linéarité)**

Pour tous  $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^n$  et  $(x_i) \in E^n$ , on a :

$$N \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| N(x_i).$$

**Proposition 3 (Première et seconde inégalités triangulaires)**

Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

et :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

**Démonstration** La première inégalité est l'un des axiomes des normes. On obtient la seconde de la façon suivante. L'inégalité :

$$N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$$

entraîne  $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$ . On obtient de même  $N(y) - N(x) \leq N(y - x)$ . La relation  $N(x - y) = N(y - x)$  conduit alors à :

$$|N(x) - N(y)| = \max(N(x) - N(y), N(y) - N(x)) \leq N(x - y). \quad \square$$

### Remarques

- Nous avons vu que les axiomes d'homogénéité et de sous-additivité entraînent l'axiome de *sous-linéarité*. Ils lui sont en fait équivalents ; la sous-additivité s'obtient pour  $n = 2$  et  $\alpha_i = 1$ , l'axiome d'homogénéité provient des relations :

$$N(\alpha x) \leq |\alpha| N(x) \quad \text{et} \quad N(x) = N(\alpha^{-1} \alpha x) \leq |\alpha|^{-1} N(\alpha x)$$

pour  $\alpha \neq 0$  et de  $N(0) = 0$ , dû à  $N(0) \leq 0$ , pour  $\alpha = 0$ .

- Pour montrer qu'une expression  $N(x)$  définit une norme, on vérifiera tout d'abord que  $x \mapsto N(x)$  est une application bien définie à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . On prouvera ensuite la sous-linéarité et la séparation
- Une norme  $N$  vérifie  $N(0) = 0$  et, par conséquent, l'équivalence :

$$N(x) = 0 \iff x = 0.$$

- On appelle *semi-norme* sur  $E$  toute application  $P$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}_+$  vérifiant l'axiome d'homogénéité et de sous-additivité et *espace vectoriel semi-normé* tout couple  $(E, P)$  formé d'un espace vectoriel et d'une semi-norme sur  $E$ . On se ramène alors au cas d'une norme en remarquant que l'ensemble  $F$  des  $x \in E$  vérifiant  $P(x) = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que la restriction de  $P$  à tout supplémentaire  $G$  de  $F$  est une norme sur  $G$ .

### Constructions d'espaces vectoriels normés

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

Les opérations classiques de restriction et de composition des applications fournissent les constructions suivantes :

1. si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , la restriction  $N|_F$  de  $N$  à  $F$  est une norme, appelée *norme induite* sur  $F$  par  $N$ . Le couple  $(F, N|_F)$  (ou  $(F, N)$  plus simplement) s'appelle le *sous-espace vectoriel normé induit* sur  $F$  par  $(E, N)$  ;
2. si  $u$  est un isomorphisme d'un espace vectoriel  $F$  sur  $E$ , la composée  $N \circ u$  est une norme sur  $F$  appelée *norme induite* sur  $F$  par  $u$ . Le couple  $(F, N \circ u)$  s'appelle l'*espace vectoriel normé induit* sur  $F$  par  $u$ .

Soit  $((E_i, N_i))_{i \in I}$  une famille finie ( $I$  est un ensemble fini) d'espaces vectoriels normés.

**Définition 3**

Si  $((E_i, N_i))_{i \in I}$  est une famille finie d'espaces vectoriels normés, l'application  $N$  de l'espace produit  $E = \prod_{i \in I} E_i$  vers  $\mathbb{R}_+$  définie par :

$$\forall x = (x_i) \in E, \quad N(x) = \max_{i \in I} (N_i(x_i))$$

est une norme.

On l'appelle la *norme produit* de  $(N_i)_{i \in I}$  et on dit que  $(E, N)$  est l'espace vectoriel normé produit de  $((E_i, N_i))_{i \in I}$ .

**Démonstration** L'application  $N$  est évidemment bien définie de  $E$  vers  $\mathbb{R}_+$ .

► Pour tous  $\alpha, \beta$  et  $x = (x_i), y = (y_i)$  de  $\mathbf{K}$  et  $E$ , on a :

$$\forall i, \quad N_i(\alpha x_i + \beta y_i) \leq \alpha N_i(x_i) + \beta N_i(y_i) \leq \alpha N(x) + \beta N(y)$$

et, par conséquent :

$$N(\alpha x + \beta y) \leq \alpha N(x) + \beta N(y).$$

► Soit  $x = (x_i)$  de  $E$  vérifiant  $N(x) = 0$ . La relation  $\forall i, N_i(x_i) \leq N(x)$  montre que l'on a  $\forall i, N_i(x_i) = 0$ . On en déduit  $\forall i, x_i = 0$  et  $x = 0$ . □

On utilisera essentiellement cette construction dans le cas des suites finies  $(E_i, N_i)_{i \in [1, n]}$ .

**Exemples d'espaces vectoriels normés de dimension finie**

L'espace vectoriel numérique  $\mathbf{K}^n$  est en général muni de la structure d'espace vectoriel produit de  $(\mathbf{K}, | \cdot |)$   $n$ -fois par lui-même.

**Définition 4**

On appelle *norme infinie* sur  $\mathbf{K}^n$  la norme produit :

$$\|\alpha\|_\infty = \max_{i \in [1, n]} |\alpha_i| \quad \text{où } \alpha = (\alpha_i) \in \mathbf{K}^n.$$

Les deux normes suivantes de  $\mathbf{K}^n$  sont aussi classiques :

1. la *norme un* :

$$\|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \quad \text{où } \alpha = (\alpha_i) \in \mathbf{K}^n ;$$

la vérification que c'est une norme est immédiate

2. la norme *deux* :

$$\|\alpha\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{où } \alpha = (\alpha_i) \in \mathbf{K}^n ;$$

L'application  $\alpha \mapsto \|\alpha\|_2$  est simplement la norme euclidienne de la structure euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$  dans le cas réel. Elle vérifie évidemment les axiomes d'homogénéité et de séparation dans le cas complexe. On obtient la sous-additivité à partir de l'inégalité triangulaire de la norme  $N_2$  de  $\mathbb{R}^n$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i + \beta_i|^2 \right)^{1/2} &\leq \left( \sum_{i=1}^n (|\alpha_i| + |\beta_i|)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous verrons dans le chapitre consacré aux espaces préhilbertiens que c'est la norme hermitienne de la structure hermitienne canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

Les normes  $\alpha \mapsto \|\alpha\|_\infty$ ,  $\alpha \mapsto \|\alpha\|_1$  et  $\alpha \mapsto \|\alpha\|_2$  sont deux à deux différentes. Elles donnent à  $\mathbf{K}^n$  des structures d'espace vectoriel normé deux à deux distinctes, mais sont reliées par des inégalités importantes dont nous verrons l'interprétation avec la notion de normes équivalentes (définition 39 page 369).

#### Proposition 4

Pour tout  $\alpha$  de  $\mathbf{K}^n$ , on a :

$$\|\alpha\|_\infty \leq \|\alpha\|_1 \leq n \|\alpha\|_\infty,$$

$$\|\alpha\|_\infty \leq \|\alpha\|_2 \leq \sqrt{n} \|\alpha\|_\infty,$$

$$\|\alpha\|_2 \leq \|\alpha\|_1 \leq \sqrt{n} \|\alpha\|_2.$$

**Démonstration** On a bien sûr :

$$\begin{aligned} \max_{i \in [1, n]} |\alpha_i| &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq n \max_{i \in [1, n]} |\alpha_i| \\ \left( \max_{i \in [1, n]} |\alpha_i| \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \leq n \left( \max_{i \in [1, n]} |\alpha_i| \right)^2. \end{aligned}$$

L'inégalité  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|\right)^2$  est évidente et :

$$\sum_{i=1}^n 1 |\alpha_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|\right)^{\frac{1}{2}}$$

provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la structure euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ . □

Ces inégalités sont optimales dans la mesure où elles deviennent des égalités pour certains vecteurs non nuls :  $(1, 0, \dots, 0)$  ou  $(1, 1, \dots, 1)$  par exemple.

**Corollaire 5**

Tout espace vectoriel  $E$  de dimension finie possède une norme.

**Démonstration** Si  $u$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $\mathbb{K}^n$  et  $N$  une norme sur  $\mathbb{K}^n$ , l'application :

$$x \mapsto N(u(x))$$

est une norme sur  $E$  par composition. □

Lorsque  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base de l'espace vectoriel  $E$ , on utilisera particulièrement les normes  $x \mapsto \|x\|_{\mathcal{B}, \infty}$ ,  $x \mapsto \|x\|_{\mathcal{B}, 1}$  et  $x \mapsto \|x\|_{\mathcal{B}, 2}$  de  $E$  définies par :

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{B}, \infty} &= \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\alpha_i| \\ \|x\|_{\mathcal{B}, 1} &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \\ \|x\|_{\mathcal{B}, 2} &= \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

où  $(\alpha_i)$  est la famille des coordonnées de  $x \in E$  dans  $\mathcal{B}$

Il existe bien sûr d'autres normes que celles que nous venons de décrire sur  $\mathbb{K}^n$  ou sur  $E$ .

**Exemple** L'application  $N$  de  $\mathbb{K}^n$  vers  $\mathbb{R}_+$  définie par :

$$N(\alpha) = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i t^{i-1} \right| dt \quad \text{avec } \alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{K}^n$$

est une norme.

Elle est évidemment sous-linéaire. Puisque l'intégrale d'une application continue positive est nulle si, et seulement si, l'application est nulle, la relation  $N(\alpha) = 0$  entraîne :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i t^{i-1} = 0.$$

On en déduit alors  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i$ .

### Exemples d'espaces vectoriels normes de fonctions

Les notions de norme infinie, de norme un et de norme deux de  $\mathbf{K}^n$  ont leurs analogues sur certains espaces vectoriels de fonctions de dimension infinie.

Soit  $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$  l'ensemble des applications d'un ensemble non vide vers  $\mathbf{K}$ .

#### Proposition 6

L'ensemble  $\mathcal{B}_{\mathbf{K}}(X)$  des applications *bornées* d'un ensemble non vide  $X$  vers  $\mathbf{K}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$  et l'application  $N_{\infty}$  de  $\mathcal{B}(X, \mathbf{K})$  vers  $\mathbb{R}_+$  définie par :

$$N_{\infty}(f) = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_X |f|$$

pour tout  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbf{K})$  est une norme d'algèbre.

On l'appelle la *norme de la convergence uniforme* (ou *norme infinie*) sur  $\mathcal{B}(X, \mathbf{K})$ .

**Démonstration** Une application  $f : X \rightarrow \mathbf{K}$  est bornée si, et seulement si, la partie non vide  $\{|f(x)| \mid x \in X\}$  de  $\mathbb{R}_+$  est majorée. L'application  $N_{\infty}$  est donc bien définie de  $\mathcal{B}_{\mathbf{K}}(X)$  vers  $\mathbb{R}_+$ . On a évidemment  $|f(x)| \leq N_{\infty}(f)$  pour tout  $x$ .

1. L'ensemble  $\mathcal{B}(X, \mathbf{K})$  contient la fonction nulle. Soient alors  $\alpha, \beta$  de  $\mathbf{K}$  et  $f, g$  de  $\mathcal{B}(X, \mathbf{K})$ . On a :

$$\forall x \in X, \quad |\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq |\alpha| |f(x)| + |\beta| |g(x)| \leq |\alpha| N_{\infty}(f) + |\beta| N_{\infty}(g).$$

Cela montre que  $\alpha f + \beta g$  est bornée et vérifie :

$$N_{\infty}(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| N_{\infty}(f) + |\beta| N_{\infty}(g).$$

L'ensemble  $\mathcal{B}(X, \mathbf{K})$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$  et l'application  $N_{\infty}$  sous-linéaire.

Si  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbf{K})$  vérifie  $N_{\infty}(f) = 0$ , la relation  $\forall x \in X, |f(x)| \leq N_{\infty}(f)$  montre que l'on a  $\forall x \in X, f(x) = 0$  et, par conséquent,  $f = 0$ . L'application  $N_{\infty}$  est donc une norme.



2. L'élément unité 1 de  $\mathcal{B}(X, \mathbf{K})$  est l'application constante de valeur 1. on a donc  $N_\infty(1) = 1$ . Soient alors  $f, g$  de  $\mathcal{B}(X, \mathbf{K})$ . On a :

$$\forall x \in X, \quad |f(x)g(x)| \leq |f(x)| |g(x)| \leq N_\infty(f)N_\infty(g).$$

On en déduit que  $fg$  est bornée et vérifie :

$$N_\infty(fg) \leq N_\infty(f)N_\infty(g).$$

C'est donc une norme d'algèbre □

Si il est nécessaire de préciser l'ensemble  $X$  considéré, on notera  $N_{\infty, X}$  la norme définie dans la proposition précédente.

**Remarque** Les applications caractéristiques  $f = \chi_{\{0\}}$  et  $g = \chi_{\{1\}}$  de  $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$  vérifient  $N_\infty(f)N_\infty(g) = 1$  et  $N_\infty(fg) = 0$ . L'algèbre normée  $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$  munie de  $N_\infty$  ne vérifie donc pas l'égalité :

$$\forall (f, g), \quad N_\infty(fg) = N_\infty(f)N_\infty(g).$$

**Exemples**

1. Si  $S$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , l'espace vectoriel  $\mathcal{C}(S, \mathbf{K})$  est contenue dans  $\mathcal{B}(S, \mathbf{K})$  puisque, comme nous l'avons vu dans le cours de première année, toute application continue d'un segment vers  $\mathbf{K}$  est bornée.

Nous considérerons fréquemment le sous-espace norme  $(\mathcal{C}(S, \mathbf{K}), N_\infty)$  de l'espace normé  $(\mathcal{B}(S, \mathbf{K}), N_\infty)$ .

2. Soient  $\mathbb{R}[x]$  l'algèbre des applications polynomiales de  $\mathbb{R}$  dans lui-même et  $A$  une partie bornée et infinie de  $\mathbb{R}$ . Puisque  $A$  est contenue dans un segment, toute application polynomiale  $P$  de  $\mathbb{R}[x]$  est bornée sur  $A$  et le nombre réel :

$$N_{\infty, A}(P) = \sup_{x \in A} |P(x)| = \sup_A |P|$$

bien défini. L'application  $P \mapsto N_{\infty, A}(P)$  est évidemment sous-linéaire. Si  $N_{\infty, A}(P)$  est nulle, l'application polynomiale s'annule sur un ensemble infini et, par conséquent, est nulle.

L'application  $N_{\infty, A}$  est donc une norme sur  $\mathbb{R}[x]$ .

On peut définir la norme de la convergence en moyenne ou norme un et de norme la convergence en moyenne quadratique ou norme deux sur des sous-espaces de suites (cas discret) ou de fonctions continues sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  (cas continu).

Soit  $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$  l'ensemble des suites d'éléments de  $\mathbf{K}$ .

Notons  $\ell^\infty, \ell^1$  et  $\ell^2$  les parties de  $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$  formées des éléments  $\alpha = (\alpha_n)$  vérifiant respectivement :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n| < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$$

(c'est-à-dire bornées, sommables et de carré sommable).

**Proposition 7**

Les parties  $\ell^\infty$ ,  $\ell^1$  et  $\ell^2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$  et les applications  $N_\infty$ ,  $N_1$  et  $N_2$  définies par :

$$N_\infty(\alpha) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|, \quad N_1(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| \quad \text{et} \quad N_2(\alpha) = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}$$

pour tout  $\alpha = (\alpha_i)$  de  $\ell^\infty$ ,  $\ell^1$  et  $\ell^2$  respectivement des normes.

**Démonstration** La situation  $(\ell^\infty, N_\infty)$  se réduit à  $(\mathcal{B}(\mathbf{N}, \mathbf{K}), N_\infty)$ . Nous ne démontrons que les assertions concernant  $(\ell^2, N_2)$ . Celles concernant  $(\ell^1, N_1)$  sont analogues et plus simples.

L'ensemble  $\ell^2$  contient évidemment la suite nulle. Soient alors  $\lambda, \mu$  de  $\mathbf{K}$  et  $\alpha, \beta$  de  $\ell^2$ . Pour tout entier  $n$ , la sous-linéarité de la norme deux de  $\mathbf{K}^{N+1}$  fournit l'inégalité :

$$\begin{aligned} \forall N, \quad \left( \sum_{n=0}^N |\lambda\alpha_n + \mu\beta_n|^2 \right)^{1/2} &\leq |\lambda| \left( \sum_{n=0}^N |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} + |\mu| \left( \sum_{n=0}^N |\beta_n|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |\lambda| N_2(\alpha) + |\mu| N_2(\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit  $\sum_n |\lambda\alpha_n + \mu\beta_n|^2 < +\infty$ , c'est-à-dire  $\lambda\alpha + \mu\beta \in \ell^2$  ainsi que :

$$N_2(\lambda\alpha + \mu\beta) \leq |\lambda| N_2(\alpha) + |\mu| N_2(\alpha)$$

La vérification de l'axiome de séparation est immédiate. □

Les espaces vectoriels  $\ell^1$ ,  $\ell^2$  et  $\ell^\infty$  sont deux à deux distincts et vérifient les inclusions strictes :

$$\ell^1 \subsetneq \ell^2 \subsetneq \ell^\infty$$

(Les inclusions proviennent de ce que le terme général d'une série absolument convergente tend vers 0. Elles sont strictes puisque la suite  $\left(\frac{1}{1+n}\right)$  appartient à  $\ell^2 \setminus \ell^1$  et la suite constante (1) à  $\ell^\infty \setminus \ell^2$ ).

Soit  $\mathcal{C}(I, \mathbf{K})$  l'espace vectoriel des applications continues d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbf{K}$ .

Notons  $\mathcal{L}_c^\infty(I, \mathbf{K})$ ,  $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbf{K})$  et  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbf{K})$  les parties de  $\mathcal{C}(I, \mathbf{K})$  formées des applications  $f$  continues vérifiant respectivement :

$$\sup |f| < +\infty, \quad \int_I |f| < +\infty \quad \text{et} \quad \int_I |f|^2 < +\infty$$

(c'est-à-dire bornées intégrables et de carré intégrable)

**Proposition 8**

Les parties  $\mathcal{L}_c^\infty(I, \mathbb{K})$ ,  $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$  et  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et les applications  $N_\infty$ ,  $N_1$  et  $N_2$  définies par :

$$N_\infty(\alpha) = \sup |f|, \quad N_1(\alpha) = \int_I |f| \quad \text{et} \quad N_2(\alpha) = \left( \int_I |f|^2 \right)^{1/2}$$

pour tout  $f$  de  $\mathcal{L}_c^\infty(I, \mathbb{K})$ ,  $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$  et  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$  respectivement sont des normes.

**Démonstration** Cela a été vu dans le cours de première année et sera repris dans les chapitres suivants concernant l'intégration. □

Si  $I$  est un segment  $S$  de  $\mathbb{R}$ , les espaces  $\mathcal{L}_c^\infty(S, \mathbb{K})$ ,  $\mathcal{L}_c^1(S, \mathbb{K})$  et  $\mathcal{L}_c^2(S, \mathbb{K})$  sont égaux à l'espace  $\mathcal{C}(S, \mathbb{K})$  des fonctions continues de  $S$  vers  $\mathbb{K}$

## 1.2 Espaces métriques

Dans cette sous-section,  $X$  désigne un ensemble.

**Définition 5**

On appelle *distance* sur un ensemble non vide  $X$  toute application  $d$  de  $X^2$  vers  $\mathbb{R}_+$  vérifiant les axiomes suivants :

1.  $\forall (x, y) \in X^2, \quad d(y, x) = d(x, y) \quad (\text{symétrie}),$
2.  $\forall (x, y, z) \in X^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{inégalité triangulaire}),$
3.  $\forall (x, y) \in X^2, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{séparation}).$

On appelle *espace métrique* tout couple  $(X, d)$  formé d'un ensemble non vide et d'une distance sur  $X$ .

**Remarque** On ne peut pas montrer l'implication  $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$  à partir des axiomes de symétrie et d'inégalité triangulaire (si  $d$  vérifie ces deux axiomes, il en est de même de  $1 + d$ ). L'axiome de séparation pour les distances est donc l'équivalence :

$$d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

**Exemple** Soit  $S$  la sphère de centre 0 et de rayon 1 de  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne orientée canonique. On appelle *distance sphérique* entre deux éléments  $x$  et  $y$  de  $S$  l'écart angulaire :

$$d_S(x, y) = \arccos(x | y).$$

L'application  $(x, y) \mapsto d_S(x, y)$  est bien définie de  $S^2$  vers  $[0, \pi]$ . Elle est évidemment symétrique et vérifie l'axiome de séparation puisque  $\arccos x \cdot y = 0$  entraîne :

$$(x | y) = 1 = \|x\|_2 \|y\|_2$$

et  $x = y$  par Cauchy-Schwarz. Considérons alors trois vecteurs  $x, y, z$  de  $S$  et les écarts angulaires  $\alpha, \beta, \gamma$  des couples  $(x, y)$ ,  $(y, z)$  et  $(x, z)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= (x | y) (y | z) - \|x \wedge y\| \|y \wedge z\| \\ &\leq (x | y) (y | z) - (x \wedge y | y \wedge z). \end{aligned}$$

Les propriétés du produit mixte et la formule du double produit vectoriel fournissent les relations :

$$\begin{aligned} (x \wedge y | y \wedge z) &= [x, y, y \wedge z] \\ &= [y, y \wedge z, x] \\ &= (y \wedge (y \wedge z) | x) \\ &= ((z | y) y - (y | y) z | x) \\ &= (z | y) (y | x) - (z | x) (y | y) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &\leq (x | y) (y | z) - (x \wedge y | y \wedge z) \\ &\leq (x | y) (y | z) - (x | y) (y | z) + (x | z) (y | y) \\ &\leq (x | z) \\ &\leq \cos \gamma. \end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité triangulaire en remarquant qu'il n'y a rien à démontrer si  $\alpha + \beta$  est supérieur ou égal à  $\pi$  et en utilisant la décroissance de  $\cos$  sur  $[0, \pi]$  sinon.

On peut montrer que  $d_S(x, y)$  est la plus petite longueur d'arc de classe  $C^1$  par morceaux de  $S$  allant de  $x$  à  $y$  et que ce minimum est atteint pour le plus petit arc d'extrémité  $x$  et  $y$  de grand cercle de  $S$  (cercle centré en  $0$ ) passant par  $x$  et  $y$ . Pour cette raison, la distance  $d_S$  s'appelle aussi la *distance géodésique* de  $S$ .

### Propriétés fondamentales

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

#### Proposition 9

Pour toute suite  $(x_i)_{i \in [1, n]} \in E^n$ , on a :

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

**Proposition 10 (Première et seconde inégalités triangulaires)**

Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

et :

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

**Démonstration** La première inégalité est l'un des axiomes des distances. On obtient la seconde de la façon suivante. L'inégalité :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

entraîne  $d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$ . On obtient de même  $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$ . La relation  $d(z, y) = d(y, z)$  conduit alors à :

$$|d(x, y) - d(x, z)| = \max(d(x, y) - d(x, z), d(x, z) - d(x, y)) \leq d(y, z). \quad \square$$

La distance entre les éléments de  $X$  s'étend aux parties non vides par la définition suivante :

**Définition 6**

On appelle *distance de deux parties* non vides  $A$  et  $B$  de  $X$ , le nombre :

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

**Démonstration** L'ensemble  $\{d(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\}$  possède une borne inférieure puisque c'est une partie non vide de  $\mathbb{R}_+$ . □

On a bien sûr  $d(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$ . Si  $a$  est un point de  $E$ , on notera  $d(a, B)$  la distance  $d(\{a\}, B)$ . On a évidemment :

$$d(a, B) = \inf \{d(a, y) \mid y \in B\}.$$

**Proposition 11**

Si  $A$  est une partie non vide de  $E$ , on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

**Démonstration** Pour tout  $a$  de  $A$ , on a :

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

par définition de  $d(x, A)$ . On en déduit :

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

pour tout  $a$  de  $A$  et, par conséquent,  $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ .

On a ainsi  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$  et, par symétrie,  $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ . Cela entraîne :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \quad \square$$

### Constructions d'espaces métriques

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

Comme dans le cas des espaces vectoriels normés, les opérations classiques de restriction et de composition d'applications fournissent les constructions suivantes :

1. si  $Y$  est une partie de  $X$ , la restriction de  $d$  à  $Y^2$  est une distance, appelée *distance induite sur  $Y$  par  $d$*  et notée  $d$  en général. Le couple  $(Y, d)$  s'appelle *l'espace métrique induit sur  $Y$  par  $(X, d)$* .
2. si  $f$  est une bijection d'un ensemble  $Y$  sur  $X$ , la composée :

$$d' : (x, y) \mapsto d(f(x), f(y))$$

est une distance sur  $Y$ , appelée *distance induite par  $f$  sur  $Y$* . Le couple  $(Y, d')$  s'appelle *l'espace métrique induit par  $f$  sur  $Y$* .

Soit  $((X_i, d_i))_{i \in I}$  une famille finie ( $I$  est un ensemble fini) d'espaces métriques.

#### Définition 7

Si  $((X_i, d_i))_{i \in I}$  est une famille finie d'espaces métriques, l'application  $d$  de l'espace produit  $X = \prod_{i \in I} X_i$  vers  $\mathbb{R}_+$  définie par :

$$\forall (x, y) = ((x_i), (y_i)) \in X^2, \quad d(x, y) = \max_i (d_i(x_i, y_i))$$

est une distance.

On l'appelle la *distance produit* de  $(d_i)_{i \in I}$  et on dit que  $(X, d)$  est *l'espace métrique produit* de  $((X_i, d_i))_{i \in I}$ .

**Démonstration** C'est la même démarche que dans le cas de la norme produit □

**Espace métrique associé à un espace normé**

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

**Proposition 12**

L'application  $d$  de  $E^2$  vers  $\mathbb{R}_+$  définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = N(y - x)$$

est une distance sur  $E$ .

On l'appelle la *distance canonique* de  $(E, N)$  et on dit que  $(E, d)$  est l'*espace métrique canoniquement associé* à  $(E, N)$ .

**Démonstration** L'application  $d$  est bien définie. Les relations :

$$N(x - y) = N(- (y - x)) = N(y - x)$$

et

$$N(z - x) = N((y - x) + (z - y)) \leq N(y - x) + N(z - y)$$

montrent qu'elle vérifie l'axiome de symétrie et l'inégalité triangulaire. Elle vérifie l'axiome de séparation puisque  $d(x, y) = 0$  est équivalente à  $x - y = 0$  et, finalement, à  $x = y$ . □

Par définition même, la distance canonique de  $E$  vérifie la relation :

$$\forall (x, y, z) \in E^2, \quad d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

On dit qu'elle est invariante par translation.

**Définition 8**

Si  $A$  est une partie de  $E$ , on appelle *distance induite* sur  $A$  par  $(E, N)$  la distance  $d$  induite sur  $A$  par la distance canonique de  $E$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux parties des espaces vectoriels normés  $(E, N)$  et  $(F, N)$ , la distance induite par l'espace produit de  $(E \times F, N)$  est le produit des distances induites sur  $A$  et  $B$ .

Nous considérerons toujours, sauf mention expresse du contraire, qu'une partie non vide d'un espace vectoriel normé est muni de sa structure d'espace métrique induite.

**Exemples**

1. L'application qui associe au nombre complexe  $z = x + iy$  l'unique point de la sphère unité  $S$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  situé sur la droite passant par  $m = (x, y, 0)$  et le pôle nord  $N = (0, 0, 1)$  est donnée par :

$$z \mapsto \frac{1}{|z|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Elle se prolonge en une unique bijection  $\varphi$  de la *sphère de Riemann*  $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  sur  $S$  en posant  $\varphi(\infty) = N$ .

On appelle distance *chordale* sur  $\tilde{\mathbb{C}}$ , la distance  $d_{\text{ch}}(z, z') = \|\varphi(z) - \varphi(z')\|_2$  où  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ . On montre par calcul qu'elle est donnée par :

$$d_{\text{ch}}(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |z'|^2}}$$

$$d_{\text{ch}}(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

pour  $z, z'$  dans  $\mathbb{C}$ .

2. Curieusement, l'espace métrique  $(S, d_g)$  constitué de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  munie de la distance géodésique n'est isomorphe à aucun sous-espace métrique d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . S'il en était ainsi, il existerait une injection  $f$  de  $S$  dans  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$\forall(x, y) \in S^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_2 = d_S(x, y).$$

Les images  $A$  et  $B$  des *pôles sud*  $(0, 0, -1)$  et *nord*  $(0, 0, 1)$  de  $S$  sont des points à distance  $\pi$  de  $\mathbb{R}^n$ . Tous les points  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$   $(\theta \in \mathbb{R})$  de l'équateur de  $S$ , qui sont à distance géodésique  $\frac{\pi}{2}$  des pôles, seraient envoyés par  $f$  sur le milieu du segment  $[A, B]$ . Cela contredirait l'injectivité de  $f$ .

### 1.3 Parties bornées et applications lipschitziennes

Dans cette sous-section,  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  désigneront des espaces métriques et  $(E, N)$  et  $(F, N)$  des espaces vectoriels normes.

Les notions définies pour les espaces metriques s'appliqueront évidemment à toute partie d'un espace vectoriel normé muni de la distance induite

#### Boules et parties bornées

##### Définition 9

Soient  $a$  un élément de  $X$  et  $r$  un réel **strictement positif**.

On appelle *boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$*  de  $(X, d)$  la partie :

$$B_X(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

et *boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$*  de  $(X, d)$  la partie :

$$D_X(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}.$$

On notera  $\mathcal{B}_X(a)$  et  $\mathcal{D}_X(a)$  les familles des boules ouvertes et des boules fermées de centre  $a$  et de rayon **strictement positif** de  $(X, d)$ .

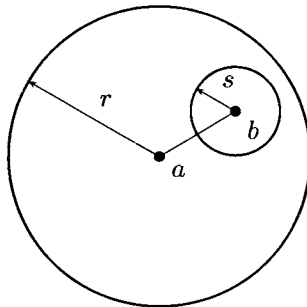


**Remarques**

- Contrairement à ce que l'on rencontre parfois dans la littérature, nous imposons par définition au rayon des boules d'être un réel strictement positif. Cela nous obligera à traiter particulièrement le vide et les singletons.
- Soient  $a, b$  de  $X$  et  $r, s$  de  $\mathbb{R}_+^*$ . Les inégalités triangulaires montrent les implications suivantes :

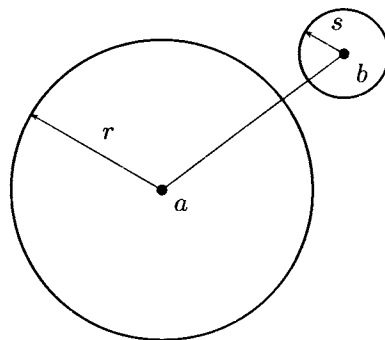
$$d(a, b) \leq r - s \implies B(b, s) \subset B(a, r)$$

$$d(a, b) \leq r - s \implies D(b, s) \subset D(a, r)$$



$$d(a, b) \geq |r + s| \implies B(b, s) \cap B(a, r) = \emptyset$$

$$d(a, b) > |r + s| \implies D(b, s) \cap D(a, r) = \emptyset$$



- On appelle *sphère de centre a et de rayon r > 0* de  $(X, d)$  la partie :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}.$$

C'est la partie  $D(a, r) \setminus B(a, r)$ .

- Les boules d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  sont convexes puisque l'inégalité :

$$N(tx + (1 - t)y - a) = N(t(x - a) + (1 - t)(y - a))$$

$$\leq |t| N(x - a) + |1 - t| N(y - a)$$

montre que l'on a :

$$N(tx + (1 - t)y - a) < r$$

pour tout  $(x, y, t)$  de  $B(a, r)^2 \times [0, 1]$  et :

$$N(tx + (1 - t)y - a) \leq r$$

pour tout  $(x, y, t)$  de  $D(a, r)^2 \times [0, 1]$ .

- Dans ce qui suit, nous ne noterons l'espace en indice que lorsque le contexte le nécessite.

Les définitions mêmes de sous-espaces métriques et des espaces métriques produit montrent les points suivants :

1. Les boules de l'espace métrique induit sur une partie  $Y$  de  $X$  sont les *traces* sur  $Y$  (c'est-à-dire les intersections avec  $Y$ ) des boules correspondante de  $X$  : pour tout  $a$  de  $Y$  et  $r$  de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$B_Y(a, r) = B_X(a, r) \cap Y \quad \text{et} \quad D_Y(a, r) = D_X(a, r) \cap Y.$$

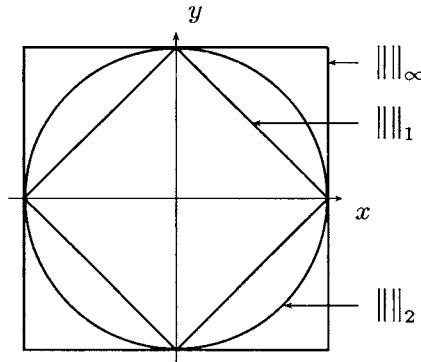
C'est donc le cas lorsque l'on considère l'espace métrique induit par un espace vectoriel normé sur une de ses parties.

2. Les boules de l'espace métrique produit des espaces  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  sont les produits des boules correspondantes de  $X$  et  $Y$  : pour tout  $(a, b)$  de  $X \times Y$  et  $r$  de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$B_{X \times Y}(a, r) = B_X(a, r) \times B_Y(b, r)$$

$$D_{X \times Y}(a, r) = D_X(a, r) \times D_Y(b, r).$$

*Exemple* Les boules fermées  $D(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  pour les normes  $N_\infty$ ,  $N_1$  et  $N_2$  sont :



### Parties et applications bornées

#### Définition 10

On dit qu'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est *bornée* si elle est contenue dans une boule.

Les points suivants sont évidents :

1. Une partie  $A$  est bornée si, et seulement si, pour tout  $a \in X$ , il existe une boule fermée  $D(a, K)$  contenant  $A$  : l'inclusion  $A \subset D(a, K)$  entraîne en effet  $A \subset D(b, K')$  avec  $K' = K + d(a, b)$  pour tout  $b$ .
2. Une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est, par conséquent, bornée si, et seulement si, il existe une constante  $K$  de  $\mathbb{R}_+$  telle que l'on ait :

$$\forall x \in A, \quad N(x) \leq K.$$

3. Une partie finie, une partie d'une partie bornée et une réunion d'un nombre fini de parties bornées sont bornées.

On appelle *diamètre* d'une partie non vide  $A$  de  $X$ , la borne supérieure :

$$\sup \{d(x, y) \mid (x, y) \in A^2\}$$

dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Il est clair qu'une partie non vide est bornée si, et seulement si, son diamètre est fini.

*Exemple* Par définition, les boules ouvertes et fermées  $B(a, r)$  et  $D(a, r)$  d'un espace métrique sont bornées et l'inégalité triangulaire :

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a)$$

montre que leur diamètre est inférieur ou égal à  $2r$ .

Dans un espace vectoriel normé non nul  $(E, N)$ , le diamètre de  $B(a, r)$  et  $D(a, r)$  est égal à  $2r$  puisque  $u$  étant un vecteur unitaire de  $E$ , les éléments :

$$x = a + (r - 2^{-n})u \quad \text{et} \quad y = a + (r + 2^{-n})u$$

appartiennent à  $B(a, r)$  et vérifient  $d(x, y) = 2(r - 2^{-n})$ .

Il n'en est pas de même, en général, dans un espace métrique. La boule  $D(1, 2)$  de l'espace métrique  $\mathbb{R}_+$ , égale au segment  $[0, 3]$ , est de diamètre 3 et non 4 !

### Définition 11

On dit qu'une application  $f$  d'un ensemble  $Z$  vers  $(X, d)$  est *bornée* si l'image  $f(Z)$  est bornée.

Une application  $f$  d'un ensemble  $Z$  vers un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est donc *bornée* s'il existe une constante positive  $K$  telle que, pour tout  $x \in Z$ ,  $N(f(x)) \leq K$ .

L'axiome de sous-linéarité montre que l'ensemble des applications bornées de  $Z$  vers un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de  $Z$  vers  $E$  ; si  $f$  est bornée par  $K$  et  $g$  par  $L$ , il vient pour tout  $x \in Z$  :

$$N((\alpha f + \beta g)(x)) \leq |\alpha| N(f(x)) + |\beta| N(g(x)) \leq (|\alpha| K + |\beta| L)$$

### Applications lipschitziennes et isométries

Soit  $(Z, d)$  un espace métrique.

#### Définition 12

On dit qu'une application  $f$  de  $(X, d)$  dans  $(Y, d)$  est  $K$ -lipschitzienne avec  $K \in \mathbb{R}_+$  si l'on a :

$$\forall (x, x') \in X^2, \quad d(f(x), f(x')) \leq K d(x, x').$$

L'axiome de sous-linéarité montre que l'ensemble des applications lipschitziennes de  $X$  vers un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de  $X$  vers  $E$  ; si  $f$  est  $K$ -lipschitzienne et  $g$   $L$ -lipschitzienne de  $X$  vers  $E$ , il vient :

$$\begin{aligned} N((f + g)(x) - (f + g)(x')) &\leq N(f(x) - f(x')) + N(g(x) - g(x')) \\ &\leq (K + L) d(x, x') \end{aligned}$$

et :

$$N((\alpha f)(x) - (\alpha f)(x')) \leq |\alpha| N(f(x) - f(x')) \leq |\alpha| K d(x, x')$$

pour tout  $(x, x') \in X^2$ .

#### Proposition 13

La composée de deux applications lipschitziennes est lipschitzienne.

**Démonstration** Si  $f$  est  $K$ -lipschitzienne de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  et  $g$   $L$ -lipschitzienne de  $(Y, d)$  de  $(Z, d)$ , on a :

$$d((g \circ f)(x), (g \circ f)(x')) \leq L d(f(x), f(x')) \leq K L d(x, x')$$

pour tout  $(x, x') \in X^2$ . □

*Exemples*

1. La norme  $N$  est une application 1-lipschitzienne de  $(E, N)$  vers  $\mathbb{R}$  puisque l'on a :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad |N(x) - N(x')| \leq N(x - x').$$

2. Si  $A$  est une partie non vide de  $X$ , l'application  $x \mapsto d(x, A)$  est 1-lipschitzienne de  $X$  vers  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  puisque l'on a :

$$\forall (x, x') \in X^2, \quad |d(x, A) - d(x', A)| \leq d(x, x').$$

Il est en de même des applications  $x \mapsto d(x, a)$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  ( $a \in X$ ) et  $x \mapsto \|x\|$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ .

3. L'application distance  $d$  de  $X^2$  vers  $\mathbb{R}_+$  est 2-lipschitzienne de  $X^2$  muni de la distance produit vers  $\mathbb{R}$  puisque l'on a :

$$\forall ((x, y), (x', y')) \in X^2, \quad |d(x, y) - d(x', y')| \leq 2d((x, y), (x', y')).$$

En effet l'inégalité polygonale  $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$  entraîne :

$$d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y, y').$$

On obtient par symétrie  $d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y, y')$  et, par conséquent :

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Il vient finalement :

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(x', y')| &\leq 2 \max(d(x, x'), d(y, y')) \\ &\leq 2d((x, y), (x', y')). \end{aligned}$$

4. Si  $(X, d)$  est l'espace métrique produit de la famille  $((X_i, d_i))_{i \in I}$ , la  $k^{\text{ième}}$  projection  $p_k : (x_i) \mapsto x_k$  est une application 1-lipschitzienne de  $(X, d)$  vers  $(X_k, d_k)$  puisque l'on a :

$$d_k(x_k, y_k) \leq \max_{i \in I} d_i(x_i, y_i) = d((x_i), (y_i))$$

pour tous  $(x_i), (y_i)$  de  $X$ .

**Définition 13**

On dit qu'une application  $f$  de  $(X, d)$  dans  $(Y, d)$  est une isométrie si l'on a :

$$\forall (x, x') \in X^2, \quad d(f(x), f(x')) = d(x, x').$$

On appelle *isométrie* une application isométrique. Une application isométrique est évidemment injective. Elle est aussi 1-lipschitzienne mais la réciproque est évidemment fausse.

### Applications linéaires lipschitziennes

Soient  $(E, N)$  et  $(F, N)$  deux espaces vectoriels normés.

#### Proposition 14

Si  $u$  est une application linéaire  $u$  de  $(E, N)$  vers  $(F, N)$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  est  $K$ -lipschitzienne ;
- (ii)  $\forall x \in E, \quad N(u(x)) \leq KN(x)$ .

**Démonstration** Il suffit, en effet, de remarquer que l'on a :

$$N(u(y) - u(x)) = N(u(y - x))$$

pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ . □

Un application linéaire lipschitzienne transforme évidemment toute partie bornée en partie bornée.

L'axiome d'homogénéité permet d'obtenir la réciproque partielle suivante dans le cadre des espaces vectoriels normés.

#### Proposition 15

Une application linéaire  $u$  de  $(E, N)$  et  $(F, N)$  est lipschitzienne si, et seulement si, il existe  $r > 0$  et  $K \geq 0$  tels que :

$$\forall x \in E, \quad N(x) \leq r \implies N(u(x)) \leq K.$$

**Démonstration** L'implication directe est évidente. Pour montrer la réciproque considérons un vecteur non nul  $x$  de  $E$ . Le vecteur  $x' = r \frac{x}{N(x)}$  vérifiant  $N(x') \leq r$ , il vient :

$$N(u(x)) = rN(x)N(u(x')) \leq rKN(x).$$

Cette relation étant évidente pour  $x = 0$ , l'application  $u$  est lipschitzienne. □

► **Attention** La condition  $r > 0$  de la proposition précédente est évidemment indispensable.

**Exemples**

1. La  $k^{\text{ième}}$  projection  $p_k : (x_i) \mapsto x_k$  d'un espace produit  $\left(\prod_{i \in I} E_i, N\right)$  vers  $(E_k, N_k)$  est linéaire 1-lipschitzienne puisque l'on a :

$$\forall (x_i) \in \prod_{i \in I} E_i, \quad N_k(x_k) \leq \max_{i \in I} N_i(x_i) = N((x_i))$$

(la norme  $N$  est bien sûr la norme produit).

2. L'application somme  $s : (x, y) \mapsto x + y$  de  $E^2$  vers  $E$  est linéaire 2-lipschitzienne puisque l'on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq 2 \max(N(x), N(y)) = 2N(x, y).$$

**Définition 14**

On dit qu'une application bilinéaire  $B$  du produit  $E \times F$  vers un espace vectoriel normé  $(G, N)$  est  $K$ -bilipschitzienne si l'on a :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad N(B(x, y)) \leq KN(x)N(y).$$

**Proposition 16**

Une application bilinéaire  $B$  de  $E \times F$  vers  $(G, N)$  est bilipschitzienne si, et seulement si, il existe  $r > 0$  et  $K \geq 0$  tels que :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad N(x) \leq r \quad \text{et} \quad N(y) \leq r \implies N(B(x, y)) \leq K.$$

**Démonstration** L'implication directe est évidente. Pour montrer la réciproque, considérons deux vecteurs non nuls  $x$  et  $y$  de  $E$ . Les vecteurs  $x' = r \frac{x}{N(x)}$  et  $y' = r \frac{y}{N(y)}$  vérifiant  $N(x') \leq r$  et  $N(y') \leq r$ , il vient :

$$N(B(x, y)) = r^2 N(x)N(y)N(B(x', y')) \leq r^2 KN(x)N(y).$$

Cette relation étant évidente pour  $x = 0$  ou  $y = 0$ , l'application  $B$  est bilipschitzienne □

**Exemple**

1. L'application « produit »  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$  de  $\mathbb{K} \times E$  vers  $E$  est 1-bilipschitzienne puisque l'on a :

$$\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\alpha x) \leq |\alpha| N(x).$$

2. Si  $A$  est une algèbre normée, l'application « produit »  $(x, y) \mapsto xy$  de  $A^2$  vers  $A$  est 1-bilipschitzienne puisque par définition :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad N(xy) \leq N(x)N(y).$$

## 2. Suites et séries

Dans cette section,  $(X, d)$  désignera un espace métrique et  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

Les notions définies pour les espaces métriques s'appliqueront évidemment à toute partie d'un espace vectoriel normé muni de la distance induite

### 2.1 Suites et séries convergentes

#### Définition 15

On dit que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments d'un espace métrique  $(X, d)$  converge vers l'élément  $\ell \in X$  si la suite réelle  $(d(x_n, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

Ainsi, une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  si, et seulement si, elle vérifie la relation :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies d(x_n, \ell) \leq \varepsilon.$$

#### Théorème 17 (Unicité de la limite)

Une suite d'éléments de  $(X, d)$  converge vers au plus un élément de  $X$ .

**Démonstration** Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  et  $\ell'$ , l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq d(\ell, \ell') \leq d(\ell, x_n) + d(x_n, \ell')$$

montre que la suite constante  $(d(\ell, \ell'))$  converge vers 0 dans  $\mathbb{R}$ . On a donc  $d(\ell, \ell') = 0$  et  $\ell = \ell'$  par séparation.  $\square$

#### Remarques

- Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *convergente* s'il existe un élément  $\ell$  de  $X$  tel que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ . Dans ces conditions, l'unique élément  $\ell$  de  $E$  tel que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  s'appelle alors la *limite* de la suite et se note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

On dit qu'une suite est *divergente* si elle ne converge pas.

- Toute suite constante de valeur  $\ell$  est convergente de limite  $\ell$ .
- La notion de convergence est bien sûr *asymptotique* ; pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un élément  $\ell$  si, et seulement si, sa restriction  $(x_n)_{n \geq n_0}$  converge vers  $\ell$ .



- La notion de limite est *indépendante du contexte* ; si  $A$  est une partie de  $X$ , une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A^{\mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in A$  dans le sous-espace métrique  $(A, d)$  si, et seulement si, elle converge vers  $\ell$  dans  $(X, d)$ .
- Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments d'un *espace vectoriel normé*  $(E, N)$  converge vers  $\ell \in E$  si  $(x_n - \ell)$  converge vers  $0$ . En particulier,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  si, et seulement si, la suite  $(x_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $0$ . Cela s'écrit formellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies N(x_n - \ell) \leq \varepsilon.$$

- La convergence dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{B}(X, E), N_\infty)$  fera l'objet du chapitre consacré aux suites et séries d'applications. Signalons tout de suite la difficulté essentielle de cette notion : si une suite  $(f_n)$  d'éléments de  $(\mathcal{B}(X, E), N_\infty)$  converge vers  $f$  de  $\mathcal{B}(X, E)$ , la relation :

$$N(f_n(x) - f(x)) \leq N_\infty(f_n - f)$$

montre que pour tout  $x \in X$ , la suite  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$  dans  $(E, N)$ , mais la réciproque est fautive en général.

### Séries convergentes

Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $E$ , on appelle, comme dans le cas numérique, *série de terme général*  $x_n$ , et on note  $\sum x_n$ , la suite des *sommes partielles*  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = x_0 + \dots + x_n.$$

#### Définition 16

On dit que la série  $\sum x_n$  est *convergente* dans  $E$  si la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

La limite de  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'appelle alors la somme de  $\sum x_n$  et se note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

► **Attention** Comme pour les séries numériques, on distinguera soigneusement le symbole  $\sum x_n$  qui désigne la série à étudier sans préjuger de sa convergence, du symbole  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  qui désigne la somme de la série lorsqu'elle converge

On dit qu'une série est *divergente* si elle ne converge pas.

La notion de convergence d'une série est aussi *asymptotique* : la série  $\sum x_n$  est convergente si, et seulement si, la série  $\sum_{n \geq n_0+1} x_n$  est convergente puisque ses sommes partielles sont données pour tout  $n \geq n_0$  par :

$$\sum_{k=n_0+1}^n x_k = -s_{n_0} + \sum_{k=0}^n x_k$$

Dans ces conditions, la somme de  $\sum_{n \geq n_0+1} x_n$ , appelée *reste à l'ordre  $n_0$*  de  $\sum_{n \geq 0} x_n$ , vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = s_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} x_n.$$

## 2.2 Valeurs d'adhérence

Comme dans le cas des suites numériques, on appelle *suite extraite* ou *sous-suite* d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(X, d)$ , toute suite de la forme  $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\sigma$  est une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

### Définition 17

On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de l'espace métrique  $(X, d)$ , tout élément de  $X$  limite d'une suite extraite convergente de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Proposition 18

Un élément  $\ell$  de  $E$  est une valeur d'adhérence de la suite si, et seulement si, pour tout  $r > 0$ , l'ensemble des  $n$  tels que  $x_n \in D(\ell, r)$  est infini.

**Démonstration** Si  $\ell$  est la limite d'une suite extraite  $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , pour tout  $r > 0$ , il existe  $N$  tel que  $x_{\sigma(n)} \in D(\ell, r)$  pour tout  $n \geq N$ . L'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in D(\ell, r)\}$$

est alors infini puisqu'il contient  $\sigma(\llbracket N, +\infty \rrbracket)$ .

Si pour tout  $r > 0$ , l'ensemble des  $n$  tels que  $x_n \in D(\ell, r)$  est infini, on construit une application  $\sigma$  strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans lui-même par récurrence de la façon suivante :

1. On choisit  $\sigma(0) \in \mathbb{N}$  tel que  $x_{\sigma(0)} \in D(\ell, 2^{-0})$ .

2. Connaissant  $\sigma(k)$ , on choisit  $\sigma(k + 1)$  dans l'intersection :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in D(\ell, 2^{-k-1})\} \cap [\sigma(k) + 1, +\infty[$$

qui n'est pas vide puisque  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in D(\ell, 2^{-k-1})\}$  n'est pas borné

Finalement, la suite extraite  $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_{\sigma(n)}, \ell) \leq 2^{-n}$  et converge vers  $\ell$ . □

**Proposition 19**

Toute suite convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.

**Démonstration** La limite  $\ell$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien sûr une valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Si, réciproquement,  $\ell'$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe une suite extraite  $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\ell'$ . Comme la suite  $(d(x_{\sigma(n)}, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de la suite  $(d(x_n, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 0 dans  $\mathbb{R}$ , la suite  $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi vers  $\ell$ . On obtient donc  $\ell = \ell'$  par le théorème d'unicité. □

On utilise fréquemment la proposition précédente sous la forme contraposée suivante : une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

*Exemples*

1. La suite réelle  $((-1)^n)$  ne converge pas puisqu'elle possède 1 et  $-1$  comme valeurs d'adhérence.
2. Une suite possédant une seule valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente : la suite réelle  $(x_n)$ , définie par :

$$x_n = (1 - (-1)^n)n.$$

ne possède que 0 comme valeur d'adhérence dans  $\mathbb{R}$ . Néanmoins, elle ne converge pas puisque  $(x_{2n+1})$  tend vers l'infini.

**2.3 Relations de comparaison**

**Définition 18**

On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est *dominée* par la suite réelle  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il existe un nombre entier  $n_0$  et une constante réelle  $K$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq K |\alpha_n|.$$

**Définition 19**

On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est *négligeable* devant la suite réelle  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq \varepsilon |\alpha_n|.$$

Comme dans le cas réel, on écrira ces relations  $(x_n) = O(\alpha_n)$  et  $(x_n) = o(\alpha_n)$ . Par définition, la suite vectorielle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dominée par  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou négligeable devant  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si, et seulement si, la suite réelle  $(N(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est dominée par  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou négligeable devant  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Cette remarque ramène les propriétés de ces relations à celles, bien connues, des relations correspondantes entre les suites réelles.

**Proposition 20**

- La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *dominée* par  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si, et seulement si, il existe un entier  $n_0$  et une suite  $(y_n)_{n \geq n_0}$  de  $E$  bornée tels que  $x_n = \alpha_n y_n$  pour tout  $n \geq n_0$ .
- La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *négligeable* devant  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si, et seulement si, il existe un entier  $n_0$  et une suite  $(y_n)_{n \geq n_0}$  de  $E$  convergeant vers 0 tels que  $x_n = \alpha_n y_n$  pour tout  $n \geq n_0$ .

**Démonstration** Dans les deux cas, il existe un rang  $n_0$  et une constante  $K$  tels que  $N(x_n) \leq K |\alpha_n|$  pour tout  $n \geq n_0$ . La suite  $(y_n)_{n \geq n_0}$  définie par :

$$y_n = \begin{cases} \alpha_n^{-1} x_n & \text{si } n \geq n_0 \text{ et } \alpha_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n \geq n_0 \text{ et } \alpha_n = 0 \end{cases}$$

vérifie alors  $x_n = \alpha_n y_n$  pour tout  $n \geq n_0$ .

Les deux points de la proposition sont alors évidents □

**Définition 20**

On dit que deux suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $(E, N)$  sont *équivalentes* si la suite  $(y_n - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est négligeable devant  $(N(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

On écrira bien sûr  $(x_n) \sim (y_n)$ .

Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont équivalentes, la suite  $(N(y_n - x_n))$  est négligeable devant  $(N(x_n))$ . L'inégalité :

$$|N(y_n) - N(x_n)| \leq N(y_n - x_n)$$

montre alors que  $(N(y_n) - N(x_n))$  est négligeable devant  $(N(x_n))$  et que les suites  $(N(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(N(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont équivalentes.

**Proposition 21**

La relation «équivalente» entre les suites de  $(E, N)$  est une relation d'équivalence.

**Démonstration** Cette relation est trivialement réflexive.

Si  $(x_n)$  est équivalente à  $(y_n)$ , la suite  $(N(x_n))$  est dominée par  $(N(y_n))$ . On en déduit que  $(N(y_n) - N(x_n))$  est aussi négligeable devant  $(N(y_n))$  et, par conséquent, que  $(y_n)$  est équivalente à  $(x_n)$ .

Si  $(x_n)$  est équivalente à  $(y_n)$  et  $(y_n)$  est équivalente à  $(z_n)$ , la relation  $(N(y_n))$  est dominée par  $(N(x_n))$  montre que les suites  $(y_n - x_n)$  et  $(z_n - y_n)$  sont négligeables devant  $(N(x_n))$ . Par addition, on voit que  $(z_n - x_n)$  est négligeable devant  $(N(x_n))$  et, donc, que  $(x_n)$  est équivalente à  $(z_n)$ .  $\square$

### 3. Topologie

Dans cette section,  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  désigneront des espaces métriques et,  $(E, N)$  et  $(F, N)$  des espaces vectoriels normés.

Les notions définies pour les espaces métriques s'appliqueront évidemment à toute partie d'un espace vectoriel normé muni de la distance induite.

#### 3.1 Voisines et ouverts

##### Définitions

**Définition 21**

On dit qu'une partie  $V$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est un *voisinage* de  $a \in X$  s'il existe un nombre réel  $r > 0$  tel que la boule fermée  $D(a, r)$  soit contenue dans  $V$ .

**Définition 22**

On dit qu'une partie de  $U$  est *ouverte* si c'est un voisinage de chacun de ses points.

On appelle *ouvert de  $X$*  toute partie ouverte.

Par définition même, les parties vide  $\emptyset$  et pleine  $X$  sont ouvertes

**Proposition 22**

Une boule ouverte est ouverte.

**Démonstration** L'inégalité triangulaire montre immédiatement que pour tout  $x$  de  $B(a, R)$ , la boule fermée :

$$D\left(x, \frac{1}{2}(R - d(a, x))\right)$$

est contenue dans  $B(a, R)$  (voir page 321). □

On note  $\mathcal{V}_X(a)$  la famille des voisinages de  $a$ . La famille  $\mathcal{V}_X(a)$  possède les propriétés suivantes :

1. tout voisinage de  $a$  contient  $a$ ,
2. toute partie contenant un voisinage de  $a$  est un voisinage de  $a$ ,
3. l'intersection de deux voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ ,
4. tout voisinage de  $a$  est voisinage de tous les points d'un voisinage de  $a$  (si  $D(a, r) \subset V$  avec  $r > 0$ , la boule ouverte  $B(a, r)$  est contenue dans  $V$  et est un voisinage de chacun de ses points).

On note  $\mathcal{O}_X$  la famille des parties ouvertes de  $E$ .

### Proposition 23

La famille des ouverts de  $X$  vérifie les trois axiomes suivants :

1. la partie vide  $\emptyset$  et la partie pleine  $X$  sont ouvertes,
2. la réunion d'une famille de parties ouvertes est ouverte,
3. l'intersection d'une famille finie de parties ouvertes est ouverte.

### Démonstration

1. Nous avons déjà remarqué que  $\emptyset$  et  $X$  étaient ouverts
2. Soit  $U$  la réunion de la famille d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  avec  $I$  non vide. Pour tout  $x$  de  $U$ , il existe  $i$  tel que  $x \in U_i$ . Puisque  $U_i$  est ouvert, il existe alors  $r_i > 0$  tel que  $D(x, r_i) \subset U_i$ . On a donc  $D(x, r_i) \subset U$ .
3. Soit  $U$  l'intersection de la famille d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  avec  $I$  non vide fini. Soit  $x \in U$ . Pour tout  $i$  de  $I$ , l'élément  $x$  appartient à l'ouvert  $U_i$  et il existe  $r_i > 0$  tel que  $D(x, r_i) \subset U_i$ . Puisque  $I$  est fini, le nombre réel :

$$r = \min_{i \in I} r_i$$

existe et appartient à  $\mathbb{R}_+^*$ . On a alors  $D(x, r) \subset U_i$  pour tout  $i$  et, par conséquent,  $D(x, r) \subset U$ . □

On appelle *topologie* d'un ensemble toute famille de parties de cet ensemble vérifiant les trois axiomes de la proposition précédente. La famille  $\mathcal{O}_X$  des ouverts de l'espace métrique  $(X, d)$  s'appelle la *topologie* de  $(X, d)$ .

**Exemples**

1. L'ensemble  $U$  des applications  $f$  de  $\mathcal{C}([0, 1])$  à valeurs strictement positives est un ouvert de  $(\mathcal{C}([0, 1]), N_\infty)$ .

En effet, si  $f$  appartient à  $U$ , la borne inférieure  $m$  de  $f$  sur  $[0, 1]$  est strictement positive. Il est alors évident que toute application  $g$  de  $\mathcal{C}([0, 1])$  vérifiant  $N_\infty(g - f) \leq m/2$  appartient aussi à  $U$ . La boule fermée  $D\left(f, \frac{m}{2}\right)$  est donc contenue dans  $U$ .

2. L'ensemble  $A$  des applications  $f$  de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  à valeurs strictement positives n'est pas un ouvert de  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), N_\infty)$ .

En effet, la fonction  $f : x \mapsto e^{-x^2}$  appartient à  $A$ , mais pour tout  $r > 0$ , l'application :

$$g_r : x \mapsto f(x) - r$$

vérifie  $N_\infty(g - f) \leq r$  et  $g \notin A$ . Ainsi, aucune boule fermée  $D(f, r)$  n'est contenue dans  $A$ .

**Base de voisinages**

La notion de base de voisinages est utile dans la pratique. On l'utilise aussi bien pour montrer qu'une partie est un voisinage d'un point que pour étudier les limites.

**Définition 23**

On appelle *base de voisinages* de  $a$  dans  $(X, d)$ , toute famille  $\mathcal{F}_X(a)$  de voisinages de  $a$  telle que tout voisinage de  $a$  contienne un élément de  $\mathcal{F}_X(a)$ .

Dans ce qui suit nous nous limiterons aux bases de voisinages suivantes :

1. la famille  $\mathcal{B}_X(a)$  des boules ouvertes de centre  $a$ ,
2. la famille  $\mathcal{D}_X(a)$  des boules fermées de centre  $a$ ,
3. la famille  $\mathcal{O}_X(a)$  des ouverts de  $X$  contenant  $a$ ,
4. la famille  $\mathcal{V}_X(a)$  des voisinages de  $a$ .

**Proposition 24**

Soit  $\mathcal{F}_X(a)$  une base de voisinages de  $a$ .

- Une partie  $V$  de  $X$  est un voisinage de  $a$  si, et seulement si, il existe  $W \in \mathcal{F}_X(a)$  tel que  $W \subset V$ .
- Une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  converge vers  $a$  si, et seulement si, elle vérifie :

$$\forall V \in \mathcal{F}_X(a), \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies x_n \in V.$$

En considérant  $\mathcal{B}_X(a)$ , on voit qu'une suite  $(x_n)$  converge vers  $a$  si, et seulement si, elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies d(x_n, a) < \varepsilon.$$

On peut donc utiliser des inégalités strictes au lieu d'inégalités larges dans la définition de la convergence.

En considérant  $\mathcal{O}_X(a)$ , on voit que cette convergence est aussi équivalente à :

$$\forall U \in \mathcal{O}_X(a), \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies x_n \in U.$$

La notion de convergence ne dépend donc que de la topologie de  $X$ .

### 3.2 Fermés

#### Définition 24

On dit qu'une partie de  $(X, d)$  est *fermée* si son complémentaire dans  $X$  est ouvert.

On appelle *fermé* de  $E$  toute partie fermée de  $X$ .

Par définition même, les parties vide  $\emptyset$  et pleine  $X$  sont fermées.

#### Proposition 25

- Les singletons sont fermés.
- Les boules fermées sont fermées.

#### Démonstration

► Pour tout  $x$  n'appartenant pas au singleton  $\{a\}$ , on a  $0 < d(a, x)$  et, par conséquent :

$$B(x, d(a, x)) \subset X \setminus \{a\}.$$

La partie  $X \setminus \{a\}$  est donc ouverte puisque voisinage de chacun de ses points.

► Pour tout  $x$  n'appartenant pas à la boule fermée  $D(a, r)$  avec  $r > 0$ , on a  $r < d(a, x)$ . On obtient alors :

$$B(x, d(a, x) - r) \subset X \setminus D(a, r)$$

par inégalité triangulaire. La partie  $X \setminus D(a, r)$  est donc ouverte puisque voisinage de chacun de ses points. □

#### Proposition 26

La famille des parties fermées de  $X$  vérifie les trois axiomes suivants :

1. la partie vide  $\emptyset$  et la partie pleine  $X$  sont fermées,
2. l'intersection d'une famille de parties fermées est fermée,
3. la réunion d'une famille finie de parties fermées est fermée.



**Démonstration** C'est une conséquence immédiate de la proposition analogue concernant les ouverts et des lois de Boole-Morgan :

$$X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \quad \text{et} \quad X \setminus \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

pour  $(A_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de parties de  $X$ . □

La caractérisation suivante des fermés par les suites est fondamentale :

**Proposition 27**

Une partie  $F$  de  $X$  est fermée si, et seulement si, toute suite convergente  $(x_n)$  d'éléments de  $F$  a sa limite dans  $F$ .

**Démonstration**

- ▶ Supposons que  $F$  soit fermé. Soit  $(x_n)$  une suite convergente d'éléments de  $F$ . Si la limite  $\ell$  de  $(x_n)$  n'appartient pas à  $F$ , cette limite appartient à l'ouvert  $X \setminus F$ . Il existe donc  $n_0$  tel que  $x_n$  appartienne à  $X \setminus F$  pour tout  $n \geq n_0$ . C'est évidemment impossible.
- ▶ Si  $F$  n'est pas fermé, son complément n'est pas ouvert et il existe un élément  $\ell \notin F$  dont  $X \setminus F$  n'est pas voisinage. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la boule  $D(\ell, 2^{-n})$  n'est donc pas contenue dans  $X \setminus F$  et il existe donc  $x_n \in F$  vérifiant  $d(x_n, \ell) \leq 2^{-n}$ . Cela fournit une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $F$  convergeant vers  $\ell \notin F$  □

*Exemples*

1. Si  $(x_n)$  est une suite de  $X$  convergeant vers  $\ell \in E$ , la partie :

$$F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

est fermée.

Curieusement, il ne serait pas très judicieux d'essayer de prouver séquentiellement que  $F$  est fermé parce que les suites de cet ensemble sont difficile à décrire et ne se limitent évidemment pas aux suites extraites de  $(x_n)$ . Nous montrerons que  $X \setminus F$  est ouvert.

Soit  $a \in X \setminus F$  et  $r > 0$  tel que  $2r < d(a, \ell)$ .

- L'inégalité triangulaire montre que les boules fermées  $D(a, r)$  et  $D(\ell, r)$  soient disjointes.
- Il existe par définition même de la notion de limite, un entier  $n_0$  tel que, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in D(\ell, r)$ . Comme  $a$  n'est pas un élément de  $F$ , le nombre réel :

$$s = \min_{k \in [0, n_0 - 1]} d(x_k, a)$$

est strictement positif.

- Si  $t > 0$  vérifie  $t < \min(r, s)$ , on a :

$$D(a, t) \subset X \setminus F.$$

L'ensemble  $F$  est donc fermé.

2. L'ensemble  $F$  des couples  $(x, y)$  de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  vérifiant  $xy = 1$  est fermé

Ici, c'est l'étude du complémentaire  $\mathbb{R}^2 \setminus F$  qui ne serait pas très adroite. Nous raisonnerons séquentiellement..

Si la suite  $((x_n, y_n))$  de  $F$  converge vers  $(a, b)$ , les suites réelles  $(x_n)$  et  $(y_n)$  convergent respectivement vers  $a$  et  $b$ . Puisque l'on a  $x_n y_n = 1$  pour tout  $n$ , il vient  $ab = 1$  et donc  $(a, b) \in F$ . L'ensemble  $F$  est donc fermé.

### 3.3 Intérieur, adhérence et frontière d'une partie

Soit  $A$  une partie de  $(X, d)$ .

#### Intérieur

##### Définition 25

On dit qu'un point  $x$  est *intérieur* à une partie  $A$  de  $(X, d)$ , si  $A$  est un voisinage de  $x$ .

On appelle *intérieur* de  $A$ , et l'on note  $\text{Int } A$  ou  $\overset{\circ}{A}$ , l'ensemble des points intérieurs à  $A$ .

##### Proposition 28

L'intérieur de  $A$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

#### Démonstration

1. Si  $x$  appartient à  $\text{Int } A$ , la partie  $A$  est un voisinage de  $x$ , et  $x$  appartient à  $A$ .
2. Soit  $x \in \text{Int } A$ . Par définition, il existe une boule fermée  $D(x, r)$  avec  $r > 0$  contenue dans  $A$ . Comme la boule ouverte  $B(x, r)$  est voisinage de ses points, la partie  $A$  est un voisinage des points de  $B(x, r)$ . On a donc  $B(x, r) \subset \text{Int } A$ . Cela valant pour tout  $x$  de  $\text{Int } A$ , la partie  $\text{Int } A$  est ouverte.
3. Soit  $U$  un ouvert contenu dans  $A$ . Pour tout  $x$  de  $U$ , la partie  $U$  est un voisinage de  $x$ . La relation  $U \subset A$  montre qu'il en est de même de  $A$ . On a donc  $U \subset \text{Int } A$ .

Finalement,  $\text{Int } A$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ . □

Si  $A$  et  $B$  sont des parties de  $X$ , les points suivants se déduisent immédiatement de la proposition précédente :

1.  $A$  est ouverte si, et seulement si,  $A = \text{Int } A$ ,
2.  $\text{Int } \emptyset = \emptyset$ ,

3.  $A \subset B \implies \text{Int } A \subset \text{Int } B$ ,
4.  $\text{Int } A \cup \text{Int } B \subset \text{Int } (A \cup B)$ ,
5.  $\text{Int } (A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$ .

On obtient l'avant dernière inclusion en remarquant que  $\text{Int } A \cup \text{Int } B$  est un ouvert contenu dans  $A \cup B$ . L'inclusion peut être stricte comme le montre l'exemple des parties  $A = [0, 1]$  et  $B = [1, 2]$  de  $\mathbb{R}$  pour lesquelles :

$$\text{Int } A \cup \text{Int } B = ]0, 1[ \cup ]1, 2[ \quad \text{et} \quad \text{Int } (A \cup B) = ]0, 2[.$$

La dernière égalité se montre de la façon suivante : les inclusions  $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$  entraînent  $\text{Int } (A \cap B) \subset \text{Int } A$  et  $\text{Int } (A \cap B) \subset \text{Int } B$ . On en déduit :

$$\text{Int } (A \cap B) \subset \text{Int } A \cap \text{Int } B.$$

L'inclusion inverse  $\text{Int } A \cap \text{Int } B \subset \text{Int } (A \cap B)$  vient de ce que  $\text{Int } A \cap \text{Int } B$  est un ouvert contenu dans  $A \cap B$ .

**Exemples**

1. L'intérieur de la boule fermée  $D(a, r)$  contient évidemment la boule ouverte  $B(a, r)$ .

Il lui est égal dans tout espace vectoriel normé non nul  $(E, N)$  puisque, pour tout élément  $x$  de la sphère  $S(a, r)$ , on a :

$$\forall \rho > 0, \quad y = x + \frac{\rho}{N(x-a)}(x-a) \in D(x, \rho) \setminus D(a, r).$$

Il n'en est pas de même, en général, dans un espace métrique. Dans l'espace métrique induit sur  $[-1, 1]$  par  $\mathbb{R}$ , la boule fermée  $D(0, 1)$  est ouverte et son intérieur, égal à  $]-1, 1[$ , est différent de  $B(0, 1)$  égal à  $]-1, 1[$ .

2. Dans tout espace vectoriel normé  $(E, N)$ , l'intérieur d'un sous-espace  $F$  différent de  $E$  est vide puisque,  $e$  étant un élément de  $E \setminus F$ , pour tout  $x \in F$ , on a :

$$\forall r > 0, \quad y = x + \frac{r}{N(e)}e \in D(x, r) \setminus F.$$

**Adhérence**

**Definition 26**

On dit qu'un point  $x$  est *adhérent* à une partie  $A$  de  $X$ , si, pour tout  $r > 0$ , la boule fermée  $D(x, r)$  a une intersection non vide avec  $A$

On appelle *adhérence* ou *fermeture* de  $A$ , et l'on note  $\text{Adh } A$  ou  $\overline{A}$ , l'ensemble des points adhérents à  $A$ .

**Proposition 29**

On a :

$$X \setminus \text{Adh } A = \text{Int}(X \setminus A).$$

**Démonstration** Un point  $x$  n'appartient pas à  $\text{Adh } A$  si, et seulement si, il existe  $r > 0$  tel que  $D(x, r)$  soit contenu dans  $E \setminus A$ . C'est bien sûr équivalent à  $x \in \text{Int}(E \setminus A)$   $\square$

**Corollaire 30**

L'adhérence de  $A$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

**Démonstration**

1. Pour tout  $x \in A$ , l'élément  $x$  appartient à  $D(x, r) \cap A$  pour tout  $r > 0$  et, par conséquent, est adhérent à  $A$ . On a donc  $A \subset \text{Adh } A$ .
2. L'adhérence de  $A$  est un fermé puisque son complément  $X \setminus \text{Adh } A$  est l'ouvert  $\text{Int}(X \setminus A)$ .
3. Si  $F$  est une partie fermée contenant  $A$ , son complément  $X \setminus F$  est un ouvert contenu dans  $X \setminus A$ . On a donc  $X \setminus F \subset \text{Int}(X \setminus A)$ , soit  $X \setminus F \subset E \setminus \text{Adh } A$ . On en déduit  $\text{Adh } A \subset F$ .  $\square$

Si  $A$  et  $B$  sont des parties de  $X$ , les points suivants se déduisent immédiatement de la proposition précédente (elles peuvent aussi être déduites par passage au complémentaire des points analogues concernant l'intérieur page 338) :

1.  $A$  est fermée si, et seulement si,  $A = \text{Adh } A$ ,
2.  $\text{Adh } \emptyset = \emptyset$ ,
3.  $A \subset B \implies \text{Adh } A \subset \text{Adh } B$ ,
4.  $\text{Adh } A \cup \text{Adh } B = \text{Adh}(A \cup B)$ ,
5.  $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh } A \cap \text{Adh } B$ .

L'avant dernière égalité se montre de la façon suivante : les inclusions  $A \subset A \cup B$  et  $B \subset A \cup B$  entraînent  $\text{Adh } A \subset \text{Adh}(A \cup B)$  et  $\text{Adh } B \subset \text{Adh}(A \cup B)$ . On en déduit :

$$\text{Adh } A \cup \text{Adh } B \subset \text{Adh}(A \cup B).$$

On a d'autre part  $\text{Adh}(A \cup B) \subset \text{Adh } A \cup \text{Adh } B$  puisque  $\text{Adh } A \cup \text{Adh } B$  est un fermé contenant  $A \cup B$ .

On obtient la dernière inclusion en remarquant que  $\text{Adh } A \cap \text{Adh } B$  est un fermé contenant  $A \cap B$ . L'exemple des parties  $A = ]0, 1[$  et  $B = ]1, 2[$  de  $\mathbb{R}$  pour lesquels :

$$\text{Adh } (A \cap B) = \emptyset \quad \text{et} \quad \text{Adh } A \cap \text{Adh } B = \{1\}$$

montre que l'on a pas égalité en général.

La proposition suivante donne une caractérisation séquentielle très importante des points adhérents à  $A$ .

**Proposition 31**

Un point  $x$  est adhérent à  $A$  si, et seulement si, il existe une suite  $(a_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $x$ .

**Démonstration**

- ▶ Si  $x$  est adhérent à  $A$ , pour tout entier  $n$ , il existe un élément  $a_n$  appartenant à l'intersection de  $A$  et de la boule  $D(a, 2^{-n})$ . Cela fournit une suite  $(a_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$  convergent vers  $x$ .
- ▶ Si  $x$  est la limite d'une suite  $(a_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$ , le point  $x$  appartient à tout fermé contenant  $A$  et, par conséquent, à  $\text{Adh } A$ . □

*Exemples*

1. La borne inférieure  $a$  d'une partie non vide minorée  $A$  de  $\mathbb{R}$  est adhérente à  $A$  puisque, pour tout  $r > 0$ , il existe  $x \in A$  vérifiant  $a \leq x \leq a + r$  et, par conséquent :

$$x \in A \cap D(a, r).$$

2. Par définition même, un élément  $x$  de  $A$  est adhérent à  $A$  si, et seulement si,  $d(x, A) = 0$ . En particulier, si  $A$  est fermé et si  $x$  n'appartient pas à  $A$ , on a  $d(x, A) > 0$ .
3. La distance d'un élément  $x$  à  $A$  est égale à sa distance à  $\text{Adh } A$ .  
L'inclusion  $A \subset \text{Adh } A$  implique  $d(x, \text{Adh } A) \leq d(x, A)$ . D'un autre côté, pour tout  $b$  de  $\text{Adh } A$ , il existe une suite  $(a_n)$  de  $A$  convergeant vers  $b$ . La relation  $d(x, A) \leq d(x, a_n)$  pour tout  $n$  implique  $d(x, A) \leq d(x, b)$ . On en déduit l'inégalité  $d(x, A) \leq d(x, \text{Adh } A)$ .
4. Si  $A$  est une partie non vide bornée de  $E$ , alors  $\text{Adh } A$  est bornée et :

$$\text{diam } (\text{Adh } A) = \text{diam } A.$$

L'inclusion  $A \subset \text{Adh } A$  implique  $\text{diam } A \leq \text{diam } (\text{Adh } A)$ . D'un autre côté, si  $a$  et  $b$  sont des points de  $\text{Adh } A$ , il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de  $A$  convergeant vers  $a$  et  $b$ . La relation  $d(a_n, b_n) \leq \text{diam } A$  pour tout  $n$  montre que l'on a  $d(a, b) \leq \text{diam } A$ . Ainsi,  $\text{Adh } A$  est borné et son diamètre est égal à celui de  $\text{Adh } A$ .

5. L'adhérence de la boule ouverte  $B(a, r)$  est évidemment contenue dans la boule fermée  $D(a, r)$ .

Elle lui est égale dans un espace vectoriel normé non nul  $(E, N)$  puisque tout élément  $x$  de la sphère  $S(a, r)$  est la limite de la suite  $(x_n)$  d'éléments de  $B(a, r)$  définie par :

$$\forall n, \quad x_n = a + \frac{r(1 - 2^{-n})}{N(x - a)}(x - a).$$

Il n'en est pas de même, en général, dans un espace métrique. Dans l'espace métrique induit sur  $\{-1, 0, 1\}$  par  $\mathbb{R}$ , la boule ouverte  $B(0, 1)$  est réduite au fermé  $\{0\}$  et son adhérence, égale à  $\{0\}$ , est différent de  $D(0, 1)$ , égal à  $\{-1, 0, 1\}$ .

### Définition 27

On dit qu'une partie  $A$  de  $X$  est *dense* dans  $(X, d)$  si son adhérence est égale à  $X$ .

### Proposition 32

Si  $A$  est une partie de  $X$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) la partie  $A$  est dense dans  $(X, d)$ ,
- (ii) pour tout  $x$  de  $X$  et  $r > 0$ , il existe un élément de  $a \in A$  tel que  $d(a, x) \leq r$ ,
- (iii) pour tout élément  $x$  de  $X$ , il existe une suite  $(a_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$  convergent vers  $x$ ,
- (iv) la partie  $X$  est la seule partie fermée contenant  $A$ ,
- (v) toute partie ouverte non vide de  $X$  a une intersection non vide avec  $A$ .

### Démonstration

- Les quatre premières assertions sont équivalentes puisqu'elles signifient  $\text{Adh } A = X$ .
- Supposons que  $A$  soit dense. Si  $U$  est un ouvert contenant un élément  $x$  de  $X$ , il existe un réel  $r > 0$  tel que  $D(x, r)$  soit contenu dans  $U$ . Comme  $D(x, r) \cap A$  n'est pas vide  $U$  a une intersection non vide avec  $A$ .
- Si toute partie ouverte non vide de  $X$  a une intersection non vide avec  $A$ , alors pour tout  $x$  de  $E$  et  $r > 0$ , la boule ouverte  $B(x, r)$  a une intersection non vide avec  $A$  et il existe un élément de  $a \in A$  tel que  $d(a, x) < r$ . Ainsi,  $A$  est dense dans  $X$ . □

Nous avons déjà rencontré cette notion ; par exemple, l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels et l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  des nombres irrationnels sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemples**

1. Un sous-groupe  $G$  de  $(\mathbb{R}, +)$  est dense ou de la forme  $a\mathbb{Z}$  pour un unique  $a \in \mathbb{R}_+$ .

En effet, si  $G$  est réduit à  $\{0\}$ , il s'écrit  $0\mathbb{Z}$ . Sinon,  $G$  qui est stable par  $x \mapsto -x$ , contient des éléments strictement positifs et la borne inférieure :

$$a = \inf (G \cap \mathbb{R}_+^*)$$

est bien définie.

Supposons  $a = 0$ . Soit  $]u, v[$  un intervalle ouvert avec  $u < v$ . Il existe  $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$  tel que  $g < v - u$ . Si  $k$  est la partie entière de  $ug^{-1}$ , on a :

$$kg \leq u < (k + 1)g < u + (v - u) = v.$$

L'intersection de  $G$  et de  $]u, v[$  est donc non vide. Cela valant pour tout  $(u, v)$  vérifiant  $u < v$ ,  $G$  est dense.

Supposons  $a > 0$ . Si  $a$  n'appartient pas à  $G$ , il existe  $g \in G$  vérifiant  $a < g < 2a$ . Il existe alors  $g' \in G$  vérifiant  $a < g' < g$ . On en déduit que l'élément  $g'' = g' - g$  de  $G$  vérifie  $0 < g'' < a$ , ce qui est absurde.

Ainsi  $a$  appartient à  $G$ . On a alors  $a\mathbb{Z} \subset G$ . Si  $g$  est un élément de  $G$ , notons  $k$  la partie entière de  $ga^{-1}$ . On a bien sûr :

$$ka \leq u < (k + 1)a.$$

Les relations  $g - ka \in G$  et  $0 \leq g - ka < a$  montrent alors que  $g - ka$  est nul et  $g$  égal à  $ka$ . Finalement,  $G = a\mathbb{Z}$ .

Cela prouve le résultat annoncé, l'unicité du générateur positif dans le cas monogène étant évidente.

2. L'adhérence de  $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$  dans  $\mathbb{R}$  est le segment  $[-1, 1]$ .

Elle est en effet contenue dans le fermé  $[-1, 1]$ . Pour obtenir l'inclusion inverse, considérons le sous-ensemble  $G = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{R}$ . Il est immédiat que  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ . S'il existe  $a \in \mathbb{R}_+$  tel que  $G = a\mathbb{Z}$ , il existe des entiers relatifs non nuls  $k$  et  $h$  tels que  $1 = ka$  et  $2\pi = ha$ . Cela entraîne  $\pi = h/(2k) \in \mathbb{Q}$  en contradiction avec l'irrationalité de  $\pi$ . Le sous-groupe  $G$  est donc dense.

Considérons, pour finir, un élément  $x \in [-1, 1]$ . Il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \cos \theta$ . Par densité de  $G$ , il existe une suite  $(g_n)$  d'élément de  $G$  convergeant vers  $x$ . On peut écrire  $g_n = k_n + h_n 2\pi$  avec  $k_n$  et  $h_n$  entiers pour tout  $n$ . La relation :

$$\cos g_n = \cos |k_n|$$

montre que la suite  $(\cos |k_n|)$  converge vers  $x$ .

On fera attention à ne pas confondre la notion de point adhérent à une partie et celle de valeur d'adhérence d'une suite. La proposition suivante précise leur rapport :

**Proposition 33**

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite  $(x_n)$  est égal à l'intersection :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} \text{Adh} \{x_k \mid k \in \llbracket n, +\infty \llbracket \}.$$

C'est donc un fermé de  $X$ .

**Démonstration** Nous avons vu qu'un élément  $\ell$  de  $E$  appartient à l'ensemble  $X$  des valeurs d'adhérence de  $(x_n)$  si, et seulement si, l'ensemble des indices  $n$  tel que  $x_n \in D(\ell, r)$  est infini pour tout  $r > 0$ .

En remarquant qu'une partie de  $\mathbb{N}$  est infinie si, et seulement si, elle n'est pas bornée, on voit que  $x$  appartient à  $X$  si, et seulement si, on a :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{N} : k \geq n \text{ et } x_k \in D(\ell, r),$$

soit, après transformation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad D(\ell, r) \cap \{x_k \mid k \in \llbracket n, +\infty \llbracket \} \neq \emptyset,$$

ou, finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell \in \text{Adh} \{x_k \mid k \in \llbracket n, +\infty \llbracket \}. \quad \square$$

**Exemple** L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(\cos n)$  est le segment  $[-1, 1]$ .

En effet, soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $X_p = \{\cos n \mid n \in \llbracket p, +\infty \llbracket \}$ . Comme dans l'exemple ci-dessus, le groupe  $p\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  et l'ensemble  $Y_p = \{\cos pn \mid n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ . Tout élément  $x$  de  $[-1, 1[$  est la limite d'une suite  $(x_k)$  de  $Y_p$ . Il est aussi la limite d'une suite de  $Y_p \setminus \{1\}$  et, donc, de  $X_p$ . L'adhérence de  $X_p$  qui contient  $[-1, 1[$  est donc égale à  $[-1, 1]$ .

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(\cos n)$  est donc :

$$\bigcap_{p=0}^{+\infty} \text{Adh} \{ \cos n \mid n \in \llbracket p, +\infty \llbracket \} = [-1, 1].$$

**Frontière****Définition 28**

On dit qu'un point  $x$  est un *point frontière* d'une partie  $A$  de  $X$ , si, pour tout  $r > 0$ , la boule  $D(x, r)$  est d'intersection non vide avec  $A$  et avec  $X \setminus A$ .

On appelle *frontière* de  $A$ , et l'on note  $\text{Fr } A$ , l'ensemble des points à la frontière de  $A$ .



Par définition même, un point  $x$  est sur la frontière de  $A$  s'il est adhérent à  $A$  et au complémentaire  $X \setminus A$  de  $A$ . On a donc :

$$\text{Fr } A = (\text{Adh } A) \cap (\text{Adh } (E \setminus A)).$$

Puisque  $\text{Int } A$  est le complément de  $\text{Adh } (E \setminus A)$  dans  $E$ , on a aussi :

$$\text{Fr } A = (\text{Adh } A) \setminus (\text{Int } A).$$

On obtient finalement la proposition suivante :

**Proposition 34**

Pour toute partie  $A$ , les trois parties :

$$\text{Int } A, \quad \text{Fr } A \quad \text{et} \quad \text{Int } (X \setminus A),$$

respectivement ouverte, fermée et ouverte, forment une partition de  $X$ .

**Démonstration** Cela résulte de ce que  $\text{Int } (X \setminus A)$  est le complément de  $\text{Adh } A$  dans  $X$  et de ce que  $\text{Fr } A$  est celui de  $\text{Int } A$  dans  $\text{Adh } A$ . □

*Exemples*

1. Dans un espace vectoriel normé non nul, les boules  $B(a, r)$  et  $D(a, r)$  sont de frontière :

$$S(a, r) = D(a, r) \setminus B(a, r).$$

Il n'en est pas de même, en général, dans un espace métrique.

2. La frontière de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  est égale à  $\mathbb{R}$  puisque l'intérieur de  $\mathbb{Q}$  est vide et son adhérence égale à  $\mathbb{R}$ .

### 3.4 Topologie d'un sous-espace métrique

Si  $Y$  est une partie stricte de l'espace métrique  $(X, d)$ , l'espace métrique induit  $(Y, d)$  est évidemment différent de  $(X, d)$ .

Si  $A$  est une partie de  $Y$ , il faudra alors soigneusement distinguer les propriétés topologiques de  $A$  dans le sous-espace métrique  $(Y, d)$  de celles de  $A$  dans  $(X, d)$ . Nous parlerons de propriétés *relatives* à  $Y$  pour désigner celles de l'espace  $(Y, d)$  et de propriétés relatives à  $X$  pour celles de  $(X, d)$ .

Ce que nous venons de dire s'applique évidemment au cas d'une partie d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$ .

Soit  $Y$  une partie de  $(X, d)$ .

**Voisinages et ouvert relatifs**

**Proposition 35**

Une partie  $V$  de  $Y$  est un *voisinage de  $a$  relatif à  $Y$*  si, et seulement si, il existe un voisinage  $U$  de  $a$  relatif à  $X$  tel que  $V = Y \cap U$ .

**Démonstration** Si  $V$  appartient à  $\mathcal{V}_Y(a)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $D_Y(a, r)$  soit contenu dans  $V$ . La partie  $U = D_X(a, r) \cup V$  est un voisinage de  $a$  relatif à  $X$  tel que  $U \cap Y = V$ . S'il existe  $U \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que  $V = U \cap Y$ , il existe  $r > 0$  tel que  $D_X(a, r)$  soit contenu dans  $U$ . La boule relative  $D_X(a, r) \cap Y$  est alors contenue dans  $V$  et, par conséquent,  $V$  appartient à  $\mathcal{V}_Y(a)$ . □

**Proposition 36**

Une partie  $V$  de  $Y$  est un *ouvert relatif à  $Y$*  si, et seulement si il existe une partie ouverte  $U$  relative à  $X$  telle que  $V = U \cap Y$ .

**Démonstration** Supposons  $V \in \mathcal{O}_Y$ . Pour tout point  $x$  de  $V$ , il existe  $r_x > 0$  tel que  $B_Y(a, r_x)$  soit contenu dans  $V$ . La partie :

$$U = \bigcup_{x \in V} B_X(a, r_x)$$

est ouverte relativement à  $X$  comme réunion de boules ouvertes. On a  $V \subset U \cap Y$  puisque  $U$  contient tous les points de  $V$ . On obtient l'égalité en utilisant :

$$U \cap Y \subset \bigcup_{x \in V} (B_X(a, r_x) \cap Y) \subset V.$$

Supposons  $V = U \cap Y$  avec  $U \in \mathcal{O}_X$ . Pour tout point  $x$  de  $V$ , l'ouvert  $U$  est un voisinage de  $x$  dans  $X$  et, par ce qui précède, l'intersection  $U \cap Y$  est un voisinage de  $x$  dans  $Y$ . Ainsi  $V$  est un ouvert relatif à  $Y$ . □

**Fermes relatifs**

**Proposition 37**

Une partie  $F$  de  $Y$  est un *fermé relatif à  $Y$*  si, et seulement si il existe une partie  $G$  fermée relativement à  $X$  telle que  $F = G \cap Y$ .

**Démonstration** Si  $F$  est fermée relativement à  $Y$ , la partie  $V = Y \setminus F$  est ouverte relativement à  $Y$ . Il existe alors un ouvert  $U$  tel que  $V = U \cap Y$ . Ainsi, l'ensemble  $G = Y \setminus U$  est un fermé relativement à  $Y$  et  $F$  égal à l'intersection  $G \cap Y$ .

Si  $F$  est de la forme  $G \cap Y$  où  $G$  est un fermé, la relation :

$$Y \setminus F = (X \setminus G) \cap Y$$

montre que  $Y \setminus F$  est un ouvert relatif à  $Y$ . La partie  $F$  est donc un fermé relatif à  $Y$ . □

Ainsi les voisinages, les ouverts et les fermés relatifs à  $Y$  sont les intersections, on dit aussi les *traces*, des voisinages, des ouverts et des fermés de  $(X, d)$ .

**Remarque** Une partie  $G$  de  $A$  peut être ouverte ou fermée relativement à  $Y$  sans être ouverte ni fermée dans  $X$ . Par exemple, la partie  $A = ]\alpha, \beta[$  est un ouvert et un fermé du sous-espace métrique  $(] \alpha, \beta[, d)$  mais n'est ni un ouvert ni un fermé de  $\mathbb{R}$ .

**Exemples** Soit  $Y$  une partie de  $(X, d)$ .

1. Soient  $(x_n) \in Y^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in Y$ . La suite  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  dans  $(Y, d)$  si, et seulement si,  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  dans  $(X, d)$  puisque ces deux assertions sont équivalentes à la convergence de  $(d(x_n, \ell))$  vers 0.
2. Soit  $A$  une partie de  $Y$ . Un élément  $y \in Y$  est adhérent à  $A$  dans  $(Y, d)$  si, et seulement si, il est adhérent à  $A$  dans  $(X, d)$  puisque l'égalité :

$$D_Y(y, r) \cap A = D_X(y, r) \cap A$$

montre l'équivalence :

$$\forall r > 0, \quad D_Y(y, r) \cap A \neq \emptyset \iff D_X(y, r) \cap A \neq \emptyset.$$

On en déduit :

$$\text{Adh}_Y A = (\text{Adh}_X A) \cap Y$$

Il est aussi très simple de démontrer séquentiellement cette relation.

3. Soit  $A$  une partie de  $Y$ . Si  $y \in Y$  est intérieur à  $A$  dans  $(X, d)$ , alors  $y$  est intérieur à  $A$  dans  $(Y, d)$  puisque l'on a l'implication :

$$A \in \mathcal{V}_X(y) \implies A = A \cap Y \in \mathcal{V}_Y(y).$$

On en déduit :

$$(\text{Int}_X A) \cap Y \subset \text{Int}_Y A.$$

On a pas en général l'égalité : dans le cas  $A = ]0, 1[, Y = \mathbb{R}$  et  $X = \mathbb{C}$ , il vient  $\text{Int}_X A = \emptyset$  et  $\text{Int}_Y A = ]0, 1[$ .

► **Attention** Pour éviter toute confusion à propos de la topologie relative d'une partie  $A$  de  $X$ , on pourra, si l'on veut, n'utiliser les termes «voisinage», «ouvert» et «ferme» que dans leur acception absolue (dans  $X$ ) et n'utiliser des notions relatives qu'en les décrivant comme traces sur  $A$  (comme intersections avec  $A$ ) des voisinages, ouverts et fermés de  $X$ .

## 4. Limites et continuité

Dans cette section,  $(X, d)$ ,  $(Y, d)$  désigneront des espaces métriques et  $(E, N)$ ,  $(F, N)$  des espaces vectoriels normés.

### 4.1 Limite et continuité en un point

#### Définition 29

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  et  $a$  un point adhérent à  $A$ . On dit que  $f$  tend, vers l'élément  $\ell$  de  $Y$  en  $a$  si elle vérifie la relation :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall x \in A. \quad d(x, a) \leq \eta \implies d(f(x), \ell) \leq \varepsilon.$$

Comme pour les suites, on peut redéfinir cette notion en utilisant la notion de base de voisinages.

#### Proposition 38

Soient  $\mathcal{F}_X(a)$  et  $\mathcal{F}_Y(\ell)$  des bases de voisinages de  $a$  et  $\ell$  dans  $(X, d)$  et  $(Y, d)$ . L'application  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  si, et seulement si, elle vérifie :

$$\forall V \in \mathcal{F}_Y(\ell), \quad \exists U \in \mathcal{F}_X(a) : \quad f(U \cap A) \subset V.$$

#### Démonstration

► Supposons que  $f$  admette  $\ell$  comme limite en  $a$ . Pour tout  $V \in \mathcal{F}_Y(\ell)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $D(\ell, \varepsilon) \subset V$ . Par définition, il existe alors  $\eta > 0$  tel que  $f(D(a, \eta) \cap A) \subset V$ . Puisque  $D(a, \eta)$  est un voisinage de  $a$ , il existe  $U \in \mathcal{F}_X(a)$  tel que  $U \subset D(a, \eta)$ . On obtient finalement :

$$f(U \cap A) \subset V.$$

► On obtient la réciproque en considérant les bases de voisinages  $\mathcal{D}_X(a)$  et  $\mathcal{D}_Y(\ell)$ . □

On fera attention ici que  $U \cap A$  n'est pas un voisinage de  $a$  relatif à  $A$  puisque  $a$  peut ne pas appartenir à  $A$ .

L'utilisation de bases de voisinages  $\mathcal{B}_X(a)$  et  $\mathcal{B}_Y(\ell)$  montre, par exemple, que  $f$  tend vers l'élément  $\ell$  de  $F$  en  $a$  si elle vérifie la relation :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall x \in A, \quad d(x, a) < \eta \implies d(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

#### Théorème 39 (Unicité de la limite)

L'application  $f$  tend vers au plus un élément de  $F$  en  $a$ .

**Démonstration** Supposons que  $f$  tende vers  $\ell$  et  $\ell'$  avec  $\ell \neq \ell'$  en  $a$ . Posons alors  $\varepsilon = 3^{-1} \|\ell - \ell'\|$ . Les boules fermées  $D(\ell, \varepsilon)$  et  $D(\ell', \varepsilon)$  sont alors des parties disjointes de  $X$ .

Par définition de la notion de limite, il existe  $r > 0$  et  $r' > 0$  tels que :

$$f(D(a, r) \cap A) \subset D(\ell, \varepsilon) \quad \text{et} \quad f(D(a, r') \cap A) \subset D(\ell', \varepsilon).$$

Puisque  $a$  est adhérent à  $A$ , l'intersection  $U$  de la boule fermé  $D(a, r) \cap D(a, r')$  avec  $A$  est non vide. Les inclusions :

$$f(U) \subset D(\ell, \varepsilon) \quad \text{et} \quad f(U) \subset D(\ell', \varepsilon)$$

montrent alors que  $D(\ell, \varepsilon)$  et  $D(\ell', \varepsilon)$  ont une intersection non vide. C'est évidemment impossible. □

**Remarques**

- On dit que  $f$  possède une limite en  $a$  s'il existe un élément  $\ell$  de  $E$  tel que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ . Dans ces conditions, l'unique élément  $\ell$  de  $F$  vers lequel  $f$  tend s'appelle alors la *limite* de  $f$  et se note :

$$\lim_a f \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \in A \\ x \rightarrow a}} f(x)$$

si l'on veut préciser le domaine de définition de  $f$ .

- Si  $f$  est constante de valeur  $\ell$ , alors  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$
- Si  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  et si  $B$  est une partie de  $A$  telle que  $a \in \text{Adh } B$ , alors  $f|_B$  tend aussi vers  $\ell$  en  $a$ .
- La notion de limite est *indépendante du contexte* ; si  $X'$  est une partie de  $X$  contenant  $A$  et  $a$  et si  $Y'$  est une partie de  $Y$  contenant  $f(A)$  et  $\ell$ , l'application  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  pour  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  si, et seulement si, elle tend vers  $\ell$  en  $a$  pour  $(X', d)$  et  $(Y', d)$ .
- La notion de limite est locale ; si  $U$  est un voisinage de  $a$ , alors  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  si, et seulement si,  $f|_{A \cap U}$  tend vers  $\ell$  en  $a$  (il est immédiat que  $A \cap U$  est non vide et que  $a$  est adhérent à  $A \cap U$ ).
- L'utilisation des bases de voisinages  $\mathcal{O}_X(a)$  et  $\mathcal{O}_Y(\ell)$  montre que la notion de limite ne dépend que des topologies des espaces.

**Exemples**

1. Si  $f$  est une application de  $A \subset X$  dans  $Y$  et si le point  $a \in A$  est adhérent à  $A \setminus \{a\}$ , on dit que  $f$  admet  $\ell$  comme limite lorsque  $x$  tend vers  $a$  en étant différent de  $a$  si la restriction de  $f$  à  $A \setminus \{a\}$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$ . On écrit alors :

$$\ell = \lim_{\substack{x \in A, x \neq a \\ x \rightarrow a}} f(x).$$

2. Si  $f$  est une application de  $A \subset \mathbb{R}$  dans  $Y$  et si le point  $a \in \text{Adh } A$  est adhérent à  $A \cap ]a, +\infty[$ , on dit que  $f$  admet  $\ell$  comme limite lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite si la restriction de  $f$  à  $A \cap ]a, +\infty[$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$ . On désigne alors cette limite par :

$$\lim_{\substack{x \in A, x > a \\ x \rightarrow a}} f(x), \quad \lim_{\substack{x \in A \\ x \rightarrow a^+}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{a^+} f.$$

On définit de façon analogue la notion de limite à gauche notée :

$$\lim_{\substack{x \in A, x < a \\ x \rightarrow a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \in A \\ x \rightarrow a^-}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_a f.$$

Reprenons les notations de la définition de la notion de limite.

**Proposition 40**

Si  $A$  est la réunion de deux parties  $B$  et  $C$  contenant  $a$  dans leur adhérence, alors  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$  si, et seulement si, les restrictions  $f|_B$  et  $f|_C$  admettent  $\ell$  comme limite en  $a$ .

**Démonstration**

- ▶ Si  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$ , pour tout  $V \in \mathcal{V}_Y(\ell)$ , il existe  $U \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que  $f(U \cap A)$  soit contenue dans  $V$ . On en déduit bien sûr que, pour  $V \in \mathcal{V}_Y(\ell)$ , il existe  $U \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que  $f(U \cap B)$  soit contenue dans  $V$ . Ainsi  $f|_B$ , et de la même façon  $f|_C$ , admet  $\ell$  comme limite en  $a$ .
- ▶ si  $f|_B$  et  $f|_C$  admettent  $\ell$  comme limite en  $a$ , pour tout  $V \in \mathcal{V}_Y(\ell)$ , il existe  $U_1 \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que  $f(U_1 \cap B)$  soit contenue dans  $V$  et  $U_2 \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que  $f(U_2 \cap C)$  soit contenue dans  $V$ . L'intersection  $U = U_1 \cap U_2$  est alors un voisinage de  $a$  tel que .

$$f(U \cap A) \subset V.$$

Ainsi  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$ . □

**Exemple** Une application  $f$  de  $A \subset \mathbb{R}$  dans  $Y$  admet  $\ell$  comme limite en  $a \in A$  adhérent à  $A \cap ]-\infty, a[$  et  $A \cap ]a, +\infty[$  si, et seulement si, elle admet  $\ell$  comme limite à gauche et à droite et si l'on a  $\ell = f(a)$ .

**Limites infinies**

Les limites infinies relèvent des notions générales que nous venons d'exposer en considérant la droite numérique achevée  $\overline{\mathbb{R}}$ .

L'application  $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$  est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ . Nous noterons  $\varphi$  son prolongement à  $\overline{\mathbb{R}}$  défini par  $\varphi(-\infty) = -1$  et

$\varphi(+\infty) = 1$ . L'application  $\varphi$  est alors une bijection strictement croissante de  $\overline{\mathbb{R}}$  sur  $[-1, 1]$ .

Il est alors immédiat, par composition, que l'application  $d : \overline{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par :

$$\forall (x, y), \quad d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

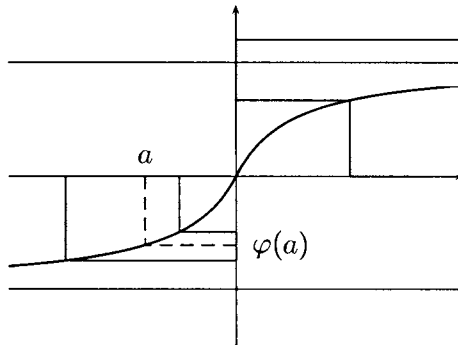
est une distance sur  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Proposition 41**

Les voisinages des points  $x$  de l'espace métrique  $(\overline{\mathbb{R}}, d)$  sont :

1. les parties contenant un intervalle de la forme  $[-\infty, v[$  avec  $v \in \mathbb{R}$  lorsque  $x = -\infty$ ,
2. les parties contenant un intervalle de la forme  $]u, v[$  avec  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $u < x < v$  lorsque  $x$  appartient à  $\mathbb{R}$ ,
3. les parties contenant un intervalle de la forme  $]u, +\infty]$  avec  $u \in \mathbb{R}$  lorsque  $x = +\infty$ .

**Démonstration** Par transport de structure, les voisinages des points de  $\overline{\mathbb{R}}$  sont les images réciproques des voisinages des points de  $[-1, 1]$  relatifs à la partie  $[-1, 1]$ . La proposition en découle. □



On dit alors qu'une application  $f$  d'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  vers  $\mathbb{R}$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) en  $a \in \text{Adh } A$  si, et seulement si, elle tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) pour la structure métrique  $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ . La forme des voisinages de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) montre que cette définition est équivalente à :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall x \in A, \quad d(x, a) \leq \eta \implies f(x) \geq u \quad (\text{resp. } f(x) \leq u).$$

On retrouve donc la définition usuelle dans le cas d'une application à valeurs réelles.

On dit de même qu'une application  $f$  d'une partie  $A$  non majorée (resp. non minorée) de  $\mathbb{R}$  vers un espace métrique  $(X, d)$  tend vers  $\ell$  en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si, et seulement si, elle tend vers  $\ell$  en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) pour la structure métrique  $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ . La forme des voisinages de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) montre que cette définition est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists u \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in A, \quad x \geq u \quad (\text{resp. } x \leq u) \implies d(x, \ell) \leq \varepsilon$$

On retrouve encore la définition usuelle dans le cas d'une application de variable réelle. Ce dernier cas s'applique aux suites qui sont des applications de  $\mathbb{N}$  vers  $(X, d)$ .

On dit finalement qu'une application à valeurs dans un espace vectoriel normé tend vers l'infini si  $N \circ f$  tend vers  $+\infty$ . On montre alors sans difficulté qu'une application à valeurs complexes tend vers l'infini si, et seulement si, elle tend vers  $\infty$  dans  $(\tilde{\mathbb{C}}, d_{\text{ch}})$  défini dans l'exemple 1 de la page 319.

### Continuité en un point

Lorsque  $a$  appartient à  $A$ , la notion de limite permet de définir la notion de continuité.

#### Définition 30

On dit qu'une application  $f$  d'une partie  $A$  de  $X$  vers  $Y$  est *continue en*  $a \in A$  si elle tend vers  $f(a)$  en  $a$ , c'est-à-dire si elle vérifie la relation :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall x \in A, \quad d(x, a) \leq \eta \implies d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon.$$

#### Proposition 42

Soit  $\mathcal{F}_Y(f(a))$  une base de voisinages de  $f(a)$  dans  $(Y, d)$ . L'application  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si, l'image réciproque par  $f$  de tout élément  $V$  de  $\mathcal{F}_Y(f(a))$  est un voisinage de  $a$  relatif à  $A$ .

**Démonstration** C'est une conséquence immédiate de la proposition analogue concernant les limites en remarquant que les voisinages de  $a$  relatifs à  $A$  sont les parties de la forme  $A \cap U$  avec  $U \in \mathcal{V}_X(a)$ . □



**Définition 31**

On dit qu'une application  $f : A \rightarrow Y$  est *continue* si elle est continue en tout point de  $A$ .

**Remarques**

- Si  $a$  appartient à  $A$ , l'application  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si, elle admet une limite en ce point puisque dans ces conditions sa limite, égale à la limite de l'application constante  $f|_{\{a\}}$ , ne peut être que  $f(a)$ .
- Si  $a$  n'appartient pas à  $A$  et si  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ , l'application  $\tilde{f}$  de  $A \cup \{a\}$  vers  $F$  définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en  $a$  puisque ses restrictions à  $A$  et  $\{a\}$  tendent vers  $\ell$  en  $a$ .

- Une application  $f$  d'une partie  $A$  de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  est *continue en  $a$*  si, et seulement si, la restriction  $f|_A$  de  $(A, d)$  vers  $(Y, d)$  est continue en  $a$ . On se limitera donc en général à des applications de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$ .

**Caractérisation séquentielle des limites**

**Théorème 43**

Une application  $f$  d'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  tend vers  $\ell$  de  $(Y, d)$  en  $a \in \text{Adh } A$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$  la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $\ell$ .

**Démonstration**

- Supposons que  $f$  tende vers  $\ell$  en  $a$  et que  $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  converge vers  $a$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $x$  de  $A$ ,  $d(x, a) \leq \eta$  entraîne  $d(f(x), \ell) \leq \varepsilon$ . Il existe alors  $N$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $d(x_n, a) \leq \eta$  pour tout  $n \geq N$ . On en déduit  $d(f(x_n), \ell) \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Cela montre que  $(f(x_n))$  tend vers  $\ell$ .
- Nous montrons la réciproque par contraposition. Si  $f$  ne tend pas vers  $\ell$  en  $a$ , il existe, par négation de la formule logique exprimant la limite, un réel  $\varepsilon_0 > 0$  tel que l'on ait :

$$\forall \eta > 0, \exists x \in A : d(x, a) \leq \eta \text{ et } d(f(x), \ell) > \varepsilon_0.$$

En particulier, il existe  $x_n \in A$  vérifiant  $d(x_n, a) \leq 2^{-n}$  et  $d(f(x_n), \ell) > \varepsilon_0$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ . On obtient ainsi une suite  $(x_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$ , mais telle que  $(f(x_n))$  ne converge pas vers  $\ell$ . □

**Corollaire 44**

Si  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ , alors  $\ell$  est adhérent à l'ensemble  $f(A)$ .

**Démonstration** Puisque  $a$  est adhérent à  $A$ , il existe une suite  $(x_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$ . Comme la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $\ell$ , l'élément  $\ell$  est adhérent à  $f(A)$   $\square$

**Corollaire 45**

Une application  $f$  est continue en  $a \in A$  si, et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$  la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(a)$ .

*Exemple* Considérons l'application  $f$  de  $[0, 1]$  définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x \text{ est rationnel de forme irréductible } \frac{p}{q} \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

- L'application  $f$  est discontinue en tout rationnel  $x$  de  $[0, 1]$ . Il existe, en effet, une suite de nombres irrationnels  $(z_n)$  convergeant vers  $x$  et la suite  $(f(z_n))$ , nulle par définition, ne converge pas vers  $f(x) \neq 0$ .
- L'application  $f$  possède des limites à droite et à gauche nulles en tout point  $x$  de  $]0, 1[$ .

Soit, en effet,  $\varepsilon > 0$ . L'ensemble  $Y$  des  $y \in [0, 1]$  tels que  $f(y) > \varepsilon$  est formé des rationnels de forme irréductible  $\frac{p}{q} \in [0, 1]$  tel que  $\frac{1}{q}$  soit strictement supérieur à  $\varepsilon$ . Il est donc fini. Il existe alors  $\eta_0 > 0$  tel que :

$$x + \eta_0 < \inf (Y \cap ]x, +\infty[)$$

et :

$$\forall u \in [0, 1] \cap ]x, x + \eta_0], \quad |f(u)| \leq \varepsilon.$$

L'application  $f$  admet donc 0 comme limite à droite à  $x$ . Il en est de même à gauche.

En particulier,  $f$  est continue en tout nombre irrationnel de  $[0, 1]$ .

**Composition des limites****Théorème 46**

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  dans un espace métrique  $(Y, d)$  et  $g$  une application d'une partie  $B$  de  $(Y, d)$  dans un espace métrique  $(Z, d)$  telle que  $f(A) \subset B$

Si  $f$  tend vers  $b$  en  $a \in \text{Adh } A$  et si  $g$  tend vers  $\ell$  en  $b$  qui est adhérent à  $B$  par le premier point, alors  $g \circ f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ .

**Démonstration** Pour tout voisinage  $W \in \mathcal{V}_Z(\ell)$ , il existe  $V \in \mathcal{V}_Y(b)$  tel que  $g(V \cap B)$  soit inclus dans  $W$  puisque  $g$  tend vers  $\ell$  en  $b$ . Il existe alors un voisinage  $U \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que  $f(U \cap A)$  soit inclus dans  $V$  puisque  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ . Comme  $f(U \cap A)$  est aussi contenu dans  $B$ , il vient :

$$(g \circ f)(U \cap A) \subset W. \quad \square$$

**Corollaire 47**

La composée de deux applications  $f$  et  $g$  respectivement continues en  $a$  et  $f(a)$  est continue en  $a$ .

**Limite d'une application à valeurs dans un produit**

Supposons que l'espace métrique  $(Y, d)$  soit le produit :

$$Y_1 \times \cdots \times Y_p$$

d'une famille  $((Y_i, d))_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  d'espaces métriques.

On appelle *composantes* d'une application  $f : A \rightarrow F$  les applications  $f_i$  de  $A$  vers  $F_i$  définies par :

$$\forall x \in A, \quad f(x) = (f_i(x)).$$

Si  $p_i$  désigne la  $i^{\text{ième}}$  projection  $(x_k) \mapsto x_i$  de  $F$  vers  $F_i$ , on a bien sûr  $f_i = p_i \circ f$  pour tout  $i$ .

**Proposition 48**

Une application  $f$  d'une partie  $A$  de  $(X, d)$  tend vers  $(\ell_i) \in Y$  en  $a \in \text{Adh } A$  si, et seulement si pour tout  $i$ , l'application composante  $f_i$  tend vers  $\ell_i$  en  $a$ .

**Démonstration** Si  $f$  tend vers  $(\ell_i) \in F$  en  $a$ , alors la composante  $f_i = p_i \circ f$  tend vers  $\ell_i$  en  $a$  par le théorème de composition

Supposons réciproquement que  $f_i$  tend vers  $\ell_i \in F_i$  en  $a$  pour tout  $i$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $U_i \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que  $f_i(U_i \cap A)$  soit contenu dans  $D_{Y_i}(\ell_i, \varepsilon)$ . Puisque la boule

fermée  $D_Y(\ell, \varepsilon)$  est le produit des boules  $D_{Y_i}(\ell_i, \varepsilon)$ , le voisinage  $U = \bigcap_{i=1}^p U_i$  vérifie :

$$f(U \cap A) \subset D_Y(\ell, \varepsilon). \quad \square$$

**Corollaire 49**

Une application à valeurs dans un produit est continue en  $a$  (resp. continue) si, et seulement si, ses composantes sont continues en  $a$  (resp. continues).

## 4.2 Relations de comparaison

Dans toute cette sous-section,  $f$  désigne une application d'une partie  $A$  de  $(X, d)$  vers  $(E, N)$  et  $\varphi$  une application de  $A$  vers  $\mathbb{R}$

### Définition 32

On dit que l'application  $f$  est *dominée* par  $\varphi$  en  $a \in \text{Adh } A$  si il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une constante réelle  $K$  tels que :

$$\forall x \in A \cap V, \quad N(f(x)) \leq K|\varphi(x)|.$$

### Définition 33

On dit que l'application  $f$  est *négligeable* devant  $\varphi$  en  $a \in \text{Adh } A$  si elle vérifie la relation :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}_X(a) : \quad \forall x \in A, \quad x \in V \cap A \implies N(f(x)) \leq \varepsilon|\varphi(x)|.$$

Comme dans le cas réel, on écrira ces relations  $f = O(\varphi)$  et  $f = o(\varphi)$ .

Comme pour les suites, l'application  $f$  est dominée par  $\varphi$  ou négligeable devant  $\varphi$  si, et seulement si, l'application réelle  $N \circ f$  est dominée par  $\varphi$  ou négligeable devant  $\varphi$ . Cette remarque ramène immédiatement les propriétés de ces relations à celles, bien connues, des relations correspondantes entre les fonctions réelles.

### Proposition 50

- L'application  $f$  est *dominée* par  $\varphi$  en  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une application  $h$  de  $A \cap V$  vers  $E$  bornée sur  $A \cap V$  telle que  $f = \varphi h$  sur  $A \cap V$ .
- L'application  $f$  est *négligeable* devant  $\varphi$  en  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une application bornée de  $A \cap V$  vers  $E$  tendant vers 0 en  $a$  telle que  $f = \varphi h$  sur  $A \cap V$ .

**Démonstration** Dans les deux cas, il existe un voisinage  $W \in \mathcal{V}_X(a)$  et une constante  $K$  tels que  $N(f(x)) \leq K|\varphi(x)|$  pour tout  $x \in A \cap W$ . L'application  $h$  de  $A \cap W$  vers  $F$  définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x)^{-1}f(x) & \text{si } \varphi(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

vérifie alors  $f = \varphi h$  sur  $A \cap W$ . Les deux points de la proposition sont alors évidents □

Soit  $g$  une application de  $A$  vers  $E$ .

**Définition 34**

On dit que les applications  $f$  et  $g$  sont *équivalentes* en  $a$  si l'application  $f - g$  est négligeable devant  $N \circ f$  en  $a \in \text{Adh } A$ .

On écrira bien sûr  $f \sim g$ .

On montre alors comme dans le cas des suites, la proposition suivante :

**Proposition 51**

La relation «  $f$  et  $g$  sont *équivalentes* » est une relation d'équivalence.

### 4.3 Continuité

Rappelons la définition de la continuité.

**Définition 35**

Une application  $f$  d'un espace métrique  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  est continue si elle continue en tout point  $x$  de  $X$ .

L'application  $f$  est donc continue si, pour tout  $a$  de  $X$ , l'application  $f$  admet  $f(a)$  comme limite en  $a$ , c'est-à-dire si elle vérifie la relation :

$$\forall a \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall x \in A, \quad d(x, a) \leq \eta \implies d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon.$$

L'expression formelle ci-dessus montre immédiatement la proposition suivante :

**Proposition 52**

Toute application lipschitzienne est continue.

*Exemples*

1. L'application norme  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est continue.
2. L'application distance  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est continue.  
Si  $a$  est un élément de  $X$  et  $A$  une partie de  $X$ , les applications  $x \mapsto d(x, a)$  et  $x \mapsto d(x, A)$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  sont continues.

Rappelons aussi les deux points suivants vu dans la sous-section consacrée aux limites :

**Proposition 53**

La composée de deux applications continues est continue

**Proposition 54**

Une application continue à valeurs dans un produit est continue si, et seulement si, ses composantes sont continues.

**Caractérisation ensembliste des applications continues**

La continuité a une caractérisation ensembliste très importante :

**Théorème 55**

Une application  $f$  d'un espace métrique  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  est continue si et seulement si, l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $(Y, d)$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

**Démonstration** Supposons que  $f$  soit continue. Soient  $U$  un ouvert de  $Y$  et  $V = f^{-1}(U)$ . Pour tout  $a$  de  $V$ , la partie  $U$  est un voisinage de  $f(a)$  puisqu'elle est ouverte. L'ensemble  $f^{-1}(U)$  est alors un voisinage de  $a$ . Cela valant pour tout  $a \in V$ , la partie de  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$ .

Supposons que l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $Y$  soit un ouvert de  $X$ . Soit  $a$  de  $A$ . Pour toute boule ouverte  $B = B(f(a), r)$  de  $F$ , la partie  $f^{-1}(B)$  est un ouvert contenant  $a$ . C'est donc un voisinage de  $a$ . L'application  $f$  vérifie donc la relation :

$$\forall B \in \mathcal{B}_F(f(a)), \quad \exists U \in \mathcal{V}_A(a) : f(A \cap U) \subset B(f(a), r).$$

Cela valant pour tout  $a$  de  $A$ , elle est continue □

**Corollaire 56**

Une application  $f$  d'un espace métrique  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  est continue si, et seulement si, l'image réciproque par  $f$  de tout fermé de  $(Y, d)$  est fermée dans  $(X, d)$ .

**Démonstration** Pour toute partie  $G$  de  $Y$ , on a :

$$f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$$

Le corollaire provient donc de la caractérisation des fermés comme partie à complémentaire ouvert. □

**Remarque** Les propositions précédentes s'appliquent évidemment si  $f$  est une application d'une partie  $A$  de  $(X, d)$ , ou d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$ , à valeurs dans  $(Y, d)$ . Dans ce cas, l'application  $f$  est continue si, et seulement si, l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert (resp. fermé) de  $Y$  est un ouvert (resp. fermé) de  $(A, d)$ , c'est-à-dire un ouvert (resp. fermé) relatif à  $A$ .

Cela ne signifie évidemment pas que l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert (resp. fermé) de  $Y$  est un ouvert (resp. fermé) de  $(X, d)$ . Par exemple, l'application  $x \mapsto x$  est évidemment une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . L'image réciproque par cette application de l'ouvert  $\mathbb{R}$  est le segment  $[0, 1]$  qui est bien un ouvert relatif de  $[0, 1]$ , mais qui n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

► **Attention** L'image d'une partie ouverte (resp. fermée) de  $(X, d)$  par une application continue de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  n'est pas nécessairement ouverte (resp. fermée) de  $(Y, d)$ . Par exemple, l'image  $\mathbb{R}_+$  de l'ouvert  $] -\infty, +\infty[$  de  $\mathbb{R}$  par l'application  $x \mapsto x^2$  de  $\mathbb{R}$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}$  et l'image  $] -1, 1[$  du fermé  $\mathbb{R}$  par l'application  $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$  n'est pas un fermé de  $\mathbb{R}$ .

*Exemples*

1. On utilise très fréquemment la proposition précédente pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée. Par exemple, l'intérieur d'une hyperbole d'équation  $xy = 1$  défini comme l'ensemble :

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$$

est un ouvert comme image réciproque de  $]1, +\infty[$  par l'application continue  $(x, y) \mapsto xy$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$

2. Si  $F$  et  $G$  sont deux fermés disjoints d'un espace métrique  $(X, d)$ , il existe deux ouverts disjoints contenant respectivement  $F$  et  $G$ .

Considérons, en effet, l'application  $f : x \mapsto d(x, F) - d(x, G)$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . Les propriétés de l'application distance à une partie montrent que  $f$  est continue. Si  $x$  appartient à  $F$ , on a  $d(x, F) = 0$  et  $d(x, G) > 0$  vu  $x \notin G = \overline{G}$ . On obtient donc  $f(x) < 0$  pour tout  $x \in F$  et  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in G$ . Les fermés  $F$  et  $G$  sont alors respectivement contenu dans les ouverts disjoints :

$$U = f^{-1}(] -\infty, 0[) \quad \text{et} \quad V = f^{-1}(]0, +\infty[)$$

3. Si  $f$  et  $g$  sont deux applications continues de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$ , l'ensemble  $Z$  des éléments  $x$  de  $X$  tels que  $f(x) = g(x)$  est fermé.

L'application  $\varphi : x \mapsto d(f(x), g(x))$  est continue comme composée de l'application continue  $x \mapsto (f(x), g(x))$  de  $X$  dans  $Y^2$  (les composantes sont continues) et de l'application distance  $d : Y^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La partie  $Z$  qui est l'image réciproque de  $\{0\}$  par  $\varphi$  est donc fermée.

4. Une application  $f$  de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  est continue si et seulement si :

$$\forall A \subset X, \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Supposons que  $f$  soit continue. Pour tout  $A \subset X$ , l'image réciproque par  $f$  du fermé  $\overline{f(A)}$  est un fermé de  $X$  contenant évidemment  $A$ . On a donc  $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$  et, par conséquent,  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

Pour montrer la réciproque, considérons un fermé  $B$  de  $Y$ . Si  $A$  désigne l'image réciproque  $f^{-1}(B)$ , la relation  $f(A) \subset B$  entraîne :

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B}$$

et, donc,  $f(\overline{A}) \subset B$  puisque  $B$  est fermé. On en déduit :

$$\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$$

et, par conséquent, que  $A$  est fermé. cela valant pour tout fermé  $B$  de  $Y$  l'application  $f$  est continue.

### Prolongement des identités

Soient  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  deux espaces métriques.

#### Théorème 57 (Théorème de prolongement des identités)

Deux applications continues  $f$  et  $g$  de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  égales en tout point d'une partie dense de  $X$  sont égales.

**Démonstration** Soit  $D$  une partie dense de  $X$  sur laquelle  $f$  et  $g$  coïncident

L'application  $\varphi : x \mapsto d(f(x), g(x))$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  est continue comme composée des applications continues  $x \mapsto (f(x), g(x))$  de  $X$  dans  $Y^2$  et  $d$  de  $Y^2$  dans  $\mathbb{R}$ . L'ensemble  $\varphi^{-1}(0)$  est donc fermé. Comme il contient évidemment  $D$ , il est égal à  $X$  et  $f = g$ .

Il existe aussi une démonstration séquentielle très simple de ce théorème. Pour tout  $x$  de  $X$ , il existe une suite  $(d_n) \in D^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $x$  puisque  $D$  est dense. Comme les suites  $(f(d_n))$  et  $(g(d_n))$  sont égales par hypothèse, leurs limites  $f(x)$  et  $g(x)$  sont aussi égales. Il vient donc  $f = g$ . □

### Applications bicontinues ou homéomorphismes

#### Définition 36

On dit qu'une application de  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  est *bicontinue* si elle est bijective et si les applications  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues



On dit aussi que  $f$  est un *homéomorphisme* de  $(X, d)$  sur  $(Y, d)$ . Les propositions du point précédent montrent que pour toute bijection  $f$  de  $(X, d)$  sur  $(Y, d)$  les points suivants sont équivalents :

- $f$  est un homéomorphisme,
- l'image réciproque  $f^{-1}(V)$  d'une partie  $V$  de  $Y$  est un ouvert (resp. fermé) de  $X$  si, et seulement si,  $V$  est un ouvert (resp. fermé) de  $Y$ ,
- l'image directe  $f(U)$  d'une partie  $U$  de  $X$  est un ouvert (resp. fermé) de  $Y$  si, et seulement si,  $U$  est un ouvert (resp. fermé) de  $X$ .

**Exemples**

1. Il existe des applications bijectives et continues dont la réciproque n'est pas continue ; c'est le cas par exemple de l'application bijective et continue :

$$e : t \in [0, 2\pi[ \mapsto e^{it} \in \mathbb{U}$$

dont la réciproque ne peut être continue puisqu'elle transforme la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{-i2^{-n}}$$

qui converge vers 1 dans  $\mathbb{U}$  en la suite  $(t_n)$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = 2\pi - 2^{-n}$$

qui diverge dans  $[0, 2\pi[$ .

2. Le cas des intervalles de  $\mathbb{R}$  est à cet égard particulier ; nous avons vu en effet, dans le cours de première année, qu'une application  $f$  continue et strictement croissante d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  a comme image un intervalle  $J$  de même nature que  $I$  et induit un homéomorphisme de  $I$  sur  $J$  ( $f^{-1} : J \rightarrow I$  est continue).

Par exemple, tous les intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  sont homéomorphes à  $\mathbb{R}$ . Par simple transformation affine, on voit en effet que tous les intervalles ouverts différents de  $\mathbb{R}$  sont homéomorphes à  $]0, +\infty[$ ,  $] -\infty, 0[$  ou  $] -1, 1[$ . Les intervalles  $]0, +\infty[$  et  $] -\infty, 0[$  sont homéomorphes à  $\mathbb{R}$  par les applications  $\ln$  et  $x \mapsto \ln(-x)$ . L'intervalle  $] -1, 1[$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$  par :

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

De même, tous les segments de  $\mathbb{R}$  sont homéomorphes à  $\overline{\mathbb{R}}$ . Ils sont en effet homéomorphes à  $[-1, 1]$  par transformation affine et l'application  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , prolongement de l'application précédente est un homéomorphisme puisqu'elle est par définition une bijection isométrique de  $[-1, 1]$  sur  $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ .

#### 4.4 Continuité uniforme

Comme nous l'avons vu, une application  $f$  est continue si elle vérifie la relation :

$$\forall a \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall x \in A, \quad d(x, a) \leq \eta \implies d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon.$$

Comme dans le cas réel, on définit alors la notion de continuité uniforme suivante :

##### Définition 37

On dit que l'application  $f$  est *uniformément continue* si elle vérifie la relation :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall (x, y) \in A^2, \quad d(x, y) \leq \eta \implies d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Il faut bien sûr distinguer soigneusement les notions de continuité et de continuité uniforme dont la différence s'exprime formellement par la position des quantificateurs dans les expressions ci-dessus.

Toute application uniformément continue est évidemment continue, mais la réciproque est fautive comme le montrent les contre-exemples déjà vus dans le cadre des fonctions d'une variable réelle.

##### Proposition 58

Toute application lipschitzienne  $f$  d'une partie  $A$  de  $E$  vers  $F$  est uniformément continue.

**Démonstration** Si  $f$  est  $K$ -lipschitzienne, alors, pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , on a l'implication :

$$d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{1 + K} \implies d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon. \quad \square$$

#### 4.5 Applications linéaires continues

Soient  $(E, N)$  et  $(F, N)$  deux espaces vectoriels normés.

##### Applications linéaires continues

##### Theorème 59

Si  $u$  est une application linéaire d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  vers un espace vectoriel normé  $(F, N)$ , les points suivants sont équivalents :

- (i)  $u$  est lipschitzienne,
- (ii)  $u$  est continue,
- (iii)  $u$  est continue en 0,
- (iv)  $u$  est continue en un point.

**Démonstration**

- ▶ Nous avons déjà vu l'implication (i) ⇒ (ii). Les implications (ii) ⇒ (iii) et (iii) ⇒ (iv) sont triviales.
- ▶ Si  $u$  est continue en  $x_0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $N(x - x_0) \leq \eta$  entraîne  $N(u(x) - u(x_0)) \leq 1$ . Pour tout  $h \in D(0, \eta)$ , on a alors  $N((x_0 + h) - x_0) \leq \eta$  et, par conséquent :

$$N(u(h)) = N(u(x) - u(x_0)) \leq 1.$$

Nous avons vu que cela prouve que  $u$  est lipschitzienne. Cela prouve (iv) ⇒ (i). □

On montre donc pratiquement qu'une application linéaire est continue en vérifiant qu'elle est lipschitzienne, c'est-à-dire en montrant qu'il existe une constante réelle  $K$  telle que :

$$\forall x \in E, \quad N(u(x)) \leq N(x).$$

**Exemples**

1. L'application linéaire  $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(t) \sin t \, dt$  de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $N_\infty$  est continue puisque l'inégalité de la moyenne entraîne :

$$|\varphi(f)| \leq \left( \int_0^1 |\sin t| \, dt \right) N_\infty(f).$$

2. L'application linéaire  $\varphi : f \mapsto f(1)$  de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $N_1$  n'est pas continue puisque la suite  $(t^n)$  vérifiant  $N_1(t^n) = \frac{1}{n+1}$  converge vers 0, alors que  $\varphi(t^n) = 1$  ne converge pas vers 0. On retrouve ce résultat en remarquant qu'il n'existe pas de constante réelle  $K$  tel que :

$$\forall n, \quad 1 = |\varphi(t^n)| \leq KN_1(t^n) = \frac{K}{n+1}.$$

**Applications bilinéaires continues**

**Théorème 60**

Si  $B$  est une application bilinéaire du produit  $E \times F$  vers un espace vectoriel normé  $(G, N)$ , les points suivants sont équivalents :

- (i)  $B$  est bilipschitzienne,
- (ii)  $B$  est continue,
- (iii)  $B$  est continue en  $(0, 0)$ .

**Démonstration** Rappelons que  $E \times F$  est muni de la norme :

$$N(x, y) = \max (N(x), N(y)).$$

► Supposons qu'il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que l'on ait  $N(B(x, y)) \leq KN(x)N(y)$  pour tout  $(x, y) \in E \times F$ .

Soient  $(x_0, y_0) \in E \times F$  et  $R = N(x_0, y_0)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , posons :

$$\eta = \min \left( \frac{\varepsilon}{2(R + 1)(K + 1)}, 1 \right)$$

Pour tout  $(x, y)$  vérifiant  $N((x, y) - (x_0, y_0)) \leq \eta$ , on a tout d'abord :

$$N(y) \leq N(y_0) + 1 \leq R + 1$$

et, en utilisant :

$$B(x, y) - B(x_0, y_0) = B(x - x_0, y) + B(x_0, y - y_0)$$

la relation :

$$\begin{aligned} N(B(x, y) - B(x_0, y_0)) &\leq KN(x - x_0)N(y) + KN(x_0)N(y - y_0) \\ &\leq K\eta(R + 1) + K\eta R \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(on utilise  $R < R + 1$  et  $K < K + 1$ ). Cela montre  $(i) \Rightarrow (ii)$ .

- L'implication  $(ii) \Rightarrow (iii)$  est claire.
- Si  $B$  soit continue en  $(0, 0)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $N(x, y) \leq r$  entraîne  $N(B(x, y)) \leq 1$ . On a donc  $N(B(x, y)) \leq K$  pour tout  $(x, y)$  vérifiant  $N(x) \leq r$  et  $N(y) \leq r$ . Nous avons vu que cela prouve que  $B$  est bilipschitzienne. Cela prouve  $(iii) \Rightarrow (i)$ . □

### Continuité de la norme et des opérations algébriques

#### Proposition 61

Si  $(E, N)$  est un espace vectoriel normé, les applications :

1. norme :  $x \mapsto N(x)$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,
2. somme :  $(x, y) \mapsto x + y$  de  $E^2$  vers  $E$ ,
3. produit par un scalaire :  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$  de  $\mathbb{K} \times E$  vers  $E$

sont continues.

**Démonstration** Nous avons déjà vu que  $x \mapsto N(x)$  est 1-lipschitzienne et que  $(x, y) \mapsto x + y$  est 2-lipschitzienne.

L'application bilinéaire  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$  est continue puisque l'on a  $N(\alpha x) \leq |\alpha| N(x)$ . □

#### Proposition 62

Si  $(E, N)$  est une algèbre normée, l'application produit  $(x, y) \mapsto xy$  de  $E^2$  vers  $E$  est continue.

**Démonstration** La relation  $N(xy) \leq N(x)N(y)$  montre que l'application bilinéaire produit est continue. □

**Corollaire 63**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications d'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(F, N)$  et  $\varphi$  une application de  $A$  vers  $\mathbf{K}$ . Si  $f$  tend vers  $\ell$ , si  $g$  tend vers  $m$  et si  $\varphi$  tend vers  $\lambda$  en  $a \in \text{Adh } A$ , alors :

1.  $N \circ f : x \mapsto N(f(x))$  tend vers  $N(\ell)$  en  $a$ ,
2.  $f + g$  tend vers  $\ell + m$  en  $a$ ,
3.  $\varphi f$  tend vers  $\alpha \ell$  en  $a$ ,
4.  $fg$  converge vers  $\ell m$  en  $a$  si  $F$  est une algèbre normée

**Cas des suites**

Les propriétés générales des limites s'appliquent aux suites comme nous l'avons dit.

**Proposition 64**

Une suite  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$  de l'espace produit  $(X \times Y, d)$  converge vers  $(\ell, m)$  si, et seulement si, ses suites composantes  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  convergent vers  $\ell$  et  $m$ .

Cela s'applique par exemple à l'espace produit  $\mathbf{K}^n$  : une suite  $((\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{n,k}))_{k \in \mathbf{N}}$  convergent vers  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de  $\mathbf{K}^n$  si, et seulement si, pour tout  $i$ , ses suites composantes  $(\alpha_{i,k})_{k \in \mathbf{N}}$  convergent vers  $\lambda_i$  dans  $\mathbf{K}$ .

Cela s'applique aux séries.

**Proposition 65**

L'image  $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$  d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $(X, d)$  convergeant vers  $\ell$  par une application continue  $(X, d)$  vers  $(Y, d)$  converge vers  $f(\ell)$ .

Ainsi, si les suites  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $(E, N)$  convergent vers  $\ell$  et  $m$  et si  $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $\mathbf{K}$  converge vers  $\alpha$ , alors :

- $(N(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $N(\ell)$ ,
- $(x_n + y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell + m$ ,
- $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\alpha \ell$ .

**Corollaire 66**

Toute suite convergente est bornée.

**Démonstration** Il suffit de remarquer que la suite réelle  $(N(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente et, par conséquent, bornée.  $\square$

**Proposition 67**

La série image  $\sum_{n \geq 0} u(x_n)$  d'une série convergente  $\sum_{n \geq 0} x_n$  par une application linéaire continue de  $(E, N)$  vers  $(F, N)$  est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(x_n) = u \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right).$$

**Exemple** L'adhérence d'un sous-espace vectoriel  $F$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est un sous-espace vectoriel.

Considérons, en effet,  $x$  et  $y$  de  $\overline{F} = \text{Adh } F$  et  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbf{K}$ . Il existe des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de  $F$  convergeant vers  $x$  et  $y$ . La proposition précédente montre alors que  $(\alpha x_n + \beta y_n)$  converge vers  $\alpha x + \beta y$ . Ainsi,  $\alpha x + \beta y$  appartient à  $\overline{F}$ . L'inclusion  $F \subset \overline{F}$  prouvant  $0 \in \overline{F}$ , le sous-ensemble  $\overline{F}$  est donc un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Espaces d'applications continues****Corollaire 68**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications d'un espace métrique  $(X, d)$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(E, N)$  et  $\varphi$  une application de  $(X, d)$  vers  $\mathbf{K}$ . Si  $f$ ,  $g$  et  $\varphi$  sont continues en  $a \in X$  (resp. continues), alors :

1.  $N \circ f : x \mapsto N(f(x))$  est continue en  $a$  (resp. continue),
2.  $f + g$  est continue en  $a$  (resp. continue),
3.  $\varphi f$  est continue en  $a$  (resp. continue),
4.  $fg$  est continue en  $a$  (resp. continue) si  $F$  est une algèbre normée.

**Proposition 69**

L'ensemble  $\mathcal{C}(X, E)$  des applications continues de  $(X, d)$  vers  $(E, N)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(X, E)$ .

**Proposition 70**

L'ensemble  $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$  des applications continues de  $(X, d)$  vers  $\mathbb{K}$  est une sous-algèbre de l'algèbre  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  dont les éléments inversibles sont les applications continues qui ne s'annulent pas.

**Démonstration** Nous avons vu que  $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$  est une partie de  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  contenant les applications constantes et stable par addition et produit. Si  $f$  de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$  est inversible, il existe  $g$  de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$  tel que  $fg = 1$  ce qui implique  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x$ . Si  $f$  de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$  ne s'annule pas, l'application  $g : x \mapsto f(x)^{-1}$  de  $X$  vers  $\mathbb{K}$  est continue comme composition de  $f$  et  $x \mapsto x^{-1}$  de  $\mathbb{K}^*$  dans lui-même. L'application  $g$  de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$  est inverse de  $f$ . □

**Proposition 71**

Si  $E$  est une algèbre normée, alors l'ensemble  $\mathcal{C}(X, E)$  est une sous-algèbre de l'algèbre  $\mathcal{F}(X, E)$ .

**Continuité des formes linéaires**

**Proposition 72**

Le noyau d'une forme linéaire  $\varphi$  sur un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est fermé ou dense.

**Démonstration** Le noyau  $H$  de  $\varphi$  est un hyperplan de  $E$ . Son adhérence  $\overline{H}$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  contenant  $H$ . On a donc  $\overline{H} = H$ , auquel cas  $H$  est fermé, ou  $\overline{H} = E$ , auquel cas  $H$  est dense. □

**Proposition 73**

Une forme linéaire  $\varphi$  sur un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est continue si et seulement si, son noyau est fermé.

**Démonstration**

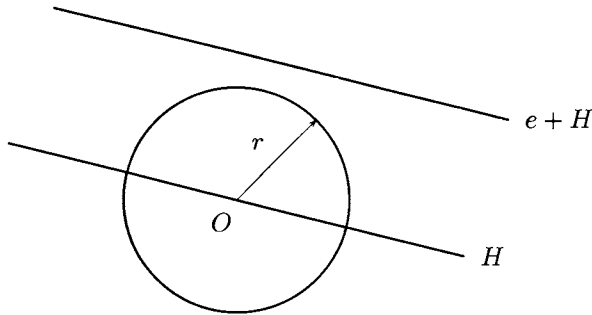
- Si  $\varphi$  est continue, son noyau, image réciproque du singleton  $\{0\}$ , est fermé.
- Supposons que  $\varphi$  ne soit pas nulle et considérons  $e$  tel que  $\varphi(e) = 1$ . Si le noyau  $H$  de  $\varphi$  est fermé, son complémentaire  $E \setminus H$  est ouvert et contient  $e$ . Il existe donc  $r > 0$  tel que :

$$D(e, r) \subset E \setminus H.$$

par translation par le vecteur  $-e$ , on obtient :

$$D(0, r) \subset E \setminus H_1$$

où  $H_1$  désigne le sous-espace affine  $e + H$



S'il existe un élément  $h \in D(0, r)$  tel que  $\lambda = \varphi(h)$  soit de module supérieur ou égal à 1 le vecteur :

$$y = \lambda^{-1}h$$

appartient à  $D(0, r)$  puisque  $N(\lambda^{-1}h) \leq N(h)$  et vérifie  $\varphi(y) = 1$ . Cela contredit  $D(0, r) \cap H_1 = \emptyset$ . Finalement, l'image de  $D(0, r)$  par  $\varphi$  est bornée par 1 et  $\varphi$  est continue. □

**Exemple** Considérons l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}[x]$  des applications polynomiales réelles muni de la norme  $N_{\infty, A}$  associée à une partie bornée infinie  $A$  de  $\mathbb{R}$  (voir l'exemple 2. page 313).

L'application linéaire  $\delta_a : P \mapsto P(a)$  de  $\mathbb{R}[x]$  dans  $\mathbb{R}$  associée à  $a \in \mathbb{R}$  est continue si, et seulement si,  $a$  appartient à l'adhérence de  $A$ .

- Si  $a$  est dans l'adhérence de  $A$ , il existe une suite  $(x_n)$  de  $A$  convergeant vers  $a$ . La relation  $\forall n, |f(x_n)| \leq N_{\infty, A}(f)$  montre à la limite que l'on a  $|\delta_a(f)| \leq N_{\infty, A}(f)$ . L'application  $\delta_a$  est donc 1-lipschitzienne.
- Si  $a$  n'appartient pas à  $\overline{A}$ , il existe  $r > 0$  tel que  $D(a, r)$  ne rencontre pas  $A$ . Puisque  $A$  est bornée, il existe aussi  $R > r$  tel que  $A$  soit contenu dans  $D(a, R)$ . Une simple étude de fonction montre alors que l'application polynomiale :

$$P_n : x \mapsto \left( 1 - \frac{(x - a)^2}{R^2} \right)^n$$

vérifie  $\delta_a(P_n) = 1$  et :

$$N_{\infty, A}(P_n) \leq \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^n$$

La suite  $(P_n)$  converge donc vers 0 dans  $\mathbb{R}[x]$  muni de  $N_{\infty, A}$ , alors que  $(\delta_a(P_n))$  converge vers 1. La forme linéaire  $\delta_a$  n'est donc pas continue.

Puisque le noyau de  $\delta_a$  est alors dense on voit que pour tout  $P \in \mathbb{R}[x]$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $Q \in \mathbb{R}[x]$  vérifiant :

$$Q(a) = 0 \quad \text{et} \quad N_{\infty, A}(Q - P) \leq \varepsilon.$$



## 4.6 Normes équivalentes

### Relation de domination

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes de  $E$ .

#### Définition 38

On dit que la norme  $N_2$  est dominée par la norme  $N_1$ , ce que l'on note  $N_2 = O(N_1)$ , s'il existe une constante  $K \in \mathbb{R}_+^*$  telle que :

$$\forall x \in E, \quad N_2(x) \leq KN_1(x).$$

Cette relation est réflexive et transitive

#### Proposition 74

Les points suivants sont équivalents :

- (i)  $N_2$  est dominée par  $N_1$ ,
- (ii) l'application  $\text{Id}_E$  est lipschitzienne de  $(E, N_1)$  dans  $(E, N_2)$ ,
- (iii) toute suite  $(x_n)$  de  $E^{\mathbb{N}}$  convergeant vers 0 dans  $(E, N_1)$  converge vers 0 dans  $(E, N_2)$

### Relation d'équivalence entre normes

#### Définition 39

On dit que les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes, s'il existe deux constantes réelles strictement positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si, et seulement si, on a  $N_1 = O(N_2)$  et  $N_2 = O(N_1)$ . On en déduit :

#### Proposition 75

Les points suivants sont équivalents :

- (i) les normes  $x \mapsto N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes,
- (ii) une suite  $(x_n)$  de  $E^{\mathbb{N}}$  convergeant vers 0 dans  $(E, N_1)$  si, et seulement si, elle converge vers 0 dans  $(E, N_2)$ ,
- (iii) l'application  $\text{Id}_E$  est bicontinue de  $(E, N_1)$  sur  $(E, N_2)$ ,
- (iv) les topologies de  $(E, N_1)$  et  $(E, N_2)$  sont identiques.

On en déduit immédiatement les points suivants :

- la relation «équivalente» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes ;
- deux normes sont donc équivalentes si elles donnent à  $E$  les mêmes suites convergentes vers 0, les mêmes ouverts, les mêmes fermés, les mêmes bornés.

On peut donc, pour étudier les propriétés topologique d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$ , changer  $N$  en toute autre norme équivalente. C'est évidemment un résultat très important et très pratique.

Nous avons vu à la proposition 4 de la page 310 que les normes  $\| \cdot \|_\infty$ ,  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  de  $\mathbf{K}^n$  sont équivalentes. Nous verrons dans le chapitre suivant que toutes les normes de  $\mathbf{K}^n$ , et plus généralement de tout espace vectoriel de dimension finie, sont équivalentes.

Les exemples suivants montrent que les normes  $N_\infty$ ,  $N_1$  et  $N_2$  de l'espace fonctionnel  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  ne sont pas équivalentes et qu'un espace vectoriel possédant une base infinie admet des normes non équivalentes..

### Exemples

1. Considérons les normes  $N_\infty$ ,  $N_1$  et  $N_2$  de l'espace  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  définies dans la proposition 8 page 315.

Les inegalités de la moyenne et de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{[0,1]} |f| \leq \sup_{[0,1]} |f|, \quad \left( \int_{[0,1]} |f|^2 \right)^{1/2} \leq \sup_{[0,1]} |f| \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} |f| \leq \left( \int_{[0,1]} |f|^2 \right)^{1/2}$$

montrent que l'on a  $N_1 = O(N_\infty)$ ,  $N_2 = O(N_\infty)$  et  $N_1 = O(N_2)$

Néanmoins, ces normes ne sont pas deux à deux équivalentes. En effet, leurs valeurs sur les applications  $f_n : t \mapsto t^n$  avec  $n$  entier sont :

$$N_\infty(f_n) = 1, \quad N_1(f_n) = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad N_2(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Puisque  $(f_n)$  tend vers 0 dans  $(E, N_1)$  et dans  $(E, N_2)$  mais pas dans  $(E, N_\infty)$ , la norme  $N_\infty$  n'est pas équivalente à  $N_1$  ou à  $N_2$ . Puisque  $(\sqrt{n}f_n)$  tend vers 0 dans  $(E, N_1)$  mais pas dans  $(E, N_2)$ , la norme  $N_1$  n'est pas équivalente à  $N_2$ .

2. Soient  $E$  un espace vectoriel de base  $(e_i)_{i \in I}$  avec  $I$  infini. Les application  $N_\infty$  et  $N_1$  définies sur  $E$  par :

$$N_\infty(x) = \max |\alpha_i| \quad \text{et} \quad N_1(x) = \sum_{i \in I} |\alpha_i|$$

où  $(\alpha_i)$  est la famille des coordonnées de  $x$  dans  $(e_i)_{i \in I}$ , sont des normes sur  $E$

La norme  $N_1$  domine  $N_\infty$  puisque l'on a évidemment  $N_\infty(x) \leq N_1(x)$  pour tout  $x$  de  $E$ . D'un autre côté pour tout entier  $n > 0$ , il existe une partie  $J_n$  de  $I$  à  $n$  éléments et un vecteur :

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{i \in J_n} e_i$$

vérifiant  $N_\infty(x_n) = \frac{1}{n}$  et  $N_1(x_n) = 1$ . Les normes  $N_\infty$  et  $N_1$  ne sont donc pas équivalentes puisque  $(x_n)$  tend vers 0 dans  $(E, N_\infty)$  mais pas dans  $(E, N_1)$

3. Considérons l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}[x]$  et les norme  $N_{\infty,A}$  et  $N_{\infty,B}$  associées à deux parties infinies et bornées  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  (voir exemple 2. page 313).

Les normes  $N_{\infty,A}$  et  $N_{\infty,B}$  sont équivalentes si, et seulement si, les adhérences de  $A$  et  $B$  sont égales. Elles sont alors égales.

- Si  $A$  est une partie bornée et infinie de  $\mathbb{R}$ , il en est évidemment de même de l'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$ . L'inclusion  $A \subset \bar{A}$  montre que l'on a  $N_{\infty,A} \leq N_{\infty,\bar{A}}$ . Nous avons vu dans l'exemple de la page 368 que, pour tout  $a \in \bar{A}$ , on a  $|P(a)| \leq N_{\infty,A}(P)$  pour tout  $P \in \mathbb{R}[x]$ . On en déduit  $N_{\infty,\bar{A}} \leq N_{\infty,A}$  et donc  $N_{\infty,A} = N_{\infty,\bar{A}}$ .

Ainsi l'égalité  $\bar{A} = \bar{B}$  entraîne  $N_{\infty,A} = N_{\infty,B}$ .

- Supposons maintenant que  $N_{\infty,A}$  et  $N_{\infty,B}$  soient équivalentes. Si  $a$  appartient à  $\bar{A}$ , l'application  $\delta_a$  de  $(\mathbb{R}[x], N_{\infty,A})$  vers  $\mathbb{R}$  continue. Elle est donc aussi continue sur  $(\mathbb{R}[x], N_{\infty,B})$ . Nous avons vu aussi, dans l'exemple de la page 368, que cela entraîne  $a \in \bar{B}$ . On obtient de même l'inclusion inverse. Finalement,  $\bar{A} = \bar{B}$ .

4. Les distances euclidienne :

$$\forall (x, y) \in S^2, \quad d(x, y) = \|x - y\|_2$$

et géodésique :

$$\forall (x, y) \in S^2, \quad d_g(x, y) = \arccos \langle x | y \rangle$$

de la sphère unité  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $\frac{2}{\pi} d_g \leq d \leq d_g$ . L'application  $\text{Id}_S$  de  $(S, d)$  sur  $(S, d_g)$  est donc bicontinue et les espaces métriques  $(S, d)$  et  $(S, d_g)$  homéomorphes.

Soient, en effet,  $x$  et  $y$  de  $S$ . En considérant un grand cercle de  $S$  contenant  $x$  et  $y$ , on obtient :

$$d(x, y) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{avec} \quad \alpha = d_g(x, y).$$

Les inégalités  $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$  pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  conduisent alors à :

$$\frac{2}{\pi} d_g(x, y) \leq d(x, y) \leq d_g(x, y).$$

## EXERCICES

1. Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que si  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ , alors  $F = E$ .

2. 1. Montrer que tout fermé  $F$  d'un espace normé est intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Soient  $F$  et  $G$  deux fermés disjoints de l'espace normé  $E$ .

2. Montrer qu'il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  disjoints tels que  $F \subset U$  et  $G \subset V$

3. Montrer qu'il existe une fonction continue  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$f^{-1}(\{1\}) = F, \quad \text{et} \quad f^{-1}(\{0\}) = G.$$

3. Soit  $E$  un espace normé. On note  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$  la frontière de la partie  $A$  de  $E$ .

1. Donner un exemple de parties  $A$  et  $B$  de  $E = \mathbb{R}$  telles que

$$\text{Fr}(A \cup B) \cup \text{Fr}(A \cap B) \neq \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B).$$

2. Montrer que, pour deux parties non vides quelconques de  $E$ ,

$$\text{Fr}(A \cup B) \cup \text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B).$$

3. Si  $A$  et  $B$  sont deux fermés de  $E$ , montrer que :  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .

4. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont fermés,

$$\text{Fr}(A \cup B) \cup \text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B).$$

4. Soit  $E$  l'espace des suites réelles bornées muni de la norme  $\|(a_n)_n\| = \sup |a_n|$ . Déterminer l'adhérence de l'ensemble  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  des suites presque nulles.

### 5. Le résultant vu par Frobenius

1. Soit  $H$  une fonction polynomiale non identiquement nulle de  $\mathbb{C}^p$  dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que l'ensemble  $U$  des éléments  $(z_1, z_2, \dots, z_p)$  de  $\mathbb{C}^p$  tels que  $H(z_1, z_2, \dots, z_p) \neq 0$  est un ouvert dense de  $\mathbb{C}^p$ .

2. Soit  $A_{n,m}$  l'ensemble des couples de polynômes unitaires complexes de degrés respectifs  $n > 0$  et  $m > 0$ . C'est un sous-espace affine de  $\mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X]$ . Montrer que l'ensemble des couples  $(P, Q) \in A_{n,m}$  n'ayant pas de racine commune est un ouvert dense de  $A_{n,m}$ . On pourra considérer le déterminant de  $Q(M_P)$ , où  $M_P$  est la matrice compagnon de  $P$ .

3. En déduire que dans l'espace affine  $A_n$  des polynômes complexes unitaires de degré  $n$ , l'ensemble des  $P \in A_n$  ayant  $n$  racines complexes distinctes est un ouvert dense de  $A_n$ .

6. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Pour  $p$  fixé  $1 \leq p \leq n$ , montrer que :

$\Omega = \{(v_1, v_2, \dots, v_p) \in E^p \mid (v_1, \dots, v_p) \text{ soit une famille libre de } E\}$   
est un ouvert de  $E^p$ .

7. Déterminer si les ensembles de matrices suivants dans  $M_n(\mathbf{K})$  ( $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) sont ouverts, fermés, denses, compacts, et déterminer éventuellement leur adhérence et leur intérieur :

1. l'ensemble  $\mathcal{R}_p$  des matrices de rang inférieur ou égal à  $p$  ;
2. l'ensemble  $\mathcal{R}'_p$  des matrices de rang strictement supérieur à  $p$  ;
3. l'ensemble  $GL_n(\mathbf{K})$  des matrices inversibles ;
4. l'ensemble  $\mathcal{P}$  des matrices de projecteurs ;
5. l'ensemble  $\mathcal{N}$  des matrices nilpotentes ;
6. l'ensemble  $\mathcal{D}$  des matrices diagonalisables, pour  $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ .

8. 1. Soit  $f$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = f(1)$ . Montrer que, pour tout  $n \geq 2$  entier, il existe  $t \in [0, 1 - 1/n]$  tel que  $f(t) = f(t + 1/n)$ .

2. Soit  $g$  une application continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que sur tout cercle de rayon non nul centré en  $O = (0, 0)$ , il existe deux points  $m_1$  et  $m_2$  symétriques par rapport à  $O$  tels que  $g(m_1) = g(m_2)$ .

Montrer de même que sur tout cercle de rayon non nul centré en  $O = (0, 0)$ , il existe deux points  $m_1$  et  $m_2$  se déduisant l'un de l'autre par rotation d'angle  $\pi/2$  de centre  $O$  et tels que  $g(m_1) = g(m_2)$ .

9. Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite quelconque de réels, et  $\sum a_n$  une série convergente de réels strictement positifs. On note  $\mathbb{I}_A$  la fonction indicatrice d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , qui vaut 1 sur  $A$  et 0 ailleurs. Montrer que les points de discontinuité de

la fonction  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbb{I}_{|\alpha_n, +\infty[}$  sont exactement les  $\alpha_n$ .

10. Déterminer l'ensemble des formes linéaires continues sur l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  des suites presque nulles de réels, pour la norme infinie.

11. Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $[a, b]$  dans lui-même telles que  $f \circ g = g \circ f$ . On note  $f^n$  et  $g^n$  leurs  $n^{\text{èmes}}$  itérées.

1. Montrer que si, pour tout  $x$ ,  $f(x) > g(x)$ , alors il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $x \in [a, b]$  et tout  $n \geq 1$ ,  $f^n(x) \geq Kn + g^n(x)$ .
2. En déduire qu'il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = g(x)$

## 12. Continuité des racines d'un polynôme

On considère un polynôme complexe  $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$  normalisé de degré  $p \geq 1$ , et une suite  $(P_n)_n$  de polynômes normalisés  $P_n = X^p + a_{p-1,n}X^{p-1} + \dots + a_{1,n}X + a_{0,n}$ , de même degré  $p$ , telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k,n} = a_k \quad (*)$$

On se propose de montrer que *les racines de  $P_n$  tendent vers celles de  $P$* , au sens suivant : si  $z$  est une racine de  $P$  de multiplicité  $m$ , alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $P_n$  ait un facteur de degré  $m$  dont toutes les racines sont dans le disque de centre  $z$  et de rayon  $\varepsilon$  (autrement dit,  $P_n$  admet  $m$  racines *distinctes ou confondues* qui convergent vers  $z$ ).

Soit  $E_p$  l'espace affine des polynômes complexes normalisés de degré  $p$ , muni de sa topologie de partie de l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{C}_p[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ .

1. Soit  $P \in E_p$  admettant 0 comme racine, et soit  $(P_n)_n$  une suite de polynômes vérifiant la condition (\*). Montrer que le *plus petit* des modules de racine de  $P_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.
2. On suppose  $p \geq q \geq 1$ . Montrer que l'application  $\theta_{p,q}$  de  $E_p \times E_q$  dans  $E_{p-q}$  qui associe à tout couple  $(P, Q)$  le *quotient* de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$  est *continue*.
3. On suppose que  $P$  admet 0 comme racine de multiplicité  $m \geq 1$ . Montrer à l'aide de la question précédente que chaque  $P_n$  s'écrit  $P_n = Q_n D_n$ , où  $D_n$  est normalisé de degré  $m$  et tel que le *plus grand* module de ses racines tende vers 0 (autrement dit *toutes* ses racines tendent vers 0).
4. Montrer que, pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , l'application  $Q(X) \mapsto Q(X + a)$  de  $E_p$  dans  $E_p$  est continue. Conclure.

13 Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension dénombrable (par exemple  $\mathbb{R}[X]$ )  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base de  $E$ .

1. Montrer qu'on peut munir  $E$  d'une norme préhilbertienne telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

2. Soit  $a$  un vecteur quelconque de  $E$ . Dédurre de la première question qu'on peut munir  $E$  d'une norme préhilbertienne telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Ainsi, on peut munir  $\mathbb{R}[X]$  d'une norme pour laquelle la suite des monômes  $X^n$  tend vers n'importe quel polynôme de notre choix !

14. Soit  $N$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R} : (x, y) \mapsto N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$ .

1. Montrer que  $N$  est une norme.
2. La comparer à la norme euclidienne, en donnant le meilleur encadrement possible.
3. Donner une expression explicite de  $N(x, y)$  en fonction de  $x$  et  $y$  à l'aide des fonctions usuelles, et représenter la boule unité de  $\mathbb{R}^2$  pour la norme  $N$ . Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

15. Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , normé par la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , et  $E'$  le sous-espace affine des fonctions  $f$  telles que  $f(0) = f(1) = 0$ , et  $\int_0^1 f = 1$ .

1. Montrer que  $E'$  est fermé et de codimension finie à déterminer. On rappelle qu'un sous-espace affine est de codimension finie lorsque sa direction (sous-espace vectoriel des  $u - v$ , lorsque  $u$  et  $v$  décrivent  $E'$ ) admet un supplémentaire de dimension finie, appelée codimension de  $E'$ .
2. Montrer que la distance de  $0 \in E$  à  $E'$  n'est pas atteinte.

16. Soit  $E$  l'espace des fonctions  $f$  de classe  $C^1$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On le munit des normes :

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$N_d(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

1. Comparer ces trois normes.
2. Étudier pour chacune si  $\Omega = \{f \in E / \forall t \in [0, 1], f(t) > 0\}$  est une partie ouverte.





# Chapitre 11

## Espaces vectoriels normés et espaces métriques : théorèmes fondamentaux

Dans tout ce chapitre,  $(X, d)$  désigne un espace métrique et  $(E, \| \cdot \|)$  espace vectoriel normé sur  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1. Complétude

#### 1.1 Suites de Cauchy

La notion de suite de Cauchy d'un espace métrique est l'extension immédiate de celle que nous avons vu dans le chapitre consacré aux séries numériques.

##### Définition 1

On dit qu'une suite  $(x_n)$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est une *suite de Cauchy* si elle vérifie la relation, dite *critère de Cauchy* :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Dans la relation ci-dessus, on suppose en général  $q \geq p$  par symétrie. Cela permet d'écrire la formule logique ci-dessus sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall (p, r) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \implies d(x_p, x_{p+r}) \leq \varepsilon.$$

*Exemple* Dans l'espace vectoriel normé  $\ell^\infty(E)$  des suites bornées muni de la norme infini :

$$\forall x = (x_n), \quad N_\infty(x) = \sup \|x_n\|,$$

l'ensemble  $\mathcal{S}$  des suites stationnaires (constantes à partir d'un certain rang) est un sous-espace vectoriel *et* son adhérence est l'espace vectoriel des suites de Cauchy.

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des suites stationnaires est évidemment un sous-espace vectoriel de  $\ell^\infty(E)$ .

- Soit  $x = (x_n)$  une suite de Cauchy de  $E$ . Pour tout  $r > 0$ , il existe  $N$  tel que l'on ait :

$$\forall (p, q), \quad q > p \geq N \implies \|x_q - x_p\| \leq r.$$

La suite  $y = (y_n)$  définie par  $y_n = x_n$  pour tout  $n < N$  et  $y_n = x_N$  est stationnaire et vérifie :

$$\forall n, \quad n < N \implies \|x_n - y_n\| = 0 \quad \text{et} \quad \forall n, \quad n \geq N \implies \|x_n - y_n\| \leq r.$$

On a donc  $N_\infty(x - y) \leq r$ . Finalement,  $x$  est bornée et adhérente à  $\mathcal{S}$ .

- Soit  $x = (x_n)$  une suite adhérente à  $\mathcal{S}$ . Pour tout  $r > 0$ , il existe une suite stationnaire  $y$  telle que  $N_\infty(x - y) \leq r/2$ . Il existe alors un entier  $N$  et un élément  $\ell$  de  $E$  tel que  $y_n = \ell$  pour tout  $n \geq N$ . Pour tout  $(p, q)$  tel que  $q > p \geq N$ , il vient :

$$\begin{aligned} \|x_q - x_p\| &\leq \|x_q - \ell\| + \|\ell - x_p\| \\ &\leq N_\infty(x - y) + N_\infty(x - y) \\ &\leq r. \end{aligned}$$

## Propriétés des suites de Cauchy

### Proposition 1

Toute suite de Cauchy est bornée.

**Démonstration** Si  $(x_n)$  est de Cauchy, il existe (pour  $\varepsilon = 1$ ) un entier  $N$  tel que l'on ait :

$$\forall (p, q), \quad q > p \geq N \implies d(x_q, x_p) \leq 1.$$

On en déduit  $d(x_n, x_N) \leq 1$  pour tout  $n \geq N$  et, par conséquent, que  $(x_n)$  est bornée.  $\square$

### Proposition 2

Toute suite convergente est de Cauchy.

**Démonstration** Supposons que  $(x_n)$  converge vers  $\ell$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que  $d(x_n, \ell) \leq \varepsilon/2$  pour tout  $n \geq N$ . On en déduit :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) \leq \varepsilon$$

pour tout  $(p, q)$  vérifiant  $p \geq N$  et  $q \geq N$ . □

**Corollaire 3**

Toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente.

**Démonstration** Supposons que  $(x_n)$  soit de Cauchy et que  $(x_{\sigma(n)})$  converge vers  $\ell$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $N$  tel que  $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon/2$  pour tout  $(p, q)$  vérifiant  $p, q \geq N$  et un entier  $M$  tel que  $d(x_{\sigma(n)}, \ell) \leq \varepsilon/2$  pour tout  $n \geq M$ . Pour tout  $n \geq \max(N, M)$ , on a  $n \geq N$  et  $\sigma(n) \geq N$  ainsi que  $n \geq M$ . On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{\sigma(n)}) + d(x_{\sigma(n)}, \ell) \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Proposition 4**

Si  $f$  est une application uniformément continue d'un espace métrique  $(X, d)$  vers un espace métrique  $(Y, d)$ , l'image  $(f(x_n))$  d'une suite  $(x_n)$  de Cauchy de  $(X, d)$  par  $f$  est une suite de Cauchy de  $(Y, d)$ .

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un nombre réel  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in X^2, \quad d(x, y) \leq \eta \implies d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

puisque  $f$  est uniformément continue et un entier  $N$  tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d(x_p, x_q) \leq \eta$$

puisque  $(x_n)$  est de Cauchy. On en déduit :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon. \quad \square$$

Cette proposition s'applique évidemment aux applications lipschitziennes. On obtient ainsi les points suivants :

- l'image d'une suite de Cauchy par une application linéaire continue est une suite de Cauchy,
- si  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  sont deux normes équivalentes sur un espace vectoriel  $E$ , la suite  $(x_n)$  est une suite de Cauchy de  $(E, \| \cdot \|_1)$  si, et seulement si, c'est une suite de Cauchy de  $(E, \| \cdot \|_2)$ .

**Remarque** Il n'est pas vrai en général que l'image d'une suite de Cauchy par une application seulement continue soit une suite de Cauchy

Par exemple, la suite  $(2^{-n})$  de  $\mathbb{R}^*$  est une suite de Cauchy puisqu'elle converge vers 0 dans  $\mathbb{R}$ . Son image par l'application continue  $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ , qui est la suite divergente  $(2^n)$ , n'est pas de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ .

## 1.2 Espaces métriques complets

### Définition 2

On dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  est *complet* si toute suite de Cauchy de  $(X, d)$  converge.

On dit qu'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$ , ou d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$ , est *complète* si l'espace métrique induit  $(A, d)$  est complet c'est-à-dire, si toute suite de Cauchy de  $A$  converge vers un élément  $a$  appartenant à  $A$ .

Nous avons vu dans le chapitre consacré aux séries réelles ou complexes que toute suite de Cauchy numérique est convergente.

On en déduit le théorème suivant :

### Théorème 5

Les espaces vectoriels normés  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  et  $(\mathbb{C}, | \cdot |)$  sont complets.

### Propriété fondamentale

#### Proposition 6

Un espace métrique  $(X, d)$ , est <sup>complet</sup> compact si et seulement si, l'intersection d'une suite décroissante  $(F_n)$  de parties fermées et bornées de  $(X, d)$  dont la suite des diamètres converge vers 0 a une intersection non vide.

**Démonstratio** Si  $(F_n)$  est une suite décroissante de parties fermées et bornées de  $(X, d)$  dont la suite des diamètres converge vers 0, on construit une suite  $(x_n)$  de  $X$  en choisissant un élément  $x_n$  dans  $F_n$  pour tout  $n$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  Il existe un entier  $N$  tel que  $\text{diam } F_N \leq \varepsilon$ . La décroissance de  $(F_n)$  montre alors la relation :

$$\forall (p, q), \quad q > p \geq N \implies d(x_p, x_q) \leq \text{diam } F_N \leq \varepsilon.$$

Ainsi,  $(x_n)$  est de Cauchy et, par conséquent, convergente. Sa limite  $x$ , qui est aussi la limite des suites  $(x_n)_{n \geq p}$  de  $(F_p)^\mathbb{N}$ , appartient au fermé  $F_p$  pour tout  $p$ . On obtient ainsi  $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$ . □

**Remarques**

- Dans la proposition précédente, il est indispensable de supposer que les  $F_n$  sont bornés et que la suite des diamètres tend vers 0.

La suite  $([n, +\infty[)$  de l'espace complet  $\mathbb{R}$  fournit, en effet, un exemple de suite décroissante de fermés non bornés d'intersection vide. Nous verrons, dans l'exemple 2. de la page 388, un exemple d'espace vectoriel normé complet possédant une suite décroissante de fermés bornés dont la suite des diamètres ne tend pas vers 0 et dont l'intersection est vide.

- La réciproque de la proposition précédente est vraie. Si toute suite décroissante  $(F_n)$  de parties fermées et bornées de  $(X, d)$  dont la suite des diamètres converge vers 0 a une intersection non vide, alors l'espace métrique  $(X, d)$  est complet.

Considérons, en effet, une suite de Cauchy  $(x_n)$  de  $(X, d)$ . La suite des fermés :

$$F_n = \text{Adh} \{x_k \mid k \in [n, +\infty[ \}$$

est évidemment décroissante. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que  $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$  pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  vérifiant  $p \geq N$  et  $q \geq N$ . On en déduit :

$$\text{diam } F_n = \text{diam} \{x_k \mid k \in [n, +\infty[ \} \leq \varepsilon$$

pour tout  $n \geq N$ . La suite des diamètres des  $F_n$  converge donc vers 0. Par hypothèse l'intersection des  $F_n$  est non vide. Un élément  $x$  de cette intersection est une valeur d'adhérence de  $(x_n)$  et la suite de Cauchy  $(x_n)$  converge vers  $x$ .

**Propriétés**

**Proposition 7**

Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.

**Démonstration** Soit  $A$  une partie complète de  $(X, d)$ . Si  $x$  est un point adhérent à  $A$ , il existe une suite  $(a_n)$  de  $A^\mathbb{N}$  convergeant vers  $x$ . Cette suite est de Cauchy dans  $X$ , donc aussi dans  $A$ . Par complétude, elle converge vers un élément  $a$  de  $A$ . L'unicité de la limite montre alors que  $x$  appartient à  $A$ . Ainsi,  $A$  est fermé. □

**Proposition 8**

Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète.

**Démonstration** Soit  $A$  une partie fermée d'un espace métrique complet  $(X, d)$ . Si  $(a_n)$  est une suite de Cauchy dans  $A$ , elle est aussi de Cauchy dans  $X$  et converge vers un élément  $x$ . Comme  $A$  est fermé,  $x$  appartient à  $A$  et  $(a_n)$  converge dans  $A$ .  $\square$

**Théorème 9**

Le produit de deux espaces métriques complets est complet.

**Démonstration** Soient  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  deux espaces métriques complets.

Si  $((x_n, y_n))$  est une suite de Cauchy de  $(X, d)$  et  $(Y, d)$ , les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$ , images de  $((x_n, y_n))$  par les projections lipschitziennes  $p_X$  et  $p_Y$ , sont aussi de Cauchy. Elles convergent donc vers des éléments  $x \in X$  et  $y \in Y$ . On en déduit que  $((x_n, y_n))$  converge vers  $(x, y)$  de  $(X \times Y, d)$ .  $\square$

La réciproque de ce théorème est vraie lorsque les espaces métriques  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  sont non vides.

**Théorème du point fixe**

On dit qu'une application  $f$  entre espaces métriques est *contractante* si elle est  $\lambda$ -lipschitzienne avec  $\lambda < 1$ .

**Théorème 10**

Si  $f$  est une application contractante d'un espace métrique complet  $(X, d)$  dans lui-même, alors  $f$  possède un unique point fixe  $\ell$ .

Pour tout  $x \in X$  la suite  $(f^n(x))$  converge vers  $\ell$  et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(f^n(x), \ell) \leq \lambda^n \cdot d(x, \ell)$$

**Démonstration**

► Soit  $x \in X$ . Pour tout entier  $n$ , on a :

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \lambda d(f^{n-1}(x), f^n(x))$$

et par récurrence :

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \lambda^n d(x, f(x)).$$

Pour tout  $(p, q)$  vérifiant  $q > p$ , Il vient alors :

$$\begin{aligned} d(f^p(x), f^q(x)) &\leq \sum_{k=p}^{q-1} d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \\ &\leq \sum_{k=p}^{q-1} \lambda^k d(x, f(x)) \\ &\leq d(x, f(x)) \frac{\lambda^p}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $N$  tel que :

$$d(x, f(x)) \frac{\lambda^N}{1-\lambda} \leq \varepsilon$$

puisque  $(\lambda^n)$  tend vers 0. On en déduit :

$$\forall (p, q), \quad q > p \geq N \implies d(f^p(x), f^q(x)) \leq \varepsilon.$$

La suite  $(f^n(x))$  est donc de Cauchy et, par conséquent, convergente vers un élément  $\ell$  de  $X$ . Puisque  $f$  est lipschitzienne et, donc, continue,  $\ell$  est un point fixe de  $f$ . L'application  $f$  possède donc au moins un point fixe.

► Si  $\ell$  et  $\ell'$  sont deux points fixes de  $f$ , on a :

$$d(\ell, \ell') = d(f(\ell), f(\ell')) \leq \lambda d(\ell, \ell').$$

Comme  $\lambda$  est strictement inférieur à 1, on obtient  $\ell = \ell'$ . L'application  $f$  possède donc au plus un point fixe.

L'application  $f$  possède donc un unique point fixe  $\ell$ . Le premier point montre que pour tout  $x$  de  $X$ , la suite  $(f^n(x))$  converge vers  $\ell$ . On obtient alors la majoration :

$$\forall n, \quad d(f^n(x), \ell) \leq \lambda^n d(x, \ell)$$

par récurrence. □

### 1.3 Espaces de Banach

#### Définition 3

On appelle *espace de Banach* tout espace vectoriel normé complet.  
 On appelle *algèbre de Banach* toute algèbre normée complète.

Les points suivants proviennent immédiatement de ce qui précède :

- tout sous-espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach pour la norme induite,

- si l'espace vectoriel  $E$  est complet pour une norme il est aussi complet pour tout norme équivalente,
- un produit d'espaces de Banach est un espace de Banach.

### Exemples

1. L'intersection  $D$  d'une suite décroissante de boules fermées  $D_n = D(a_n, r_n)$  d'un espace de Banach est une boule fermée.

Soient deux entiers  $p$  et  $q$  vérifiant  $p \leq q$  ainsi qu'un vecteur unitaire  $u$  tel que  $a_q = a_p + \delta u$  où  $\delta = d(a_p, a_q)$ . Les points  $a_q + r_q u$  et  $a_q - r_q u$  appartenant à  $D(a_p, r_p)$ , on a sur la droite  $a_p + \mathbb{R}u$  de repère  $(a_p, u)$  :

$$-r_p \leq \delta - r_q \leq \delta + r_q \leq r_p$$

et, par conséquent :

$$d(a_p, a_q) \leq r_p - r_q.$$

- En particulier, la suite réelle positive  $(r_n)$  est décroissante et, par conséquent, convergente. On peut montrer aussi la décroissance de  $(r_n)$  en remarquant que le diamètre de  $D_n$  est  $2r_n$  puisque l'on est dans un espace vectoriel normé et en remarquant que  $D_{n+1} \subset D_n$  implique  $2r_{n+1} \leq 2r_n$ . On note alors  $r$  la limite de  $(r_n)$ .
- La suite  $(r_n)$  étant de Cauchy, la relation :

$$d(a_p, a_q) \leq r_p - r_q$$

pour tout  $p < q$  montre immédiatement que  $(a_n)$  est aussi de Cauchy dans  $E$ . La suite  $(a_n)$  est donc convergente dans l'espace de Banach  $E$ . On note  $a$  sa limite.

Montrons finalement que l'intersection  $D$  est la boule fermée  $D(a, r)$ . Soit  $x \in E$ . L'inégalité :

$$d(a_n, x) - d(a_{n+1}, x) \leq d(a_{n+1}, a_n) \leq r_n - r_{n+1}$$

montre que la suite réelle :

$$(r_n - d(a_n, x))$$

est décroissante. Sa limite  $r - d(a, x)$  est donc positive ou nulle si, et seulement si,  $r_n - d(a_n, x)$  est positif ou nul pour tout  $n$ . Cela revient à dire que  $x$  appartient à  $D(a, r)$  si, et seulement si,  $x$  appartient  $D_n$  pour tout  $n$ .

2. Si  $T$  est une application contractante d'un espace de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  dans lui-même, l'application  $S = \text{Id}_E - T$  est une bijection bicontinue de  $E$  sur lui-même. Notons, en effet,  $k$  est une constante réelle de  $[0, 1[$  telle que :

$$\forall(x, x'), \quad \|T(x) - T(x')\| \leq k\|x - x'\|. \quad (*)$$

- L'application  $S$  est continue comme somme d'applications continues. Elle est aussi  $(k + 1)$ -lipschitzienne.



- Pour montrer qu'elle est bijective, considérons un élément  $y$  de  $E$ . Un élément  $x$  de  $E$  vérifie  $S(x) = y$  si, et seulement si,  $x$  vérifie  $x = T(x) + y$  ou, ce qui revient au même, si, et seulement si,  $x$  est un point fixe de l'application :

$$T_y : x \in E \longmapsto T(x) + y.$$

La relation (\*) montre que l'on a :

$$\forall(x, x'), \quad \|T_y(x) - T_y(x')\| \leq k \|x - x'\|.$$

L'application  $T_y$  est donc contractante et le théorème du point fixe montre qu'il existe un et un seul  $x$  de  $E$  tel que  $T_y(x) = x$ . L'application  $S$  est donc bijective.

- Soient alors  $y$  et  $y'$  de  $E$  ainsi que  $x = S^{-1}(y)$  et  $x' = S^{-1}(y')$ . Les relations  $y = x - T(x)$  et  $y' = x' - T(x')$  conduisent à :

$$\begin{aligned} \|x - x'\| &= \|y + T(x) - (y' + T(x'))\| \\ &\leq \|y - y'\| + \|T(x) - T(x')\| \\ &\leq \|y - y'\| + k \|x - x'\|. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\|x - x'\| \leq \frac{1}{1 - k} \|y - y'\|$$

c'est-à-dire :

$$\|S^{-1}(y) - S^{-1}(y')\| \leq \frac{1}{1 - k} \|y - y'\|.$$

Cela valant pour tout  $(y, y')$ , l'application  $S^{-1}$  est  $\frac{1}{1 - k}$ -lipschitzienne et, donc, continue.

L'application  $S$  est donc une bijection bicontinue de  $E$  sur lui-même. En particulier, elle est surjective et pour tout  $y \in E$ , l'équation :

$$x - T(x) = y$$

possède une et une seule solution  $x$  dans  $E$ .

### Exemples d'espaces de Banach

Nous avons vu page 380 que les algèbres normées  $(\mathbb{R}, || \cdot ||)$  et  $(\mathbb{C}, || \cdot ||)$  sont complètes.

On en déduit la proposition fondamentale suivante :

#### Proposition 11

Les espaces vectoriels normés  $(\mathbb{K}^n, || \cdot ||_\infty)$ ,  $(\mathbb{K}^n, || \cdot ||_1)$  et  $(\mathbb{K}^n, || \cdot ||_2)$  sont complets.

**Démonstration**

Puisque  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, | \cdot |)$  est complet, l'espace vectoriel normé produit  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n, \| \cdot \|_\infty)$  est complet. Il en est de même de  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n, \| \cdot \|_1)$  et  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n, \| \cdot \|_2)$  par équivalence des normes  $\square$

Nous verrons, pour prolonger ce résultat, que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet. Il n'en est pas de même en dimension infinie où l'on peut trouver aussi bien des exemples d'espaces complets que d'espaces non complets.

**Théorème 12**

Si  $X$  est un ensemble et  $(E, \| \cdot \|)$  un espace de Banach l'espace  $(\mathcal{B}(X, E), N_\infty)$  est un espace de Banach.

**Démonstration** Soient  $(f_n)$  une suite de Cauchy de  $(\mathcal{B}(X, E), N_\infty)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_\varepsilon$  tel que :

$$\forall (q, p), \quad q > p \geq n_\varepsilon \implies N_\infty(f_q - f_p) \leq \varepsilon. \quad (*)$$

► Soit  $x \in X$ . La relation :

$$\|f(x)\| \leq N_\infty(f) = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

montre que l'application linéaire  $\delta_x : f \mapsto f(x)$  est lipschitzienne. La suite  $(f_n(x))$  est donc de Cauchy et, par conséquent, convergente dans l'espace de Banach  $E$ . On note  $f(x)$  sa limite.

► Soit  $\varepsilon = 1$  et  $n_1$  un entier vérifiant (\*). On a :

$$\forall x, \quad \forall q > n_1, \quad \|f_q(x) - f_{n_1}(x)\| \leq N_\infty(f_q - f_{n_1}) \leq 1.$$

En passant à la limite lorsque  $q$  tend vers l'infini, on obtient :

$$\forall x, \quad \|f(x) - f_{n_1}(x)\| \leq 1.$$

Ainsi,  $f - f_{n_1}$  est bornée et  $f$  appartient à  $\mathcal{B}(X, E)$ .

► Soient  $\varepsilon > 0$  et  $n_\varepsilon$  un entier vérifiant (\*). Pour tout  $p \geq n_\varepsilon$ , on a :

$$\forall x, \quad \forall q > p, \quad \|f_q(x) - f_p(x)\| \leq N_\infty(f_q - f_p) \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite lorsque  $q$  tend vers l'infini, on obtient :

$$\forall x, \quad \|f(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon,$$

soit  $N_\infty(f - f_p) \leq \varepsilon$ . La suite  $(f_n)$  converge donc vers  $f$ .

Ainsi, la suite  $(f_n)$  converge donc vers  $f$ .  $\square$

*Exemples*

1. L'espace  $\ell^1$  muni de  $N_1$  est complet.

Considérons, en effet, une suite de Cauchy  $(x(n))$  de cet espace. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_\varepsilon$  tel que :

$$\forall (q, p), \quad q > p \geq n_\varepsilon \implies N_1(x(p) - x(q)) \leq \varepsilon. \quad (*)$$

On note évidemment  $x(n) = (x_k(n))_{k \in \mathbb{N}}$  pour tout  $n$ .

• Soit  $k \in \mathbb{N}$ . La majoration :

$$\forall (p, q), \quad |x_k(p) - x_k(q)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k(p) - x_k(q)| = N_1(x(p) - x(q)).$$

montre que la suite réelle  $(x_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ . Elle est donc convergente et nous noterons  $x_k$  sa limite. On notera aussi  $x$  la suite  $(x_k)$ .

• Soient  $\varepsilon = 1$  et  $n_1$  un entier vérifiant (\*). Pour tout entier  $K$ , on a :

$$\forall q \geq n_1, \quad \sum_{k=0}^K |x_k(n_1) - x_k(q)| \leq N_1(x(n_1) - x(q)) \leq 1.$$

En passant à la limite suivant  $q$ , on obtient pour tout  $K$  :

$$\sum_{k=0}^K |x_k(n_1) - x_k| \leq 1.$$

Cela montre que la série  $\sum_k |x_k(n_1) - x_k|$  est convergente. Ainsi, la suite  $x(N_1) - x$  et, par conséquent,  $x$  appartient à l'espace vectoriel  $\ell^1$ .

• Soient  $\varepsilon > 0$  et  $n_\varepsilon$  un entier vérifiant (\*). Pour tout entier  $p \geq n_\varepsilon$  et pour tout entier  $K$ , on a :

$$\forall q \geq p, \quad \sum_{k=0}^K |x_k(p) - x_k(q)| \leq N_1(x(p) - x(q)) \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite suivant  $q$ , on obtient, pour tout  $p \geq n_\varepsilon$  et pour tout entier  $K$  :

$$\sum_{k=0}^K |x_k(p) - x_k| \leq \varepsilon.$$

On en déduit, pour tout  $p \geq n_\varepsilon$ , la relation :

$$N_1(x(p) - x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k(p) - x_k| \leq \varepsilon.$$

La suite  $(x(n))$  converge donc vers  $x$  pour  $N_1$ .

2. On trouve, dans l'espace complet  $(\ell^1, N_1)$ , un exemple de suite décroissante  $(F_n)$  de parties fermées bornées dont la suite des diamètres ne tend pas vers 0 et dont l'intersection est vide (voir la remarque page 381).

Considérons, en effet, le vecteur  $e_n = (\delta_{n,k})_k \in \ell^1$  et  $F_n$  l'adhérence de  $\{e_p \mid p \geq n\}$ , pour tout  $n$ .

- Il est immédiat que la suite  $(F_n)$  est une suite décroissante de fermés. La relation  $N_1(e_p - e_q) = 2$  pour tous  $p \neq q$  montre que l'on a :

$$\forall n, \quad \text{diam } F_n = 2.$$

- Si  $x = (x_k)$  appartient à l'intersection des  $F_n$ , le vecteur  $x$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(e_n)$  et il existe une suite extraite  $(e_{\sigma(n)})$  convergeant vers  $x$ . Puisque les formes linéaires  $(\alpha_k) \mapsto \alpha_k$  sur  $(\ell^1, N_1)$  sont 1-lipschitzienne, on a :

$$x_k = \lim_n \delta_{n,k} = 0.$$

C'est évidemment impossible puisque les vecteurs de  $(e_{\sigma(n)})$  étant unitaire, on a aussi  $N_1(x) = 1$ .

L'intersection des  $F_n$  est donc vide.

3. On montre de façon analogue à  $\ell^1$  que  $(\ell^2, N_2)$  est complet.

4. L'espace  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  muni de  $N_1$  n'est pas complet. Considérons, en effet, la suite  $(f_n)$  des applications  $f_n : x \mapsto 2^{n+1}\sqrt{x}$  avec  $n$  entier.

- Pour tout  $q > p \geq N$ , on a :

$$\begin{aligned} N_1(f_q - f_p) &= 2 \int_0^1 (2^{q+1}\sqrt{x} - 2^{p+1}\sqrt{x}) dx \\ &= 2 \frac{2q+1}{2q+2} - 2 \frac{2p+1}{2p+2} \\ &= \frac{4(q-p)}{(2p+2)(2q+2)} \\ &\leq \frac{2}{p+1} \\ &\leq \frac{2}{N+1}. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que  $\frac{2}{N+1} \leq \varepsilon$ . On en déduit :

$$\forall (p, q), \quad q > p \geq N \implies N_1(f_q - f_p) \leq \varepsilon.$$

Ainsi,  $(f_n)$  est de Cauchy.

- Supposons que  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $(\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}), N_1)$ . La relation :

$$\int_0^1 |f_{n|[0,1]} - f_{|[0,1]}| \leq \int_{-1}^1 |f_n - f|$$

montre que  $(f_{n|[0,1]})$  converge vers  $f_{|[0,1]}$  dans  $(\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}), N_1)$ . Or, la relation :

$$\int_0^1 |f_{n|[0,1]} - 1| = 1 - \frac{2n + 1}{2n + 2}$$

montre que  $(f_{n|[0,1]})$  converge vers 1 dans  $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1]), N_1)$ . On a donc  $f_{|[0,1]} = 1$ . On obtient de même  $f_{|[-1,1]} = -1$ . c'est évidemment impossible.

L'espace  $(\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}), N_1)$  n'est donc pas complet.

### Séries d'un espace de Banach

Dans les propositions suivantes,  $(x_n)$  désigne une suite d'éléments de  $E$  et  $\sum_n x_n$  la série associée.

Le critère de Cauchy prend pour les séries la forme suivante :

#### Proposition 13

Une série  $\sum_n x_n$  d'un espace de Banach est convergente si et seulement si, elle vérifie la relation :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad q > p \geq N \implies \|x_{p+1} + \dots + x_q\| \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Si  $(s_n)$  désigne la suite des sommes partielles, on a pour tout  $q \geq p$  :

$$s_q - s_p = x_{p+1} + \dots + x_q. \quad \square$$

Cela conduit, comme dans le cas des séries numériques, à la définition et au théorème suivants :

#### Définition 4

On dit qu'une série  $\sum_n x_n$  d'un espace de Banach est *absolument convergente* si la série numérique  $\sum_n \|x_n\|$  est convergente.

**Théorème 14**

Toute série absolument convergente  $\sum_n x_n$  d'un espace de Banach est convergente et vérifie :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|.$$

**Démonstration** Si la série converge absolument, la série  $\sum_n \|x_n\|$  est convergente et vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, q > p \geq N \implies \|x_{p+1}\| + \dots + \|x_q\| \leq \varepsilon.$$

L'inégalité :

$$\|x_{p+1} + \dots + x_q\| \leq \|x_{p+1}\| + \dots + \|x_q\|$$

montre alors que  $\sum_n x_n$  vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, q > p \geq N \implies \|x_{p+1} + \dots + x_q\| \leq \varepsilon.$$

Comme  $F$  est complet,  $\sum_n x_n$  converge.

On obtient l'inégalité désirée en passant à la limite dans la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_0 + \dots + x_n\| \leq \|x_0\| + \dots + \|x_n\|.$$

□

**Remarque** La réciproque du théorème précédent est vraie ; un espace vectoriel norme est complet si toute série absolument convergente est convergente.

En effet, si  $(x_n)$  est une suite de Cauchy, pour tout entier  $n$ , il existe  $N_n$  tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, q > p \geq N_n \implies \|x_q - x_p\| \leq 2^{-n}.$$

L'application  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  dans lui-même définie par récurrence par  $\sigma(0) = N_0$  et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sigma(k+1) = \max(\sigma(k) + 1, N_k)$$

est strictement croissante. La relation  $\|x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)}\| \leq 2^{-n}$  montre alors que la série :

$$x_{\sigma(0)} + \sum_n (x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)})$$

est absolument convergente. Notre hypothèse implique qu'elle est convergente. Comme on a :

$$x_{\sigma(n)} = x_{\sigma(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(k)})$$

pour tout  $n$ , la suite extraite  $(x_{\sigma(n)})$  converge. On en déduit alors que la suite de Cauchy  $(x_n)$  est convergente.

### Séries géométrique et exponentielle d'une algèbre de Banach

Dans ce qui suit,  $A$  désigne une algèbre de Banach.

#### Proposition 15

Si  $a$  est un élément de  $A$  vérifiant  $\|a\| < 1$ , alors la série géométrique :

$$\sum_n a^n$$

est absolument convergente et sa somme est l'inverse de l'élément  $(1_A - a)$  de  $A$ .

**Démonstration** La relation  $\|a^n\| \leq \|a\|^n$  montre que la série  $\sum_n \|a^n\|$  est dominée par la série géométrique réelle  $\sum_n \|a\|^n$  de raison  $\|a\| < 1$ . Elle est donc convergente et  $\sum_n a^n$  absolument convergente.

Les relations  $\|a^n\| \leq \|a\|^n$  et  $\|a\| < 1$  montrent que  $a^n$  converge vers 0. L'égalité :

$$(1_A - a)(a^0 + \dots + a^n) = 1 - a^{n+1}$$

montre alors que l'on a  $(1_A - a) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right) = 1_A$ . On obtient de la même façon l'égalité

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right) (1_A - a) = 1_A.$$

□

**Exemple** Dans toute algèbre de Banach  $A$ , l'ensemble  $G(A)$  des éléments inversibles est ouvert et l'application  $a \mapsto a^{-1}$  est continue de  $G(A)$  vers  $G(A)$ .

Soit, en effet,  $a_0$  un élément inversible de  $A$  et  $r = \|a_0^{-1}\|^{-1}$

- Pour tout  $a$  de  $A$  tel que  $\|a - a_0\| < r$ , l'élément  $a$  peut s'écrire  $a = a_0 - ha_0$  où  $h = (a_0 - a)a_0^{-1}$  vérifie :

$$\|h\| = \|(a_0 - a)a_0^{-1}\| \leq \|(a_0 - a)\| \|a_0^{-1}\| < 1.$$

La somme  $(1_A - h)$  est inversible d'inverse la série absolument convergente

$\sum_{n=0}^{+\infty} h^n$  par ce qui précède. L'élément  $a = (1_A - h)a_0$  est donc inversible dans  $A$

et son inverse est donné par :

$$a^{-1} = a_0^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} h^n.$$

La partie  $G(A)$  contient donc la boule ouverte  $B(a_0, r)$ .

- La majoration :

$$\|a^{-1} - a_0^{-1}\| = \left\| a_0^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} h^n \right\| \leq \|a_0^{-1}\| \sum_{n=1}^{+\infty} \|h\|^n = \|a_0^{-1}\| \frac{\|h\|}{1 - \|h\|}$$

montre que  $a^{-1}$  converge vers  $a_0^{-1}$  lorsque  $a$  de  $B(a_0, r)$  converge vers  $a_0$ .

Cela valant quelque soit  $a_0$  inversible,  $G(A)$  est ouvert et  $a \mapsto a^{-1}$  est continue

**Proposition 16**

La série exponentielle :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a^n$$

est absolument convergente pour tout  $a$  de  $A$ . Sa somme est appelée *exponentielle* de  $a$  et est notée  $\exp(a)$ .

**Démonstration** La relation  $\left\| \frac{1}{n!} a^n \right\| \leq \frac{1}{n!} \|a\|^n$  montre que la série  $\sum_n \left\| \frac{1}{n!} a^n \right\|$  est dominée par la série exponentielle réelle convergente  $\sum_n \frac{1}{n!} \|a\|^n$ . Elle est donc convergente et  $\sum_n \frac{1}{n!} a^n$  absolument convergente. □

Nous étudierons certaines propriétés de l'application exponentielle dans le chapitre consacré aux équations différentielles linéaires.

**1.4 Applications à valeurs dans un espace complet**

**Critère de Cauchy continu**

**Théorème 17**

Une application  $f$  d'une partie  $A$  de  $(X, d)$  vers un espace metrique complet  $(Y, d)$  admet une limite en  $a \in \text{Adh } A$  si et seulement si elle vérifie la relation dite *critère de Cauchy continu* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_X(a) : \forall (x, y), (x, y) \in (V \cap A)^2 \implies d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$



**Démonstration**

► Supposons que  $f$  tende vers  $\ell$  en  $a$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $V \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que :

$$\forall x, \quad x \in V \cap A \implies d(f(x), \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout  $(x, y) \in (V \cap A)^2$ , on a :

$$d(f(x), \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad d(f(y), \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où  $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ .

► Supposons que  $f$  vérifie le critère de Cauchy continu

- Considérons une suite  $(a_n)$  de  $A^{\mathbf{N}}$  convergeant vers  $a$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $V \in \mathcal{V}_X(a)$  tel que :

$$\forall (x, y), \quad (x, y) \in (V \cap A)^2 \implies d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Comme  $(a_n)$  converge vers  $a$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on ait  $a_n$  dans  $V \cap A$ . On en déduit :

$$\forall (p, q), \quad q > p \geq N \implies d(f(a_p), f(a_q)) \leq \varepsilon.$$

La suite  $(f(a_n))$  est donc de Cauchy et, par conséquent, convergente.

- Supposons que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  soient deux suites convergeant vers  $a$ . Nous avons vu que les suites  $(f(a_n))$  et  $(f(b_n))$  convergent. La suite  $(c_n)$  définie par  $c_{2n} = a_n$  et  $c_{2n+1} = b_n$  converge aussi vers  $a$ . La suite  $(f(c_n))$  est donc convergente et par conséquent, les suites extraites  $(f(a_n))$  et  $(f(b_n))$  convergent vers la même limite.

Il existe donc un élément  $\ell$  de  $F$  tel que pour toute suite  $(a_n)$  convergeant vers  $a$ , la suite  $(f(a_n))$  converge vers  $\ell$ . On en déduit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ . □

La démonstration de l'implication directe n'utilise pas la complétude de  $(Y, d)$ . Mais, ce n'est pas la partie importante du théorème

**Prolongement des applications uniformément continues**

**Proposition 18**

Toute application uniformément continue  $f$  d'une partie dense  $D$  d'un espace métrique  $(X, d)$  vers un espace métrique complet se prolonge de façon unique en une application continue  $g$  de  $X$  dans  $Y$ .

Ce prolongement est uniformément continu,  $K$ -lipschitzien ou isométrique si  $f$  est respectivement uniformément continue  $K$ -lipschitzienne ou isométrique.

**Démonstration**

- Soit  $x \in X$ . Il est adhérent à  $D$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $(u, v) \in D^2$ , la relation  $d(u, v) \leq 2\eta$  entraîne  $d(f(u), f(v)) \leq \varepsilon$ . Pour tout  $(u, v) \in D^2$ , la relation  $(u, v) \in D(x, \eta)$  entraîne alors  $d(u, v) \leq 2\eta$  et  $d(f(u), f(v)) \leq \varepsilon$ .

La fonction  $f$  vérifie donc le critère de Cauchy continu en  $x$  et possède une limite en  $x$ .

- Notons  $g$  la fonction de  $X$  vers  $Y$  définie par  $g(x) = \lim_x f$ . La fonction  $g$  prolonge  $f$  puisque l'on a :

$$\lim_x f = f(x)$$

lorsque  $x$  appartient à  $D$ .

- Soit alors  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  tel que pour tout  $(u, v) \in D^2$ , la relation  $d(u, v) \leq 2\eta$  entraîne  $d(f(u), f(v)) \leq \varepsilon$ . Pour tout  $(x, y)$  de  $X$ , il existe par densité des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de  $D$  convergeant vers  $x$  et  $y$ . Si  $x$  et  $y$  vérifient  $d(x, y) \leq \eta$ , on a à partir d'un certain rang  $d(u_n, v_n) \leq 2\eta$  et, par conséquent,  $d(f(u_n), f(v_n)) \leq \varepsilon$ . En passant à la limite, il vient  $d(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$ . L'application  $g$  est donc uniformément continue. Cette application est l'unique prolongement continu de  $f$  à  $X$  par densité.
- Supposons que  $f$  soit  $K$ -lipschitzienne. Soit  $(x, y) \in X^2$ . Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des suites de  $D$  convergeant vers  $x$  et  $y$ , on a  $d(f(u_n), f(v_n)) \leq Kd(u_n, v_n)$  pour tout  $n$ . En passant à la limite, on obtient :

$$d(g(x), g(y)) \leq Kd(x, y).$$

On montre de la même façon que  $g$  est une isométrie si  $f$  l'est. □

**Exemples**

1. Une application dérivable  $f$  de  $]0, 1[$  vers  $\mathbb{R}$  dont la dérivée est bornée admet une limite en 0.

En effet, si  $K$  est une constante réelle majorant la dérivée  $f'$ , l'inégalité des accroissements finis montre que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne. Elle est donc uniformément continue et se prolonge en une application  $K$ -lipschitzienne  $g$  de  $[0, 1[$  vers  $\mathbb{R}$ .

2. Une application dérivable  $f$  de  $]0, 1[$  vers  $\mathbb{R}$  dont la dérivée admet une limite en 0 se prolonge en fonction dérivable  $[0, 1[$  vers  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $f'$  est bornée sur  $]0, 1[$ , le point précédent montre que  $f$  se prolonge en une fonction continue de  $[0, 1[$  vers  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , la fonction  $g$  est continue sur  $[0, x]$  et dérivable sur  $]0, x[$ . Le théorème des accroissements finis montre alors qu'il existe un élément  $c_x \in ]0, x[$  tel que :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f'(c_x).$$

Lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ , le nombre réel  $c_x$  tend aussi vers 0 par encadrement et, par conséquent  $g$  est dérivable en 0 de dérivée :

$$g'(0) = \lim_{0^+} f'.$$

## Prolongement des applications linéaires continues

Le théorème de prolongement suivant est un théorème de construction essentiel de l'analyse fonctionnelle. Nous l'utiliserons plusieurs fois dans la suite de ce cours.

### Théorème 19

Toute application linéaire continue  $u$  d'un sous-espace vectoriel dense  $D$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  vers un espace de Banach  $(F, \| \cdot \|)$  se prolonge en une et une seule application linéaire continue  $v$  de  $E$  vers  $F$ . L'application  $v$  est  $K$ -lipschitzienne si  $u$  l'est.

**Démonstration** L'application  $u$  est  $K$ -lipschitzienne avec  $K \in \mathbb{R}_+$  puisqu'elle est continue. Elle se prolonge donc en une unique application uniformément continue  $v$  de  $(E, \| \cdot \|)$  vers  $(F, \| \cdot \|)$ . Ce prolongement est  $K$ -lipschitzien si  $u$  l'est.

Soient maintenant  $x$  et  $y$  de  $E$  ainsi que  $\alpha$  et  $\alpha'$  de  $\mathbf{K}$ . Soient  $(d_n)$  et  $(d'_n)$  deux suites de  $D$  convergeant vers  $x$  et  $x'$ . La suite  $(\alpha d_n + \alpha' d'_n)$  de  $D$  convergeant vers  $\alpha x + \alpha' x'$ . L'égalité des suites :

$$(u(\alpha d_n + \alpha' d'_n)) = (\alpha u(d_n) + \alpha' u(d'_n))$$

montre que l'on a  $v(\alpha x + \alpha' x') = \alpha v(x) + \alpha' v(x')$ . Ainsi  $v$  est linéaire. □

## 2. Compacité

### 2.1 Définition

#### Définition 5

On dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  est *compact* si toute suite de  $X$  possède une suite extraite convergente.

On dit qu'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$ , ou d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$ , est *compacte* si l'espace métrique induit  $(A, d)$  est compact, c'est-à-dire, si toute suite de  $A$  possède une sous-suite convergeant vers un élément de  $A$ .

En utilisant la notion de valeur d'adhérence, on peut dire qu'un espace métrique est compact si, et seulement si, toutes ses suites possèdent une valeur d'adhérence.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass du cours de première année affirme que toute suite réelle bornée possède une suite extraite convergente. Il conduit à la proposition suivante :

### Proposition 20

Tout segment de  $\mathbb{R}$  est compact.

**Démonstration** Toute suite  $(x_n)$  d'un segment  $S$  de  $\mathbb{R}$  est évidemment bornée. Elle possède, par conséquent, une suite extraite  $(x_{\sigma(n)})$  convergente dont la limite  $\ell$  appartient à  $S$  puisqu'un segment est fermé. La suite extraite  $(x_{\sigma(n)})$  est donc convergente dans  $S$ .  $\square$

### Exemples

1. Tout espace métrique  $X$  dont les boules fermées sont compactes, en particulier tout espace compact, est complet.

En effet, toute suite de Cauchy étant bornée, une suite de Cauchy d'un tel espace est contenue dans un compact. Elle possède, donc, une valeur d'adhérence et, par conséquent, est convergente.

2. La réciproque du point précédent est fautive. L'espace métrique  $\mathbb{R}$  est complet, mais n'est pas compact puisque la suite  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne possède aucune valeur d'adhérence.
3. Une suite  $(x_n)$  d'un espace compact  $(X, d)$  est convergente si, et seulement si, elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.

L'implication directe est vraie dans tout espace métrique. Pour montrer la réciproque, considérons un espace compact  $X$  et une suite  $(x_n)$  d'élément de  $X$  ne possédant qu'une seule valeur d'adhérence  $x$ . Si  $(x_n)$  ne converge pas vers  $x$ , il existe  $r > 0$  tel que l'ensemble  $N$  des  $n$  tels  $d(x_n, x) \geq r$  soit infini. Si  $\sigma$  est une injection strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans lui-même d'image  $N$ , la suite  $(x_{\sigma(n)})$  possède aussi une valeur d'adhérence  $y$ . Comme  $y$ , limite d'une suite extraite de la suite extraite  $(x_{\sigma(n)})$ , est aussi une valeur d'adhérence de  $(x_n)$ , on a  $x = y$ . Cela contredit évidemment la relation :

$$\forall n, \quad d(x_{\sigma(n)}, x) \geq r.$$

### Propriété fondamentale

#### Proposition 21

Un espace métrique  $(X, d)$ , est compact si, et seulement si, l'intersection de toute suite décroissante  $(F_n)$  de parties fermées non vides de  $A$  est non vide.

**Démonstration** Si  $(F_n)$  est une suite décroissante de parties fermées non vides de  $A$ , on construit une suite  $(x_n)$  de  $X$  en choisissant un élément  $x_n$  dans  $F_n$  pour tout  $n$ . Il existe alors, par compacité, une suite extraite  $(x_{\sigma(n)})$  convergeant vers  $\ell \in X$ . Pour tout  $p$ ,  $\ell$  appartient à  $F_p$  puisque c'est aussi la limite de la suite extraite  $(x_{\sigma(n)})_{n \geq p}$  à valeurs dans  $F_p$ . On obtient finalement  $\ell \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$ .

Supposons, réciproquement, que  $(X, d)$  vérifie la propriété indiquée sur les suites décroissantes de fermés non vides. Soit  $(x_n)$  une suite de  $X$ . La suite des fermés non vides :

$$F_n = \text{Adh} \{x_k \mid k \in \llbracket n, +\infty \rrbracket\}$$

est évidemment décroissante. L'intersection :

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

est donc différente du vide et tout élément de  $F$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)$ . □

**Proposition 22**

Si  $(x_n)$  est une suite de  $(X, d)$  convergeant vers  $x$ , alors la partie :

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

est compacte.

**Démonstration** Il suffit de remarquer qu'un fermé  $F$  de  $A$  qui ne contient pas  $x$  est de cardinal fini puisque son complémentaire  $X \setminus F$  est un voisinage de  $x$  et contient, par conséquent,  $x_n$  à partir d'un certain rang. Si  $(F_n)$  est alors une suite décroissante de fermés non vides de  $A$ , alors, soit  $x$  appartient à  $F_n$  pour tout  $n$ , soit il existe  $n_0$  tel que  $F_{n_0}$  soit fini. Dans ce dernier cas, la suite  $(F_n)$  est stationnaire d'intersection non vide. □

**Exemples**

1. Un espace métrique  $(X, d)$  est compact si, et seulement si, il vérifie les deux assertions équivalentes suivantes :

- (i) pour tout espace métrique  $(Y, d)$  la seconde projection  $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$  est fermée (l'image de tout fermé de  $X \times Y$  par  $p_Y$  est fermée dans  $Y$ ),
- (ii) pour tout espace métrique  $(Y, d)$  et tout élément  $y_0 \in Y$  tout ouvert  $U$  de  $X \times Y$  contenant  $X \times \{y_0\}$  contient un produit  $X \times D(y_0, r)$  avec  $r > 0$ .

Supposons, en effet, que  $X$  soit compact. Soit  $F$  une partie fermée de  $X \times Y$ . Si  $(y_n)$  est une suite de  $p_Y(F)$  convergeant vers  $y$  de  $Y$ , il existe une suite  $(x_n)$  telle que  $(x_n, y_n) \in F$  pour tout  $n$ . Puisque  $X$  est compacte, il existe une suite extraite  $(x_{\sigma(n)})$  convergeant vers  $x \in X$ . La suite  $((x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}))$  d'éléments de  $F$  converge alors vers  $(x, y)$ . Puisque  $F$  est fermé, le couple  $(x, y)$  appartient à  $F$  et donc  $y$  à  $p_Y(F)$ .

Supposons que  $p_Y$  soit fermée. Soit  $U$  un ouvert de  $X \times Y$  contenant  $X \times \{y_0\}$ . L'image  $G$  du fermé  $X \times Y \setminus U$  de  $X \times Y$  par  $p_Y$  est un fermé de  $Y$  qui ne contient pas  $y_0$ . Il existe donc un nombre réel  $r > 0$  tel que  $D(c, r)$  ait une intersection vide avec  $G$ . On en déduit immédiatement l'inclusion :

$$X \times D(y_0, r) \subset U.$$

Supposons, finalement, que  $X$  vérifie la deuxième assertion. Si  $X$  n'est pas compact, il existe une suite  $(F_n)$  décroissante de fermés non vides d'intersection vide. La réunion :

$$U = \bigcup_n (X \setminus F_n) \times \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$$

est alors un ouvert de  $X \times \mathbb{R}$  contenant  $X \times \{0\}$ . Par hypothèse, il existe  $r > 0$  tel que  $X \times [-r, r]$  soit contenu dans  $U$ , ce qui est évidemment impossible.

### Théorème de Borel-Lebesgue

La définition, et les caractérisations, des compacts que nous venons de présenter utilisaient des suites, c'est-à-dire des familles indexées par  $\mathbb{N}$ . Le théorème de Borel-Lebesgue évite cette limitation.

On appelle *recouvrement* d'un espace métrique, toute famille  $(X_i)_{i \in I}$  vérifiant :

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i.$$

On dit que le recouvrement  $(X_i)_{i \in I}$  est *ouvert* si  $X_i$  est ouvert pour tout  $i$ .

On appelle *sous-recouvrement* de  $(X_i)_{i \in I}$ , toute sous-famille  $(X_i)_{i \in J}$  avec  $J \subset I$  dont la réunion est égale à  $X$ .

### Théorème 23 (Borel-Lebesgue)

Un espace métrique  $(X, d)$  est compact si, et seulement si, de tout recouvrement ouvert de  $X$  on peut extraire un sous-recouvrement fini.

**Démonstration de l'implication réciproque** Supposons donc que de tout recouvrement ouvert de  $X$  on puisse extraire un sous-recouvrement fini. Soit alors  $(x_n)$  une suite de  $X$ . La famille  $(F_n)$  où :

$$F_n = \text{Adh} \{x_k \mid k \in \llbracket n, +\infty \llbracket \}$$

est évidemment une suite décroissante de fermés non vides. Si la famille d'ouverts  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $U_n = X \setminus F_n$  recouvre  $X$ , alors il existe par hypothèse une partie finie  $J \subset \mathbb{N}$  telle que  $(U_n)_{n \in J} = X$ . On en déduit  $U_p = X$ , et, par conséquent,  $F_p = \emptyset$  pour  $p = \max J$ . C'est évidemment impossible.

La reunion des ouverts de  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est donc pas egale à  $X$  et, par complémentaires, l'intersection :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} \text{Adh} \{x_k \mid k \in \llbracket p, +\infty \rrbracket\}$$

est non vide. Un élément de cette intersection est une valeur d'adhérence de  $(x_n)$ . □

Pour démontrer l'implication directe, nous utiliserons les deux lemmes suivants :

**Lemme (Nombre de Lebesgue d'un recouvrement)**

Si  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert d'un compact  $X$ , alors il existe un nombre réel  $r > 0$  tel que :

$$\forall x \in A, \quad \exists i \in I : D(x, r) \subset U_i.$$

**Démonstration** Si la conclusion est fausse, alors il existe, pour tout entier  $n$ , un élément  $x_n \in X$  tel que  $D(x_n, 2^{-n})$  ne soit contenu dans aucun  $U_i$ .

Par compacité, il existe une suite extraite  $(x_{\sigma(n)})$  de  $(x_n)$  convergeant vers un élément  $x$  de  $X$ . Il existe alors un indice  $i_0 \in I$  tel que  $x \in U_{i_0}$  et un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $D(x, \varepsilon)$  soit contenu dans  $U_{i_0}$ . Puisque la suite  $d(x_{\sigma(n)}, x) + 2^{-n}$  converge vers 0, il existe un entier  $N$  tel que  $d(x_{\sigma(n)}, x) + 2^{-n}$  soit inférieur ou égal à  $\varepsilon$ . On en déduit :

$$D(x_{\sigma(N)}, 2^{-\sigma(N)}) \subset D(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$$

en contradiction avec notre hypothèse. □

**Lemme (Précompacité d'un espace compact)**

Si  $X$  est un espace métrique compact, alors pour tout nombre reel  $r > 0$ , il existe une suite finie de points  $(x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de  $A$  tel que :

$$X = \bigcup_{k=1}^n D(x_k, r).$$

**Démonstration** Soit  $r > 0$  fixé. Supposons que  $X$  ne puisse être recouvert par un nombre fini de boules fermées de la forme  $D(x, r)$ . On construit alors une suite de points  $(x_n)$  de  $X$  vérifiant :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad p < q \implies d(x_p, x_q) > r$$

par récurrence de la façon suivante :

1. On choisit  $x_0$  dans  $X$  qui est nécessairement non vide.
2. Supposons construits les points  $(x_0, \dots, x_n)$  vérifiant  $d(x_p, x_q) > r$  pour tout couple  $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  tel que  $p < q$ . Comme la réunion des boules fermées  $D(x_k, r)$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  ne recouvre pas  $X$ , on choisit  $x_{n+1}$  appartenant à :

$$X \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n D(x_k, r) \right)$$

On obtient ainsi une suite  $(x_n)$  sans valeur d'adhérence puisque pour tout  $\ell$  de  $X$ , on a  $x_n \in D(\ell, r/2)$  pour un indice  $n$  au plus  $\square$

### Démonstration de l'implication directe du théorème de Borel-Lebesgue

Supposons  $X$  compact. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$ .

Le lemme de Lebesgue nous fournit un nombre réel  $r > 0$  tel que pour tout  $x$  de  $X$ , il existe  $i(x) \in I$  vérifiant  $D(x, r) \subset U_{i(x)}$ . Le lemme de précompactité nous donne alors une suite finie  $(x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de  $X$  tel que :

$$X = \bigcup_{k=1}^n D(x_k, r).$$

On en déduit que la sous-famille  $(U_{i(x_k)})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  recouvre  $X$ .  $\square$

### Corollaire 24

Un espace métrique  $(X, d)$  est compact si, et seulement si, de toute famille  $(F_i)_{i \in I}$  de fermés de  $X$  d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

**Démonstration** C'est une simple reformulation du théorème de Borel-Lebesgue par passage aux complémentaires.  $\square$

### Exemples

1. Si un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est recouvert par une suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'intervalles ouverts on a :

$$\text{long } I \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \text{long } I_n$$

(la longueur  $\text{long } I$  d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  de bornes inférieure et supérieure  $m$  et  $M$  est par définition  $M - m$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ ).

En effet, si  $S = [a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , il existe par compacité une partie finie  $N \subset \mathbb{N}$  telle que  $S$  soit recouvert par la famille finie  $(I_n)_{n \in N}$ . Montrons alors par récurrence sur le cardinal de  $N$  que l'on a :

$$\text{long } S \leq \sum_{n \in N} \text{long } I_n.$$



- C'est évident si  $N$  a moins de un élément.
- Supposons que  $N$  ait  $k > 0$  éléments et que le résultat soit acquis pour toute partie de cardinal strictement inférieur à  $k$ . Il existe un indice  $n_0 \in N$  tel que  $b$  appartienne à l'intervalle ouvert  $I_{n_0} = ]\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}[$ . La famille finie  $(I_n)_{n \in N \setminus \{n_0\}}$  recouvrant le segment  $[a, \alpha_{n_0}]$  (vide si  $\alpha_{n_0} < a$ ), l'hypothèse de récurrence nous fournit l'inégalité :

$$\alpha_{n_0} - a \leq \sum_{n \in N \setminus \{n_0\}} \text{long } I_n.$$

par addition avec  $\alpha_{n_0} - a \leq b - a$ , on obtient :

$$b - a \leq \sum_{n \in N} \text{long } I_n.$$

Il vient finalement :

$$\text{long } S \leq \sum_{n \in N} \text{long } I_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \text{long } I_n.$$

Si  $I$  est un intervalle quelconque, il existe une suite croissante  $(S_p)$  de segments de  $I$  dont la suite des longueurs converge vers  $\text{long } I$ . Les inégalités :

$$\forall p, \quad \text{long } S_p \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \text{long } I_n$$

donnent à la limite  $\text{long } I \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \text{long } I_n$ .

2. Si  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels, l'ensemble :

$$U = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left] r_n - \frac{1}{2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{2^{n+1}} \right[$$

est un ouvert contenant  $\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  et strictement inclus dans  $\mathbb{R}$

En effet, la partie  $U$  est ouverte comme réunion d'ouverts et contient l'ensemble des  $r_n$  par construction. Puisque l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{long} \left( \left] r_n - \frac{1}{2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{2^{n+1}} \right[ \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

la partie  $U$  ne peut contenir aucun intervalle de longueur strictement supérieure à 2 d'après l'exemple précédent.

On en déduit les deux points suivants :

- Il n'existe pas de suite réelle dont l'ensemble des éléments soit égal à  $\mathbb{R}$ . Cela redémontre que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

- Il existe un ouvert  $U$  contenant  $\mathbb{Q}$  et strictement inclus dans  $\mathbb{R}$  ; on sait, en effet, qu'il existe une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'image l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  (par exemple  $r_n = (-1)^{v_2} \frac{v_3}{1 + v_5}$  où  $v_2, v_3$  et  $v_5$  sont les exposants de 2, 3 et 5 dans la décomposition de  $n + 1$  en produit de facteurs premiers). L'ensemble :

$$U = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left] r_n - \frac{1}{2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{2^{n+1}} \right[$$

est un ouvert contenant  $\mathbb{Q}$  strictement inclus dans  $\mathbb{R}$ . Cela ne contredit évidemment pas la densité de l'ensemble des rationnels qui signifie seulement que  $\mathbb{R}$  est le seul fermé contenant  $\mathbb{Q}$ .

### 3. L'ensemble de Cantor :

$$K = \left\{ x \mid \exists (c_n) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*} : x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{3^n} \right\}$$

est une partie compacte de  $\mathbb{R}$ .

Considérons, en effet, un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $K$  et supposons, pour raisonner par l'absurde, qu'il n'existe pas de sous-famille finie de  $(U_i)$  recouvrant  $K$ . Nous raisonnerons par dichotomie. Pour toute suite finie  $a = (a_1, \dots, a_p)$  de  $p > 0$  éléments de  $\{0, 2\}$ , notons  $K_a$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $K$  que l'on peut écrire :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{3^n} \quad \text{avec} \quad \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad c_n = a_n.$$

Il est évident que  $K$  est égal à la réunion  $K_{(0)} \cup K_{(2)}$  et que, pour toute suite  $a = (a_1, \dots, a_p)$ , l'ensemble  $K_a$  est la réunion :

$$K_{(a_1, \dots, a_p, 0)} \cup K_{(a_1, \dots, a_p, 2)}.$$

- Puisque  $K = K_{(0)} \cup K_{(2)}$  ne peut être recouvert par une sous-famille finie de  $(U_i)$ , il existe un entier  $a_1 \in \{0, 2\}$  tel que  $K_{(a_1)}$  ne puisse être recouvert par une sous-famille finie de  $(U_i)$ .
- Supposons que l'on ait construit une suite  $a = (a_1, \dots, a_p)$  telle que  $K_a$  ne soit pas recouvert par une sous-famille finie de  $(U_i)$ . L'égalité :

$$K_a = K_{(a_1, \dots, a_p, 0)} \cup K_{(a_1, \dots, a_p, 2)}$$

montre qu'il existe un entier  $a_{p+1} \in \{0, 2\}$  tel que  $K_{(a_1, \dots, a_p, a_{p+1})}$  ne puisse être recouvert par une sous-famille finie de  $(U_i)$ .

On obtient ainsi par récurrence une suite infinie  $(a_n) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$  telle que, pour tout  $p$ , le sous-ensemble  $K_{(a_1, \dots, a_p)}$  ne puisse être recouvert par une sous-famille finie de  $(U_i)$ .

Considérons alors l'élément  $x_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$  de  $K$ . Puisque la famille  $(U_i)$  recouvre  $K$ , il existe un indice  $i_0$  tel que  $x_0$  appartienne à  $U_{i_0}$ . Le recouvrement étant ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $D(x_0, r)$  soit contenu dans  $U_{i_0}$ . Considérons alors un indice  $p$  tel que  $3^{-p} < r$ . Pour tout  $x$  de  $K_{(a_1, \dots, a_p)}$ , on a :

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{c_n}{3^n} - \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{c_n - a_n}{3^n} \right| \\ &\leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{|c_n - a_n|}{3^n} \\ &\leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} \\ &\leq \frac{1}{3^p} \end{aligned}$$

et, par conséquent,  $x \in D(x_0, r)$ . On en déduit :

$$K_{(a_1, \dots, a_p)} \subset D(x_0, r) \subset U_{i_0},$$

ce qui contredit que  $K_{(a_1, \dots, a_p)}$  ne puisse être recouvert par une sous-famille finie de  $(U_i)$ .

## 2.2 Propriétés des espaces métriques compacts

### Parties d'espaces métriques compacts

#### Proposition 25

Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée et fermée.

**Démonstration** Soient  $A$  une partie compacte de l'espace métrique  $(X, d)$  et  $x_0 \in X$ .

- ▶ Si  $A$  n'est pas bornée, il existe pour tout  $n$  un élément  $a_n \in A$  tel que  $d(x_0, a_n) \geq n$ . Pour toute suite extraite  $(a_{\sigma(n)})$ , la suite  $(d(x_0, a_{\sigma(n)}))$  n'est pas bornée et la suite  $(a_{\sigma(n)})$  ne converge pas. Par contraposée,  $A$  n'est pas bornée.
- ▶ Si  $x$  est un élément adhérent à  $A$ , alors il existe une suite  $(a_n)$  de  $A$  convergeant vers  $x$ . Par compacité de  $(A, d)$ , il existe une suite extraite  $(a_{\sigma(n)})$  convergeant vers un élément  $a$  de  $A$ . On obtient finalement  $x = a$  et  $x \in A$ . Finalement,  $A$  est fermée. □

**Proposition 26**

Toute partie fermée d'un espace métrique compact est compacte.

**Démonstration** Soit  $A$  une partie fermée de l'espace métrique compact  $(X, d)$ . Soit  $(a_n)$  une suite de  $A$ . par compacité de  $(X, d)$ , il existe une sous-suite  $(a_{\sigma(n)})$  convergeant vers un élément  $x$  de  $X$ . Comme  $A$  est fermée,  $x$  appartient à  $A$  et  $(a_{\sigma(n)})$  converge dans  $(A, d)$ .  $\square$

**Produit d'espaces métriques compacts****Théorème 27**

Le produit de deux espaces métriques compacts est compact.

**Démonstration** Soient  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  deux espaces métriques compacts, et  $(x_n, y_n)$  une suite de  $X \times Y$ .

- Puisque  $X$  est compact, on peut extraire de  $(x_n)$  une suite  $(x_{\sigma(n)})$  convergente
- Puisque  $Y$  est compact, on peut extraire de  $(y_{\sigma(n)})$  une suite  $(y_{\sigma(\rho(n))})$  convergente.
- La suite :

$$(x_{\sigma(\rho(n))}, y_{\sigma(\rho(n))}),$$

extraite de  $(x_n, y_n)$  par  $\sigma \circ \rho$ , est convergente puisque sa première composante est convergente comme suite extraite de  $(x_{\sigma(n)})$ .

Ainsi,  $X \times Y$  est compact.  $\square$

La réciproque de ce théorème est vraie lorsque les espaces métriques  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  sont non vides. Si  $X \times Y$  est compact, alors  $(X, d)$  est compact puisqu'une suite  $(x_n)$  de  $X$  et un élément  $y_0$  de  $Y$  étant donnés, la première projection d'une suite extraite convergente de  $(x_n, y_0)$  sera une suite extraite convergente de  $(x_n)$ .

**Parties compactes des espaces numériques**

Comme nous l'avons vu dans la sous-section précédente, le théorème de Bolzano-Weierstrass a pour conséquence que les segments de  $\mathbb{R}$  sont compacts. Il conduit aussi la caractérisation fondamentale suivante :

**Proposition 28**

Une partie de  $\mathbb{R}$  est compacte si, et seulement si, elle est fermée bornée.

**Démonstration**

- ▶ En toutes circonstances, une partie compacte est fermée bornée.
- ▶ Soit  $A$  une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}$ . Si  $(a_n)$  est une suite de  $A$ ,  $(a_n)$  est bornée et possède, par conséquent, une valeur d'adhérence. Cette valeur appartient à  $A$  puisque cette partie est fermée. □

La proposition précédente se généralise au cas des espaces numériques.

Remarquons tout d'abord, que lorsque  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  sont deux normes équivalentes sur un espace vectoriel  $E$ , alors  $(E, \| \cdot \|_1)$  et  $(E, \| \cdot \|_2)$  ont les mêmes parties compactes puisqu'ils possèdent les mêmes suites convergentes.

**Théorème 29**

Une partie de l'espace vectoriel normé  $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_\infty)$  (resp.  $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_1)$  ou  $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_2)$ ) est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

**Démonstration**

- ▶ Comme nous l'avons déjà dit, une partie compacte est toujours fermée et bornée. Soit, maintenant, une partie fermée bornée  $A$  de  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\infty)$ . Il existe une constante  $K$  telle que  $A$  soit contenue dans la boule fermée  $D(0, K)$ . Cette boule est égale à l'ensemble produit :

$$[-K, K]^n$$

et est munie de la distance produit puisque  $N_\infty$  est la norme produit. Elle est donc compacte comme produit des segments (fermés et bornés) de  $\mathbb{R}$ . Puisque  $A$  est une partie fermée de  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\infty)$ , c'est aussi une partie fermée relativement à  $D(0, K)$ . Elle est donc compacte.

- ▶ Nous venons de démontrer le théorème pour  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\infty)$ . Il en est de même pour  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1)$  et  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_2)$  par équivalence des normes. Il est alors vrai dans  $(\mathbb{C}, | \cdot |)$  qui n'est que  $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$  et dans  $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_\infty)$ ,  $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_1)$  ainsi que  $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_2)$  pour les mêmes raisons. □

**Corollaire 30 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

Toute suite bornée de l'espace vectoriel normé  $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_\infty)$  possède une valeur d'adhérence.

- Démonstration** Une suite bornée de  $\mathbb{K}^n$  est contenue dans une boule fermée. Par compacité, elle possède donc une suite extraite convergente. □

## 2.3 Applications continues sur un compact.

### Image continue d'un compact

#### Théorème 31

L'image continue d'un espace métrique compact est compacte.

**Démonstration** Soit  $f$  une application continue d'un espace métrique compact  $(X, d)$  vers un espace métrique  $(Y, d)$ .

Si  $(y_n)$  est une suite de  $f(X)$ , il existe une suite  $(x_n)$  de  $X$  tel que  $y_n = f(x_n)$  pour tout  $n$ . Puisque  $X$  est compacte, il existe une suite extraite  $(x_{\sigma(n)})$  de  $(x_n)$  convergente. Puisque  $f$  est continue, la suite  $(y_{\sigma(n)})$ , image de  $(x_{\sigma(n)})$  par  $f$ , est aussi convergente.  $\square$

On applique fréquemment ce théorème dans la situation d'une application continue  $f$  d'un espace métrique  $(X, d)$  vers un espace métrique  $(Y, d)$  et d'une partie compacte  $A$  de  $X$ . L'image  $f(A)$  est alors compacte comme image du compact  $(A, d)$  par  $f|_A$ .

#### Corollaire 32

Une application continue d'un espace métrique compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

**Démonstration** Cette image est une partie compacte de  $\mathbb{R}$ . Elle est bornée et contient ses bornes inférieure et supérieure parce qu'elle est fermée.  $\square$

#### Corollaire 33

Une application continue d'un espace métrique compact à valeurs dans un espace vectoriel normé est bornée et atteint sa borne.

**Démonstration** Il suffit d'appliquer le théorème précédent à l'application continue  $x \mapsto \|f(x)\|$ .  $\square$

#### Exemples

1. Soient  $A$  une partie compacte de  $(X, d)$  et  $x_0 \in X$ . L'application continue  $x \mapsto d(x, x_0)$  est bornée et atteint ses bornes sur  $A$ . Il existe donc un élément  $a \in A$  tel que :

$$d(x_0, A) = d(x_0, a).$$

2. Soient  $A$  et  $B$  deux parties compactes de  $(X, d)$ . L'application continue  $(x, y) \mapsto d(x, y)$  du compact  $A \times B$  vers  $\mathbb{R}$  est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc des éléments  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que :

$$d(A, B) = d(a, b).$$

3. Soit  $A$  est une partie compacte non vide de  $(X, d)$ . L'application continue  $(x, y) \mapsto d(x, y)$  du compact  $A \times A$  vers  $\mathbb{R}$  est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc des éléments  $a \in A$  et  $b \in A$  tels que :

$$\text{diam } A = d(a, b).$$

est alors une suite décroissante de fermés non vides du compact  $f^{-1}(\{y\})$ . On en déduit :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} (F_n \cap f^{-1}(\{y\})) \neq \emptyset$$

4. Une isométrie  $f$  d'un espace métrique  $(X, d)$  dans lui-même, est surjective.

Supposons, en effet, que l'image  $f(X)$  soit strictement contenue dans  $X$  et considérons alors un élément  $x$  de  $X$  n'appartenant pas à  $f(X)$ . Puisque  $f(X)$  est compacte et donc fermée, la distance  $d$  de  $x$  à  $f(X)$  est strictement positive. Puisque  $X$  est compact, la suite  $(f^n(x))$  possède une suite extraite  $(f^{\sigma(n)}(x))$  convergente. Cette suite étant de Cauchy, il existe  $p < q$  tels que :

$$d(f^{\sigma(p)}(x), f^{\sigma(q)}(x)) \leq \frac{d}{2}.$$

L'application  $f$  étant isométrique, il vient :

$$d(x, f^{\sigma(q)-\sigma(p)}(x)) = d(f^{\sigma(p)}(x), f^{\sigma(q)}(x)) \leq \frac{d}{2}.$$

Puisque  $\sigma(q) - \sigma(p)$  est strictement positif l'élément  $f^{\sigma(q)-\sigma(p)}(x)$  appartient à  $f(X)$  et :

$$d(x, f(X)) \leq \frac{d}{2}.$$

Cette contradiction montre que  $f$  est surjective.

### Homeomorphismes

#### Théorème 34

Toute application bijective et continue d'un espace métrique compact  $(X, d)$  sur un espace métrique  $(Y, d)$  est un homéomorphisme

**Démonstration** Soit  $f$  une application bijective et continue d'un espace métrique compact  $(X, d)$  sur un espace métrique  $(Y, d)$ . Tout fermé  $F$  de  $X$  est compact et son image directe  $f(F)$  est compacte. L'image réciproque de  $F$  par  $f^{-1}$ , égale à cette image directe, est donc fermée. Ainsi,  $f^{-1}$  est continue □

## Uniforme continuité des applications continues sur un compact

### Théorème 35 (Heine)

Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

**Démonstration** Soit  $f$  une application continue d'un espace métrique compact  $(X, d)$  vers un espace métrique  $(Y, d)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . L'application  $g : (x, y) \mapsto d(f(x), f(y))$  de  $X^2$  vers  $\mathbb{R}$  étant continue, l'ensemble :

$$A = \{(x, y) \in X^2 \mid d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\}$$

est fermé dans  $X^2$ . Il est donc compact. L'application continue  $d : (x, y) \mapsto d(x, y)$  de  $A$  vers  $\mathbb{R}$  est donc minorée et atteint sa borne inférieure  $m > 0$ . Celle-ci n'est pas nulle puisque  $A$  ne contient pas de couple de la forme  $(x, x)$  avec  $x \in X$ .

Si le nombre réel  $\eta > 0$  vérifie  $\eta < m$ , alors, pour tout  $(x, y)$  de  $X^2$  tel que  $d(x, y) \leq \eta$ , on a  $(x, y) \notin A$ ,  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$  et, par conséquent,  $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ . □

## 3. Connexité par arcs

### 3.1 Arcs et connexité par arcs

#### Définition 6

On appelle *arc*, ou *chemin*, d'un espace métrique  $(X, d)$  toute application continue d'un segment de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point vers  $(X, d)$ .

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est un arc de  $(X, d)$ , on appelle *support* de le sous-ensemble  $\text{Im } \gamma$  et, *origine* et *extrémité* de  $\gamma$ , les points  $x = \gamma(a)$  et  $x' = \gamma(b)$ . On dit alors que  $\gamma$  relie  $x$  à  $x'$ .

Par changement de paramètre affine  $t \in [0, 1] \mapsto a + t(b - a)$  on obtient un arc :

$$\lambda : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(a + t(b - a))$$

défini sur  $[0, 1]$  de mêmes support, origine et extrémité.

#### Définition 7

On dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  est *connexe par arcs* si, pour tout  $(x, x')$  de  $X^2$ , il existe un arc de  $(X, d)$  reliant  $x$  à  $x'$ .



**Exemples**

1. Un espace métrique  $(X, d)$  est connexe par arcs s'il possède un point  $x_0$  que l'on peut relier à tout autre point  $x$  de  $X$  ; si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  et  $\delta : [0, 1] \rightarrow X$  sont deux arcs reliant  $x_0$  à  $x$  et  $x_0$  à  $x'$ , alors l'application :

$$t \in [0, 1] \rightarrow \begin{cases} \gamma(1 - 2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \delta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un arc (la continuité en  $1/2$  provient de  $\gamma(0) = \delta(0)$ ) reliant  $x$  à  $x'$ .

2. Toute partie  $A$  convexe d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  est connexe par arc puisque pour tout  $(x, x')$  de  $A^2$ , l'application :

$$t \in [0, 1] \mapsto x + t(x' - x) \in E$$

d'image le segment  $[x, x']$  est un arc de  $A$  reliant  $x$  à  $x'$ . En particulier, les boules ouvertes ou fermées de  $(E, \| \cdot \|)$  sont connexes par arcs. Il en est de même des segments.

3. On dit qu'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  est étoilée s'il existe un point  $x_0 \in A$  tel que, pour tout  $x \in A$ , le segment  $[x_0, x]$  soit contenu dans  $A$ . Les points précédents montrent qu'une partie étoilée est connexe par arcs.
4. On appelle *ligne polygonale* d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  toute application continue affine par morceaux. On dit alors qu'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  est *connexe par lignes polygonales* si, pour tout  $(x, x') \in A$ , il existe une ligne polygonale contenue dans  $A$  reliant  $x$  à  $x'$ . Une telle partie est évidemment connexe par arcs.

**Proposition 36**

Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

**Démonstration** Un intervalle de  $\mathbb{R}$  est connexe par arcs puisque convexe.

Soit, réciproquement, une partie connexe par arcs  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $(x, x')$  de  $I$ , il existe un arc  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow I$  tel que  $\gamma(\alpha) = x$  et  $\gamma(\beta) = x'$ . Le théorème des valeurs intermédiaires des fonctions de variable réelle montre alors que le segment  $[a, b]$  est contenu dans  $\text{Im } \gamma$  et, par conséquent, dans  $I$ . Ainsi,  $I$  est convexe. C'est donc un intervalle de  $\mathbb{R}$ . □

**Remarque** Les propriétés des parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$ , qui ne sont que les intervalles de  $\mathbb{R}$  par la proposition précédente, sont particulières et ne se retrouvent pas en général dans les autres espaces vectoriels normés.

- Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont convexes puisque ce sont les intervalles. Il n'en est pas de même en général dans un espace vectoriel normé réel

de dimension 1. Par exemple, les couronnes ouvertes :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\} \quad \text{avec} \quad 0 < r < R$$

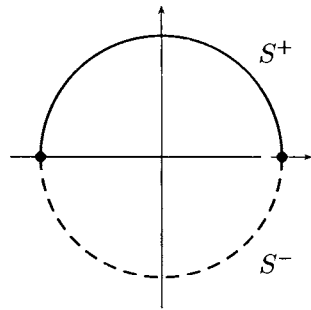
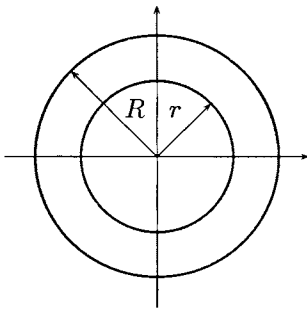
de  $\mathbb{C}$  sont connexes par arcs mais non convexes.

- Une intersection de parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  est aussi connexe par arcs puisqu'elle est convexe comme intersection de convexes. Il n'en est pas de même en général dans un espace vectoriel normé réel de dimension strictement supérieure à 1. Par exemple, l'intersection des parties connexes par arcs :

$$S^- = \{e^{it} \mid t \in [-\pi, 0]\} \quad \text{et} \quad S^+ = \{e^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$$

de  $\mathbb{C}$  est la partie non connexe par arcs  $\{-1, 1\}$ .

Les figures ci-dessous illustrent ces deux points :



## 3.2 Propriétés des espaces connexes par arcs

### Image continue d'une partie connexe par arcs

#### Proposition 37

L'image continue d'un espace connexe par arcs est connexe par arcs.

**Démonstration** Soit  $f$  une application continue d'un espace métrique connexe par arcs  $(X, d)$  vers un espace métrique  $(Y, d)$ .

Pour tout  $(u, u')$  de  $f(X)$ , il existe  $(x, x')$  de  $X$  tels que  $f(x) = u$  et  $f(x') = u'$ . Si  $\gamma$  est un arc de  $X$  reliant  $x$  à  $x'$ , alors l'application  $f \circ \gamma$  est un arc de  $f(X)$  reliant  $u$  à  $u'$   $\square$

#### Proposition 38 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Si  $f$  est une application continue d'un espace métrique  $X$  vers  $\mathbb{R}$  et  $B$  une partie connexe par arcs contenue dans  $X$ , alors  $f(B)$  est un intervalle.

**Démonstration** C'est immédiat puisque  $f(B)$  est connexe par arcs dans  $\mathbb{R}$ . □

On peut évidemment formuler cette proposition en disant que tout nombre réel  $\alpha$  vérifiant  $u < \alpha < u'$  avec  $(u, u')$  dans  $f(B)$  est aussi dans  $f(B)$

*Exemples*

1. Une application injective continue d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  est strictement monotone.

En, effet, la partie

$$A = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$$

est convexe et, par conséquent, connexe par arcs dans  $\mathbb{R}^2$ . L'application :

$$r : (x, y) \in A \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

est continue à valeurs non nulles. La partie  $r(A)$  est donc connexe par arcs dans  $\mathbb{R}^*$ . Elle est donc contenue dans  $\mathbb{R}_+^*$  ou  $\mathbb{R}_-^*$  et  $f$  est strictement croissante ou strictement décroissante.

2. On déduit aisément du point précédent les théorèmes de Darboux et de Rolle généralisés. Soit  $f$  une application dérivable d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - Si  $f'$  prend des valeurs strictement négatives et strictement positives, alors  $f'$  s'annule sur  $I$ . En effet, la fonction  $f$  n'est pas monotone et, par l'exemple précédent, non injective. Il existe donc  $u < v$  de  $I$  tel que  $f(u) = f(v)$ . Le théorème de Rolle classique fournit alors  $w \in ]u, v[$  tel que  $f'(w) = 0$ .
  - Si  $f$  tend vers la même limite aux extrémités de  $I$ , alors  $f'$  s'annule sur  $I$ . C'est la même chose en remarquant qu'ici également,  $f$  n'est pas monotone si elle n'est pas constante.

3. L'espace métrique produit  $(X \times Y, d)$  de deux espaces non vides est connexe par arcs si, et seulement si,  $(X, d)$  et  $(Y, d)$  le sont puisqu'un chemin de  $X \times Y$  reliant  $(x, y)$  à  $(x', y')$  est de la forme :

$$t \mapsto (\delta(t), \lambda(t))$$

où  $\delta$  est un chemin de  $X$  reliant  $x$  à  $x'$  et  $\lambda$  un chemin de  $Y$  reliant  $y$  à  $y'$ .

- 4 Le cercle  $S = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$  de  $\mathbb{C}$  n'est pas homéomorphe à une partie de  $\mathbb{R}$ . Remarquons tout d'abord que  $S$  est connexe par arcs comme image continue de  $[0, 2\pi]$ . Si, maintenant,  $f$  est un homéomorphisme de  $S$  sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , la partie  $A$  est un segment non réduit à un point puisqu'elle est infinie, compacte et connexe par arcs. Notons alors  $m$  le milieu de  $A$  et  $z = e^{i\alpha}$  le point de  $S$  vérifiant  $f(z) = m$ . Il est évident que  $f$  induit par restriction un homéomorphisme de  $S \setminus \{z\}$  sur  $A \setminus \{m\}$ . Cela est impossible puisque  $S \setminus \{z\}$  est connexe par arcs comme image de  $] \alpha, \alpha + 2\pi[$  et que  $A \setminus \{m\}$  ne l'est pas.

5. On montre de la même façon que  $\mathbb{R}$  n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  avec  $n > 1$  en remarquant que  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est connexe par arcs.

### Application localement constante définie sur une partie connexe par arcs

On dit qu'une application  $f$  d'un espace métrique  $X$  vers un espace métrique  $Y$  est *localement constante* si tout point  $a$  de  $A$  possède un voisinage  $V$  tel que  $f|_V$  soit constante.

### Théorème 39

Une application localement constante d'un espace métrique connexe par arcs vers un espace métrique est constante.

**Démonstration** Soit  $v$  une valeur de  $f$ . On construit une application  $\varphi$  de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  de la façon suivante :

$$\forall x \in X, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = v \\ 1 & \text{si } f(x) \neq v \end{cases}$$

- L'application  $\varphi$  est continue puisque pour tout  $x_0$  de  $X$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V \in \mathcal{V}_X(x_0)$  tel que  $f|_V$  soit constante et, par conséquent :

$$\forall x \in X, \quad x \in V \implies |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

- Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que l'image de  $\varphi$  ne peut être que  $\{0, 1\}$ . Comme elle contient 0 puisque  $v$  est une valeur de  $f$ , cette image est égale à  $\{0\}$  et  $f$  est constante de valeur  $v$ . □

### Corollaire 40

Les seules parties ouvertes et fermées d'un espace métrique connexe par arcs  $(X, d)$  sont la partie vide  $\emptyset$  et la partie pleine  $X$ .

**Démonstration** Si  $U$  est une partie ouverte et fermée de l'espace métrique connexe par arcs  $(X, d)$ , l'application :

$$\forall x \in X, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus U \end{cases}$$

est localement constante puisque  $U$  et  $X \setminus U$  sont ouverts. Le théorème précédent montre qu'elle est constante et que  $U$  est égal au vide ou à  $X$ . □

**Exemple** Tout ouvert connexe par arcs  $U$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  est connexe par ligne polygonale.

Considérons, en effet, un point  $x_0$  de  $U$  et le sous-ensemble  $V$  des éléments  $x$  de  $U$  extrémité d'une application continue affine par morceaux d'origine  $x_0$ . L'ensemble  $V$  est non vide puisqu'il contient  $x_0$ .

- Montrons que  $V$  est ouvert. Soit  $x \in V$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  une ligne polygonale reliant  $x_0$  à  $x$ . Puisque  $U$  est ouvert, il existe  $r > 0$  telle que  $D(x, r) \subset U$ . Pour tout  $y$  de  $D(x, r)$ , l'application :

$$\lambda : t \in [0, 2] \mapsto \lambda(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ x + (t - 1)(y - x) & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

est une ligne polygonale d'image contenue dans  $U$  reliant  $x_0$  à  $y$ . Ainsi,  $D(x, r)$  est contenue dans  $V$ . L'ensemble  $V$  est donc un ouvert de  $E$ . C'est donc aussi, un ouvert relatif de  $U$ .

- Montrons que  $V$  est un fermé relatif de  $U$ . Montrons pour cela que la partie  $W = U \setminus V$  est un ouvert relatif de  $U$ . Soit  $x \in W$  ; puisque  $U$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $D(x, r) \subset U$ . S'il existe un élément  $y$  de  $D(x, r)$  dans  $V$ , il existe une ligne polygonale d'image contenue dans  $A$  reliant  $x_0$  à  $y$ . L'application :

$$\lambda : t \in [0, 2] \mapsto \lambda(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ y + (t - 1)(x - y) & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

est alors une ligne polygonale d'image contenue dans  $U$  reliant  $x_0$  à  $x$ . Cela étant impossible,  $D(x, r)$  est contenue dans  $W$ . L'ensemble  $W$  est donc un ouvert de  $E$  et, par conséquent un ouvert relatif de  $U$ . Finalement,  $V$  est un fermé relatif de  $U$ .

Le corollaire précédent montre alors que  $V$  est égal à  $U$ . Ainsi,  $U$  est connexe par lignes polygonales.

## 4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans cette section,  $(E, \| \cdot \|)$  désigne un espace vectoriel norme de dimension finie.

### 4.1 Complétude des espaces vectoriels normés de dimension finie

#### Théorème 41

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet

**Démonstration** C'est évident en dimension nulle. On raisonne alors par récurrence en supposant le résultat acquis en dimension strictement inférieure à  $n$  et en supposant que  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace vectoriel normé de dimension  $n > 0$

Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $E$ . Le noyau  $F$  de  $\varphi$  est un espace vectoriel de dimension  $n - 1$ . Par hypothèse de récurrence, l'espace vectoriel normé induit  $(F, \|\cdot\|)$  est complet. On en déduit que  $F$  est fermé et, par conséquent, que  $\varphi$  est continue.

Soit  $e \in E$  tel que  $\varphi(e) = 1$ . L'isomorphisme linéaire  $u : (\alpha, f) \mapsto \alpha e + f$  de  $\mathbf{K} \times F$  sur  $E$  est évidemment continu. Son isomorphisme réciproque  $u^{-1}$  de  $E$  vers  $\mathbf{K} \times F$  donné par :

$$\forall x \in E, \quad u^{-1}(x) = (\varphi(x), x - \varphi(x)e)$$

l'est aussi comme  $\varphi$ . On en déduit que  $E$  est complet comme le produit  $\mathbf{K} \times F$ . □

Les parties complètes de  $E$  sont donc ses parties fermées.

### Corollaire 42

Tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé

**Démonstration** C'est immédiat puisqu'il est complet pour la norme induite. □

## 4.2 Applications linéaires

### Proposition 43

Toute forme linéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.

**Démonstration** Une forme linéaire sur  $(E, \|\cdot\|)$  est continue puisque son noyau est un sous-espace complet et, par conséquent, fermé dans  $(E, \|\cdot\|)$ . □

**Remarque** Les applications polynomiales d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont continues comme somme de produit de formes linéaires.

### Theorème 44

Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un espace vectoriel normé est continue.

**Démonstration** Soient  $(e_i)_{i \in [1, n]}$  une base de l'espace vectoriel normé de dimension finie  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(e_i^*)_{i \in [1, n]}$  sa base duale.

Si  $u$  est une application linéaire  $u$  de  $(E, \|\cdot\|)$  vers un espace vectoriel normé  $(F, \|\cdot\|)$ , on a :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$$

et, par conséquent :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)u(e_i).$$

Les formes linéaires  $e_i^*$  étant continues, l'application  $u$  l'est aussi. □

On obtient un résultat analogue pour les applications bilinéaires.

**Théorème 45**

Toute application bilinéaire d'un produit d'espaces vectoriels normés de dimension finie dans un espace vectoriel normé est continue.

**Démonstration** Soient  $(\ell_i)_{i \in [1,n]}$  et  $(m_i)_{i \in [1,m]}$  des bases des espaces vectoriels normés de dimension finie  $(L, \|\cdot\|)$  et  $(M, \|\cdot\|)$  ainsi que  $(\ell_i^*)_{i \in [1,n]}$  et  $(m_i^*)_{i \in [1,m]}$  les bases duales.

Si  $B$  est une application bilinéaire du produit  $L \times M$  vers un espace vectoriel normé  $(F, \|\cdot\|)$ , on a :

$$\forall (x, y) \in L \times M, \quad b(x, y) = \sum_{(i,j) \in [1,n] \times [1,m]} \ell_i^*(x)m_j^*(y)B(\ell_i, m_j).$$

Les formes linéaires  $(x, y) \mapsto \ell_i^*(x)$  et  $(x, y) \mapsto m_j^*(y)$  étant continues sur l'espace vectoriel de dimension finie  $L \times M$ , l'application  $B$  l'est aussi. □

**Coordonnées d'une application**

Soient  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1,n]}$  une base de l'espace vectoriel normé de dimension finie  $(E, \|\cdot\|)$  et  $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i \in [1,n]}$  sa base duale.

Si  $f$  est une application d'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  vers  $E$ , on appelle *applications coordonnées* de  $f$ , les applications  $f_i$  de  $A$  vers  $\mathbf{K}$  telles que :

$$\forall x \in A, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i,$$

c est-à-dire, les applications  $f_i = e_i^* \circ f$  de  $A$  vers  $\mathbf{K}$  pour tout  $i$ .

Soit  $a$  adhérent à  $A$ .

**Proposition 46**

Une application d'une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  dans un espace vectoriel normé de dimension finie tend vers  $\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i e_i$  en  $a$  si, et seulement si, ses applications coordonnées  $f_i$  tendent vers  $\ell_i$  en  $a$  pour tout  $i$ .

**Démonstration** L'implication directe est immédiate puisque  $f_i$  est la composée de  $f$  et de la forme linéaire continue  $e_i^*$ .

L'implication réciproque provient de la relation :

$$\forall x \in A, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i. \quad \square$$

La proposition précédente s'applique évidemment aux suites ; si  $(x_k)$  est une suite de  $E$ , on appelle aussi suites composantes de  $(x_k)$ , les suites  $(\alpha_{i,k})_k$  de  $\mathbf{K}$  telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k}e_i.$$

On a bien sûr  $\alpha_{i,k} = e_i^*(x_k)$  pour tout  $i$  et  $k$ . On obtient alors la proposition suivante :

#### Corollaire 47

Une suite  $(x_k)$  de  $E$  converge vers  $\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i e_i$  si, et seulement si, ses suites coordonnées  $(\alpha_{i,k})$  convergent vers  $\ell_i$  pour tout  $i$ .

#### Corollaire 48

Une application à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie est continue en un point (resp. continue) si, et seulement si, ses coordonnées sont continues au point considéré (resp. continues).

### 4.3 Parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie

#### Théorème 49

Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.

**Démonstration** Soit  $u$  un isomorphisme linéaire de  $E$  vers  $\mathbf{K}^n$ . Le théorème 44 montre que  $u$  et que  $u^{-1}$  sont continues de  $(E, \|\cdot\|)$  sur  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$

On sait déjà que toute partie compacte de  $(E, \|\cdot\|)$  est fermée et bornée. Si, réciproquement  $K$  est fermée et bornée dans  $E$ , la partie  $u(K)$  est une partie fermée comme image réciproque de  $K$  par l'application continue  $u^{-1}$  et une partie bornée puisque  $u$  est lipschitzienne. Elle est donc compacte dans  $\mathbf{K}^n$  et  $K$ , son image par l'application  $u$ , est compacte dans  $(E, \|\cdot\|)$ .  $\square$



**Corollaire 50 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

Toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie possède une valeur d'adhérence.

*Exemple* Si  $A$  est une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie  $(E, \| \cdot \|)$ , alors, pour tout point  $x$  de  $E$ , il existe un élément  $a$  de  $A$  tel que  $d(x, A) = d(x, a)$ .

Par définition de la distance à une partie il existe une suite  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $(d(x, a_n))$  converge vers  $d(x, A)$ . Cette suite  $(d(x, a_n))$  étant bornée, la suite  $(a_n)$  est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous fournit alors une suite extraite  $(a_{\sigma(n)})$  convergente dont la limite  $a$  appartient nécessairement au fermé  $A$ . Cela entraîne :

$$d(x, a) = \lim (d(x, a_{\sigma(n)})) = d(x, A).$$

**Théorème de Riesz**

Nous venons de voir que la boule fermée unité d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte

L'exemple suivant montre que la boule  $D(0, 1)$  d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas nécessairement compacte.

*Exemple* La boule fermée unité de l'espace de Banach  $(\ell^1, N_1)$  n'est pas compacte.

Supposons, en effet, que cette boule soit compacte. La suite  $(e_n)$  de vecteurs unitaires de  $\ell^1$  définis par  $e_n = (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$  pour tout  $n$  ( $\delta$  désigne le symbole de Kronecker) possède alors une suite extraite  $(e_{\sigma(n)})$  convergente. Par continuité de la norme, la limite  $\ell = (\lambda_k)$  de  $(e_{\sigma(n)})$  est unitaire. Puisque, d'un autre côté, les formes linéaires  $(\alpha_k) \mapsto \alpha_k$  sont continues, on a aussi :

$$\forall k, \quad \lambda_k = \lim_n \delta_{k, \sigma(n)} = 0.$$

C'est évidemment impossible.

Il est remarquable qu'il en soit ainsi de la boule fermée unité de tout espace vectoriel normé de dimension infinie.

**Théorème 51 (Riesz)**

Tout espace vectoriel normé dont la boule fermée unité est compacte est de dimension finie.

**Démonstration** Supposons que la boule fermée  $D(0, 1)$  de  $(E, \|\cdot\|)$  soit compacte. La sphère unité  $S = S(0, 1)$  qui est une partie fermée de  $D(0, 1)$  est aussi compacte. Comme la famille de boules ouvertes  $(B(x, \frac{1}{2}))_{x \in S}$  recouvre évidemment  $S$ , le théorème de Borel-Lebesgue nous fournit alors une famille finie  $(x_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  de points de  $S$  telle que  $(B(x_k, \frac{1}{2}))_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  recouvre  $S$ .

Le sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  engendré par  $(x_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est de dimension finie. Il est donc complet pour la norme induite et, par conséquent, fermé dans  $(E, \|\cdot\|)$ . S'il n'est pas égal à  $E$ , il existe par homogénéité un élément  $x \in S(E)$  qui n'appartient pas à  $F$ . Puisque  $F$  est fermé, la distance  $r = d(x, F)$  est non nulle et il existe  $f \in F$  tel que :

$$r \leq s = \|x - f\| \leq \frac{3}{2}r.$$

Puisque la famille  $(B(x_k, \frac{1}{2}))_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  recouvre  $S$ , le vecteur unitaire  $s^{-1}(x - f)$  peut s'écrire  $x_k + h$  avec  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $\|h\| < \frac{1}{2}$ . On en déduit :

$$x = f + sx_k + sh$$

ce qui prouve que la distance  $r$  de  $x$  à  $F$  est inférieure ou égale à  $\|sh\|$ . C'est impossible puisque l'on a :

$$\|sh\| < \frac{1}{2}s \leq \frac{3}{4}r. \quad \square$$

**Remarque** Le théorème de Riesz ne fait pas partie du programme des classes préparatoires. Nous ne l'avons présenté ici que parce qu'il fournit la réciproque du théorème 49 de la page 416.

## 4.4 Équivalence des normes en dimension finie

### Théorème 52

Toutes les normes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes.

**Démonstration** Si  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont deux normes sur  $E$ , l'application  $\text{Id}_E$  de  $(E, \|\cdot\|_1)$  vers  $(E, \|\cdot\|_2)$  est continue ainsi que  $u^{-1}$  et, par conséquent,  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes.  $\square$

Le théorème précédent prouve que les notions topologiques ne dependent pas de la norme choisie sur un espace vectoriel de dimension finie.

Elles ne dependent donc que de l'espace  $E$  et l'on peut en parler sans spécifier de norme. On les étudiera, néanmoins, en utilisant une norme que l'on choisira, évidemment, adaptée à la situation.

*Exemple* Soient  $E$  un sous-espace de dimension finie de  $\mathcal{C}([0, 1])$  et  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $E$ . S'il existe un élément  $f$  de  $E$  telle que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , la suite  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$ , alors :

- la suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  pour la norme  $N_\infty$ ,
- la suite d'intégrales  $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)$  converge vers  $\int_{[0,1]} f$ .

Construisons tout d'abord une norme  $N$  sur  $E$  telle que  $(N(f_n - f))$  converge vers 0.

- Pour tout  $x$ , notons  $\delta_x$  la forme linéaire  $f \mapsto f(x)$  sur  $E$ . La partie  $\{\delta_x \mid x \in [0, 1]\}$  est un sous-ensemble du dual  $E^*$  dont l'orthogonal, ensemble des  $f \in E$  telles que  $\forall x, f(x) = 0$ , est réduit à  $\{0\}$ . C'est donc une partie génératrice de  $E^*$  et il existe une suite  $(x_1, \dots, x_p)$  d'éléments de  $[0, 1]$  telle que  $(\delta_{x_i})_{i \in [1, p]}$  soit une base de  $E^*$ .
- Il est évident que l'application :

$$N : f \mapsto \sum_{i=0}^p |f(x_i)|$$

est sous-linéaire. Si  $f \in E$  vérifie  $N(f) = 0$ , on a  $\delta_{x_i}(f) = 0$  pour tout  $i$ . Comme toute forme  $\delta_x$  est combinaison linéaire des éléments de  $(\delta_{x_i})$ , on a  $\forall x, f(x) = 0$  et, par conséquent,  $f = 0$ .

L'application  $N$  est donc une norme sur  $E$ . Puisque, pour tout  $i$ , la suite  $(f_n(x_i))$  converge vers  $f(x_i)$ , la suite  $(N(f_n - f))$  converge vers 0.

Puisque  $E$  est de dimension finie, la norme  $N$  est équivalente à la restriction de la norme  $N_\infty$  à  $E$ . En particulier, la suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  pour  $N_\infty$ . L'inégalité de la moyenne montre alors que la suite  $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)$  converge vers  $\int_{[0,1]} f$ .

## 5. Espaces d'applications linéaires continues

Dans cette section,  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, \|\cdot\|)$  désignent deux espaces vectoriels normés.

## 5.1 Espace vectoriel normé des applications linéaires continues

### Norme d'une application linéaire continue

Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ .

Une constante réelle  $K$  vérifie  $\|u(x)\| \leq K \|x\|$  pour tout  $x$  de  $E$  si, et seulement si, elle majore l'ensemble :

$$X = \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

L'application  $u$  est donc continue si, et seulement si,  $X$  est majorée. Cela conduit à la définition suivante :

#### Définition 8

On appelle *norme subordonnée* d'une application linéaire continue  $u$  de  $(E, \|\cdot\|)$  vers  $(F, \|\cdot\|)$ , et l'on note  $\|u\|$ , le nombre réel :

$$\sup \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}.$$

#### Proposition 53

Si  $u$  est une application linéaire de  $E$  vers  $F$ , la norme subordonnée de  $u$  vérifie les deux propriétés caractéristiques :

1.  $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$
2. Si  $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq K \|x\|$ , alors  $\|u\| \leq K$ .

**Démonstration** C'est simplement dire que  $\|u\|$  est la borne supérieure de  $X$ . □

On vérifie par homogénéité que  $K \in \mathbb{R}_+$  majore  $X$  si, et seulement si, il majore les ensembles :

$$\{ \|u(x)\| \mid x \in S(0, 1) \} \quad \text{et} \quad \{ \|u(x)\| \mid x \in D(0, 1) \}.$$

La norme subordonnée de  $u$  peut donc aussi être définie par :

$$\|u\| = \sup \{ \|u(x)\| \mid x \in S(0, 1) \}$$

et :

$$\|u\| = \sup \{ \|u(x)\| \mid x \in D(0, 1) \}.$$

#### Exemples

1. L'endomorphisme  $u_A$  canoniquement associé à la matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  de  $M_n(\mathbb{C})$  est une application linéaire continue de  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$  et sa norme subordonnée est :

$$\max_{k \in [1, n]} \sum_{\ell=1}^n |\alpha_{k, \ell}|.$$

En effet, l'application linéaire  $u_A$  est continue puisque  $\mathbb{C}^n$  est de dimension finie. De toute façon, si l'on note  $X = (\alpha_i)$  le vecteur générique de  $\mathbb{C}^n$  et  $Y = (\beta_i)$  son image par  $u_A$ , on a :

$$\begin{aligned} |\beta_k| &= \left| \sum_{\ell=1}^n \alpha_{k,\ell} \alpha_\ell \right| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^n |\alpha_{k,\ell}| |\alpha_\ell| \\ &\leq \left( \sum_{\ell=1}^n |\alpha_{k,\ell}| \right) \|X\|_\infty \end{aligned}$$

et, par conséquent,  $\|u(X)\|_\infty \leq K \|X\|_\infty$  avec :

$$K = \max_{k \in [1, n]} \sum_{\ell=1}^n |\alpha_{k,\ell}|.$$

On retrouve ainsi que l'application  $u_A$  est continue et l'on voit que sa norme subordonnée  $\|u_A\|$  est inférieure ou égale à  $K$ .

Soient alors  $k_0$  tel que :

$$K = \sum_{\ell=1}^n |\alpha_{k_0,\ell}|$$

et, pour tout  $\ell$ , un nombre complexe unitaire  $\nu_\ell$  tel que  $|\alpha_{k_0,\ell}| = \alpha_{k_0,\ell} \nu_\ell$ . Le vecteur  $X = (\nu_k)$  vérifie bien sûr  $\|X\|_\infty = 1$  et  $\|u(X)\|_\infty \leq K$ . Comme, de plus, la  $k_0^{\text{ième}}$  coordonnée  $\beta_{k_0}$  de  $u_A(X)$  vérifie :

$$|\beta_{k_0}| = \left| \sum_{\ell=1}^n \alpha_{\ell,k_0} \nu_\ell \right| = \sum_{\ell=1}^n |\alpha_{k_0,\ell}| = K,$$

on a  $\|u(X)\|_\infty = K$ . La norme subordonnée  $\|u_A\|$  est donc égale à  $K$ .

2. Soit  $h$  une application continue de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{C}$ . La forme linéaire :

$$\varphi : f \mapsto \int_{[0,1]} fh$$

de l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}), N_1)$  est continue et sa norme subordonnée est :

$$N(\varphi) = N_\infty(h).$$

En effet, l'inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_{[0,1]} fh \right| \leq N_\infty(h) \int_{[0,1]} |f|$$

montre que  $\varphi$  est continue de norme subordonnée inférieure ou égale à  $N_\infty(h)$ . Si  $h$  est nulle, la forme linéaire  $\varphi$  est nulle et le résultat évident. Si  $h$  est non nulle, notons  $N$  la norme  $N_\infty(h)$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, N/2[$ . Puisque  $h$  est continue, il existe un élément  $x_0$  de  $[0, 1]$  tel que  $|h(x_0)| = N_\infty(h)$  et un intervalle fermé  $I = [x_0 - r, x_0 + r]$  avec  $r > 0$  tel que :

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap [0, 1], \quad \frac{N}{2} < N - \varepsilon \leq |h(x)|.$$

L'application :

$$f : x \in [0, 1] \longmapsto \begin{cases} x - (x_0 - r) & \text{si } x \in [x_0 - r, x_0] \cap [0, 1] \\ (x_0 + r) - x & \text{si } x \in [x_0, x_0 + r] \cap [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue positive. En vérifiant que les limites à droites et à gauche en  $x_0 - r$  et  $x_0 + r$  sont nulles, on voit que l'application :

$$g : x \in [0, 1] \longmapsto \begin{cases} f(x)\overline{h(x)}|h(x)|^{-1} & \text{si } x \in I \cap [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est aussi une application continue. Elle vérifie  $N_1(g) = N_1(f)$  et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x)h(x)dx &= \int_{I \cap [0,1]} f(x)|h(x)|dx \\ &\geq (N - \varepsilon) \int_{I \cap [0,1]} f(x)dx \\ &\geq (N - \varepsilon) N_1(f). \end{aligned}$$

On a donc  $|\varphi(g)| \geq (N - \varepsilon) N_1(g)$  pour  $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{C})$  non nulle et, par conséquent,  $N(\varphi) \geq (N - \varepsilon)$ . Cela valant pour tout  $\varepsilon \in ]0, N/2[$ , il vient  $N(\varphi) \geq N$ . La norme subordonnée  $N(\varphi)$  est donc égale à  $N_\infty(h)$ .

**Espace vectoriel normé  $\mathcal{L}_c(E, F)$**

L'ensemble  $\mathcal{L}_c(E, F)$  des applications linéaires continues de  $(E, \|\cdot\|)$  vers  $(F, \|\cdot\|)$  est le sous-espace vectoriel intersection  $\mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}(E, F)$  de  $\mathcal{F}(E, F)$ .

**Proposition 54**

L'application  $u \mapsto \|u\|$  de  $\mathcal{L}_c(E, F)$  vers  $\mathbb{R}_+$  est une norme.

**Démonstration** Soient  $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F)^2$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$ .

Comme  $u$  et  $v$  sont lipschitziennes de constantes  $\|u\|$  et  $\|v\|$ , la combinaison linéaire  $\alpha u + \beta v$  est lipschitziennes de constante  $|\alpha| \|u\| + |\beta| \|v\|$ . On a donc :

$$\|\alpha u + \beta v\| \leq |\alpha| \|u\| + |\beta| \|v\|.$$

Si  $\|u\|$  est nulle  $u$  est 0-lipschitzienne et donc constante. Elle est donc nulle. □

*Exemple* L'application  $(u, x) \mapsto u(x)$  de  $\mathcal{L}_c(E, F) \times E \rightarrow F$  est une application bilinéaire continue puisque l'on a  $\|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$  pour tout  $(u, x)$ .

**Proposition 55**

Si  $(F, \| \cdot \|)$  est complet l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{L}_c(E, F), \| \cdot \|)$  est un espace de Banach.

**Démonstration** Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy de  $\mathcal{L}_c(E, F)$ .

- Pour tout  $x$  de  $E$ , l'application linéaire  $u \mapsto u(x)$  est  $\|x\|$ -lipschitzienne de  $(\mathcal{L}_c(E, F), \| \cdot \|)$  vers  $(F, \| \cdot \|)$ . La suite  $(u_n(x))$  est donc de Cauchy et,  $(F, \| \cdot \|)$  étant complet, convergente. Il est alors immédiat que l'application  $u$  de  $E$  vers  $F$  définie par

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \lim_n u_n(x)$$

est linéaire.

- Par définition même de la norme subordonnée, l'application de restriction :

$$r : (\mathcal{L}_c(E, F), \| \cdot \|) \longrightarrow (\mathcal{B}(D(0, 1), F), N_\infty)$$

est une isométrie d'espaces vectoriels normés. La suite  $(r(u_n))$  est donc une suite de Cauchy de l'espace de Banach  $(\mathcal{B}(D(0, 1), F), N_\infty)$ . Elle est donc convergente de limite l'application  $f \in \mathcal{B}(D(0, 1), F)$  définie par :

$$\forall x \in D(0, 1), \quad f(x) = \lim_n u_n(x).$$

- L'application linéaire  $u$  dont la restriction  $f$  à  $D(0, 1)$  est bornée est par conséquent continue. La relation :

$$\|u_n - u\| = N_\infty(u|_{D(0,1)} - f)$$

montre que c'est la limite de  $(u_n)$  dans  $(\mathcal{L}_c(E, F), \| \cdot \|)$ . □

Soient  $(E, \| \cdot \|)$ ,  $(F, \| \cdot \|)$  et  $(G, \| \cdot \|)$  trois espaces vectoriels normés.

**Proposition 56**

Si  $u$  est une application linéaire continue de  $(E, \| \cdot \|)$  vers  $(F, \| \cdot \|)$  et  $v$  une application linéaire continue de  $(F, \| \cdot \|)$  vers  $(G, \| \cdot \|)$  vers un espace vectoriel normé  $G$ , alors  $v \circ u$  est une application linéaire continue de  $E$  vers  $G$  et l'on a :

$$\|v \circ u\| \leq \|u\| \|v\|$$

**Démonstration** On sait que la composée  $v \circ u$  est linéaire et continue. Comme  $u$  et  $v$  sont lipschitziennes de constantes  $\|u\|$  et  $\|v\|$ , la composée  $v \circ u$  est lipschitziennes de constante  $\|u\| \|v\|$ . On a donc :

$$\|v \circ u\| \leq \|u\| \|v\|. \quad \square$$

*Exemple* L'application  $(v, u) \mapsto v \circ u$  de  $\mathcal{L}_c(F, G) \times \mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow \mathcal{L}_c(E, G)$  est une application bilinéaire continue puisque l'inégalité précédente montre qu'elle est bilipschitzienne.

### Proposition 57

L'algèbre  $\mathcal{L}_c(E)$  des endomorphismes continus de  $(E, \|\cdot\|)$  est une algèbre normée pour la norme subordonnée.

**Démonstration** L'ensemble  $\mathcal{L}_c(E)$  est une sous-algèbre puisque l'application  $\text{Id}_E$  est linéaire continue et que la composée de deux endomorphismes continus est aussi linéaire et continue.

Les relations  $\|\text{Id}_E\| = 1$  et  $\|v \circ u\| \leq \|u\| \|v\|$  montrent que  $u \mapsto \|u\|$  est une norme d'algèbre.  $\square$

### Proposition 58

Si  $(E, \|\cdot\|)$  est complet, l'algèbre normée  $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$  est une algèbre de Banach.

## 5.2 Cas des espaces de dimension finie

Lorsque  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, l'espace  $\mathcal{L}_c(E, F)$  est égal à l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$ . On écrira donc  $\mathcal{L}(E, F)$  pour  $\mathcal{L}_c(E, F)$  et de même  $\mathcal{L}(E)$  pour  $\mathcal{L}_c(E)$ .

Les espaces  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{L}(E)$  sont de dimension finie. Leur propriétés topologiques sont donc indépendantes des normes choisies. Néanmoins, ils seront toujours munis, sauf mention contraire, des normes subordonnées à celles de  $E$  et  $F$ . C'est d'ailleurs la seule façon naturelle d'avoir une norme d'algèbre sur  $\mathcal{L}(E)$ .

Il en de même des espaces de matrices  $M_{n,m}(\mathbf{K})$  et  $M_n(\mathbf{K})$  qui seront identifiés à  $\mathcal{L}(\mathbf{K}^m, \mathbf{K}^n)$  et  $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ .

### Proposition 59

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des bases des espaces vectoriels  $E$  et  $F$ , l'isomorphisme  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{L}(E, F)$  sur  $M_{m,n}(\mathbf{K})$  est bicontinu.



Ainsi, une suite  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  si, et seulement si, on a l'un des points équivalents suivants :

- (i) la suite  $(\text{Mat}_{B,C} u_n)$  converge vers  $\text{Mat}_{B,C} u$ ,
- (ii) la suite  $(\text{Mat}_{B,C} u_n[i, j])$  converge vers  $\text{Mat}_{B,C} u[i, j]$  pour tout  $(i, j)$ , où  $A[i, j]$  désigne le  $(i, j)$ <sup>ième</sup> coefficient de la matrice  $A$ .

L'exemple suivant fournit d'autres équivalences :

**Exemple** Soit  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une base de  $E$ . Les points suivants sont équivalents :

- (i)  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ ,
- (ii)  $(u_n(x))$  converge vers  $u(x)$  dans  $F$  pour tout  $x$  de  $E$ ,
- (iii)  $(u_n(e_i))$  converge vers  $u(e_i)$  dans  $F$  pour tout  $i$ .

En effet, l'implication  $(i) \Rightarrow (ii)$  vient de ce que l'application linéaire  $u \mapsto u(x)$  de  $\mathcal{L}(E, F)$  vers  $F$  est lipschitzienne de rapport  $\|x\|$ . L'implication  $(ii) \Rightarrow (iii)$  est évidente. Remarquons pour terminer que l'application :

$$\Phi : u \mapsto (u(e_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

est un isomorphisme linéaire de  $\mathcal{L}(E, F)$  sur l'espace produit  $F^n$ . L'implication  $(iii) \Rightarrow (i)$  est une simple conséquence de la continuité de  $\Phi^{-1}$ .

**Proposition 60**

Les applications trace  $u \mapsto \text{tr } u$  et déterminant  $u \mapsto \det u$  de  $\mathcal{L}(E)$  vers  $\mathbf{K}$  sont continues.

**Démonstration** L'application  $u \mapsto \text{tr } u$  est continue parce que linéaire. Soit maintenant  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Les formes linéaires  $(\alpha_{i,j}) \mapsto \alpha_{i,j}$  appartiennent à la sous-algèbre  $\mathcal{C}(M_n(\mathbf{K}), \mathbf{K})$  des applications continues de  $M_n(\mathbf{K})$  vers  $\mathbf{K}$ . La relation :

$$\forall (\alpha_{i,j}) \in M_n(\mathbf{K}), \quad \det(\alpha_{i,j}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left( \prod_{j=1}^n \alpha_{\sigma(j),j} \right)$$

montre qu'il en est de même de  $(\alpha_{i,j}) \mapsto \det(\alpha_{i,j})$ . L'application  $u \mapsto \det u$ , composée de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  et  $(\alpha_{i,j}) \mapsto \det(\alpha_{i,j})$ , est donc continue. □

**Proposition 61**

Le groupe  $\mathcal{GL}(E)$  est une partie ouverte et dense de  $\mathcal{L}(E)$  et l'application  $u \mapsto u^{-1}$  est continue de  $\mathcal{GL}(E)$  dans lui-même.

**Démonstratio** Une partie des affirmations de la proposition résulte d'un résultat général sur les algèbres de Banach. Nous les redémontrons néanmoins.

L'application déterminant étant continue, la partie  $\mathcal{GL}(E)$  est ouverte comme image réciproque de l'ouvert  $\mathbf{K}^*$  de  $\mathbf{K}$ . Pour montrer qu'elle est dense nous utiliserons la notion de spectre. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Le spectre de  $u$  étant fini, il existe une suite  $(\alpha_n)$  de scalaires n'appartenant pas à  $\text{sp } u$  convergeant vers 0. La suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\mathcal{GL}(E)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u - \alpha_n \text{Id}_E$$

converge vers  $u$ . Cela prouve que l'adhérence de  $\mathcal{GL}(E)$  est égale à  $\mathcal{L}(E)$ .

Soit maintenant  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . L'application  $A \mapsto m_{i,j}(A)$  de  $M_n(\mathbf{K})$  vers  $\mathbf{K}$  qui associe à toute matrice son  $(i, j)$ <sup>ième</sup> mineur est continue comme l'application déterminant. Puisque l'inverse d'une matrice inversible  $A$  est donnée par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C$$

où  $C$  est la transposée de la matrice de cofacteurs  $(-1)^{i+j} m_{i,j}(A)$ , l'application  $A \mapsto A^{-1}$  est continue de  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$  dans lui-même. L'application  $u \mapsto u^{-1}$ , composée des applications  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ ,  $A \mapsto A^{-1}$  et de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{-1}$ , est donc continue □

On peut remarquer que la démonstration fournit une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\mathcal{GL}(E)$  commutant avec  $u$  qui converge vers  $u$ .

**Exemples**

1. L'ensemble des isomorphismes linéaires bicontinus n'est pas dense dans  $\mathcal{L}_c(E)$  en général lorsque  $E$  est de dimension infinie. Considérons, par exemple, l'espace  $(\ell^2(\mathbb{R}), N_2)$  et l'application linéaire de translation  $T$  de  $\ell^2(\mathbb{R})$  vers  $\ell^2(\mathbb{R})$  définie par :

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{R}), \quad T(x) = y \quad \text{avec } y_0 = 0 \text{ et } y_n = x_{n-1} \text{ pour tout } n > 0.$$

Il est immédiat que  $T$  est linéaire isométrique et non surjective. Si  $S \in \mathcal{L}_c(E)$  est surjectif il existe  $x$  tel que  $S(x)$  soit égal à la suite  $e = (\delta_{0,n})$ . La suite  $S(x) - T(x)$ , égale à :

$$(1, -x_0, -x_1, \dots)$$

est de norme  $\sqrt{1 + N_2^2(x)}$ . On en déduit :

$$\frac{N_2(S(x) - T(x))}{N_2(x)} \geq 1.$$

La boule ouverte  $B(T, 1)$  ne contient donc pas d'élément de  $\mathcal{L}_c(E)$  surjectif et, *a fortiori*, bijectif et bicontinu.

2. Le groupe spécial linéaire  $SL_n(\mathbf{K})$  est une partie connexe par arcs de  $M_n(\mathbf{K})$ .

Nous savons, en effet, que toute matrice  $A \in M_n(\mathbf{K})$  de déterminant 1 peut s'écrire comme un produit  $T_1 \cdots T_p$  de matrices de transvections élémentaires. Pour tout  $i$ , la matrice  $T_i$  est de la forme  $I_n + \lambda_i E_{k_i, \ell_i}$  avec  $k_i \neq \ell_i$  et l'application :

$$\varphi_i : t \in [0, 1] \longmapsto I_n + t\lambda_i E_{k_i, \ell_i} \in M_n(\mathbf{K})$$

est un arc continu de  $SL_n(\mathbf{K})$  reliant  $I_n$  à  $T_i$ . Il est alors évident que :

$$\varphi : t \in [0, 1] \longmapsto \varphi_1(t) \cdots \varphi_p(t) \in M_n(\mathbf{K})$$

est un arc continu de  $SL_n(\mathbf{K})$  reliant  $I_n$  à  $A$ .

3. L'application :

$$(\alpha, A) \longmapsto \text{diag}(\alpha, 1, \dots, 1) A$$

est un homéomorphisme de  $\mathbf{K}^* \times SL_n(\mathbf{K})$  sur le groupe linéaire  $GL_n(\mathbf{K})$ .

Le groupe linéaire complexe  $GL_n(\mathbf{C})$  homéomorphe au produit d'espaces connexes par arcs est donc connexe par arcs.

Le groupe linéaire réel  $GL_n(\mathbf{R})$  n'est pas connexe par arcs puisque l'application  $\det : GL_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^*$  est continue et d'image l'espace non connexe par arcs  $\mathbf{R}^*$ .

Le sous-groupe :

$$GL_n^+(\mathbf{R}) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det A > 0\}$$

et la partie :

$$GL_n^-(\mathbf{R}) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det A < 0\}$$

homéomorphes à  $\mathbf{R}_+^* \times SL_n(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{R}_-^* \times SL_n(\mathbf{R})$  sont connexes par arcs.

### 5.3 Suite équilipschitzienne d'applications linéaires

On dit qu'une famille  $(u_i)$  d'applications est *équilipschitzienne* s'il existe une constante  $K$  telle que  $u_i$  soit  $K$ -lipschitzienne pour tout  $i$ .

Une famille équilipschitzienne d'applications linéaires continues de  $(E, \|\cdot\|)$  vers  $(F, \|\cdot\|)$  est simplement une famille bornée de  $\mathcal{L}_c(E, F)$ .

**Proposition 62**

Soient  $(u_n)$  une suite de  $\mathcal{L}_c(E, F)$ ,  $u$  un élément de  $\mathcal{L}_c(E, F)$  et  $D$  une partie dense de  $E$ .

Si la suite  $(u_n)$  est équilipschitzienne et si la suite  $(u_n(x))$  converge vers  $u(x)$  pour tout  $x$  de  $D$ , alors  $(u_n(x))$  converge vers  $u(x)$  pour tout  $x$ .

**Démonstration** On a :

$$\begin{aligned} \|u_n(x) - u(x)\| &\leq \|u_n(x) - u_n(d)\| + \|u_n(d) - u(d)\| + \|u(d) - u(x)\| \\ &\leq 2K\|x - d\| + \|u_n(d) - u(d)\| \end{aligned}$$

pour tout entier  $n$  et tout élément  $d$  de  $D$ .

Soient  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ .

► Par densité de  $D$  dans  $E$ , il existe  $d \in D$  tel que  $\|x - d\| \leq \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$ .

► Puisque  $(u_n(d))$  converge vers  $u(d)$ , il existe un entier  $N$  tel que :

$$\|u_n(d) - u(d)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$$

pour tout  $n \geq N$ .

Il existe donc un entier  $N$  tel que  $\|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . □

**Corollaire 63 (Théorème de Cesàro)**

Si  $(x_n)$  est une suite de  $(E, \| \cdot \|)$  convergeant vers  $\ell$ , alors la suite des moyennes de Cesàro :

$$\left(\frac{1}{n+1}(x_0 + \dots + x_n)\right)$$

converge vers  $\ell$ .

**Démonstration** Soit  $\mathcal{C}(E)$  l'espace vectoriel des suites convergentes de  $(E, \| \cdot \|)$  muni de la norme  $N_\infty$  de la convergence uniforme. On note  $u$  et, pour tout entier  $n$ , les applications  $U_1$  de  $\mathcal{C}(E)$  vers  $E$  définies par :

$$u(x) = \lim x \quad \text{et} \quad u_n(x) = \frac{1}{n+1}(x_0 + \dots + x_n).$$

Il est immédiat que ces applications sont linéaires 1-lipschitziennes.

Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{S}(E)$  des suites stationnaires est dense dans  $\mathcal{C}(E)$ . Si  $s$  est un élément de  $\mathcal{S}$  constante de valeur  $\ell$  à partir de  $n_0 + 1$ , la relation :

$$u_n(s) = \frac{1}{n+1}(s_0 + \dots + s_{n_0}) + \frac{n - n_0}{n+1}\ell$$

montre que  $(u_n(s))$  converge vers  $u(s)$ . Le théorème précédent montre alors que pour toute suite  $x$  d'éléments de  $E$  convergeant vers  $\ell$ , la suite :

$$\left(\frac{1}{n+1}(x_0 + \dots + x_n)\right)$$

des moyennes de Cesàro de  $x$  converge aussi vers  $\ell$ . □

## EXERCICES

- 1 Soit  $E$  un espace normé de dimension finie.
  1. Montrer que la distance d'un point  $x$  de  $E$  à un fermé  $F$  non vide de  $E$  est atteinte.
  2. Montrer que la distance d'un fermé  $F$  à un compact  $K$  de  $E$  est atteinte. La distance d'un fermé à un autre fermé est-elle atteinte ?
  3. *Application.* Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'étant donné un point  $m \in \mathbb{R}^2$ , la distance de  $m$  (pour la distance euclidienne) au graphe  $\Gamma$  de  $f$  est atteinte.
  
2. Dans un espace vectoriel normé  $E$ , soient  $A$  une partie fermée,  $B$  une partie compacte.
  1. Montrer que  $A + B = \{x + y / x \in A, y \in B\}$  est fermé.
  2. SI l'on suppose  $B$  seulement fermé, est-il vrai que  $A + B$  soit fermé ?
  
3. Soit  $E$  un espace normé,  $K$  une partie compacte ne contenant pas  $O$ .
  1. Montrer que l'ensemble  $F = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \in K\}$  est une partie fermée de  $E$ .
  2. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement  $K$  fermé (resp. compact contenant  $O$ ) ?

### 4. Théorème de Baire

Soit  $E$  une partie complète d'un espace normé.

1. Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts  $U_n$ , denses est dense. On pourra, partant de  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ , considérer une suite strictement décroissante convenable de boules *fermées* contenues successivement dans  $B(x, \varepsilon) \cap \left( \bigcap_{i=0}^n U_i \right)$ . L'intersection  $\bigcap_n U_n$  est-elle ouverte ?
  2. Montrer qu'une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
- 
5. 1. Montrer, à l'aide de l'exercice 4, que  $\mathbb{Q}$  n'est pas intersection dénombrable d'ouverts  $U_n$  de  $\mathbb{R}$ .  
 Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle *oscillation de  $f$  en  $x$* , et on note  $\text{osc}_x f$  la borne inférieure des diamètres des  $f(\cdot | x - r, x + r |)$  quand  $r$  décrit  $\mathbb{R}^{*+}$
  2. En considérant les parties  $F_n = \{x / \text{osc}_x f \geq 1/n\}$ , montrer que l'ensemble des points de continuité de  $f$  est intersection dénombrable d'ouverts

3. Existe-t-il une fonction  $f$  continue en tout point de  $\mathbb{Q}$  et discontinue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ?
4. Soit  $f$  la fonction nulle sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , et qui vaut  $1/q$  au point rationnel  $p/q$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p$  et  $q$  premiers entre eux). Montrer que l'ensemble de ses points de continuité est exactement  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

## 6. Lemme de Croft

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = 0.$$

1. On suppose que  $f$  est uniformément continue. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
  2. On suppose seulement que  $f$  est continue. En appliquant l'exercice 4 aux  $F_n(\varepsilon) = \{x / \forall p \geq n, |f(px)| \leq \varepsilon\}$ , montrer que la conclusion de la première question demeure.
7. 1. On choisit une norme sur  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $K$  une partie compacte, non vide, non réduite à un point de  $\mathbb{R}^p$ . Prouver qu'il existe une boule fermée contenant  $K$  dont le rayon est le plus petit des rayons des boules fermées contenant  $K$ . Cette boule est-elle unique ?
2. On munit  $\mathbb{R}^p$  de sa norme euclidienne canonique. Montrer que la boule trouvée en 1. est unique.
3. On se place désormais dans  $\mathbb{R}^2$  muni de sa structure euclidienne canonique, et on suppose, quitte à faire une translation, que la boule fermée (qui est un disque fermé) de rayon minimum contenant  $K$  est  $B_f(O, r)$ , où  $O = (0, 0)$ . Soit  $\delta$  le diamètre du compact  $K$ . On a vu dans le cours que  $\delta \leq 2r$ .
- Soit  $u$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^2$ . En utilisant les points  $O + \frac{u}{n}$ ,  $n \geq 1$ , montrer qu'il existe  $x \in K$  vérifiant  $\|x\| = r$ , et  $(u | x) \leq 0$ .
- En déduire que  $\delta \geq r\sqrt{3}$ . L'encadrement de  $\delta$  ainsi obtenu est-il optimal ?
8. Soit  $A$  une partie d'un espace normé  $E$ ,  $B$  une partie d'un espace normé  $F$ , et  $f$  une application de  $A$  dans  $B$ .
1. Soit  $a \in \overline{A}$ , et  $\ell \in B$ . Montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \ell$  si, et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $A$  convergeant vers  $a$ , il existe une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})_n$  de  $(x_n)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = \ell$ .
  2. On dit que  $f$  est *propre* lorsque  $f$  est continue, et l'image réciproque par  $f$  de tout compact de  $B$  est un compact de  $A$ .  
On suppose ici que  $f : A \rightarrow B$  est propre et surjective. Montrer que, pour toute application  $h$  de  $B$  dans une partie  $C$  d'espace normé,  $h$  est continue si et seulement  $h \circ f$  est continue.

3. En déduire que tout bijection propre entre parties d'espaces normés est un homeomorphisme.

9. On note  $\sigma$  l'application de  $\mathbb{C}^p$  dans lui-même définie, pour

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p,$$

par :

$$\begin{aligned} \sigma(Z) &= \sigma(z_1, z_2, \dots, z_p) = (\sigma_1(Z), \dots, \sigma_p(Z)) \\ &= \left( \sum_i z_i, \sum_{i < j} z_i z_j, \dots, z_1 z_2 \dots z_p \right) \end{aligned}$$

qui associe à  $(z_1, \dots, z_p)$  la suite de ses fonction symétriques élémentaires rangées par degré croissant.

1. Montrer que  $\sigma$  est surjective et propre. On pourra établir que toute racine complexe  $z$  du polynôme  $X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$  vérifie :

$$|z| \leq \max(1, |a_{p-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|).$$

2. Soit  $H$  une application continue de  $\mathbb{C}^p$  dans  $\mathbb{C}$  telle que, pour toute permutation  $\omega$  de  $[[1, n]]$  dans lui-même, et tout  $(z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ , on ait  $H(z_{\omega(1)}, z_{\omega(2)}, \dots, z_{\omega(p)}) = H(z_1, z_2, \dots, z_p)$ . Montrer qu'il existe une unique application  $h$  de  $\mathbb{C}^p$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $h \circ \sigma = H$ , et que  $h$  est continue.

10. 1. Montrer, à l'aide de l'exercice 9 que l'ensemble des matrices  $M \in M_p(\mathbb{C})$  dont le spectre (ensemble des valeurs propres) est contenu dans un fermé  $F$  donné de  $\mathbb{C}$  est fermé.

2. En déduire l'adhérence  $C$  de l'ensemble des matrices  $M \in M_p(\mathbb{C})$  unipotentes, c'est-à-dire telles qu'il existe  $n$  (dépendant de  $M$ ) tel que  $M^n = \text{Id}_p$ .

11. 1. Montrer que l'espace des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle compact  $I = [a, b]$  de  $\mathbb{R}$  n'est pas complet pour la semi-norme  $f \mapsto \int_a^b |f| = N(f)$ .

2. Même question pour le même espace vectoriel muni de la semi-norme  $f \mapsto \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = N_\infty(f)$ .

12. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $K$  une partie non vide, compacte et convexe, de  $E$ .
1. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u(K) \subset K$ . On pose, pour  $n \geq 1$ ,  

$$u^{(n)} = \frac{1}{n}(\text{Id}_E + \dots + u^{n-1}).$$
Montrer que  $\bigcap_n u^{(n)}(K) \neq \emptyset$ .  
Montrer que si  $x \in \bigcap_n u^{(n)}(K)$ , alors  $u(x) = x$ .
  2. Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes de  $E$  qui commutent deux à deux, et telle que, pour tout  $i$ ,  $u_i(K) \subset K$ . Montrer qu'il existe  $x \in K$  tel que, pour tout  $i$ ,  $u_i(x) = x$ .
13. 1. Montrer que  $O(n)$  est compact.  
2. Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})$  est homéomorphe au produit  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2} \times O(n)$ . On pourra considérer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
14. 1. Montrer que  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.  
2. Montrer que  $O^+(n)$  est connexe par arcs.
15. Soit  $(K, d)$  une partie compacte d'espace vectoriel normé, de distance  $d$ , et  $f$  une application de  $K$  dans  $K$  telle que :

$$\forall x, y \in K, \quad x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. En considérant  $d(x, f(x))$ , montrer que  $f$  a un unique point fixe  $\alpha$
  2. On prend  $x_0 \in K$ , et on définit la suite  $(x_n)$  par récurrence par  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Montrer qu'elle converge vers  $\alpha$ .
  3. Montrer que la convergence est uniforme.
16. Soit  $f$  une application d'une partie compacte  $K$  d'un espace normé dans elle-même telle que : pour tous

$$\forall x, y \in K, \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y).$$

Montrer que  $f$  est une isométrie bijective de  $K$  sur  $K$ .

Pour cela, partant de  $x$  et  $y \in K$ , on considèrera les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies par récurrence par :

$$\begin{aligned} x_0 &= x, & y_0 &= y, \\ x_{n+1} &= f(x_n), & y_{n+1} &= f(y_n). \end{aligned}$$

On montrera qu'il existe une suite  $(\varphi(n))_n$  strictement croissante d'indices telle que  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$  et  $y_{\varphi(n)} \rightarrow y$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On en déduira que  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ .



**17. Lemme de Caratheodory**

Dans un espace affine réel  $E$ , l'enveloppe convexe d'une partie  $\mathcal{A}$  est l'intersection des convexes contenant  $\mathcal{A}$ .

1. Montrer que c'est aussi le plus petit d'entre eux pour l'inclusion, et l'ensemble des barycentres à masses positives de points de  $\mathcal{A}$ .
2. Montrer que, dans un espace affine réel  $E$  de dimension  $n$ , tout point  $M$  de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{A} \subset E$  est barycentre à masses positives d'au plus  $n + 1$  éléments de  $\mathcal{A}$ .

On pourra commencer par montrer que, pour une famille  $(A_0, \dots, A_p)$ ,  $p > n$ , de points de  $E$ , il existe  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  non tous nuls, de somme nulle, tels que, pour tout  $O \in E$ ,  $\sum_{i=0}^p \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = 0$ .

3. En déduire que, dans un espace affine de dimension finie l'enveloppe convexe d'un compact est aussi compacte.

**18.** Soient  $E = \ell^2$  l'espace de HILBERT des suites de réels de carré sommable, et  $e_n$  est la suite de termes nuls sauf celui d'indice  $n$  égal à 1.

1. Montrer que l'ensemble  $A = \left\{ \frac{1}{n} e_n / n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$  est compact.
2. En considérant le vecteur  $v = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} e_n$ , dont on établira l'existence montrer que l'enveloppe convexe (voir l'exercice 17) de  $A$  n'est pas compacte.

**19.** Soit  $t \mapsto p(t)$  une application continue de  $[0, 1]$  dans l'ensemble des projecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Montrer que le rang de  $p(t)$  est indépendant de  $t$ . On le note  $r$ , et  $\mathcal{P}_r$  l'ensemble des projecteurs de rang  $r$  de  $\mathbb{R}^n$ .  
On se propose de montrer qu'il existe une application continue de  $[0, 1]$  dans l'ensemble  $\mathcal{E}_r$  des familles libres de  $r$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  qui associe à tout  $t$  une base  $(W_1(t), W_2(t), \dots, W_r(t))$  de  $\text{Im}(p(t))$ .
2. En considérant les matrices de projecteurs, montrer que, pour tout projecteur  $p_0$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un ouvert  $U(p_0)$  de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  et une application continue  $\varphi_{p_0}$  de  $U(p_0) \cap \mathcal{P}_r$  dans  $\mathcal{E}_r$  qui associe à tout projecteur  $p \in U(p_0) \cap \mathcal{P}_r$  une base de  $\text{Im}(p)$ .
3. Montrer qu'il existe un partage  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{i-1} \leq t_i \leq \dots \leq t_q = 1$ , et, pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , une application continue  $V_i$  de  $[t_{i-1}, t_i]$  dans  $\mathcal{E}_r$  telle que, pour tout  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $V_i(t)$  soit une base de  $\text{Im}(p(t))$ .
4. Conclure.

20. Soit  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  l'ensemble des endomorphismes  $f$  de  $\mathbf{K}^n$  tels que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

1. L'application  $\theta$  qui associe à  $f \in E$  le projecteur de  $\mathbf{K}^n$  sur  $\text{Im } f$  parallèlement à  $\text{Ker } f$  est-elle continue ?
2. La restriction  $\theta_r$  de  $\theta$  à l'ensemble  $E_r$  des  $f \in E$  de rang  $r$  fixé est-elle continue ? On pourra montrer que si  $Q$  décrit l'ensemble des polynômes normalisés de degré  $n - r$  fixé et de coefficient constant non nul, il existe un choix de  $B$  tel que  $Q(X)B(X) - 1$  soit multiple de  $X^n$  dont les coefficients dépendent continûment de ceux de  $Q$ .
3. En déduire que si  $\mathcal{P}_r$  est l'ensemble des projecteurs de rang  $r$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'application qui associe à  $p$  le projecteur orthogonal sur l'image de  $p$  est continue.

## 21. Jauge d'un espace vectoriel réel

Une partie  $K$  de l'espace vectoriel réel  $E$  est dite *symétrique* lorsque  $x \in K \implies -x \in K$ , et *absorbante* lorsque, pour tout  $x \in E$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$  tel que  $\frac{1}{\lambda}x = \frac{x}{\lambda} \in K$ .

1. Montrer que si  $N$  est une semi-norme sur  $E$ , la boule unité fermée et la boule unité ouverte sont convexes, symétriques et absorbantes.
  2. Réciproquement, soit  $E$  un espace vectoriel réel, et  $K$  une partie non vide, convexe, symétrique et absorbante de  $E$ . Montrer que l'application  $x \mapsto J(x) = \inf\{\lambda > 0 / x \in \lambda K\}$  est une semi-norme sur  $E$ , et que  $K$  contient la boule unité ouverte, et est contenue dans la boule unité fermée de  $E$  pour cette norme  $J$ . On dit que  $J$  est la *jauge* associée à la partie  $K$ .
  3. Un pentagone convexe plein peut-il être une boule unité pour une norme de  $\mathbb{R}^2$  ? Dans le cas d'un hexagone régulier de  $\mathbb{R}^2$ , donner une expression simple de la jauge correspondante à l'aide de fonctions affines.
22. 1. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une famille libre de  $E$  espace vectoriel normé complet. On pose  $V_n = \text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$ , et on considère une suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de réels telle que :

$$\forall n \geq 1, \quad \|\mu_{n+2}a_{n+2}\| \leq \frac{1}{3} d(\mu_{n+1}a_{n+1}, V_n).$$

Étudier l'existence d'une telle suite, puis la convergence de la série  $\sum \mu_n a_n$ . Montrer que la somme  $s$  de la série n'appartient pas à la réunion des  $V_n$ .

2. En déduire qu'un espace vectoriel réel de dimension infinie dénombrable n'est complet pour aucune norme.
3. Retrouver ce dernier résultat à l'aide du théorème de BAIRE de l'exercice 4.

- 23.** 1. Soit  $E$  un espace de Banach. Montrer que l'algèbre  $\mathcal{L}_c(E)$  des endomorphismes continus de  $E$  munie de la norme d'opérateur est une algèbre de Banach.
2. Soient  $a$  et  $b$  deux reels, avec  $|a| < 1$ . On considère l'espace  $E$  des applications continues et bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme :  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ . On rappelle que  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  est complet.

À  $f \in E$  on associe  $T(f)$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(x) - af(bx).$$

Montrer que  $T$  est un homéomorphisme de  $E$ .

- 24** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  Pour  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in E$ , on pose  $\|P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ .
1. Vérifier que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ .
  2. Montrer que  $E$  n'est pas complet en exhibant une suite de Cauchy non convergente dans  $E$ .
  3. Montrer que, pour tout  $n_0$ , l'application  $P \mapsto a_{n_0}$  est linéaire continue. Quelle est sa norme ?
  4. L'application  $P \mapsto P'$  est-elle continue pour la norme  $\|\cdot\|$  ?
  5. On définit sur  $E$  la relation  $P = \sum_n a_n X^n \leq Q = \sum_n b_n X^n$  si, et seulement si, pour tout  $n$ ,  $a_n \leq b_n$ . Vérifier qu'il s'agit d'un ordre, et qu'alors le segment  $[A, B]$  est un compact de  $E$ .



# Chapitre 12

## Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre,  $E$  est un espace vectoriel normé,  $A$  une partie non vide de  $E$ , et  $F$  un espace de Banach sur  $\mathbf{K}$  où  $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1. Suites de fonctions

Dans toute cette section,  $(f_n)$  et  $f$  désignent respectivement une suite de fonctions et une fonction de  $A$  dans  $F$ .

#### 1.1 Différents modes de convergence

##### Convergence simple

###### Définition 1

La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $A$  vers  $f$ , si pour tout élément  $x$  de  $A$ , la suite  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$ .

On dit alors que  $f$  est limite simple sur  $A$  de la suite de fonctions  $(f_n)$ .

**Remarque** Il est clair que  $f$  est unique puisque pour tout  $x \in A$ , la suite  $(f_n(x))$  a une limite unique.

##### Exemples

1. La suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = x^n$  converge simplement vers la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, 1[ \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

On remarquera que toutes les fonctions  $f_n$  sont de classe  $C^\infty$  alors que  $f$  n'est pas continue.

2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) = \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

converge simplement vers la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

On remarquera que toutes les fonctions  $f_n$  sont bornées et continues alors que  $f$  ne l'est pas.

### Remarques

1. On dit que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $A$  s'il existe une fonction  $f$  telle que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $A$ . On montre alors facilement que cette fonction  $f$  est unique.
2. Si  $X$  est une partie de  $A$ , on dit que la suite converge simplement sur  $X$  si la suite constituée des restrictions des fonctions à  $X$  converge simplement.
3. La partie  $A$  étant fixée, on pourrait dire en toute rigueur « la suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  », mais la précision sur  $A$  est en réalité indispensable pour éviter toute confusion, car on considérera de nombreuses fois des restrictions.

## Convergence uniforme

### Définition 2

La suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $A$  vers  $f$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

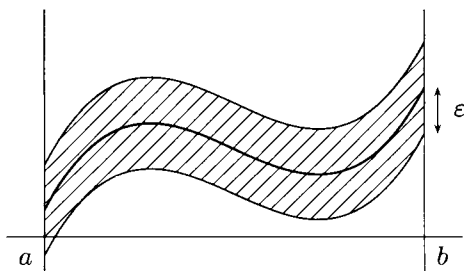
On dit alors que  $f$  est limite uniforme sur  $A$  de la suite de fonctions  $(f_n)$ .

### Remarques

1. En notant  $\mu_n = \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \in \overline{\mathbb{R}}$ , la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  vers  $f$  est équivalente à la convergence de la suite  $(\mu_n)$  vers 0 (si la suite converge uniformément, les  $\mu_n$  sont réels à partir d'un certain rang). Pour montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , il suffit donc de trouver une suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels convergeant vers 0 telle que pour tout  $x \in A$ , on ait pour  $n \geq n_0$  :  $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon_n$ .

Pour montrer que la suite ne converge pas uniformément vers  $f$ , il suffit de trouver une suite de points  $(x_n)$  de  $A$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))$  ne tende pas vers 0 puisque l'on a  $\mu_n \geq \|f_n(x_n) - f(x_n)\|$ .

2. On dit que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $A$ , s'il existe une fonction  $f$  telle que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ .
3. Si  $X$  est une partie de  $A$ , la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  si la suite des restrictions des fonctions à  $X$  converge uniformément sur  $X$ .
4. On a clairement que si la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , alors elle converge uniformément vers  $f$  sur toute partie de  $A$ .
5. Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $F = \mathbb{R}$ , on peut associer à chaque fonction  $f_n$  le tracé de son graphe dans la plan  $xOy$ . La convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  vers  $f$  signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N$  à partir duquel, le graphe de  $f_n$  est contenu dans la partie du plan  $xOy$  définie par  $x \in A$  et  $y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$ .



L'écriture formelle de la convergence simple de la suite  $(f_n)$  vers  $f$  est :

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon,$$

alors que celle de la convergence uniforme est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies (\forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon).$$

On a alors clairement le résultat qui suit :

**Proposition 1**

Si la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , alors elle converge simplement vers  $f$ .

**Méthode** Pour rechercher une éventuelle limite uniforme, on pourra donc d'abord étudier l'existence d'une limite simple et si la convergence simple est vérifiée, la limite simple est alors la seule application candidate à être la limite uniforme.

## Exemples

1. Dans le premier exemple du paragraphe précédent, la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$ , en effet  $\mu_n = \sup_{x \in [0,1]} |x^n - f(x)| = 1$  ne converge pas vers 0. On en déduit que cette suite ne converge pas uniformément, puisque sa limite uniforme ne pourrait être que sa limite simple.
2. Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Quelle que soit la valeur de  $\alpha$ , la suite converge simplement vers la fonction nulle. Ici  $\mu_n = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, +\infty[} |n^\alpha x e^{-nx}|$ . En étudiant les variations de la fonction  $f_n$ , on trouve que la borne supérieure est atteinte en  $\frac{1}{n}$  et vaut  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ . On en déduit donc que si  $\alpha < 1$ , il y a convergence uniforme vers 0, sinon il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Soit  $\rho > 0$ . La suite  $f_n = \frac{nx}{1+n\|x\|}$  converge uniformément sur  $A = \{x \in E \mid \|x\| \geq \rho\}$  vers la fonction  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ .

En effet, pour tout  $x \in A$ , on a :

$$\left\| \frac{nx}{1+n\|x\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{1+n\|x\|} \leq \frac{1}{1+n\rho}.$$

## Proposition 2

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites de fonctions définies sur  $A$  convergeant uniformément respectivement vers  $f$  et  $g$ , ainsi que  $\lambda$  et  $\mu$  deux éléments de  $\mathbb{K}$ . Alors la suite  $(\lambda f_n + \mu g_n)$  converge uniformément vers  $\lambda f + \mu g$ .

**Démonstration** Notons  $\mu_n = \sup_{x \in A} \|f(x) - f_n(x)\|$  et  $\nu_n = \sup_{x \in A} \|g(x) - g_n(x)\|$  ( $\mu_n$  et  $\nu_n$  sont réels à partir d'un certain rang), alors :

$$\rho_n = \sup_{x \in A} \left\| \lambda f_n(x) + \mu g_n(x) - (\lambda f(x) + \mu g(x)) \right\| \leq |\lambda| \mu_n + |\mu| \nu_n,$$

ce qui montre que la suite  $(\rho_n)$  tend vers 0. □

**Remarque** La proposition précédente est clairement valable en termes de convergence simple.



### Convergence uniforme sur tout compact

Les fonctions continues étant bornées sur une partie compacte, il est souvent intéressant d'étudier la convergence uniforme sur de telles parties. On peut alors utiliser la notion de convergence uniforme sur tout compact définie de la manière suivante :

On dit que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact vers  $f$ , si quelle que soit la partie  $X$  compacte de  $A$ , la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers  $f$ , c'est-à-dire la suite  $(f_n|_X)$  converge uniformément vers  $f|_X$ .

#### Remarques

1. Si la suite converge uniformément sur  $A$ , elle converge également uniformément sur tout compact de  $A$ , mais la réciproque est fautive, comme le montre la suite définie par  $f_n(x) = x^n$  sur  $A = [0, 1[$  qui converge uniformément sur tout compact de  $A$ , mais non uniformément sur  $A$  vers la fonction nulle.
2. Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  on montre facilement qu'une suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de  $A$  si, et seulement si, cette suite converge uniformément sur tout segment inclus dans  $A$ .

**Exemple** Dans l'exemple 2. du paragraphe précédent, si  $\alpha \geq 1$ , il n'y a pas convergence uniforme sur tout compact inclus dans  $\mathbb{R}_+$  : en effet, il n'y a pas convergence uniforme sur  $[0, 1]$ . Par contre, la suite converge uniformément sur tout compact  $X$  inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ . En effet, soit  $[a, b]$  un segment contenant  $X$  et inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ , c'est à dire avec  $a > 0$ , pour tout  $n$  tel que  $n \geq \frac{1}{a}$ , on a  $\mu_n = f_n(a)$  qui converge vers 0.

### Critère de Cauchy uniforme

#### Définition 3

On dit que la suite  $(f_n)$  est *uniformément de Cauchy* sur  $A$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, (n \geq N \text{ et } m \geq N) \implies \forall x \in A, \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon.$$

**Remarque** On peut aussi énoncer cette propriété sous la forme : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N \implies \forall x \in A, \|f_n(x) - f_{n+p}(x)\| \leq \varepsilon.$$

**Théorème 3**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonction de  $A$  dans  $F$  où  $F$  est un Banach. La suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $A$  si, et seulement si, elle est uniformément de Cauchy sur  $A$ .

**Démonstration**

► Supposons que la suite converge uniformément vers  $f$ . Soit  $\varepsilon > 0$  ; il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, si  $p$  et  $q$  sont deux entiers vérifiant  $p \geq N$  et  $q \geq N$ , on a

$$\forall x \in A, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

► Supposons que la suite soit uniformément de Cauchy. Montrons qu'elle converge simplement. Soit  $x \in A$ , la suite  $(f_n(x))$  est de Cauchy dans  $F$  qui est complet, donc converge vers un élément noté  $f(x)$ . Montrons à présent que la convergence de la suite vers la fonction  $f$  est uniforme. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $x \in A$  et tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ .

$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon.$$

Soit  $p \geq N$ , on a donc :

$$\forall x \in A, q \geq N \implies \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon,$$

ce qui donne, en faisant tendre  $q$  vers l'infini :

$$\forall x \in A, \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon,$$

et montre la convergence uniforme de la suite. □

**1.2 Espace des applications bornées sur  $A$**

Nous noterons  $\mathcal{B}(A, F)$  l'espace vectoriel des applications bornées sur  $A$  à valeurs dans  $F$ , muni de la norme  $N_\infty$ .

**Proposition 4**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{B}(A, F)$ . La suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $A$  si, et seulement si, elle converge dans  $\mathcal{B}(A, F)$  muni de la norme  $N_\infty$ .

**Démonstration**

► Si la suite converge dans  $\mathcal{B}(A, F)$  vers une fonction  $f$ , alors

$$\mu_n = \sup_{x \in A} \|f(x) - f_n(x)\| = N_\infty(f - f_n)$$

converge vers 0 ce qui montre que la suite converge uniformément vers  $f$

► Réciproquement, si la suite converge uniformément vers une fonction  $f$  définie sur  $A$ , alors :

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \sup_{x \in A} \|f(x) - f_n(x)\| \leq 1$$

et :

$$\forall x \in A, \|f(x)\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x)\| \leq 1 + N_\infty(f_N),$$

ce qui montre que  $f$  est dans  $\mathcal{B}(A, F)$  puis, étant donné que

$$\sup_{x \in A} \|f(x) - f_n(x)\| = N_\infty(f - f_n),$$

que la suite converge vers  $f$  dans  $\mathcal{B}(A, F)$  muni de  $N_\infty$ . □

**Remarques**

1. En raison de la proposition précédente, la norme  $N_\infty$  est appelée norme de la convergence uniforme.
2. Au cours de la démonstration précédente, nous avons montré que si  $(f_n)$  est une suite de fonctions bornées convergeant uniformément vers une fonction  $f$ , alors  $f$  est bornée.

**Proposition 5**

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'applications de  $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$  convergeant uniformément respectivement vers  $f$  et  $g$  sur  $A$ , alors la suite  $(f_n g_n)$  converge uniformément vers  $fg$  sur  $A$ .

**Démonstration** En remarquant que

$$f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + g(f_n - f) - f(g - g_n),$$

on peut écrire :

$$N_\infty(f_n g_n - fg) \leq N_\infty(f_n - f) N_\infty(g_n - g) + N_\infty(g) N_\infty(f_n - f) + N_\infty(f) N_\infty(g_n - g)$$

ce qui montre que  $N_\infty(f_n g_n - fg)$  tend vers 0. □

**Remarques**

1. La propriété précédente est fausse si les suites ne sont pas dans  $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ , comme le montre l'exemple qui suit. Les deux suites de fonctions sont définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{1}{n}$  et par  $g_n(x) = g(x) = x$ . La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle, la suite  $(g_n)$  qui est une suite constante converge uniformément vers la fonction  $g$ , mais la suite  $(f_n g_n) = (f_n g)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle puisque  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) g_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{x}{n} = +\infty$ .

2. Mais, il faut remarquer que si la suite  $(f_n)$  est une suite de fonctions non nécessairement bornées qui converge uniformément vers  $f$  et si  $\varphi$  est une fonction bornée, la suite  $(\varphi f_n)$  converge uniformément vers  $\varphi f$ .

### Théorème 6

L'espace  $\mathcal{B}(A, F)$  muni de la norme  $N_\infty$  est complet.

**Démonstration** Il suffit de remarquer qu'une suite de fonctions de  $\mathcal{B}(A, F)$  est uniformément de Cauchy si, et seulement si, est de Cauchy pour la norme  $N_\infty$ .  $\square$

## 1.3 Conservation des propriétés par convergence uniforme

### Convergence uniforme et continuité

#### Théorème 7

Soit  $a$  un point de  $A$ . Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue en  $a$
- la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ ,

alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ , d'après la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  vers  $f$ , on a :

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \forall x \in A, \|f(x) - f_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

La fonction  $f_N$  étant continue en  $a$  :

$$\exists \eta > 0 : (x \in A \text{ et } \|x - a\| \leq \eta) \implies \|f_N(x) - f_N(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit  $x \in A$  tel que  $\|x - a\| \leq \eta$ , on a :

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \|f_N(a) - f(a)\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

#### Corollaire 8

Si :

- pour tout  $n$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $A$ ,
- la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$

alors  $f$  est continue sur  $A$ .

**Remarque** L'exemple de la suite de fonctions continues  $(f_n = x^n)$  qui converge simplement mais non uniformément sur  $[0, 1[$  vers la fonction nulle qui est continue, montre que la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues est une condition suffisante mais non nécessaire pour que la limite soit continue.

**Théorème 9**

Si :

- pour tout  $n$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $A$
- la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact de  $A$  vers  $f$ ,

alors  $f$  est continue sur  $A$ .

**Démonstration** Soit  $a \in A$  et  $(x_m)$  n'importe quelle suite de points de  $A$  convergeant vers  $a$ . L'ensemble  $X = \{x_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$  est un compact inclus dans  $A$  (voir 22 page 397) La suite  $(f_n)$  convergeant uniformément sur ce compact,  $f$  est continue sur  $X$ , la suite  $(f(x_n))$  converge donc vers  $f(a)$ , et  $f$  est continue en  $a$  □

**Proposition 10**

Soit  $A$  une partie compacte de  $E$ , alors l'espace  $\mathcal{C}(A, F)$  des applications continues de  $A$  dans  $F$  est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace  $(\mathcal{B}(A, F), N_\infty)$ .

**Démonstration** La partie  $A$  étant compacte, toute fonction continue sur  $A$  est bornée et est donc bien un élément de  $\mathcal{B}(A, F)$ . On vérifie également aisément que  $\mathcal{C}(A, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}(A, F)$  Le corollaire précédent assure de plus que toute limite pour la norme  $N_\infty$  d'une suite d'éléments de  $\mathcal{C}(A, F)$  est bien dans  $\mathcal{C}(A, F)$ . □

**Corollaire 11**

Si  $A$  est une partie compacte de  $E$ , alors l'espace  $\mathcal{C}(A, F)$  muni de la norme  $N_\infty$  est complet.

**Démonstration** Il s'agit d'un sous-espace vectoriel fermé dans un espace complet □

**Convergence uniforme et limite**

**Théorème 12**

Soit  $a$  un point adhérent à  $A$ . Si :

- pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  admet une limite  $\ell_n \in F$  en  $a$ ,
- la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $A$  vers  $f$ ,

alors la suite  $(\ell_n)$  admet une limite  $\ell \in F$  et la fonction  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$ .

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ , la suite  $(f_n)$  convergeant uniformément, elle est uniformément de Cauchy, donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  et tout  $x \in A$  :

$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon.$$

En fixant  $p \geq N$  et  $q \geq N$  et en faisant tendre  $x$  vers  $a$ , on obtient  $\|\ell_p - \ell_q\| \leq \varepsilon$ , ce qui montre que la suite  $(\ell_n)$  est de Cauchy dans  $F$  complet et admet donc dans cet espace une limite  $\ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que l'on ait  $|\ell_N - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  et pour tout  $x \in A$ .

$|f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . D'autre part, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in A \cap \mathcal{D}(a, \eta)$ , on ait :  $|f_N(x) - \ell_N| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Finalement pour tout  $x \in A \cap \mathcal{D}(a, \eta)$ , on a :

$$|f(x) - \ell| \leq |f_N(x) - \ell_N| + |f_N(x) - \ell_N| + |\ell_N - \ell| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Exemple** La suite de fonctions  $(f_n)$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$  converge simplement vers la fonction nulle, mais la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}_+^*$  puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 1$ .

**Remarque** Le résultat précédent est en particulier vrai dans le cas où  $A \subset \mathbb{R}$  et  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ .

## 1.4 Le théorème de Dini (Hors programme)

### Théorème 13

Soit  $A$  une partie compacte de  $E$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $A$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , qui converge simplement vers une fonction  $f$ .  
Si la suite  $(f_n)$  est croissante, c'est-à-dire :

$$p \leq q \implies f_p \leq f_q$$

et si  $f$  est continue, alors la convergence est uniforme sur  $A$

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'ouvert :

$$U_n = \{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Comme la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ , on a :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

La partie  $A$  étant compacte, il existe une partie  $N$  finie de  $\mathbb{N}$  telle que :

$$\bigcup_{n \in N} U_n.$$

Soit  $n_0 = \max N$ , on a  $n \leq n_0 \implies U_n \subset U_{n_0}$ ,

Finalement  $A = U_{n_0}$  et

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in A, f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x)$$

ce qui montre la convergence uniforme de la suite. □

## 2. Espaces de fonctions classiques

Dans cette section, nous allons étudier différents espaces de fonctions et leurs adhérences relativement à la norme de la convergence uniforme. Rappelons que si  $\mathcal{X}$  est une partie d'un espace de fonctions  $\mathcal{F}$  muni de la convergence uniforme, la densité de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{F}$  peut se traduire par l'une des trois propriétés suivantes :

- l'adhérence de  $\mathcal{X}$  dans  $(\mathcal{F}, N_\infty)$  est égale à  $\mathcal{F}$ ,
- pour tout  $f \in \mathcal{F}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g \in \mathcal{X}$  tel que  $N_\infty(f - g) \leq \varepsilon$ ,
- tout  $f \in \mathcal{F}$  est limite uniforme d'une suite d'éléments de  $\mathcal{X}$ .

### 2.1 Les fonctions continues par morceaux

#### Définition 4

Une application  $f : [a, b] \rightarrow F$  est *continue par morceaux* sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que la restriction de  $f$  à chacun des intervalles  $]a_{i-1}, a_i[$  se prolonge en une fonction continue sur  $[a_{i-1}, a_i]$ . Une telle subdivision est dite *adaptée* à  $f$ .

#### Remarques

1. Comme dans le cas déjà vu en première année des applications de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , on vérifie qu'une application  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  en mettant en évidence une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que :
  - pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f$  est continue en tout point de  $]a_{i-1}, a_i[$ .
  - pour tout  $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $f$  a une limite à droite en  $a_i$
  - pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f$  a une limite à gauche en  $a_i$ .
2. Une fonction continue est évidemment continue par morceaux.
3. Une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est bornée sur  $[a, b]$ , puisque sa restriction à chacun des intervalles  $]a_{i-1}, a_i[$  d'une subdivision adaptée est prolongeable en une fonction continue sur le segment  $[a_{i-1}, a_i]$ , donc est bornée. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tels intervalles et de points  $a_i$ , la fonction est bornée sur  $[a, b]$ .

#### Proposition 14

L'ensemble  $\mathcal{CM}([a, b], F)$  des fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$  et à valeurs dans  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Démonstration** Il est évident qu'une combinaison linéaire de deux fonctions continues par morceaux est continue par morceaux, en considérant une subdivision adaptée à chacune des deux fonctions. Comme la fonction nulle est continue par morceaux,  $\mathcal{CM}([a, b], F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}([a, b], F)$ .  $\square$

### Définition 5

Une fonction  $\varphi$  est *en escalier* sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $(a_i)$  de  $[a, b]$  telle que les restrictions de  $\varphi$  à chacun des intervalles  $]a_{i-1}, a_i[$  soient constantes. Une telle subdivision est dite *adaptée* à la fonction en escalier  $\varphi$ .

### Proposition 15

L'ensemble  $\mathcal{E}([a, b], F)$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  et à valeurs dans  $F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ .

**Démonstration** C'est immédiatement un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{CM}([a, b], F)$   $\square$

### Proposition 16

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$ . Il existe une fonction  $g$  de  $\mathcal{C}([a, b], F)$  et une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{E}([a, b], F)$  telles que  $f = g + \varphi$ .

**Démonstration** On montre ce résultat par récurrence sur le nombre de points de discontinuité de  $f$ .

- ▶ Pour une fonction qui n'a aucun point de discontinuité, le résultat est clairement vrai.
- ▶ Supposons le résultat établi pour les fonctions continues par morceaux ayant au plus  $n$  points de discontinuité ( $n \geq 0$ ) et soit  $f$  une fonction continue par morceaux admettant  $n + 1$  points de discontinuité. Soit  $c$  un des points de discontinuité et soit  $g$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \text{ si } x \in [a, c[ \\ g(c) &= \lim_{c^-} f \\ g(x) &= f(x) - \lim_{c^+} f + \lim_{c^-} f \text{ si } x \in ]c, b] \end{aligned}$$

Il est clair que  $g$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ , possède au plus  $n$  points de discontinuité et que  $\varphi = f - g$  est en escalier sur  $[a, b]$ .

Par hypothèse,  $g$  s'écrit  $g = h + \psi$  où  $h$  est continue sur  $[a, b]$  et  $\psi$  est en escalier sur  $[a, b]$ , donc  $f$  s'écrit  $f = g + \varphi = h + \varphi + \psi$  où  $\varphi + \psi$  est en escalier sur  $[a, b]$ .  $\square$

### Théorème 17

Toute fonction de  $\mathcal{CM}([a, b], F)$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions en escalier.



**Démonstration**

- ▶ D'après la proposition 16, on peut se ramener au cas d'une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ .
- ▶ Soit  $\varepsilon > 0$ . Par uniforme continuité de  $f$  sur le segment  $[a, b]$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on ait :

$$|u - v| \leq \alpha \implies \|f(u) - f(v)\| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_p)$  de  $[a, b]$  de pas inférieur ou égal à  $\alpha$  et  $g$  l'unique fonction en escalier sur  $[a, b]$  telle que  $g(a_p) = f(a_p)$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  et tout  $t \in [a_k, a_{k+1}[$   $g(t) = f(a_k)$ . Alors, pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  et pour tout  $t \in [a_k, a_{k+1}[$ , on a :

$$\|f(t) - g(t)\| = \|f(t) - f(a_k)\| \leq \varepsilon.$$

L'inégalité étant clairement vraie pour  $t = a_p$ , on a montré le résultat annoncé. □

**2.2 Les fonctions affines par morceaux**

**Définition 6**

Une fonction  $\varphi$  de  $[a, b]$  dans  $F$  est *affine par morceaux* si l'on peut trouver une subdivision  $(a_i)$  de  $[a, b]$  telle que  $\varphi$  soit affine sur chacun des intervalles  $]a_{i-1}, a_i[$ .

**Théorème 18**

Toute fonction de  $\mathcal{C}([a, b], F)$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions affines par morceaux et continues.

**Démonstration** Soient  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}([a, b], F)$  et  $\varepsilon > 0$ . Par uniforme continuité de  $f$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on ait :

$$|u - v| \leq \alpha \implies \|f(v) - f(u)\| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_p)$  de  $[a, b]$  de pas inférieur ou égal à  $\alpha$  et  $g$  l'unique fonction affine par morceaux sur  $[a, b]$  telle que  $g(a_k) = f(a_k)$  pour tout  $k$ . On alors pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  et tout  $t \in [a_k, a_{k+1}[$  :

$$g(t) = \frac{a_{k+1} - t}{a_{k+1} - a_k} f(a_k) + \frac{t - a_k}{a_{k+1} - a_k} f(a_{k+1})$$

d'où :

$$\|f(t) - g(t)\| \leq \frac{a_{k+1} - t}{a_{k+1} - a_k} \|f(t) - f(a_k)\| + \frac{t - a_k}{a_{k+1} - a_k} \|f(t) - f(a_{k+1})\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Avec la proposition 16, cela nous permet d'énoncer :

**Corollaire 19**

Toute fonction de  $\mathcal{CM}([a, b], F)$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions affines par morceaux.

## 2.3 Théorème de Weierstrass

### Proposition 20

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles ou complexes. La suite de polynômes  $(B_n)$ , où  $B_n$  défini par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

est appelé  $n^{\text{ème}}$  *polynôme de Bernstein* associé à  $f$ , converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $f$ .

### Démonstration

► Établissons d'abord la relation suivante valable pour tout réel  $x$  et tout entier  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n k(k-1)\dots(k-p+1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)\dots(n-p+1)x^p.$$

C'est clair pour  $p > n$  car alors tous les termes sont nuls. Pour  $p \leq n$ , il suffit de dériver  $p$  fois par rapport à  $x$  l'identité :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k},$$

de multiplier par  $x^p$  et enfin de substituer  $1-x$  à  $y$ .

► En utilisant les cas particuliers  $0 \leq p \leq 2$  et la décomposition :

$$(k-nx)^2 = k(k-1) + (1-2nx)k + n^2x^2$$

on en déduit aussitôt :

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Notons que, pour  $0 \leq x \leq 1$ , le second membre est borné par  $\frac{n}{4}$ .

► Notons  $M = \max_{[0,1]} \|f(x)\|$  ; on a toujours  $\|f(x) - f(y)\| \leq 2M$ . Se donnant  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\eta > 0$  tel que, par uniforme continuité de  $f$ , on ait  $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout couple  $(x, y)$  vérifiant  $|y - x| < \eta$ . Il en résulte que,  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$  étant fixés, on a :

- pour un indice  $k$  tel que  $\left| \frac{k}{n} - x \right| < \eta$ ,  $\left\| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,
  - pour un indice  $k$  tel que  $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \eta$ ,  $\left\| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \leq 2M \leq 2M \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta^2}$ ,
- puisque dans ce cas  $\frac{(k-nx)^2}{n^2\eta^2} \geq 1$ .

Pour tout indice  $k$ , on a donc l'inégalité :

$$\left\| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{(k - nx)^2}{n^2 \eta^2}$$

puisque le premier membre est majoré, selon les cas, par le premier ou par le second terme du second membre.

► Les résultats précédents justifient les majorations ci-dessous, valables pour tout réel  $x \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \|f(x) - B_n(x)\| &= \left\| \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left[ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left[ \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{(k - nx)^2}{n^2 \eta^2} \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\eta^2}. \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont fixés, mais pas  $n$ , on peut choisir un rang  $N$  tel que pour  $n \geq N$  on ait  $n\eta^2\varepsilon \geq M$ . On a alors pour tout réel  $x \in [0, 1]$ , l'inégalité  $\|f(x) - B_n(x)\| \leq \varepsilon$  et il en résulte que la suite de polynômes  $(B_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur le segment  $[0, 1]$ . □

### Théorème 21 (Weierstrass)

Toute fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions polynomiales.

**Démonstration** Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $\varphi(x) = a + (b - a)x$ . La fonction  $f \circ \varphi$  est continue sur  $[0, 1]$ , donc limite uniforme de la suite  $(B_n)$  de polynômes de Bernstein associée. La fonction  $f$  est alors limite uniforme de la suite  $B_n \circ \varphi^{-1}$ , qui est bien une suite de polynômes puisque  $B_n \circ \varphi^{-1}(x) = B_n\left(\frac{x - a}{b - a}\right)$ . □

#### Remarques

1. Le résultat est faux sur un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ . En effet, une limite uniforme de fonctions bornées étant bornée, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui n'est pas bornée sur  $I = ]0, 1]$  ne peut être limite uniforme de fonctions polynomiales qui seraient nécessairement bornées sur  $I$ .
2. On peut signaler, au sujet des polynômes de Bernstein :
  - qu'ils sont à la base des courbes et surfaces de Bézier fondamentales notamment en CAO,

- qu'ils interviennent dans la définition d'une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $x$  et le calcul de sa variance ( $x$  étant la probabilité d'un événement élémentaire),
- qu'ils permettent de démontrer très simplement et sans théorie de l'intégration autre que celle des polynômes que toute fonction continue sur  $[0, 1]$  y admet une primitive (d'après une idée de Henri Lebesgue). En effet, posant  $F_n(x) = \int_0^x B_n(t) dt$ , on voit que  $F'_n = B_n$  converge uniformément vers  $f$ . Il suffit alors de montrer que la suite  $F_n$  converge simplement pour appliquer le théorème 34 du chapitre Dérivation et intégration et montrer que  $F$  est bien une primitive de  $f$  sur  $[0, 1]$ .

## 2.4 Théorème de Weierstrass trigonométrique

### Définition 7

On appelle *polynôme trigonométrique*, toute combinaison linéaire de la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où l'on note  $e_n$  la fonction  $t \mapsto e^{int}$ .

On démontrera dans le chapitre sur les séries de Fourier (page 799) le théorème de Weierstrass trigonométrique suivant :

### Théorème 22

Toute fonction continue  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de polynômes trigonométriques.

## 3. Séries de fonctions

Comme dans le cas des séries numériques, on peut, à partir d'une suite de fonctions  $(f_n)$ , construire la suite  $(S_n)$  définie par  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ . Cette *série de fonctions* est alors notée  $\sum f_n$  et la fonction  $S_n$  est appelée  $n^{\text{ième}}$  somme partielle de la série  $\sum f_n$ .

Dans toute la section qui suit, on considérera  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $A$  dans  $F$ .

### 3.1 Différents modes de convergence

#### Convergence simple

On dit que la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$  si la suite d'applications  $(S_n)$  converge simplement sur  $A$ .

La limite de la suite  $(S_n)$  s'appelle alors *fonction somme* de la série et est notée

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ . Pour chaque  $x \in A$ , la série  $\sum f_n(x)$  est donc convergente dans

$F$  et l'on a  $\forall x \in A, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ . On appelle *fonction reste d'ordre*

$n$  de la série  $\sum f_n$ , la fonction  $R_n$  définie par :

$$\forall x \in A, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

On a alors pour tout  $x \in A$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ .

#### Convergence uniforme

On dit que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , si la suite d'applications  $(S_n)$  converge uniformément sur  $A$ . On a alors immédiatement que si la série  $\sum f_n$  converge uniformément, alors elle converge simplement.

On a alors clairement la proposition suivante.

#### Proposition 23

Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , alors la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $A$ .

**Remarque** La suite  $(f_n)$  peut converger uniformément vers 0, sans que la série ne converge uniformément. La suite  $\frac{1}{n^x}$  converge uniformément vers 0 sur  $]1, +\infty[$ , mais la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^x}$  ne converge pas uniformément sur  $]1, +\infty[$ .

#### Proposition 24

Une série  $\sum f_n$  simplement convergente sur  $A$ , converge uniformément sur  $A$  si, et seulement si, la suite  $(R_n)$  des restes converge uniformément vers 0 sur  $A$ .

**Démonstration**

- Si la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément vers  $S$ , alors la suite de fonctions  $S - S_n = R_n$  converge uniformément vers 0.
- Réciproquement, si la série converge simplement vers  $S$  et si  $(R_n)$  converge uniformément vers 0, alors la suite  $S_n = S - R_n$  converge uniformément vers  $S$   $\square$

**Exemple** Considérons la série de fonctions définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n(x) = xe^{-nx}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $xe^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , donc la série  $\sum f_n(x)$  converge, ce qui montre que la série de fonctions converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  (pour  $x = 0$ , la convergence est évidente). Il est même possible de déterminer la somme de cette série :

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, \sum_{k=0}^n xe^{-kx} &= x \sum_{k=0}^n (e^{-x})^k \\ &= x \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \end{aligned}$$

qui converge vers  $\frac{x}{1 - e^{-x}}$ . De plus, on a si  $x \neq 0$  :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} xe^{-kx} = \frac{xe^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}.$$

Donc  $R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{e}$ . La convergence de la série n'est donc pas uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

Montrons qu'elle l'est sur tout intervalle de la forme  $I = [a, +\infty[$  avec  $a > 0$ . Pour  $x \in I$ , on a :

$$\forall x \geq a, 0 \leq R_n(x) \leq \frac{ae^{-(n+1)a}}{1 - e^{-a}},$$

ce qui montre que la suite  $(R_n)$  converge uniformément vers 0.

**Convergence uniforme sur tout compact**

On dit que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout compact inclus dans  $A$ , si la suite  $(S_n)$  converge uniformément sur tout compact inclus dans  $A$ .

**Exemple** La série de l'exemple précédent converge uniformément sur tout compact inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Critère de Cauchy uniforme**

**Proposition 25**

La série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur  $A$  si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N$  et tout entier  $p \geq 1$ , on ait :

$$\forall x \in A, \quad \|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)\| \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** C'est le critère de Cauchy uniforme appliqué à la suite  $(S_n)$ . □

**Convergence absolue**

**Définition 8**

On dit que la série  $\sum f_n$  converge absolument sur  $A$ , si pour tout  $x \in A$ , la série réelle  $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|$  converge.

*Exemple* La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  et absolument sur  $]1, +\infty[$ .

**Remarque** La convergence absolue de la série  $\sum f_n$  est équivalente à la convergence simple de la série  $\sum \|f_n\|$  où  $\|f_n\|$  représente la fonction  $x \mapsto \|f_n(x)\|$ .

**Proposition 26**

Si la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge absolument sur  $A$ , alors elle converge simplement sur  $A$ .

**Démonstration** Soit  $x \in A$ , la série  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  converge absolument dans  $F$  qui est complet, donc elle converge. □

## Convergence normale

### Définition 9

On dit que la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $A$ , si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{B}(A, F)$ ,
- la série  $\sum N_\infty(f_n)$  converge.

### Proposition 27

La série  $\sum f_n$  est normalement convergente sur  $A$  si, et seulement si, il existe une suite réelle  $(\alpha_n)$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \|f_n(x)\| \leq \alpha_n$ ,
- la série  $\sum \alpha_n$  converge.

### Démonstration

- Si la série est normalement convergente, alors la suite  $(\alpha_n) = (N_\infty(f_n))$  satisfait aux deux conditions de la proposition.
- Réciproquement, si les deux conditions de la proposition sont vérifiées, alors chaque  $f_n$  est bornée et la série  $\sum N_\infty(f_n)$  est convergente, comme série à termes positifs majorée par une série convergente. □

### Theorème 28

Si la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $A$ , alors elle converge absolument et uniformément sur  $A$  et l'on a :

$$N_\infty \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n).$$



**Démonstration**

- ▶ Si la série  $\sum f_n$  converge normalement, alors il existe une suite majorante  $(\alpha_n)$ . Pour tout  $x \in A$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|f_n(x)\| \leq \alpha_n$ , la série de vecteurs  $\sum f_n(x)$  converge absolument. La série  $\sum f_n$  est donc absolument convergente.
- ▶ Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \geq 1$ , l'inégalité :

$$\forall x \in A, \quad \|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)\| \leq \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}$$

montre que la série vérifie le critère de Cauchy uniforme et est donc uniformément convergente.

- ▶ On a, pour tout  $x \in A$  :

$$\left\| \sum_{k=0}^n f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=0}^n N_\infty(f_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} N_\infty(f_k),$$

d'où :

$$\forall x \in A, \quad \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} N_\infty(f_k). \quad \square$$

**Remarque** Si l'on considère les fonctions  $f_n$  comme des éléments de l'espace  $\mathcal{B}(A, F)$  muni de la norme  $N_\infty$ , la convergence normale de la série de fonctions  $\sum f_n$  est équivalente à la convergence absolue de la série  $\sum f_n$  dans l'espace  $\mathcal{B}(A, F)$ . La convergence uniforme d'une série convergeant normalement résulte alors simplement du fait que l'espace  $\mathcal{B}(A, F)$  muni de la norme  $N_\infty$  est complet. En effet, dans cet espace, la série converge absolument, donc converge pour la norme  $N_\infty$ , ce qui est équivalent à sa convergence uniforme.

**Exemples**

1. La série  $\sum xe^{-nx}$  est normalement convergente sur  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ , puisque pour  $n$  assez grand, on a  $\forall x \geq a$ ,  $|xe^{-nx}| \leq ae^{-na}$ .
2. La série  $\sum a^n \cos(\pi b^n x)$  avec  $0 < a < 1$  et  $b \in \mathbb{R}$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque** La série peut converger uniformément et absolument sans converger normalement. Considérons la suite de fonctions en escalier définie sur  $[0, 1]$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ f_n(x) = \frac{1}{n} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Cette série converge uniformément sur  $[0, 1]$ , puisque  $\left\| \sum_{k=1}^p f_{n+k}(x) \right\| \leq \frac{1}{n+1}$ ,  
 mais la convergence n'est pas normale puisque  $\sup_{x \in [0,1]} \|f_n(x)\| = \frac{1}{n}$  qui est le terme général d'une série divergente.

### Proposition 29

Soit  $\sum (-1)^n g_n$  une série d'applications de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

- pour chaque  $x \in A$ , la suite  $(g_n(x))_n$  est décroissante,
- la suite de fonctions  $(g_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $A$

alors la série converge uniformément sur  $A$ .

**Démonstration** Remarquons que, pour chaque  $x$ , la suite  $(g_n(x))$  tendant vers 0 en décroissant, tous ses termes sont positifs. Pour chaque  $x \in A$ , la série  $\sum (-1)^n g_n(x)$  est, d'après le théorème des séries alternées, convergente de limite  $S(x)$  avec :

$$|S(x) - S_n(x)| \leq |g_{n+1}(x)|$$

qui converge uniformément vers 0. □

**Exemple** En appliquant le résultat précédent on montre aisément que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$  où  $a > 0$

### Règle uniforme d'Abel

Ce paragraphe est hors programme.

Les résultats devront donc être redémontrés dans les exercices.

### Lemme (Égalité d'Abel)

Si on écrit les fonctions  $f_n$  sous la forme  $f_n = g_n h_n$  où les  $g_n$  sont des applications de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  et  $h_n$  des applications de  $A$  dans  $F$ . Alors, en

notant  $H_n = \sum_{k=0}^n h_k$ , on a :

$$\sum_{k=1}^p f_{n+k} = g_{n+p} H_{n+p} - g_{n+1} H_n + \sum_{k=1}^{p-1} (g_{n+k} - g_{n+k+1}) H_{n+k}$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^p f_{n+k} &= \sum_{k=1}^p g_{n+k} h_{n+k} \\
 &= \sum_{k=1}^p g_{n+k} (H_{n+k} - H_{n+k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^p g_{n+k} H_{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} g_{n+k+1} H_{n+k} \\
 &= g_{n+p} H_{n+p} - g_{n+1} H_n + \sum_{k=1}^{p-1} (g_{n+k} - g_{n+k+1}) H_{n+k}. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Théorème 30**

Soit  $\sum f_n$  une série d'applications de  $A$  dans  $F$  de la forme :

$$f_n = g_n h_n$$

où les  $g_n$  sont des applications de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  et  $h_n$  des applications de  $A$  dans  $F$ . Si :

- pour chaque  $x \in A$ , la suite  $(g_n(x))$  est décroissante,
- la suite de fonctions  $(g_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $A$
- il existe  $M \geq 0$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in A} \left\| \sum_{k=0}^n h_k(x) \right\| \leq M,$

alors la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ .

**Démonstration** Comme dans la démonstration de la proposition 29 page 458, on remarque que les fonctions  $g_n$  sont positives. En écrivant l'égalité d'Abel :

$$\sum_{k=1}^p f_{n+k} = g_{n+p} H_{n+p} - g_{n+1} H_n + \sum_{k=1}^{p-1} (g_{n+k} - g_{n+k+1}) H_{n+k}.$$

On a, pour tout  $x \in A$  :

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{k=1}^p f_{n+k}(x) \right\| &\leq M g_{n+p}(x) + M g_{n+1}(x) + M \sum_{k=1}^{p-1} (g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)) \\
 &= 2M g_{n+1}(x) \\
 &\leq 2M \sup_{x \in A} |g_{n+1}(x)|.
 \end{aligned}$$

car toutes les différences  $g_{n+k}(x) - g_{n+k+1}(x)$  sont positives. Le majorant  $\sup_{x \in A} |g_{n+1}(x)|$  tendant vers 0 indépendamment de  $p$  et de  $x$ , nous avons montré la convergence uniforme de la série. □

*Exemple* Soit  $(\alpha_n)$  une suite de nombres réels positifs décroissante tendant vers 0 la série  $\sum \alpha_n e^{inx}$  est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$  où  $0 < \varepsilon < 2\pi$ . En effet :

$$|1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{inx}| = \left| \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \right| \leq \frac{1}{|\sin x/2|} \leq \frac{1}{\sin \varepsilon/2}.$$

## 3.2 Conservation des propriétés par convergence uniforme

Les résultats suivants se déduisent immédiatement des résultats similaires sur les suites de fonctions :

### Convergence uniforme et continuité

#### Théorème 31

Soit  $a \in A$ . Si :

- pour tout  $n$ , la fonction  $f_n$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ),
- la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  ou sur tout compact de  $A$

alors  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

#### Exemples

1. La série définie par  $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^2}$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ , donc est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ , toutes les fonctions  $x \mapsto f_n(x)$  étant continues sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$  converge simplement dans le demi-plan ouvert  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ , puisque  $\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$ . Soit  $X$  une partie compacte de  $D$ , il existe  $a > 1$  tel que  $X \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq a\}$ , on a alors  $\forall z \in X, \left| \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^a}$ , ce qui montre que la série converge uniformément sur  $X$ . Chacune des fonctions  $z \mapsto \frac{1}{n^z}$  étant continue sur  $D$  la fonction, appelée fonction dzéta de Riemann et notée  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$  est continue sur  $D$ .

3. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}_+^*$  et les applications  $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$  sont continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la somme est donc continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Corollaire 32**

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre normée de Banach dont l'élément unité est noté  $e$ , alors :

- la série  $\sum u^n$  converge normalement sur toute boule fermée incluse dans la boule unité ouverte, donc sa somme  $u \mapsto (e - u)^{-1}$  est continue sur la boule unité ouverte,
- la série  $\sum \frac{u^n}{n!}$  converge normalement sur toute boule fermée, donc sa somme  $u \mapsto \exp(u)$  est continue sur  $\mathcal{A}$ .

**Convergence uniforme et limite**

**Théorème 33**

Soit  $a$  un point adhérent à  $A$ . Si :

- pour tout  $n$ , la fonction  $f_n$  admet une limite finie  $\ell_n$  en  $a$ ,
- la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$

alors :

- la série  $\sum \ell_n$  converge dans  $F$ ,
- $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  admet une limite en  $a$
- $\lim_a S = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ .

Le résultat est en particulier vrai si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  et  $a = \pm\infty$ .

*Exemple* Soit  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$  définie sur  $]1, +\infty[$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x) = \frac{1}{n}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge, donc la série  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  n'est pas uniformément convergente sur  $]1, +\infty[$

## EXERCICES

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  continues non constantes, de limites nulles en 0 et en  $+\infty$ . Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions  $f_n(x) = f(nx)$  et  $g_n(x) = g\left(\frac{x}{n}\right)$ . Montrer la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$ . Montrer la convergence uniforme de  $(g_n)$  sur tout intervalle de la forme  $]0, a]$ ,  $a > 0$ .
  2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $h_n(x) = f_n(x)g_n(x) = f(nx)g\left(\frac{x}{n}\right)$ .
2. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :
    1.  $f_n(x) = x^2 \exp\left(-\sin \frac{x}{n}\right)$  sur  $\mathbb{R}$ ;
    2.  $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$  sur  $\mathbb{R}^{**}$ ;
  3. Soit  $f$  une fonction telle que  $f''$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que la suite des fonctions  $n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$  converge uniformément vers  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .
  4. Soit  $(f_n)$  une suite d'applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
    1. On suppose que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Étudier la convergence simple de la suite des fonctions  $g_n = f_n \circ f_n$ .
    2. On suppose que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ . Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de  $(f_n \circ f_n)$ .
5. **Noyaux positifs**
    1. Soit  $I$  un intervalle (non nécessairement compact) de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un réel appartenant à  $I$ . Pour tout  $\theta > 0$  on note  $I_\theta = I \cap ]a - \theta, a + \theta]$  et  $I_\theta^- = I \cap ]-\infty, a - \theta]$  et  $I_\theta^+ = I \cap [a + \theta, +\infty[$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues positives intégrables sur l'intervalle  $I$ , telle que :
      - (a) pour tout  $\theta > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{I_\theta^-} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{I_\theta^+} f_n = 0$  ;
      - (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = 1$ .

On appelle une telle suite  $(f_n)$  un *noyau positif*.

Soit  $g$  est une fonction bornée, intégrable sur  $I$ , et continue en  $a$ . Montrer que  $\int_I f_n g$  admet une limite dépendant seulement de  $g(a)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

2. Pour tout  $n \geq 0$ , définissons  $f_n$  sur  $[0, \pi/2]$  par  $f_n(x) = n \cos^n(x) \sin(x)$ .

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$ . Montrer que, pour tout fonction  $g$  continue sur  $[0, \pi/2]$ , l'intégrale

$\int_0^{\pi/2} f_n(x)g(x) dx$  a une limite, que l'on calculera, lorsque  $n$  tend vers l'infini.

3. Pour  $n \geq 1$ , on définit  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{e^{-nx}(nx)^n}{(n-1)!}$ .

Étudier la convergence simple, et uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$ .

Calculer  $\int_{\mathbb{R}^+} f_n$ .

Soit  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$  et bornée Étudier la limite éventuelle de l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^+} f_n(x)g(x) dx$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

- 6 Soit  $A$  et  $B$  deux parties d'espaces normés. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n$  une application  $A \rightarrow B$ . On suppose que, pour tout  $x \in A$ , et pour toute suite  $(x_n)$  convergeant vers  $x$ , la suite  $(f_n(x_n))$  converge. On ne fait aucune hypothèse de continuité sur les applications  $f_n$ .

1. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement.
2. Montrer que la fonction limite  $f$  est continue.
3. On suppose maintenant  $A$  compact. Montrer que la convergence est uniforme.

7. Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues d'un compact  $K$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x, x' \in K, \quad g(x) = g(x') \implies f(x) = f(x').$$

Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales  $(p_n)$  telle que  $p_n \circ g$  converge uniformément vers  $f$  sur  $K$ .

8. Soit  $\varphi$  l'application de  $[0, 1]$  dans lui-même définie par :  $\varphi(t) = 2t(1-t)$ .
1. Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de la suite  $\varphi_n$ , où  $\varphi_n = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$  est la composée  $n$  fois de  $\varphi$  avec elle-même

2. Soit  $0 < a < b < 1$ , et  $f$  une application continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est la limite uniforme d'une suite d'applications polynomiales à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .
9. On se propose de construire *de manière récursive* une fonction continue sur  $[0, 1]$  non constante, mais de dérivée nulle sur un ouvert dense de  $[0, 1]$ . La première question est une description générale de fonctions définies récursivement.
- Soit  $h$  une application d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même,  $A$  un fermé de  $\mathbb{R}$  et  $g : I \times A \rightarrow A$  une application telle que :
    - il existe  $y \in A$  tel que  $g(\cdot, y)$  soit bornée sur  $I$ ;
    - les  $g(x, \cdot)$  sont *uniformément contractantes*, i.e. il existe  $K \in [0, 1[$  tel que, pour tout  $x \in I$ , pour tout  $(y, y') \in A^2$ ,  $|g(x, y) - g(x, y')| \leq K |y - y'|$ .
 Montrer qu'il existe une unique application  $f$  bornée de  $I$  dans  $A$  telle que, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = g(x, f(h(x)))$ . Pour cela, on notera  $\mathcal{E}$  l'ensemble des applications bornées  $I \rightarrow A$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , et  $G$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  définie par  $f \mapsto F : F(x) = g(x, f(h(x)))$ , et l'on montrera que  $G(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$ .
  - Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des applications continues  $f$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Si  $f \in \mathcal{H}$ , on définit  $F = \Gamma(f)$  par :
 
$$\text{si } x < \frac{1}{3}, F(x) = \frac{1}{2}f(3x); \quad \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, F(x) = \frac{1}{2};$$

$$\text{si } x \geq \frac{2}{3}, F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f\left(3\left(x - \frac{2}{3}\right)\right).$$
 Montrer que  $F \in \mathcal{H}$ . Montrer qu'il existe une unique fonction  $f \in \mathcal{H}$  telle que  $\Gamma(f) = f$ . Partant de  $f_0 \in \mathcal{H}$  quelconque, on définit par récurrence  $f_{n+1} = \Gamma(f_n)$ . Montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ .
  - Montrer que  $f$  est dérivable et de dérivée nulle sur un ouvert dense. Est-ce en contradiction avec la formule des accroissements finis ?
10. Convergence simple, normale, et uniforme de  $\sum u_n$  dans les cas suivants :
- $u_n = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$  sur  $\mathbb{R}^+$ ;
  - $n \geq 1$ ,  $u_n(0) = 0$ , et  $u_n(x) = x^n(1-x) \ln x$ , sur  $]0, 1[$ .
11. 1. Soit  $f$  une fonction positive, continue :  $[a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a$  entier), intégrable. On suppose  $f$  croissante sur  $[a, \omega]$ , et décroissante sur  $[\omega, +\infty[$ . Montrer que :

$$\left| \int_{[a, +\infty[} f - \sum_{n=a}^{+\infty} f(n) \right| \leq 2f(\omega).$$



2. On admettra que  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$  vérifie  $\Gamma(x+1) \sim \frac{x^x}{e^x} \sqrt{2\pi x}$  lorsque le réel  $x$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^x}{n^2} \sim \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^x}{t^2} dt = \Gamma(x+1).$$

3. Soient  $\alpha > 1$  et  $\beta > 0$  des réels tels que  $\alpha \leq 1 + \beta$ . Donner un équivalent (eventuellement sous forme d'intégrale) de  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\beta-\alpha}}{1+n^\beta x^2}$  lorsque  $x$  tend vers 0.

12. On se donne une suite  $(a_n)$  positive telle que  $a_n \sim n^2 \pi^2$ . Trouver un équivalent de  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{a_n}\right)$  lorsque  $x$  tend vers  $\infty$ .

13. Convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  de la série de fonctions  $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + x^2}$ .

14. On pose  $u_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

1. Étudier la convergence de la série  $\sum u_n(x)$ .

2. Sa somme est-elle continue ?

3. Étudier le comportement en  $+\infty$  de sa somme  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ .

15. On pose  $u_n(x) = \frac{\sqrt{x} \ln n}{1 + xn^2}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  réel positif.

1. Étudier la convergence de la série  $\sum u_n(x)$ .

2. Sa somme est-elle continue ?

3. Étudier le comportement en  $+\infty$  de sa somme  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ .

16 Pour  $x \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on pose  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ .

1. Étudier la convergence de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$ , et donner des domaines de convergence uniforme.

2. Cette fonction est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

17. On pose  $u_n(x) = x \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right)$  et  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ .

Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur ce domaine. Calculer  $f(x+1) - f(x)$ .

18. Soit  $\varphi$  une fonction continue :  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Déterminer toutes les fonctions continues  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x+1) - f(x) = \varphi(x). \quad (*)$$

2. On suppose  $\varphi$  positive décroissante, de limite  $L$  en  $+\infty$ . Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ , la série  $\sum_n (\varphi(x+n) - \varphi(n))$  converge, et que sa somme  $S(x)$  est fonction continue de  $x$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto f(x) = xL - S(x)$  vérifie la relation  $((*)$ ).

19. Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on pose  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ , où  $f_n(x) = \sum_{j=-n}^n \frac{1}{x+j}$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie. Montrer que, pour tout  $x$  tel que  $2x$  ne soit pas entier, on a :

$$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

2. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on pose  $g(x) = f(x) - \pi \cotan \pi x$ . Montrer que  $g$  est continue, prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$  tout entier.  
3. Notant encore  $g$  ce prolongement, montrer que  $g = 0$ . Pour cela, on introduira  $A \geq 1$ ,  $M_A = \sup_{t \in [0, A]} |g(t)|$ , et  $x_0 = \inf \{x \in ]0, A[ \mid |g(x)| = M_A\}$ .

20. On pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x, t) dt$ , où  $\varphi(x, t) = \frac{\sin t}{e^{x+t} - 1}$ .

1. Montrer que  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et vérifie :

$$F''(x) + F(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$

2. Montrer que  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ .

21. On définit une suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, b]$  par  $f_0 \in C^0([0, b], \mathbb{R})$ , et

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n \cdot \text{Étudier la série } \sum f_n.$$

22. Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence 1.

Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n x^n}{1 - x^n}$  converge pour  $|x| < 1$ , et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1 - x^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} f(x^k).$$

En déduire un équivalent en 1 de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{1 - x^n}$ .

23. Soit  $\sum a_n$  une série d'applications d'un ensemble  $X$  dans  $\mathbb{C}$ , et  $(b_n)$  une suite décroissante de fonctions  $X \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

1. Montrer que  $\sum b_n a_n$  converge uniformément dans les deux cas suivants :

((1))  $\sum a_n$  converge uniformément, et les fonctions  $b_n$  sont bornées par  $M$  indépendant de  $x$  et de  $n$ ;

((2)) les sommes  $A_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x)$  sont bornées indépendamment de  $x$  et  $n$ , et la suite  $(b_n)$  tend uniformément vers 0.

2. Application. Soit  $\sum \alpha_n$  une série convergente dans  $\mathbb{C}$ . Montrer la convergence uniforme des séries de fonctions sur  $\mathbb{R}^{*+}$  :

$$\sum \frac{x^n}{1 + x^n} \alpha_n \quad \text{et} \quad \sum \frac{x^n}{1 + x^{2n}} \alpha_n.$$

24. **Un arc qui recouvre un carré**

Soit  $f$  la fonction continue, paire, 2-périodique, nulle sur  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ , prenant la valeur 1 sur  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , et affine sur  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ . Dessiner son graphe.

1. Montrer que les séries de fonctions de  $t$  :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} f(3^{2n}t) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} f(3^{2n+1}t)$$

sont normalement convergentes. On notera  $u(t)$  et  $v(t)$  leurs sommes respectives.

2. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , il existe  $t \in [0, 1]$  tel que  $x = u(t)$  et  $y = v(t)$ . Pour cela, on écrira le développement de  $x$  et  $y$  en base 2 :  $x = 0, a_0 a_2 a_4 \dots$ , et  $y = 0, a_1 a_3 a_5 \dots$ , et l'on définira le réel  $t$  par son développement en base 3 :  $t = 0, a'_0 a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 a'_5 \dots$  où  $a'_k = 2a_k$  (i.e.  $a'_k = 0$  si  $a_k = 0$ , et 2 si  $a_k = 1$ ). (On pourra remarquer que, pour tout  $k$ ,  $f(3^k t) = a_k$ ).

25. On définit l'application  $f_n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ ,  $f_n(x) = 0$  si  $x \in ]-\infty, 0[ \cup \left[\frac{2}{n}, +\infty[$ , et  $f$  est affine sur  $\left[0, \frac{1}{n}\right]$  et sur  $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ .

Soit  $m \mapsto r_m$  une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{Q}$ . On pose :  $g_n(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} f_n(t - r_m)$ .

1. Montrer que chaque  $g_n$  est continue.
2. Montrer que  $(g_n)$  converge simplement mais ne converge uniformément sur aucun intervalle de longueur strictement positive.

## 26. Théorème de Borel

Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  une suite complexe quelconque. L'objet de cet exercice est de montrer qu'il existe une infinité de fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  telles que, pour tout  $n$ ,  $f^{(n)}(0) = a_n$ . Voici comment le prouver.

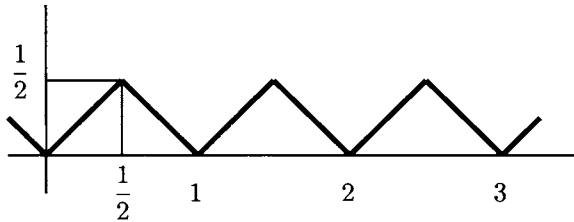
1. Construire une fonction  $g$  de classe  $C^{+\infty}$ , nulle hors de  $[-1, 1]$ , constante égale à 1 sur  $[-\theta, \theta]$  ( $0 < \theta < 1$ ), et telle que, pour tout  $x$ ,  $|g(x)| \leq 1$ .
2. Trouver une condition suffisante simple ((1)) sur la suite  $(\lambda_n)$  de réels positifs pour que la série de fonctions  $\sum u_n(x) = \sum a_n \frac{x^n}{n!} g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . (Considérer  $|a_n| \frac{\lambda_n^n}{n!}$ .)
3. Trouver des conditions suffisantes simples ((2)) sur  $(\lambda_n)$  pour que chacune des séries dérivées  $\sum_n u_n^{(k)}$  converge normalement.
4. Trouver une suite  $(\lambda_n)$  vérifiant ((1)) et ((2)).
5. Montrer que la fonction  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  ainsi construite est  $C^\infty$ , et a les dérivées voulues en 0.

**27. La fonction de Van Der Waerden**

1. Soit  $F$  une fonction dérivable en  $x$ . Montrer que, pour toute suite  $(a_n)$  tendant vers  $x$  en croissant (au sens large), et toute suite  $(b_n)$  tendant vers  $x$  en décroissant (au sens large), telles que, pour tout  $n$ ,  $b_n - a_n > 0$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = F'(x).$$

2. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \min(x - [x], [x] + 1 - x) = d(x, \mathbb{Z})$ , où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .



On pose alors :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-n} f(10^n x).$$

Montrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$  continue et périodique mais n'est nulle part dérivable.



## Chapitre 13

# Intégration sur un segment

Le but de ce chapitre est de généraliser aux fonctions vectorielles la notion d'intégrale sur un segment déjà vue en première année pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Pour cela, on considère des fonctions définies sur un segment  $J = [a, b]$  (avec  $a < b$ ), et à valeurs dans un espace vectoriel norme complet  $F$  (sur  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ ).

Les cas où  $F = \mathbb{R}$ ,  $F = \mathbb{C}$  ou  $F = \mathbb{R}^2$  ont déjà été vus en première année, et ce sont essentiellement ceux-là qui seront utilisés dans la pratique.

Lorsque  $F$  est de dimension finie  $n$ , on peut, au moyen d'une base  $\mathcal{B} = (e_i)$ , ramener l'étude d'une fonction  $f : J \rightarrow F$  à l'étude de ses  $n$  fonctions composantes, c'est-à-dire aux fonctions  $f_i$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  définies par :

$$\forall x \in J, f(x) = \sum_i f_i(x) e_i.$$

On note  $\mathcal{B}(J, F)$  l'espace vectoriel des fonctions bornées sur le segment  $J$  et à valeurs dans  $F$ . Muni de la norme  $N_\infty$  définie par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in J} \|f(x)\|,$$

l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(J, F)$  est un espace vectoriel normé complet (voir page 386)

# 1. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

## 1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

### Définition 1

Soient  $\varphi$  une fonction en escalier sur  $J$  et  $(a_i)$  une subdivision adaptée à  $\varphi$ . On appelle *intégrale* de  $\varphi$  sur  $J$ , et on note  $\int_J \varphi$  l'élément de  $F$  défini par :

$$\int_J \varphi = \sum_i (a_i - a_{i-1}) c_i$$

où  $c_i$  est la valeur constante de  $\varphi$  sur  $]a_{i-1}, a_i[$ .

**Propriétés** Comme pour les fonctions numériques, on vérifie que :

- l'intégrale de  $\varphi$  ne dépend pas de la subdivision adaptée à  $\varphi$  choisie ;
- l'intégrale est une application linéaire de  $\mathcal{E}(J, F)$ , sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}([a, b], F)$  constitué des fonctions en escalier, dans  $F$ .

### Proposition 1

L'intégrale est une application linéaire continue de norme  $b - a$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{E}([a, b], F)$ .

**Démonstration** Avec les notations de la définition 1, on a :

$$\left\| \int_J \varphi \right\| \leq \sum_i (a_i - a_{i-1}) \|c_i\| \leq \sum_i (a_i - a_{i-1}) \|\varphi\|_\infty = (b - a) \|\varphi\|_\infty,$$

avec égalité pour toute fonction constante. □

## 1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

D'après le théorème 17 page 448 d'approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier, le sous-espace vectoriel  $\mathcal{E}(J, F)$  est dense dans  $(\mathcal{CM}(J, F), N_\infty)$ .

L'intégrale des fonctions en escaliers étant une application linéaire continue à valeurs dans l'espace vectoriel normé complet  $F$ , elle se prolonge, d'après le théorème 19 page 395, en une unique application linéaire continue sur  $\mathcal{CM}(J, F)$ .



**Définition 2**

L'intégrale des fonctions continues par morceaux est l'unique prolongement linéaire continu à  $\mathcal{CM}(J, F)$  de l'intégrale des fonctions en escalier.

On note  $\int_J f$  l'intégrale d'une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $J$

**Propriétés**

- Dans le cas des fonctions réelles ou complexes, cette intégrale coïncide avec celle définie en première année, car cette dernière est une application linéaire continue prolongeant l'intégrale des fonctions en escalier.
- L'intégrale est une application linéaire continue de  $(\mathcal{CM}(J, F), N_\infty)$  dans  $F$ . Sa norme est  $b - a$ .
- On appelle *fonction réglée* sur  $J$ , une fonction qui est limite uniforme sur  $J$  d'une suite de fonctions en escalier. L'ensemble  $\mathcal{R}(J, F)$  des fonctions réglées est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}(J, F)$  qui par définition admet pour partie dense l'ensemble des fonctions en escalier. On peut étendre sans difficulté supplémentaire la définition de l'intégrale à  $\mathcal{R}(J, F)$ , avec les mêmes propriétés.

Comme  $\mathcal{R}(J, F)$  est l'adhérence dans  $\mathcal{B}(J, F)$  de  $\mathcal{E}(J, F)$ , c'est un espace vectoriel normé complet, comme fermé dans un espace vectoriel normé complet, ce qui n'est pas le cas de  $\mathcal{CM}(J, F)$  (voir exercice 11 page 431).

Par définition de l'intégrale, on a le résultat suivant.

**Proposition 2**

Si  $(\varphi_n)_n$  est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément (c'est-à-dire pour la norme  $N_\infty$ ) vers  $f \in \mathcal{CM}(J, F)$ , alors :

$$\int_J f = \lim_n \int_J \varphi_n.$$

**Proposition 3**

Deux fonctions continues par morceaux coïncidant sauf sur une partie finie de  $J$  ont des intégrales égales.

**Démonstration** Leur différence est une fonction en escalier nulle sauf en un nombre fini de points, donc qui par définition a une intégrale nulle □

**Exemple** Lorsqu'une fonction  $f$ , définie sur  $J$  privé d'un nombre fini de points se prolonge sur  $J$  en une fonction continue par morceaux, on peut définir son intégrale comme l'intégrale de n'importe lequel de ces prolongements.

En particulier, on peut parler de l'intégrale de la dérivée d'une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (cf. page 508). On verra page 512 que si  $f$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, on a :

$$\int_{[a,b]} Df = f(b) - f(a)$$

où  $Df$  est la dérivée de  $f$  définie en tout point où  $f$  est dérivable.

## 2. Propriétés de l'intégrale

Les propriétés qui suivent se montrent facilement pour les fonctions en escalier, et se généralisent à toute fonction continue par morceaux par densité.

### 2.1 Inégalité triangulaire

#### Proposition 4

On a pour toute fonction  $f \in \mathcal{CM}(J, F)$  :

$$\left\| \int_J f \right\| \leq \int_J \|f\|.$$

#### Démonstration

► Pour une fonction en escalier, le résultat provient de l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_i (a_i - a_{i-1}) c_i \right\| \leq \sum_i (a_i - a_{i-1}) \|c_i\|.$$

► Soit  $(\varphi_n)$  une suite de fonctions en escalier convergeant vers  $f \in \mathcal{CM}(J, F)$ . Par continuité de la norme et de l'intégrale, il suffit de passer à la limite dans l'inégalité :

$$\left\| \int_J \varphi_n \right\| \leq \int_J \|\varphi_n\|$$

pour obtenir :

$$\left\| \int_J f \right\| \leq \int_J \|f\|.$$

□

## 2.2 Invariance par translation

### Proposition 5

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  et  $\alpha$  un réel. La fonction  $f_\alpha$  définie sur  $[a + \alpha, b + \alpha]$  par :

$$f_\alpha(x) = f(x - \alpha)$$

est continue par morceaux sur  $[a + \alpha, b + \alpha]$  et :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha.$$

### Démonstration

- Le cas des fonctions en escalier se traite comme dans le cas des fonctions numériques
- Par passage à la limite, on obtient le résultat pour toute fonction continue par morceaux. □

**Remarque** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $J = [a, b]$ .

- Si  $\lambda$  est un réel strictement positif, la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = f(x/\lambda)$$

est continue par morceaux sur  $\lambda J = [\lambda a, \lambda b]$ , et l'on a :

$$\int_{\lambda J} g = \lambda \int_J f.$$

- De même la fonction  $g$  définie sur  $-J = [-b, -a]$  par :

$$g(x) = f(-x)$$

est continue par morceaux sur  $-J$ , et l'on a :

$$\int_{-J} g = \int_J f.$$

Il suffit de remarquer que l'image d'une subdivision de  $J$  par l'application  $x \mapsto \lambda x$  (respectivement  $x \mapsto -x$ ) est une subdivision de  $\lambda J$  (respectivement de  $-J$  après avoir réordonné les points).

On en déduit que si  $\lambda$  est un réel non nul et si  $\lambda J = [\lambda a, \lambda b] = \{\lambda x \mid x \in J\}$ , alors l'application  $g : x \mapsto f(x/\lambda)$  est continue par morceaux sur  $\lambda J$  et que l'on a :

$$\int_{\lambda J} g = |\lambda| \int_J f.$$

## 2.3 Image par une application linéaire

### Proposition 6

Soit  $T$  une application linéaire continue de  $F$  dans un espace vectoriel normé complet  $G$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{CM}(J, F)$  on a  $T \circ f \in \mathcal{CM}(J, G)$  et :

$$T \left( \int_J f \right) = \int_J T \circ f.$$

### Démonstration

- Il est immédiat de voir que  $T \circ f$  est continue par morceaux lorsque  $f$  est continue par morceaux.
- Dans le cas des fonctions en escalier, l'égalité :

$$T \left( \int_J \varphi \right) = \int_J T \circ \varphi$$

est une conséquence de la linéarité de  $T$

$$T \left( \sum_i (a_i - a_{i-1}) c_i \right) = \sum_i (a_i - a_{i-1}) T(c_i).$$

- L'application  $T$  étant continue, il suffit de passer à la limite pour avoir le résultat pour toute fonction continue par morceaux. □

**Remarque** Lorsque  $F$  est de dimension finie il est inutile de vérifier la continuité de  $T$ , puisque toute application linéaire sur  $F$  est continue.

**Exemple** Si  $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{C})$ , on a :

$$\overline{\int_J f} = \int_J \bar{f} \quad \operatorname{Re} \left( \int_J f \right) = \int_J \operatorname{Re} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left( \int_J f \right) = \int_J \operatorname{Im} f.$$

### Corollaire 7

Soit  $F$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_i)$ . Une application  $f$  est continue par morceaux sur  $J$  si, et seulement si, les fonctions  $f_i$  composantes dans la base  $\mathcal{B}$  sont continues par morceaux.

Les composantes de  $\int_J f$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont alors  $\left( \int_J f_i \right)_i$ .

**Démonstration** On a  $f_i = e_i^* \circ f$ , où  $(e_i^*)$  est la base duale de  $\mathcal{B}$

- ▶ Si  $f \in \mathcal{CM}(J, F)$ , alors  $f_i \in \mathcal{CM}(J, \mathbf{K})$  Réciproquement, si les  $f_i$  sont continues par morceaux, l'égalité  $f = \sum_i f_i e_i$  montre que  $f$  est continue par morceaux
- ▶ La proposition précédente montre alors :

$$\int_J f_i = e_i^* \left( \int_J f \right).$$

□

## 2.4 Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration

### Proposition 8

Soient  $K$  un segment inclus dans  $J$ , et  $\chi_K$  la fonction caractéristique de  $K$ .

Si  $f \in \mathcal{CM}(J, F)$ , alors  $f|_K \in \mathcal{CM}(K, F)$  et  $\chi_K f \in \mathcal{CM}(J, F)$ , et l'on a :

$$\int_K f = \int_J \chi_K f.$$

### Démonstration

- ▶ Le premier point s'obtient facilement en utilisant une subdivision de  $J$  contenant les extrémités de  $K$ .
- ▶ L'égalité des intégrales est immédiate lorsque  $f$  est en escalier. Par densité, on obtient le résultat dans le cas général. □

**Remarque** En toute rigueur, il faudrait écrire dans le résultat précédent :

$$\int_K f|_K = \int_J \chi_K f.$$

Nous faisons le même abus de notation dans le corollaire suivant.

### Corollaire 9 (Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration)

Soit  $(a_i)$  une subdivision de  $J$ . Pour toute fonction  $f$  continue par morceaux sur  $J$ , on a :

$$\int_J f = \sum_i \int_{[a_{i-1}, a_i]} f.$$

**Démonstration** En notant  $K_i = [a_{i-1}, a_i]$ , les fonctions  $f$  et  $\sum_i \chi_{K_i} f$  coïncident sauf éventuellement aux points de la subdivision. Elles ont donc même intégrale, ce qui prouve le résultat. □

## 2.5 Cas des fonctions réelles : positivité, croissance

Dans le cas où  $F = \mathbb{R}$ , nous retrouvons les résultats concernant l'intégrale des fonctions réelles.

### Proposition 10

L'intégrale est une application croissante de  $\mathcal{CM}(J, \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Démonstration

► Si  $f$  est positive, on a  $f = |f|$  et l'inégalité triangulaire donne :

$$\int_J f = \int_J |f| \geq \left| \int_J f \right| \geq 0.$$

► Si  $f \leq g$ , on a  $g - f \geq 0$  et donc  $\int_J (g - f) \geq 0$ , ce qui par linéarité donne  $\int_J f \leq \int_J g$ . □

### Proposition 11

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $J$  et à valeurs réelles positives. Si  $f$  est non nulle en un point de continuité, alors  $\int_J f > 0$ .

**Démonstration** Puisque  $f$  est strictement positive en un point  $c$  de continuité, elle est minorée par un réel  $\alpha > 0$  au voisinage de  $c$ , soit sur un segment  $K$  de longueur  $\eta > 0$ . Puisque  $f$  est positive, on a par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration :

$$\int_J f \geq \int_K f \geq \alpha \eta > 0. \quad \square$$

### Corollaire 12

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux positive dont l'intégrale sur  $J$  est nulle.

- La fonction  $f$  est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points de  $J$ .
- Si  $f$  est continue, alors elle est nulle sur  $J$ .

### Exemples

1. Soit  $F$  un espace euclidien (voire plus généralement un espace de Hilbert, cf. chapitre 18).

Cherchons les applications  $f \in \mathcal{C}(J, F)$  vérifiant :

$$\left\| \int_J f \right\| = \int_J \|f\|. \tag{*}$$

Soit donc  $f$  continue vérifiant (\*).

- Si  $\int_J f = 0$ , alors  $\int_J \|f\| = 0$  et, la fonction  $\|f\|$  étant continue et positive, on en déduit  $\|f\| = 0$  c'est-à-dire  $f = 0$ .
- Sinon, soient  $D$  la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $I = \int_J f$  et  $p$  la projection orthogonale sur  $D$ . Comme  $p$  est linéaire continue, on a :

$$\int_J p \circ f = p \left( \int_J f \right) = \int_J f$$

et d'autre part  $\|p \circ f\| \leq \|f\|$ , ce qui donne :

$$\int_J \|f\| \geq \int_J \|p \circ f\| \geq \left\| \int_J p \circ f \right\| = \left\| \int_J f \right\|.$$

D'après la relation (\*), les deux inégalités ci-dessus sont des égalités, et en particulier :

$$\int_J (\|f\| - \|p \circ f\|) = 0.$$

Comme la fonction  $\|f\| - \|p \circ f\|$  est continue et positive, on en déduit  $\|p \circ f\| = \|f\|$ , ce qui prouve d'après le théorème de Pythagore :

$$\|f\|^2 = \|p \circ f\|^2 + \|f - p \circ f\|^2$$

que  $f = p \circ f$ , soit :

$$\forall x \in J, f(x) \in D.$$

Prenons donc  $u = \frac{I}{\|I\|}$  et la fonction réelle  $\varphi$  telle que :

$$\forall x \in J, f(x) = \varphi(x) u.$$

La relation :

$$I = \int_J f = \left( \int_J \varphi \right) u$$

prouve que l'intégrale de  $\varphi$  est positive, et par suite :

$$\int_J \varphi = \left\| \int_J f \right\| = \int_J \|f\| = \int_J |\varphi|.$$

On en déduit que la fonction positive continue  $|\varphi| - \varphi$  a une intégrale nulle, donc est nulle, ce qui prouve que  $\varphi$  est positive.

Il existe donc dans tous les cas un vecteur  $u$  et une fonction  $\varphi$  positive tels que :

$$\forall x \in J, f(x) = \varphi(x) u$$

(il suffit de prendre  $u = 0$  dans le premier cas).

Réciproquement, il est évident que sous ces conditions, la relation (\*) est vérifiée.

2. Ce résultat ne subsiste pas si la norme n'est pas euclidienne. Par exemple prenons  $F = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$  et  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$f(t) = (t, 1 - t).$$

On a :

$$\left\| \int_0^1 f(t) dt \right\| = \|(1/2, 1/2)\| = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \|f(t)\| dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Pourtant, les vecteurs  $f(t)$  ne sont pas tous colinéaires.

## 2.6 Inégalité de la moyenne

### Proposition 13

Soient  $F, G$  et  $H$  trois espaces vectoriels normés complets et  $B$  une application bilinéaire continue de  $F \times G$  dans  $H$ .

Il existe une constante  $K$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{CM}(J, F)$  et tout  $g \in \mathcal{CM}(J, G)$  on ait :

$$\left\| \int_J B(f, g) \right\| \leq K N_\infty(f) \int_J \|g\|.$$

**Démonstration** La continuité de  $B$  prouve l'existence de  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \|B(x, y)\| \leq K \|x\| \|y\|.$$

On a donc, pour  $t \in J$  :

$$\|B(f(t), g(t))\| \leq K \|f(t)\| \|g(t)\| \leq K N_\infty(f) \|g(t)\|$$

ce qui donne :

$$\left\| \int_J B(f, g) \right\| \leq \int_J \|B(f, g)\| \leq K N_\infty(f) \int_J \|g\|. \quad \square$$

En particulier, lorsque  $G = \mathbb{K}$ ,  $g = 1$  et  $B(x, \lambda) = \lambda x$ , on retrouve l'inégalité de la moyenne :



**Corollaire 14 (Inégalité de la moyenne)**

Si  $f \in \mathcal{CM}(J, F)$ , on a :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\| \leq (b - a) \sup_{[a,b]} \|f\|.$$

**Définition 3**

On appelle *valeur moyenne* de  $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$  l'élément de  $F$  défini par :

$$\frac{1}{b - a} \int_{[a,b]} f.$$

**2.7 Sommes de Riemann**

**Définition 4**

Soient  $u = (x_i)_{i \in [0, n]}$  une subdivision de  $[a, b]$  et  $v = (y_i)_{i \in [1, n]}$  une famille de points de  $[a, b]$  telle que :

$$\forall i \in [1, n], y_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , on appelle *somme de Riemann* de  $f$  associée à la subdivision  $u$  et à la suite  $v$ , la quantité :

$$\sigma(f, u, v) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(y_i).$$

**Remarque** Cette somme de Riemann  $\sigma(f, u, v)$  est égale à l'intégrale de toute fonction en escalier valant  $f(y_i)$  sur  $] a_{i-1}, a_i [$ .

**Proposition 15**

Soit  $f$  une application continue sur  $J$ .

Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\eta > 0$  tel que pour toute subdivision  $u = (x_i)_{i \in [0, n]}$  et pour toute famille  $v = (y_i)_{i \in [1, n]}$  vérifiant :

$$\forall i \in [1, n], y_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

on ait :

$$\delta(u) \leq \eta \implies \left\| \int_J f - \sigma(f, u, v) \right\| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, les sommes de Riemann d'une fonction continue convergent vers l'intégrale lorsque le pas de la subdivision tend vers 0

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue sur le segment  $J$ , donc il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in J^2, |x - y| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{(b - a)}.$$

Si  $u = (x_i)$  est une subdivision de pas inférieur à  $\eta$ , et  $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , la fonction en escalier  $\varphi$  qui vaut  $f(y_i)$  sur  $[x_{i-1}, x_i[$  et  $f(b)$  en  $b$  est telle que  $N_\infty(f - \varphi) \leq \varepsilon/(b - a)$ .

$$\text{Donc } \left\| \int_J f - \int_J \varphi \right\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

### Cas d'une fonction $k$ -lipschitzienne

Si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne, en reprenant les notations de la démonstration précédente, on a :

$$\|f - \varphi\| \leq k \delta(u)$$

et donc :

$$\left\| \int_J f - \sigma(f, u, v) \right\| \leq k(b - a) \delta(u).$$

**Exemple** Si  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $J$ , sa valeur moyenne appartient à l'adhérence de l'enveloppe convexe de  $f(J)$ , c'est-à-dire de l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'éléments de  $f(J)$ .

En effet, si  $\sigma(f, u, v)$  est une somme de Riemann de  $f$ , avec  $u = (x_i)$  et  $v = (y_i)$ , alors  $\sigma(f, u, v)/(b - a)$  est un barycentre à coefficients positifs des  $f(y_i)$  puisque :

$$\forall i \in [1, n], \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a} = 1.$$

On en déduit le résultat puisque l'intégrale de  $f$  est la limite d'une suite de Riemann, par exemple associée à des subdivisions à pas constant égal à  $(b - a)/n$ .

## 2.8 Notation

### Définition 5

Une application est continue par morceaux sur un intervalle  $I$  quelconque si sa restriction à tout segment de  $I$  est continue par morceaux

Dans ce cas si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $I$ , on note :

$$\int_a^b f(t) dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ - \int_{[b,a]} f & \text{si } a > b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

**Propriétés**

- Pour tout  $(a, b) \in I^2$ , on a :

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

- L'application  $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$  est une application linéaire de  $\mathcal{CM}(I, F)$  dans  $F$ .
- Si  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq |b - a| \sup_{[a,b]} \|f\|.$$

*Exemples* Soit  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$ .

1. la propriété d'invariance par translation se traduit par :

$$\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f(x) dx = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(x - \alpha) dx.$$

2. De même, si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , la remarque de la page 475 prouve que si  $\lambda a$  et  $\lambda b$  sont dans  $I$  :

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x) dx = \lambda \int_a^b f(\lambda x) dx$$

**Proposition 16 (Relation de Chasles)**

Étant donné une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  ainsi que  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois points de  $I$ , on a :

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$$

**Démonstration** La relation est évidente si  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne sont pas distincts deux à deux ; c'est une conséquence du corollaire 9 page 477 si  $a < b < c$ .

Pour la démontrer dans le cas général, il suffit de vérifier que si elle est satisfaite pour un triplet  $(a, b, c)$ , elle l'est aussi pour toute permutation de ce triplet. Comme  $\mathcal{S}_3$  est engendré par les transpositions, on peut se limiter aux transpositions voire même à  $(ab)$  et  $(bc)$ , puisque  $(ac) = (ab)(bc)(ab)$ . C'est alors une conséquence immédiate de la première propriété ci-dessus. □

### 3. Propriétés topologiques

#### 3.1 Norme de la convergence en moyenne

##### Proposition 17

L'application  $N_1 : f \mapsto \int_J \|f\|$  est une application de  $\mathcal{CM}(J, F)$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant :

- $\forall f \in \mathcal{CM}(J, F), \forall \lambda \in \mathbb{K}, N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$
- $\forall (f, g) \in \mathcal{CM}(J, F)^2, N_1(f + g) \leq N_1(f) + N_1(g)$

##### Démonstration

- Si  $f$  est continue par morceaux, l'application  $\|f\|$  est continue par morceaux et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , donc  $N_1(f) \in \mathbb{R}_+$ .
- La relation  $N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$  est évidente.
- En intégrant l'inégalité  $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$ , on obtient :

$$N_1(f + g) \leq N_1(f) + N_1(g). \quad \square$$

**Remarque** L'application  $f \mapsto \int_J \|f\|$  n'est pas une norme sur  $\mathcal{CM}(J, F)$  puisqu'elle ne vérifie pas l'axiome de séparation : si une fonction  $f$  est telle que  $N_1(f) = 0$ , on peut seulement dire qu'elle est nulle sauf sur une partie finie de  $J$ .

Il s'agit néanmoins une semi-norme sur  $\mathcal{CM}(J, F)$  puisque la proposition précédente montre qu'elle est sous-linéaire.

##### Corollaire 18

L'application  $N_1$  définit une norme sur  $\mathcal{C}(J, F)$ .

**Démonstration** Si une fonction continue  $f$  est telle que  $N_1(f) = 0$ , alors elle est nulle sur  $J$ . □

##### Définition 6

On dit qu'une suite de fonctions continues par morceaux  $(f_n)$  converge en moyenne vers  $f$  continue par morceaux, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(f - f_n) = 0$ .

**Remarques**

- Dans le cas des fonctions continues, il s’agit de la convergence dans l’espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}(J, F), N_1)$ . C’est pourquoi la norme  $N_1$  s’appelle *norme de la convergence en moyenne*.
- Si une suite  $(f_n)$  converge en moyenne vers  $f$ , alors :

$$\int_J f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_n$$

puisque :

$$\left\| \int_J f - \int_J f_n \right\| = \left\| \int_J (f - f_n) \right\| \leq \int_J \|f - f_n\|.$$

- La convergence en moyenne n est malheureusement pas toujours facile à établir. Nous donnons ci-dessous une condition suffisante (et même très forte) de convergence en moyenne.

**3.2 Intégration sur un segment d’une suite de fonctions continues**

**Proposition 19**

Étant donnée une suite  $(f_n)$  de fonctions continues par morceaux sur le segment  $J$  convergeant uniformément sur  $J$  vers une fonction  $f$  **continue par morceaux** la suite  $(f_n)$  converge en moyenne vers  $f$  et l’on a donc :

$$\lim_n \int_J f_n = \int_J f.$$

**Démonstration** Conséquence des inégalités :

$$\left\| \int_J f - \int_J f_n \right\| = \left\| \int_J (f - f_n) \right\| \leq \int_J \|f - f_n\| \leq (b - a) N_\infty(f - f_n). \quad \square$$

**Theorème 20**

Une suite  $(f_n)$  de fonctions continues convergeant uniformément sur  $J$  vers une fonction  $f$  (alors continue) converge en moyenne vers  $f$  et vérifie :

$$\lim_n \int_J f_n = \int_J f.$$

**Remarques**

- Dans le cas des fonctions continues, ce résultat traduit l'inégalité des normes :

$$N_1 \leq (b - a) N_\infty.$$

- Les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes, puisque si  $f_n(x) = (x - a)^n$ , on a :

$$N_1(f_n) = \frac{(b - a)^{n+1}}{n + 1} \quad \text{et} \quad N_\infty(f_n) = (b - a)^n$$

et que l'on ne peut donc pas trouver de constante  $K$  telle que  $N_\infty \leq K N_1$ .

- Il a fallu supposer la limite continue par morceaux par morceaux dans la proposition 19 page précédente, alors que la continuité de la limite dans le théorème 20 est automatique, puisque  $\mathcal{C}(J, F)$  est fermé dans  $(\mathcal{B}(J, F), N_\infty)$ .
- On peut généraliser le résultat à l'ensemble des fonctions réglées, mais comme ce dernier est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{B}(J, F)$ , il est inutile de vérifier que la limite est réglée.

**Exemples**

1. Si  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x/n) dx = \int_{[0,1]} f(0) = f(0).$$

En effet, la continuité de  $f$  en 0 nous donne, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , un réel  $\eta > 0$  tel que :

$$0 \leq t \leq \eta \implies |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Pour  $n \geq 1/\eta$ , on a donc :

$$\forall x \in [0, 1], |f(x/n) - f(0)| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence uniforme de  $f(x/n)$  vers  $f(0)$ .

2. Si  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$  et tend vers 0 en  $+\infty$ , montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx = 0.$$

On remarque :

$$\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = 0$$

mais on ne peut pas appliquer ici directement le théorème, car la convergence vers 0 n'est pas uniforme si  $f$  n'est pas identiquement nulle puisque :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(nx)| = \sup_{[0,n]} |f|$$

qui est une suite positive croissante non nulle, donc qui ne converge pas vers 0.

En revanche, pour  $0 < \eta < 1$ , la suite  $(f(nx))_n$  converge uniformément vers 0 sur  $[\eta, 1]$  puisque  $f$  tend vers 0 à l'infini (raisonnement similaire à celui de l'exemple précédent). On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\eta}^1 f(nx) dx = 0.$$

Comme de plus,  $f$  est bornée au voisinage de  $+\infty$  et sur tout compact de  $\mathbb{R}_+$  elle est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  par un certain réel  $M > 0$ . On a donc :

$$\left| \int_0^{\eta} f(nx) dx \right| \leq M \eta.$$

Soit donc  $\varepsilon > 0$ . Prenons  $\eta = \varepsilon/2M$  puis  $n_0$  tel que :

$$n \geq n_0 \implies \left| \int_{\eta}^1 f(nx) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$n \geq n_0 \implies \left| \int_0^1 f(nx) dx \right| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat.

3. Dans certains cas, on peut par des majorations simples montrer directement la convergence d'une suite d'intégrale. Par exemple, pour montrer que :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$$

tend vers 0, il suffit de remarquer que par convexité de la fonction tangente on a :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{\pi/4} \left( \frac{4x}{\pi} \right)^n dx = \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

4. L'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}(J, F), N_1)$  n'est pas complet, comme le prouve la suite de fonctions définie sur  $[-1, 1]$  par :

$$f_n(x) = 2^{n+1} \sqrt[n]{x}$$

qui est de Cauchy mais ne converge vers aucune fonction continue sur  $[-1, 1]$  (cf. page 388).

### Remarques

- Dans ce dernier exemple, la suite  $(f_n)$  ne converge pas dans  $\mathcal{C}([-1, 1], F)$ . En revanche elle converge en moyenne vers la fonction continue par morceaux valant  $-1$  sur  $[-1, 0[$  et  $1$  sur  $[0, 1]$ .

- Il se peut d'ailleurs qu'une suite de Cauchy de  $\mathcal{C}(J, F)$  ne converge en moyenne vers aucune fonction continue par morceaux, comme par exemple, sur  $[0, 1]$ , la suite  $(f_n)$  définie par :

$$f_n(x) = \min(n, 1/\sqrt{x}) \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad f_n(0) = n.$$

- En réalité, la condition de convergence uniforme donnée dans le théorème 20 page 485 est très forte, et on peut avoir le résultat sous des hypothèses beaucoup plus faibles, comme le montre l'exemple 2. ci-dessus, ou plus simplement la suite  $(t^n)$  qui converge sur  $[0, 1]$  vers 0 (sauf en 1) et dont l'intégrale converge vers 0. La convergence n'est pas uniforme, puisque la limite n'est pas continue.

On verra dans le chapitre 15, des théorèmes donnant des conditions beaucoup moins restrictives que la convergence uniforme.

### 3.3 Intégration terme à terme d'une série

En terme de série, le théorème 20 page 485 s'écrit :

#### Théorème 21

Si la série  $\sum f_n$  de fonctions continues converge uniformément sur le segment  $J$ , alors la série des intégrales sur  $J$  converge et l'on peut intégrer terme à terme :

$$\int_J \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n.$$

#### Remarques

- Si la convergence est normale, la série  $\sum N_1(f_n)$  converge et l'on a :

$$N_1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

En effet, la série :

$$\sum \int_J \|f_n\|$$

converge puisque la série  $\sum \|f_n\|$  converge uniformément. Il suffit alors de passer à la limite dans les inégalités :

$$N_1 \left( \sum_{p=0}^n f_p \right) \leq \sum_{p=0}^n N_1(f_p).$$



- Si les fonctions sont seulement continues par morceaux, le résultat du théorème subsiste, mais il faut vérifier aussi que la somme de la série est continue par morceaux.
- En revanche, il se généralise sans problème au cas des fonctions réglées

**Exemples**

1. Si  $(c_n)$  est une suite complexe telle que  $\sum c_n$  converge absolument, alors la série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

converge normalement sur  $\mathbb{R}$ , et l'on a :

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = 2\pi c_n.$$

2. Considérons la série de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n + 1} dt.$$

Faisons tout d'abord un calcul formel, que nous justifierons ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n + 1} \right) dt \\ &= - \int_0^1 \ln(2 - t^2) dt = 2 - 2\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Soit  $f_n(t) = \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n + 1}$ .

La série de fonctions  $\sum f_n$  ne converge pas normalement sur le segment  $[0, 1]$ , puisque  $N_\infty(f_n) = 1/(n+1)$ , mais comme la suite  $((-1)^n f_n(t))_n$  est décroissante et tend vers 0, le théorème des séries alternées implique la convergence de la série avec comme majoration du reste :

$$|R_{n-1}(t)| \leq |f_n(t)| \leq \frac{1}{n + 1}.$$

Il y a donc convergence uniforme sur  $[0, 1]$ , ce qui justifie l'intégration terme à terme ci-dessus ainsi donc que la convergence de  $\sum u_n$ .

### 3.4 Approximation en moyenne d'une fonction continue par morceaux

**Lemme**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $J$  à valeurs réelles. Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $\varphi$  en escalier sur  $J$  telle que :

$$\varphi \leq f \quad \text{et} \quad N_1(f - \varphi) \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Il existe une fonction en escalier  $\psi$  telle que  $|f - \psi| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

La fonction  $\varphi = \psi - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  répond alors à la question. □

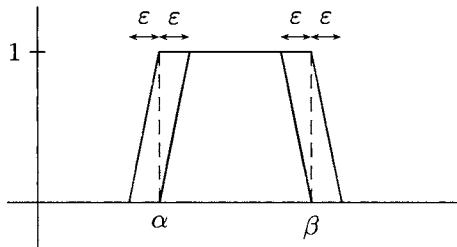
**Lemme**

Soit  $\varphi$  une fonction en escalier sur  $J$  et à valeurs réelles. Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $g$  continue sur  $J$  telle que :

$$g \leq \varphi \quad \text{et} \quad N_1(\varphi - g) \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Comme toute fonction en escalier est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'intervalles (éventuellement réduits à un point), il suffit de montrer que ces dernières peuvent être encadrées (attention au signe des coefficients de la combinaison linéaire) par deux fonctions continues les approchant d'aussi près que l'on veut pour  $N_1$ .

Pour cela, si  $\alpha \leq \beta$ , on encadre la fonction caractéristique d'un intervalle de bornes  $\alpha$  et  $\beta$  par deux fonctions affines par morceaux suivant le schéma :



(lorsque  $\alpha = \beta$ , il suffit de prendre la fonction nulle comme minorant) □

**Proposition 22**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $J$  à valeurs réelles. Pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction  $g$  continue sur  $J$  telle que :

$$g \leq f \quad \text{et} \quad N_1(f - g) \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** On commence par prendre une fonction  $\varphi$  en escalier telle que :

$$\varphi \leq f \quad \text{et} \quad N_1(f - \varphi) \leq \varepsilon/2$$

puis une fonction  $g$  continue telle que :

$$g \leq \varphi \quad \text{et} \quad N_1(g - \varphi) \leq \varepsilon/2. \quad \square$$

Ainsi, pour toute fonction  $f$  continue par morceaux, il existe une suite de fonctions continues, et une suite de fonctions en escalier convergeant en moyenne vers  $f$ .

*Exemple* Soit  $g$  une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , périodique de valeur moyenne  $\alpha$ . Montrons que pour toute fonction  $f$  continue par morceaux sur un segment  $[a, b]$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f(t) g(nt) dt = \alpha \int_{[a,b]} f.$$

- Pour le démontrer lorsque  $f$  est en escalier, il suffit de le vérifier, par linéarité et additivité, pour les fonctions constantes.

Soient donc  $a < b$  et  $k$  la partie entière de  $n(b - a)/T$  où  $T$  est une période strictement positive de  $g$ . Alors :

$$\int_a^b g(nt) dt = \int_a^{a+kT/n} g(nt) dt + \int_{a+kT/n}^b g(nt) dt.$$

Or :

$$\int_a^{a+kT/n} g(nt) dt = \frac{k}{n} \int_{na}^{na+kT} g(t) dt = \frac{kT}{n} \alpha$$

et :

$$\left| \int_{a+kT/n}^b g(nt) dt \right| \leq \left( b - a - \frac{kT}{n} \right) N_\infty(g).$$

Comme de plus :

$$b - a - \frac{T}{n} \leq \frac{kT}{n} \leq b - a$$

on en déduit que la première intégrale tend vers  $(b - a) \alpha$  et la deuxième vers 0 ce qui prouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(nt) dt = (b - a) \alpha = \alpha \int_{[a,b]} 1.$$

- Dans le cas général, on peut approcher la fonction continue par morceaux  $f$  par des fonctions en escalier. Soient donc  $\varepsilon > 0$  et  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  telle que  $N_1(f - \varphi) \leq \varepsilon$ . Alors :

$$\left| \int_a^b f(t) g(nt) dt - \int_a^b \varphi(t) g(nt) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| g(nt) dt \leq \varepsilon N_\infty(g).$$

D'autre part, d'après ce qui précède, il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_a^b \varphi(t) g(nt) dt - \alpha \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Comme enfin :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq N_1(f - \varphi) \leq \varepsilon,$$

on en déduit pour  $n \geq n_0$  :

$$\left| \int_a^b f(t) g(nt) dt - \alpha \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon (2N_\infty(g) + |\alpha| + 1)$$

ce qui prouve le résultat.

Nous retrouvons ainsi les résultats classiques (voir exercices du tome de première année) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(nt)| dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt.$$

### 3.5 Norme de la convergence en moyenne quadratique

On suppose ici  $F = \mathbb{C}$ , et l'on travaille dans l'espace vectoriel  $\mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ . Cette étude sera reprise dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens.

#### Proposition 23

L'application  $(f, g) \mapsto (f | g) = \int_J \bar{f} g$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ .

La norme associée est notée  $N_2$  et s'appelle *norme de la convergence en moyenne quadratique* :

$$N_2(f) = \sqrt{\int_J |f|^2}.$$

**Démonstration**

- ▶ Il s'agit évidemment d'une forme sesquilinéaire.
- ▶ Elle est positive, car  $|f|^2 = \bar{f} f$  est une fonction réelle positive, donc a une intégrale positive.
- ▶ Enfin, la fonction  $|f|^2$  étant positive continue, son intégrale ne peut être nulle que si  $f$  est nulle, ce qui prouve  $(f | f) = 0 \implies f = 0$  □

**Corollaire 24**

Si  $f$  et  $g$  sont des applications continues de  $J$  dans  $\mathbb{C}$ , on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_J \bar{f} g \right|^2 \leq \int_J |f|^2 \int_J |g|^2.$$

**Définition 7**

Une suite de fonctions continues  $(f_n)$  converge en moyenne quadratique vers  $f$  continue si elle converge pour la norme  $N_2$ , c'est-à-dire si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(f - f_n) = 0.$$

**Remarques**

- Sur  $\mathcal{CM}(J, \mathbb{C})$ , l'application  $(f, g) \mapsto (f | g) = \int_J \bar{f} g$  est une forme sesquilinéaire positive, mais ce n'est pas un produit scalaire puisqu'une fonction  $f$  nulle sauf en un nombre fini de points est telle que  $(f | f) = 0$ .
- On peut toutefois définir la semi-norme  $N_2$  et on conserve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- On dit qu'une suite de fonctions continues par morceaux  $(f_n)$  converge en moyenne quadratique vers  $f$  continue par morceaux si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(f - f_n) = 0.$$

**Proposition 25**

Si  $J = [a, b]$  avec  $a < b$ , on a :

$$N_2 \leq \sqrt{b-a} N_\infty \quad \text{et} \quad N_1 \leq \sqrt{b-a} N_2.$$

La convergence uniforme sur le segment  $J$  entraîne donc la convergence en moyenne quadratique, qui implique elle-même la convergence en moyenne.

**Démonstration**

- ▶ On a  $|f|^2 \leq N_\infty(f)^2$ , ce qui en intégrant donne le premier résultat.
- ▶ Le deuxième est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_J f \right|^2 \leq \int_J 1^2 \int_J |f|^2. \quad \square$$

**Remarques**

- Les normes  $N_2$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes pas plus que  $N_1$  et  $N_2$  puisque si  $f_n(x) = (x - a)^n$ , on a :

$$N_1(f_n) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}, \quad N_2(f_n) = \frac{(b-a)^{n+1/2}}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad N_\infty(f_n) = (b-a)^n.$$

- De même que pour la convergence en moyenne on peut montrer que  $(\mathcal{C}(J, F), N_2)$  n'est pas complet.

**3.6 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre****Théorème 26**

Soit  $f$  une application continue sur  $A \times J$ , où  $A$  est une partie d'un espace vectoriel normé.

Alors l'application  $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

**Démonstration** Il suffit de montrer que si  $(x_n)$  est une suite de  $A$  qui converge vers un élément  $a$  de  $A$ , alors  $F(x_n)$  converge vers  $F(a)$ . Pour cela, posons  $f_n(t) = f(x_n, t)$  et montrons que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f_\infty : t \mapsto f(a, t)$ .

Comme  $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$  est un compact, la fonction  $f$  est continue donc uniformément continue sur le compact  $K \times J$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  ; il existe donc  $\eta > 0$  tel que pour tous  $(x, x')$  de  $K$  et  $(t, t')$  de  $J$ , on ait :

$$(|t - t'| \leq \eta \quad \text{et} \quad \|x - x'\| \leq \eta) \implies \|f(x', t') - f(x, t)\| \leq \varepsilon.$$

À partir d'un certain rang, on aura  $\|x_n - a\| \leq \eta$  et donc :

$$\forall t \in J, |f(x_n, t) - f(a, t)| \leq \varepsilon,$$

soit  $N_\infty(f_n - f_\infty) \leq \varepsilon$ .

Ainsi, la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f_\infty$ . □

► **Attention** La continuité de  $f$  dans le théorème précédent est bien la continuité par rapport aux **deux** variables  $(x, t)$ , et non la continuité par rapport à  $t$  et la continuité par rapport à  $x$ .

**Exemples**

1. La fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$F(x) = \int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{x + \sin t} dt$$

est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  car la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{\sin^2 t}{x + \sin t} \end{aligned}$$

est continue sur  $\mathbb{R}_+^* \times [0, \pi]$ .

2. Montrons que  $F$  est prolongeable par continuité en 0 en posant :

$$F(0) = \int_0^\pi \sin t dt = 2.$$

Pour cela, il suffirait de prouver que la fonction  $f$  prolongée sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$  par  $f(0, t) = \sin t$  est continue sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$ , mais il est plus simple ici de montrer que si  $(x_n)$  est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0, la suite de fonctions  $f_n(t) = f(x_n, t)$  converge uniformément vers  $f(0, t)$  sur  $[0, \pi]$ .

Or, pour  $x > 0$  et  $0 \leq t \leq \pi$ , on a :

$$|f(x, t) - f(0, t)| = \left| \frac{x \sin t}{x + \sin t} \right| \leq x,$$

ce qui prouve que  $|f_n(t) - \sin t| \leq x_n$  et donc la convergence uniforme demandée.

**Proposition 27**

Si  $f$  est une application continue sur  $A \times I$ , où  $I$  est un intervalle quelconque, l'application :

$$(u, v, x) \mapsto \int_u^v f(x, t) dt$$

est continue sur  $I \times I \times A$ .

**Démonstration** En effet, on a :

$$\int_u^v f(x, t) dt = (v - u) \int_0^1 f(x, u + s(v - u)) ds$$

et l'application  $((u, v, x), s) \mapsto f(x, u + s(v - u))$  est continue sur  $(I \times I \times A) \times [0, 1]$ . □

## EXERCICES

1. Soit  $f$  non nulle continue et positive sur  $[a, b]$ . Notons  $M = \max_{[a,b]} f$ .

1. Montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\int_{[a,b]} f^n} = M.$$

2. On pose  $I_n = \int_{[a,b]} f^n$ . Montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = M.$$

2. Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et à valeurs strictement positives.

1. En utilisant  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , montrer qu'il existe une unique subdivision  $(x_k)$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \frac{1}{n} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Si  $g$  est continue sur  $[a, b]$ , comparer :

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(x_k).$$

3. Soit  $x$  un nombre complexe de module différent de 1. Calcul de :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{x - e^{it}}$$

1. en utilisant la décomposition en éléments simples de  $\frac{n X^{n-1}}{X^n - 1}$ ,

2. par intégration terme à terme d'une série.

4. Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$ .

1. Existence et comparaison de :

$$I_1 = \int_0^1 f(t) f'(t) \cot(\pi t) dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 f(t)^2 (1 + \cot^2(\pi t)) dt$$

2. Montrer :

$$\int_{[0,1]} f'^2 \geq \pi^2 \int_{[0,1]} f^2$$

en précisant les cas d'égalité.



5. Montrer qu'il existe des constantes  $A$  et  $B$  telles que pour toute fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on ait :

$$\sup_{\mathbb{R}} |f| \leq A \int_{[0,2\pi]} |f'| + B \int_{[0,2\pi]} |f|.$$

Le résultat subsiste-t-il pour les fonctions complexes ?

6. Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $g$  continue telle que :

$$\|g\|_{\infty} \leq 1 \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} fg \geq \int_{[a,b]} |f| - \varepsilon.$$

7. Soit  $f$  une fonction convexe sur  $\mathbb{R}$ . Étudier la convexité de :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

8. Soient  $a$  et  $b$  deux complexes, et  $E$  l'ensemble des fonctions  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{C})$  telles que  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$ .

Etudier  $\inf_{f \in E} \int_{[0,1]} |f'|^2$ .

9. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strictement croissante et continue. Montrer que :

$$\inf_{\mu} \int_a^b |f(t) - \mu| dt$$

est atteint pour  $\mu = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

10. Soit  $f$  une fonction continue par morceaux positive sur  $[0, 1]$ . Montrer :

$$\sqrt{1 + \left(\int_{[0,1]} f\right)^2} \leq \int_{[0,1]} \sqrt{1 + f^2} \leq 1 + \int_{[0,1]} f.$$

Interprétation géométrique lorsque  $f$  est une dérivée.

11. Trouver la limite de :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

12. Soit  $f$  une fonction continue et concave sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = 1$ . On veut montrer :

$$\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2. \quad (*)$$

1. Vérifier le résultat lorsque  $f$  est affine, et trouver l'unique fonction affine  $\varphi$  qui réalise l'égalité.
2. En posant  $f = g + \varphi$ , trouver une condition équivalente à (\*) portant sur  $g$ .
3. Conclure.

## Chapitre 14

# Dérivation et intégration

Le but de ce chapitre est de généraliser les propriétés liées à la dérivation et à la primitivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Pour cela, on considère des fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points, et à valeurs dans un espace vectoriel normé complet  $F$  (sur  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ ).

Les cas où  $F = \mathbb{R}$ ,  $F = \mathbb{C}$  ou  $F = \mathbb{R}^2$  ont déjà été vus en première année, et ce sont essentiellement ceux-là qui seront utilisés dans la pratique.

Lorsque  $F$  est de dimension finie  $n$ , on peut, au moyen d'une base  $\mathcal{B} = (e_i)$ , ramener l'étude d'une fonction  $f : I \rightarrow F$  à l'étude de ses  $n$  fonctions composantes, c'est-à-dire aux fonctions  $f_i$  à valeurs réelles ou complexes définies par :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_i f_i(x) e_i.$$

**Remarque** La complétude de  $F$  est inutile pour les notions de dérivée et de primitive. Elle n'est indispensable que pour l'existence des primitives et leur expression à l'aide d'une intégrale.

# 1. Dérivation

## 1.1 Dérivée en un point

Soit  $f : I \rightarrow F$  et  $a \in I$ .

### Définition 1

L'application  $f$  est *dérivable* en  $a$  si le *taux d'accroissement* en  $a$  défini par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite  $\ell \in F$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

Cette limite est alors appelée *dérivée* de  $f$  en  $a$  et se note :

$$f'(a) \quad , \quad Df(a) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(a).$$

Il est équivalent de dire qu'il existe un élément  $\ell \in F$  tel que l'on ait, au voisinage de  $a$  :

$$f(x) = f(a) + (x - a)\ell + o(x - a).$$

### Interpretations graphique et cinématique

- Lorsque  $f$  admet une dérivée non nulle en  $a$ , la courbe paramétrée par :

$$(t \in I) \mapsto (f(t) \in F)$$

admet au point  $f(a)$  une *tangente* dirigée par  $f'(a)$ .

- Lorsque la fonction  $f$  représente le mouvement d'un point matériel le vecteur  $f'(t_0)$  représente la *vitesse* du point à l'instant  $t_0$ .

### Proposition 1

Si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ , alors elle est continue en  $a$ .

**Démonstration** Après prolongement par continuité en  $a$  de la fonction  $\tau_a$  en posant  $\tau_a(a) = f'(a)$ , on a :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a)\tau_a(x)$$

ce qui prouve la continuité de  $f$  en  $a$  □

### Définition 2

La fonction  $f$  est *dérivable à droite* (respectivement *à gauche*) en  $a$  si la fonction  $\tau_a$  admet une limite à droite (respectivement à gauche) en  $a$ .

Cette limite est alors appelée *dérivée de  $f$  à droite* (respectivement *à gauche*) en  $a$ . On la note  $f'_d(a)$  (respectivement  $f'_g(a)$ ).

**Remarques**

- Si  $a$  est le plus petit élément de  $I$ , la notion de dérivabilité à gauche n’a pas de sens, puisque  $a$  n’est pas adhérent à  $I \cap ]-\infty, a[$ . D’un autre côté, la dérivabilité à droite en  $a$  d’une fonction  $f$  est équivalente à sa dérivabilité en  $a$  et alors  $f'_d(a) = f'(a)$ .
- De la même façon, si  $a$  est le plus grand élément de  $I$ , seule la dérivabilité à gauche a un sens, et elle est équivalente à la dérivabilité.

Ainsi, les notions de dérivabilité latérale n’ont d’intérêt que si  $a$  est un point intérieur à  $I$ .

**Resultats**

- La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche et que ses dérivées à droite et à gauche sont égales.
- Une fonction dérivable à droite (respectivement à gauche) en  $a$  est continue à droite (respectivement gauche) en  $a$ .
- Ainsi, une fonction dérivable à droite et à gauche en  $a$  est continue en  $a$ .

**1.2 Caractérisation des fonctions constantes**

**Théorème 2**

Une application est constante sur l’intervalle  $I$  si, et seulement si elle est dérivable avec une dérivée nulle.

**Démonstration** Le résultat est déjà connu pour les fonctions numériques, et donc lorsque  $F$  est de dimension finie en utilisant les fonctions composantes.

Montrons dans le cas général que si  $f$  est dérivable avec une dérivée nulle, alors elle est constante (la réciproque est évidente).

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $a \in I$ . Considérons :

$$A = \{x \in I \mid \forall t \in [a, x], \|f(t) - f(a)\| \leq \varepsilon |t - a|\}.$$

L’ensemble  $A$  est un intervalle contenant  $a$ , fermé relativement à  $I$  puisque  $f$  est continue. Supposons  $A \neq I$ , par exemple  $b = \sup A < \sup I$ . Alors  $b \in A$  puisque  $A$  est fermé dans  $I$ , et comme  $f'(b) = 0$ , on a au voisinage de  $b$  :

$$\left\| \frac{f(t) - f(b)}{t - b} \right\| \leq \varepsilon.$$

Pour  $t > b$  suffisamment proche de  $b$ , on en déduit :

$$\|f(t) - f(a)\| \leq \|f(t) - f(b)\| + \|f(b) - f(a)\| \leq \varepsilon(t - b) + \varepsilon(b - a) = \varepsilon(t - a)$$

ce qui prouve que  $t$  appartient à  $A$  et contredit de fait que  $b$  est la borne supérieure de  $A$

Donc  $A = I$ , ce qui prouve, pour  $x \in I$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon |x - a|$$

et donc  $f(x) = f(a)$ .

L'application  $f$  est donc constante sur  $I$ . □

### 1.3 Fonctions de classe $C^1$

L'application  $f$  est dérivable sur  $I$  si elle est dérivable en tout point de  $I$ . Sa dérivée est alors l'application, notée  $f'$ ,  $Df$  ou  $\frac{df}{dx}$  qui associe à tout point  $a$  de  $I$  la dérivée de  $f$  en  $a$ .

On note  $C^1(I, F)$  l'ensemble des applications de classe  $C^1$  ou *continûment dérivables* sur  $I$ , c'est-à-dire dérivables sur  $I$  avec une dérivée continue sur  $I$

#### Proposition 3

$C^1(I, F)$  est un espace vectoriel, et la dérivation  $D : C^1(I, F) \rightarrow C(I, F)$  est une application linéaire.

**Démonstration** Conséquence immédiate de la linéarité de la limite. □

Les résultats qui suivent sont énoncés et démontrés pour des fonctions de classe  $C^1$ , mais sont vrais dans le cadre plus général des fonctions dérivables. La première partie des démonstrations qui suivent en donnent alors la preuve.

#### Proposition 4

Soit  $T$  une application linéaire continue de  $F$  dans un espace vectoriel  $G$ .  
Si  $f \in C^1(I, F)$  alors  $T \circ f \in C^1(I, G)$ .

#### Démonstration

- ▶ Si  $\tau_a$  est le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$ , alors  $T \circ \tau_a$  est le taux d'accroissement de  $T \circ f$  en  $a$ . La dérivabilité de  $T \circ f$  en  $a$  est donc une conséquence de la continuité de  $T$  et du théorème de composition des limites
- ▶ La dérivée de  $T \circ f$  est alors  $T \circ f'$  qui est continue comme composée de fonctions continues □

**Remarque** Lorsque  $F$  est de dimension finie, il est inutile de vérifier la continuité de  $T$ , puisque toute application linéaire sur  $F$  est continue

**Exemples**

1. Si  $F$  est de dimension finie, les fonctions composantes  $f_i$  d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  associées à une base  $\mathcal{B} = (e_i)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , puisque  $f_i = e_i^* \circ f$  avec  $e_i^*$  une forme linéaire. Leurs dérivées sont alors les fonctions composantes de  $f'$ .
2. Soit  $\Gamma$  est une courbe plane biregulière munie d'un paramétrage normal  $s$ . Si l'on note  $(\vec{T}, \vec{N})$  la base de Frénet de  $\Gamma$  on a  $\frac{d\vec{T}}{ds} = C \vec{N}$  où  $C$  est la courbure.  
Comme  $\vec{N} = \mathcal{R}(\vec{T})$  où  $\mathcal{R}$  est la rotation d'angle  $\pi/2$ , on en déduit :

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \mathcal{R}(C \vec{N}) = -C \vec{T}.$$

**Proposition 5**

Soient  $F, G$  et  $H$  trois espaces vectoriels et  $B$  une application bilinéaire continue de  $F \times G$  dans  $H$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$  et  $g \in \mathcal{C}^1(I, G)$ , alors  $B(f, g) \in \mathcal{C}^1(I, H)$  et :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

**Démonstration**

► Si  $a$  et  $x$  sont deux points distincts de  $I$ , on a :

$$\frac{B(f(x), g(x)) - B(f(a), g(a))}{x - a} = B\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, g(x)\right) + B\left(f(a), \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right)$$

ce qui prouve la dérivabilité de  $B(f, g)$ , avec :

$$B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

puisque  $B$  est continue.

► La dérivée de  $B(f, g)$  est alors  $B(f', g) + B(f, g')$  qui est continue par les théorèmes généraux. □

**Exemples**

1. Si  $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  et  $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ , alors  $\lambda f \in \mathcal{C}^1(I, F)$  et :

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'.$$

2. Soit  $F$  un espace vectoriel euclidien.

- Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $(f | g)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$(f | g)' = (f' | g) + (f | g').$$

- En particulier, si  $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ , l'application  $\|f\|_2^2$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et l'on a :

$$\left(\|f\|_2^2\right)' = 2(f | f').$$

- Si  $f(x)$  est normé pour tout  $x \in I$ , alors les vecteurs  $f(x)$  et  $f'(x)$  sont orthogonaux.

3. Soient  $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$  et  $\Phi$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et à valeurs dans l'espace vectoriel  $\mathcal{L}_c(I, E)$  des endomorphismes continus de  $E$ , muni de la norme subordonnée. L'application  $(u, x) \mapsto u(x)$  est bilinéaire continue sur  $\mathcal{L}_c(I, E) \times E$  puisque :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(I, E), \forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$$

et donc l'application  $t \mapsto \Phi(t)(f(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , de dérivée :

$$t \mapsto \Phi'(t)(f(t)) + \Phi(t)(f'(t)).$$

4. On démontre facilement par récurrence sur  $p$  que si  $\varphi$  est une application  $p$ -linéaire sur  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ , et  $f_1, f_2, \dots, f_p$  des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  respectivement à valeurs dans  $E_1, E_2, \dots, E_p$ , alors  $\varphi(f_1, f_2, \dots, f_p)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et :

$$\left(\varphi(f_1, f_2, \dots, f_p)\right)' = \varphi(f_1', f_2, \dots, f_p) + \varphi(f_1, f_2', \dots, f_p) + \dots + \varphi(f_1, f_2, \dots, f_p').$$

5. En particulier, si  $\mathcal{B}$  est une base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $p$ , et si  $f_1, f_2, \dots, f_p$  sont des éléments de  $\mathcal{C}^1(I, E)$ , alors  $\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \dots, f_p)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et :

$$\begin{aligned} \left(\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \dots, f_p)\right)' &= \det_{\mathcal{B}}(f_1', f_2, \dots, f_p) + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2', \dots, f_p) \\ &\quad + \dots + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \dots, f_p'). \end{aligned}$$

### Proposition 6

Soient  $F$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $\mathcal{B}$  une base de  $F$ . Une application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  si, et seulement si, ses fonctions composantes dans  $\mathcal{B}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Les fonctions composantes de  $f'$  sont alors les dérivées des fonctions composantes de  $f$ .

### Démonstration

- On a déjà vu (exemple 1. page précédente) que les fonctions composantes d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .



► Si les fonctions composantes  $f_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , l'égalité :

$$f = \sum_i f_i e_i$$

montre que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que l'on a :

$$f' = \sum_i f'_i e_i.$$

□

**Exemple** Soit  $f$  une fonction complexe. On a équivalence entre les trois propositions suivantes :

- $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$
- $\operatorname{Re} f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  et  $\operatorname{Im} f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ .
- $\bar{f} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$

On a alors :

$$D(\bar{f}) = \overline{Df} \quad \text{et} \quad Df = D(\operatorname{Re} f) + i D(\operatorname{Im} f)$$

**Proposition 7**

Étant données deux intervalles  $I$  et  $J$ , ainsi que deux fonctions  $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  telles que  $\varphi(J) \subset I$ , la fonction  $f \circ \varphi$  est élément de  $\mathcal{C}^1(J, F)$ , et l'on a :

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi).$$

**Démonstration** Comme pour les fonctions numériques

► **Attention** Bien écrire  $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$  lorsque  $f$  est une fonction vectorielle, le produit  $(f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$  n'ayant de sens que lorsque  $f$  est à valeurs dans  $\mathbf{K}$ . □

### 1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

**Définition 3**

Une fonction est de classe :

- $\mathcal{C}^0$  sur  $I$  si elle est continue sur  $I$  ;
- $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , si elle est dérivable sur  $I$  et que sa dérivée est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  sur  $I$  ;
- $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  si elle est de classe  $\mathcal{C}^k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Notation** Si  $k \in \mathbb{N}$ , on note :

- ▶  $\mathcal{C}^k(I, F)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et à valeurs dans  $F$  ;
- ▶  $f^{(k)}$ ,  $D^k f$  ou  $\frac{d^k f}{dx^k}$  la *dérivée  $k^{\text{ème}}$*  d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^k(I, F)$  ;
- ▶  $\mathcal{C}^\infty(I, F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, F)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  et à valeurs dans  $F$

**Remarques**

- On a évidemment  $\mathcal{C}^k(I, F) \subset \mathcal{C}^l(I, F)$  pour tout  $(k, l)$  tel que  $k \geq l$ .
- Une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est aussi dite *indéfiniment dérivable*.

**Proposition 8**

- Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $\mathcal{C}^k(I, F)$  est un espace vectoriel.
- Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , la dérivation est une application linéaire de  $\mathcal{C}^k(I, F)$  dans  $\mathcal{C}^{k-1}(I, F)$ .

**Démonstration** Conséquence de la proposition 3 page 502. □

Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

**Proposition 9**

Soient  $F$ ,  $G$  et  $H$  trois espaces vectoriels et  $B$  une application bilinéaire continue de  $F \times G$  dans  $H$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^k(I, F)$ ,  $g \in \mathcal{C}^k(I, G)$ , alors  $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, H)$  ses dérivées d'ordre  $n \leq k$  étant données par la *formule de Leibniz* :

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{p=0}^n C_n^p B(f^{(p)}, g^{(n-p)}).$$

**Démonstration** Démontrons ce résultat par récurrence sur  $k$ .

- ▶ La propriété est évidente pour  $k = 0$
- ▶ Supposons le résultat vrai pour un entier naturel  $k$  et considérons deux fonctions  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, F)$  et  $g \in \mathcal{C}^{k+1}(I, G)$ . Ces fonctions sont donc de classe  $\mathcal{C}^k$ , et l'hypothèse de récurrence permet d'écrire, pour  $n \leq k$  :

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{p=0}^n C_n^p B(f^{(p)}, g^{(n-p)}).$$

La fonction  $(B(f, g))^{(n)}$  est une combinaison linéaire d'images par  $B$  de couples de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Par suite  $B(f, g)$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  et l'on a :

$$\begin{aligned} (B(f, g))^{(n+1)} &= \left( \sum_{p=0}^n C_n^p B(f^{(p)}, g^{(n-p)}) \right)' \\ &= \sum_{p=0}^n C_n^p \left( B(f^{(p)}, g^{(n-p+1)}) + B(f^{(p+1)}, g^{(n-p)}) \right) \\ &= C_n^0 B(f, g^{(n+1)}) + C_n^n B(f^{(n+1)}, g) \\ &\quad + \sum_{p=1}^n (C_n^p + C_n^{p-1}) B(f^{(p)}, g^{(n-p+1)}) \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p B(f^{(p)}, g^{(n+1-p)}) \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat pour  $k + 1$ . □

**Corollaire 10**

$\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$  est une algèbre.

**Proposition 11**

Étant donnés deux intervalles  $I$  et  $J$ , ainsi que deux fonctions  $f \in \mathcal{C}^k(I, F)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$  telles que  $\varphi(J) \subset I$ , la fonction  $f \circ \varphi$  est élément de  $\mathcal{C}^k(J, F)$ .

**Démonstration** Comme pour les fonctions numériques en utilisant la proposition 7 page 505 □

**1.5 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux**

On suppose que  $J = [a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 4**

Une application  $f : J \rightarrow F$  est dite sur  $J$  s'il existe une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $J$  telle que la restriction de  $f$  à chacun des intervalles  $]a_{i-1}, a_i[$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $[a_{i-1}, a_i]$ . Une telle subdivision est dite *adaptée* à  $f$ .

Une fonction  $f$  de classe  $C^k$  par morceaux est donc de classe  $C^k$  au voisinage de tout point n'appartenant pas à une subdivision adaptée à  $f$ . Cela permet de définir les *dérivées successives* de  $f$  sur  $J$  privé d'un nombre fini de points :

### Définition 5

Si  $f$  est de classe  $C^k$  par morceaux sur  $J$ , on note  $D^j f$  ( $1 \leq j \leq k$ ) les de  $f$  définies en tout point au voisinage duquel  $f$  est de classe  $C^k$ .

Ce sont des fonctions définies sur  $J$  privé d'une partie finie.

### Exemples

1. Une fonction de classe  $C^k$  est de classe  $C^k$  par morceaux et ses dérivées successives sont ses dérivées au sens usuel.
2. Une fonction en escalier est  $C^\infty$  par morceaux, et ses dérivées successives sont nulles.
3. Supposons  $f \in C^{k-1}(I, F)$  de classe  $C^k$  par morceaux sur  $I$ . Pour  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la dérivée  $f^{(j)}$  est de classe  $C^{k-j}$  par morceaux et  $D^k f = D^{k-j}(f^{(j)})$ .

### Définition 6

Une fonction  $f$  est de classe  $C^k$  par morceaux sur un intervalle  $I$  quelconque, si sa restriction à tout segment de  $I$  est de classe  $C^k$  par morceaux.

On note  $D^j f$  ( $1 \leq j \leq k$ ) les dérivées successives de  $f$  définies en tout point au voisinage duquel  $f$  est de classe  $C^k$ .

Ce sont des fonctions définies sur  $J$  privé d'une partie dont la trace sur tout segment de  $I$  est finie.

### Exemples

1. Les fonctions en escalier sont les fonctions de classe  $C^1$  par morceaux dont la dérivée est nulle.
2. En particulier, si  $f$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux alors  $f$  est constante si, et seulement si,  $Df = 0$ .

**Remarque** Si une fonction  $f$  est de classe  $C^k$  par morceaux sur  $I$ , sa dérivée se prolonge sur  $I$  en une fonction de classe  $C^{k-1}$  par morceaux. En effet, si  $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$  se prolonge en une fonction  $f_i \in C^k([x_{i-1}, x_i])$ , sa dérivée se prolonge sur  $[x_{i-1}, x_i]$  en la fonction  $f'_i$  de classe  $C^{k-1}$ .

## 2. Primitives et intégrale

### 2.1 Primitives des fonctions continues

#### Définition 7

Une application  $g$  de  $I$  dans  $F$  est une *primitive* de  $f \in \mathcal{C}(I, F)$  si  $g$  est dérivable sur  $I$  avec  $g' = f$ .

#### Proposition 12

Deux primitives sur  $I$  d'une même fonction  $f$  continue diffèrent d'une constante.

**Démonstration** En effet, la dérivée de leur différence est nulle sur l'intervalle  $I$ . □

### 2.2 Théorème fondamental

#### Théorème 13

Soient  $f \in \mathcal{C}(I, F)$  et  $a \in I$

1. L'application  $g_a$ :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

2. Pour toute primitive  $g$  de  $f$ , et tout couple  $(\alpha, \beta)$  de  $I^2$ , on a :

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt = g(\beta) - g(\alpha).$$

#### Démonstration

1. L'unicité est une conséquence de la proposition 12. Vérifions que  $g_a$  est dérivable, et que sa dérivée est  $f$ .

Soient  $x_0 \in I$  et  $\varepsilon > 0$ . Par continuité de  $f$  en  $x_0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall t \in I, |t - x_0| \leq \eta \implies \|f(t) - f(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour  $|x - x_0| \leq \eta$  :

$$\begin{aligned} \|g_a(x) - g_a(x_0) - (x - x_0) f(x_0)\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(t) dt - (x - x_0) f(x_0) \right\| \\ &= \left\| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right\| \\ &\leq \int_{[x, x_0]} \|f - f(x_0)\| \\ &\leq \varepsilon |x - x_0| \end{aligned}$$

soit, pour  $0 < |x - x_0| \leq \eta$  :

$$\left\| \frac{g_a(x) - g_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right\| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_a(x) - g_a(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

2. Le résultat est évident pour l'application  $g_a$  d'après la relation de Chasles. Il est vrai pour toute primitive, puisqu'elles diffèrent toutes de  $g_a$  d'une constante  $\square$

### Corollaire 14

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , on a, pour tout  $(a, b) \in I$  :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

## 2.3 Cas des fonctions continues par morceaux

### Définition 8

On appelle *primitive* de  $f$  continue par morceaux sur  $I$ , toute application  $g$  continue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $I$  telle qu'en tout point  $x$  de continuité de  $f$ , la fonction  $g$  soit dérivable avec  $g'(x) = f(x)$ .

Si  $g$  est une primitive de  $f$  continue par morceaux sur  $I$ , la fonction  $Dg$  est définie et coïncide avec  $f$  en tout point de continuité de  $f$ .

**Méthode** Dans la pratique, pour démontrer que  $g$  est une primitive de  $f$  sur un segment  $J$ , il suffit de vérifier que  $g$  est continue et qu'il existe une partie  $A$  finie telle que  $g$  soit dérivable en tout point n'appartenant pas à  $A$ , et que l'on ait :

$$\forall x \in J \setminus A, g'(x) = f(x).$$

En effet si  $f$  est continue en un point  $a$  de  $A$ , alors  $g$  est dérivable en  $a$  et  $g'(a) = f(a)$  comme on le montrera au corollaire 20 page 513, puisque  $g$  est continue et que  $g'_{|_{J \setminus A}}$  coïncide au voisinage de  $a$  avec la fonction  $f$  continue en  $a$ , donc admet  $f(a)$  pour limite en  $a$ .

### Proposition 15

Deux primitives de  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  diffèrent d'une constante.

**Démonstration** Si  $g$  et  $h$  sont deux primitives de  $f$ , l'application  $h - g$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, et a une dérivée nulle. Elle est donc constante □

**Proposition 16**

Soient  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  et  $a \in I$ .

1. L'application  $g_a$ :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

2. Pour toute primitive  $g$  de  $f$ , et tout couple  $(\alpha, \beta)$  de  $I^2$ , on a :

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt = g(\beta) - g(\alpha).$$

**Démonstration**

1. L'unicité provient de la proposition 15 page précédente

La fonction  $g_a$  est continue car localement lipschitzienne, la fonction  $f$  étant localement bornée.

Soit  $x$  un point de continuité de  $f$  intérieur à  $I$ . Il existe un intervalle  $]\alpha, \beta[$  contenant  $x$  tel que la fonction  $f$  se prolonge en une fonction  $f_0$  continue sur  $[\alpha, \beta]$ . On a ainsi :

$$g_a(x) = g_a(\alpha) + \int_\alpha^x f_0(t) dt$$

ce qui prouve que  $g_a$  est dérivable en  $x$  avec :

$$g'_a(x) = f_0(x) = f(x).$$

On raisonne de façon similaire lorsque  $x$  est une borne de  $I$

2. Comme pour les fonctions continues. □

**Remarque** En reprenant les notations de la démonstration précédente, on a de plus que la restriction de  $g_a$  à  $[\alpha, \beta]$  est dérivable et a pour dérivée  $f_0$ . On en déduit que  $g_a$  est dérivable à droite en  $\alpha$  et à gauche en  $\beta$ , avec  $(g_a)'_d(\alpha) = f(\alpha^+)$  et  $(g_a)'_g(\beta) = f(\beta^-)$ .

Les primitives de  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  sont donc dérivables à droite et à gauche en tout point  $x$  de  $I$ , avec pour dérivées à droite et à gauche respectivement  $f(x^+)$  et  $f(x^-)$ .

Elles sont en particulier dérivables en tout point où ces deux limites sont égales (même si  $f$  est discontinue en ce point).

Rappelons que si une fonction définie sur un segment  $[a, b]$  sauf en un nombre fini de points se prolonge en une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ , on peut définir son intégrale sur  $[a, b]$  comme l'intégrale de n'importe lequel de ces prolongements, puisque deux fonctions continues par morceaux égales sauf en un nombre fini de points ont des intégrales égales.

On peut en particulier définir l'intégrale sur un segment de la dérivée d'une fonction de classe  $C^1$  par morceaux.

### Proposition 17

Si  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux et **continue** sur  $I$  alors pour tout  $(a, b) \in I$ , on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b Df(t) dt.$$

**Démonstration** Le cas  $a = b$  étant évident, supposons (par exemple)  $a < b$ . Soit  $(x_i)$  une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ . Sur chaque intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ , la fonction  $f$  se prolonge en une fonction  $f_i$  de classe  $C^1$  sur le segment  $[x_{i-1}, x_i]$ , mais puisque  $f$  est continue sur ce segment, ce prolongement est la restriction de  $f$  à  $[x_{i-1}, x_i]$ . On a donc :

$$\int_{[x_{i-1}, x_i]} Df = \int_{[x_{i-1}, x_i]} f'_i = f_i(x_i) - f_i(x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

En sommant ces égalités, on obtient le résultat. □

## 2.4 Inégalité des accroissements finis

### Théorème 18

Soit  $f \in C^0(I, F)$  de classe  $C^1$  à l'intérieur de  $I$ . Si  $a$  et  $b$  sont deux points de  $I$ , et si l'on a :

$$\forall x \in [a, b], \|f'(x)\| \leq \lambda,$$

alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda |b - a|.$$

### Démonstration

► Si  $a$  et  $b$  sont à l'intérieur de  $I$ , on a :

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f'\| \leq \lambda |b - a|.$$



► Dans le cas général, on écrit, pour  $(x, y) \in ]a, b[$  :

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \lambda |y - x|$$

et l'on passe à la limite quand  $x$  et  $y$  tendent respectivement vers  $a$  et  $b$  la fonction  $f$  étant continue en  $a$  et  $b$ . □

**Remarque** En utilisant une méthode similaire à celle employée dans la démonstration du théorème 2 page 501 (caractérisation des fonctions constantes), on peut démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas où la fonction est seulement supposée dérivable sur  $I$  (cf. exercice 1 page 535).

**Interprétation cinématique** Un mobile qui se déplace à une vitesse instantanée inférieure à  $v$  pendant un temps  $t$ , se trouve au maximum à une distance  $vt$  de son point de départ.

### Corollaire 19

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I, F)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $I$ . Si  $a$  et  $b$  sont deux points de  $I$ , et si  $Df$  est bornée par  $\lambda$  sur  $[a, b]$ , on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda |b - a|.$$

**Démonstration** Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à chacun des intervalles d'une subdivision adaptée à  $f$ , sur lequel la fonction  $f$  est continue et de classe  $\mathcal{C}^1$

On peut aussi reprendre la démonstration précédente en prolongeant  $Df$  sur  $[a, b]$  en une fonction  $g$  bornée par  $\lambda$  (il suffit de poser  $g = 0$  aux points où  $f$  n'est pas dérivable). □

### Corollaire 20

Soient  $f$  une application continue sur  $I$  et  $a$  un point de  $I$  tel que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \setminus \{a\}$ .

Si  $f'_{I \setminus \{a\}}$  a une limite  $\ell$  en  $a$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et donc  $f'(a) = \ell$ .

**Démonstration** Il suffit de montrer que  $f$  est dérivable en  $a$ , et que  $f'(a) = \ell$ , c'est-à-dire que la fonction  $g = f - \ell$  a une dérivée nulle en  $a$ .

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour  $x > a$  :

$$\left\| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right\| \leq \sup_{I_x} \|g'\|$$

où  $I_x$  est l'intervalle ouvert de bornes  $a$  et  $x$ . Puisque  $g'$  tend vers 0 en  $a$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sup_{I_x} \|g'\| = 0$$

ce qui prouve le résultat. □

### Corollaire 21

Soient  $f$  une application continue sur  $I$  et  $a$  un point de  $I$  tel que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I \setminus \{a\}$ .

Si pour tout  $r \leq k$ , la dérivée  $f^{(r)}$  a une limite en  $a$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

**Démonstration** Il suffit d'appliquer le corollaire précédent, successivement aux fonctions  $f, f', \dots$  □

**Exemples** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , et  $f$  une application définie sur  $]a, b]$ .

1. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]a, b]$  et si  $f'$  admet une limite en  $a$ , alors  $f$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .

En effet, la fonction  $f'$  est bornée au voisinage de  $a$ , donc sur  $]a, b]$  puisqu'elle y est continue. La fonction  $f$  est donc lipschitzienne et la proposition 18 page 393 permet de la prolonger par continuité sur  $[a, b]$ . Le corollaire 20 page précédente montre alors que ce prolongement est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

2. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $]a, b]$  et si  $f^{(k)}$  admet une limite en  $a$ , alors  $f$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $[a, b]$ .

On montre en effet de la même façon que les fonctions  $f^{(k)}, f^{(k-1)}, \dots, f', f$  admettent successivement des limites en  $a$ , ce qui permet de prolonger  $f$  par continuité sur  $[a, b]$  en une fonction qui est donc de classe  $\mathcal{C}^k$  d'après le corollaire précédent.

3. Bien noter que dans ces deux exemples, il est capital d'avoir supposé que  $a$  est une borne de l'intervalle. Par exemple, la fonction signe  $\text{sgn} : x \mapsto x/|x|$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et a une dérivée nulle sur  $\mathbb{R}^*$ , sans pour autant qu'elle soit prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$ .

## 2.5 Théorème du relèvement

### Théorème 22

Soit  $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$  avec  $k \geq 1$  telle que  $\forall t \in I, |f(t)| = 1$ . Il existe une fonction  $\alpha \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$  telle que :

$$\forall t \in I, f(t) = e^{i\alpha(t)}.$$

De plus, une telle fonction est unique à une constante additive multiple de  $2\pi$  près.

### Démonstration

**Unicité.** Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux telles fonctions, alors

$$\forall t \in I, e^{i\alpha_1(t)} = e^{i\alpha_2(t)},$$

ce qui prouve que la fonction  $\alpha_1 - \alpha_2$  est à valeurs dans  $2\pi\mathbb{Z}$ . Comme elle est continue, on en déduit qu'elle est constante, égale donc à un multiple de  $2\pi$ .

**Existence.** Posons, pour  $t_0 \in I$  :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du,$$

où  $\alpha_0$  est un argument de  $f(t_0)$ , c'est-à-dire est tel que  $f(t_0) = e^{i\alpha_0}$  (la fonction  $f$  est de module 1).

La fonction  $\alpha$  est une primitive (*a priori* complexe) de la fonction  $f'/if$  qui appartient à  $\mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{C})$ . Donc  $\alpha \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$  et l'on a  $\alpha' = f'/if$ .

En posant  $g = f e^{-i\alpha}$ , on a  $g' = e^{-i\alpha}(f' - i\alpha'f) = 0$ . Donc la fonction  $g$  est constante sur l'intervalle  $I$ , et puisque  $g(t_0) = f(t_0) e^{-i\alpha_0} = 1$  on en déduit que  $g$  vaut 1 sur  $I$ . Par suite :

$$\forall t \in I, f(t) = e^{i\alpha(t)}.$$

Enfin  $\alpha$  est à valeurs réelles puisque pour tout  $t \in I$  :

$$e^{-\text{Im}(\alpha(t))} = |e^{i\alpha(t)}| = |f(t)| = 1. \quad \square$$

### Corollaire 23

Si  $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$  (avec  $k \geq 1$ ) ne s'annule pas sur  $I$ , alors il existe deux fonctions réelles  $\rho$  et  $\theta$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ , telle que pour tout  $t \in I$  :

$$\rho(t) > 0 \quad \text{et} \quad f(t) = \rho(t) e^{i\theta(t)}.$$

**Démonstration** Comme  $f$  est de classe  $C^k$  et ne s'annule pas, la fonction  $\rho = f/|f|$  est de classe  $C^k$ , et le théorème du relèvement fournit une fonction  $\theta$  de classe  $C^k$  telle que :

$$\frac{f}{|f|} = e^{i\theta},$$

ce qui prouve le résultat □

### Exemples

1. Le mouvement d'un pendule se faisant sur un cercle, on peut représenter sa position par son angle avec la verticale, et si le mouvement est de classe  $C^k$ , alors cette fonction est aussi de classe  $C^k$ .
2. Dans l'étude d'un mouvement plan ne passant pas par l'origine, on peut représenter le mobile par ses coordonnées polaires  $r(t)$  et  $\theta(t)$ .
3. On a déjà utilisé ce résultat en première année pour calculer la courbure d'un arc paramétré plan en fonction de l'angle  $\alpha$  que fait la tangente avec l'axe  $Ox$  :

$$C = \frac{d\alpha}{ds}.$$

**Remarque** La démonstration du théorème du relèvement s'applique naturellement aussi dans le cas d'une fonction continue de classe  $C^1$  par morceaux. L'exemple suivant montre comment, grâce à une approximation par des fonctions affines par morceaux, on peut démontrer le théorème du relèvement dans le cas des fonctions continues.

**Exemple** Soit  $f \in C^0([a, b], \mathbb{C})$  telle que :

$$\forall t \in [a, b], |f(t)| = 1.$$

On sait qu'il existe une suite  $(f_n)$  de fonctions continues affines par morceaux convergeant uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$ . On peut de plus supposer  $f_n(a) = f(a)$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, N_\infty(f - f_n) \leq \frac{1}{4}$$

de sorte, en particulier, que les fonctions  $f_n$  ne s'annulent pas.

Les fonctions  $g_n = f_n/|f_n|$  sont donc des fonctions continues de classe  $C^1$  par morceaux et de module 1. Il existe donc une suite  $(\varphi_n)$  de fonctions réelles continues et  $C^1$  par morceaux telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], g_n(t) = e^{i\varphi_n(t)}$$

et l'on peut, quitte à ajouter un multiple de  $2\pi$  à  $\varphi_n$ , supposer  $\varphi_n(a) = \alpha_0$ , où  $\alpha_0$  est un argument de  $f(a) = f_n(a) = g_n(a)$ .

Pour  $t \in [a, b]$ , prenons  $\varphi(t)$  l'argument de  $f(t)$  le plus proche de  $\varphi_0(t)$ . Comme :

$$\begin{aligned} |f(t) - g_0(t)| &\leq |f(t) - f_0(t)| + |f_0(t) - g_0(t)| \\ &\leq N_\infty(f - f_0) + N_\infty(|f_0| - |f|) \\ &\leq \frac{1}{2} \leq 1 \end{aligned}$$

on en déduit  $|\varphi(t) - \varphi_0(t)| \leq \pi/3$ .

De la même façon, on a pour tout  $n$  :

$$|g_0(t) - g_n(t)| \leq |g_0(t) - f(t)| + |g_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ce qui prouve que pour tout  $t$ , on a  $|\varphi_n(t) - \varphi_0(t)|$  inférieur à  $\pi/3$  modulo  $2\pi$ . Comme la fonction  $\varphi_n - \varphi_0$  est continue et nulle en  $a$ , on en déduit :

$$\forall t \in [a, b], |\varphi_0(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{\pi}{3}.$$

Ainsi, on a pour tout  $n$  l'inégalité  $|\varphi - \varphi_n| \leq |\varphi - \varphi_0| + |\varphi_0 - \varphi_n| \leq \pi$ , ce qui donne :

$$|e^{i\varphi} - e^{i\varphi_n}| = 2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_n}{2} \right| \geq \frac{2}{\pi} |\varphi - \varphi_n|$$

puisque par concavité de la fonction sinus sur  $[0, \pi/2]$ , on a :

$$\forall x \in [0, \pi/2], \sin x \geq \frac{2}{\pi} x.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} N_\infty(\varphi - \varphi_n) &\leq N_\infty(f - g_n) \\ &\leq N_\infty(f - f_n) + N_\infty(g_n - f_n) \\ &\leq N_\infty(f - f_n) + N_\infty(|f| - |f_n|) \\ &\leq 2N_\infty(f - f_n) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite  $(\varphi_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $\varphi$ , et donc que la fonction  $\varphi$  qui vérifie :

$$\forall t \in [a, b], f(t) = e^{i\varphi(t)}$$

est continue.

### 3. Calcul d'intégrales

Le calcul de l'intégrale d'une fonction  $f$  continue (par morceaux) se ramène, d'après le théorème fondamental au calcul d'une primitive de  $f$ . On dispose pour ceci de deux méthodes importantes : l'intégration par parties et le changement de variable.

■ **Notation** Si  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $I$ , l'expression  $\int f(x) dx$  représente une primitive de  $f$ .

### 3.1 Intégration par parties

#### Proposition 24

Soient  $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$  et  $g \in \mathcal{C}^1(I, G)$ , où  $F$  et  $G$  sont deux espaces vectoriels normés complets. Si  $B$  est une application bilinéaire continue de  $F \times G$  dans un espace vectoriel norme complet  $H$ , on a :

$$\int B(f'(x), g(x)) dx = B(f(x), g(x)) - \int B(f(x), g'(x)) dx.$$

En particulier si  $a$  et  $b$  sont deux points de  $I$ , on a :

$$\int_a^b B(f'(x), g(x)) dx = B(f(b), g(b)) - B(f(a), g(a)) - \int_a^b B(f(x), g'(x)) dx.$$

**Démonstration** Ce n'est qu'une autre écriture de la formule :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$$

et l'application du théorème fondamental. □

Comme la formule de dérivation d'un produit est valable aussi pour des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, on peut généraliser ce résultat :

#### Proposition 25

Soient  $F$ ,  $G$  et  $H$  trois espaces vectoriels normés complets, ainsi que  $f \in \mathcal{C}^0(I, F)$  et  $g \in \mathcal{C}^0(I, G)$ , toutes deux de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $I$ . Si  $B$  est une application bilinéaire continue de  $F \times G$  dans  $H$ , on a, pour tout  $(a, b) \in I^2$  :

$$\int_a^b B(Df(x), g(x)) dx = B(f(b), g(b)) - B(f(a), g(a)) - \int_a^b B(f(x), Dg(x)) dx.$$

**Applications**

- Dans le calcul d’une primitive de  $P(x) \ln x$ ,  $P(x) \arctan x$ ,  $P(x) \arcsin x, \dots$  où  $P$  est un polynôme, on intègre  $P$  et l’on dérive l’autre fonction
- Dans le calcul d’une primitive de  $P(x) e^x$ ,  $P(x) \sin x$ ,  $P(x) \operatorname{ch} x, \dots$  où  $P$  est un polynôme, on dérive  $P$  pour diminuer son degré.

**3.2 Changement de variable**

**Proposition 26**

Soient  $\varphi$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  d’un intervalle  $J$  dans  $I$  et  $f$  une application continue sur  $I$ .

Pour tout  $(a, b) \in J^2$ , on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$$

**Démonstration** Soient  $a \in J$  et :

$$g(x) = \int_{\varphi(a)}^x f(u) du$$

la primitive de  $f$  qui s’annule en  $\varphi(a)$ . La fonction  $h = g \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et l’on a :

$$h'(t) = \varphi'(t) f(\varphi(t)).$$

La formule de changement de variable découle donc de la relation :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = h(b) - h(a) = \int_a^b h'(t) dt. \quad \square$$

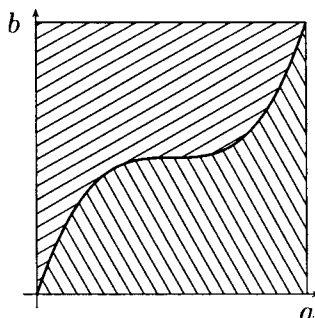
**Exemple** Soit  $f$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  (donc strictement monotone) de  $[0 a]$  sur  $[0. b]$ . En posant  $g = f^{-1}$ , on a :

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy = ab.$$

En effet, par le changement de variable  $y = f(x)$  puis en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^b g(y) dy &= \int_0^a f'(x) (g \circ f)(x) dx \\ &= \int_0^a x f'(x) dx \\ &= a f(a) - \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Graphiquement, l'intégrale de  $g$  représente l'aire de la portion du rectangle  $[0, a] \times [0, b]$  située à gauche de la courbe d'équation  $y = f(x)$ . En lui ajoutant l'intégrale de  $f$ , on obtient bien l'aire du rectangle.



**Remarque** Il n'est pas nécessaire que l'application  $f^{-1}$  soit dérivable pour avoir ce résultat.

### Corollaire 27

Soient  $\varphi$  une application **strictement monotone** de classe  $C^1$  d'un intervalle  $J$  dans  $I$ , et  $f$  une application continue par morceaux sur  $I$ .

Pour tout  $(a, b) \in J^2$ , on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt.$$

**Démonstration** Soit  $(x_i)$  une subdivision de  $[\varphi(a), \varphi(b)]$  adaptée à  $f$ . Comme  $\varphi$  est continue et, par exemple, strictement croissante, on peut trouver une subdivision  $(t_i)$  telle que  $\varphi(t_i) = x_i$ . En appliquant la proposition précédente au prolongement continu  $f_i$  de  $f$  sur  $[x_{i-1}, x_i] = [\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)]$ , on obtient :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) f_i(\varphi(t)) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$$

la dernière égalité provenant de la relation  $f = f_i$  sur  $]x_{i-1}, x_i[$

Il suffit alors de faire la somme pour obtenir le résultat. □

### ► Attention

- Dans ce résultat, on impose à la fonction  $\varphi$  d'être strictement monotone, ce qui n'est pas nécessaire lorsque  $f$  est continue. D'ailleurs, si  $\varphi$  n'est pas monotone, la fonction  $f \circ \varphi$  peut ne pas être continue par morceaux. Prendre par exemple pour  $f$  la fonction caractéristique de  $\{0\}$  et  $\varphi(t) = t^3 \sin(1/t)$  prolongée par continuité en 0.
- En revanche, il n'est nullement nécessaire que  $\varphi$  soit un difféomorphisme (c'est-à-dire que  $\varphi'$  ne s'annule pas).



**Applications**

- On utilise souvent un changement de variable affine :
  - \*  $x \mapsto -x$  ou  $x \mapsto x+T$  pour utiliser les parités ou périodicités des fonctions ;
  - \*  $t \mapsto a + (b - a)t$  ou  $t \mapsto \frac{a+b}{2} + t \frac{b-a}{2}$  pour passer du segment  $[a, b]$  au segment  $[0, 1]$  ou  $[-1, 1]$  (cf. proposition 27 page 495 par exemple).

Noter que ces changements de variable ont déjà été vus pour les fonctions continues par morceaux dans le chapitre 13 d'intégration sur un segment.
- On peut faire disparaître un radical de la forme  $\sqrt{1-x^2}$ ,  $\sqrt{x^2-1}$  ou  $\sqrt{1+x^2}$  en posant respectivement  $x = \sin t$ ,  $x = \operatorname{ch} t$  ou  $x = \operatorname{sh} t$ . Par un changement de variable affine, cela permet de traiter tout radical de la forme  $\sqrt{ax^2+bx+c}$ .
- On peut ramener le calcul de primitive d'une fraction rationnelle en  $\sin x$  et  $\cos x$  au calcul d'une primitive de fraction rationnelle par le changement de variable  $t = \tan(x/2)$ . Il est cependant parfois plus rapide de poser  $u = \sin x$ ,  $u = \cos x$  ou  $u = \tan x$ .

**4. Formules de Taylor**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.1 Formule de Taylor avec reste intégral**

**Théorème 28 (formule de Taylor–Laplace)**

Étant donnée une fonction  $f \in C^n(I, F)$  de classe  $C^{n+1}$  par morceaux sur  $I$  on a pour tout  $(a, b) \in I^2$  :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n$$

avec :

$$\begin{aligned} R_n &= \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} D^{n+1} f(x) dx \\ &= (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+t(b-a)) dt. \end{aligned}$$

**Démonstration** Les deux expressions de  $R_n$  sont égales grâce au changement de variable strictement monotone  $x = a + t(b-a)$  lorsque  $a \neq b$  (le cas  $a = b$  est évident)

Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , posons :

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-x)^k}{k!} D^{k+1} f(x) dx.$$

Si  $k < n$ , en intégrant  $R_{k-1}$  par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} R_{k-1} &= \left[ -\frac{(b-x)^k}{k!} D^k f(x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^k}{k!} D^{k+1} f(x) dx \\ &= \frac{(b-a)^k}{k!} D^k f(a) + R_k \end{aligned}$$

l'intégration par partie étant justifiée par le fait que  $D^k f$  et  $(b-x)^k/k!$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  si  $k < n-1$ , et continues de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux pour  $k = n-1$

Comme on a  $f(b) = f(a) + R_0$  d'après le théorème fondamental, on en déduit par récurrence le théorème. □

**Exemple** Si  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $g$  :

$$x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$$

est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$ , et l'on a  $g^{(n)} = f$ .

En effet, la primitive  $n^{\text{ème}}$  de  $f$  qui s'annule en 0 ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à la  $(n-1)^{\text{ème}}$  est égale à  $g$  d'après la formule de Taylor.

Si la fonction  $f$  est seulement continue par morceaux, alors  $g \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$ , elle est de classe  $\mathcal{C}^n$  par morceaux, et l'on a  $D^n g = f$ .

## 4.2 Inégalité de Taylor–Lagrange

### Théorème 29

Étant donnée une fonction  $f \in \mathcal{C}^k(I, F)$  de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  par morceaux sur  $I$ , on a pour tout  $(a, b) \in I^2$  :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

où  $M_{n+1}$  est un majorant de  $\|D^{n+1} f\|$  entre  $a$  et  $b$

**Démonstration** Il suffit de majorer le reste intégral :

$$\|R_n\| \leq |b-a|^{n+1} \int_0^1 M_{n+1} \frac{|1-t|^n}{n!} dt = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}. \quad \square$$

**Remarque** On voit dans cette démonstration l'intérêt, dans la formule de Taylor, de la deuxième expression du reste intégral qui évite la discussion suivant les positions relatives de  $a$  et  $b$ .

### 4.3 Développements limités

#### Proposition 30

Si  $f \in \mathcal{C}(I, F)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a \in I$  :

$$f(x) = \alpha_0 + (x - a)\alpha_1 + \dots + (x - a)^n \alpha_n + o((x - a)^n),$$

toute primitive  $g$  de  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n + 1$  en  $a$  obtenu en intégrant terme à terme le développement limité de  $f$  :

$$g(x) = g(a) + (x - a)\alpha_0 + \frac{(x - a)^2}{2}\alpha_1 + \dots + \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}\alpha_n + o((x - a)^{n+1}).$$

**Démonstration** Comme :

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t) dt,$$

il suffit de montrer que si  $h(x) = o((x - a)^n)$ , alors :

$$\int_a^x h(t) dt = o((x - a)^{n+1}).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Prenons  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall t \in I, |t - a| \leq \eta \implies \|h(t)\| \leq \varepsilon |t - a|^n.$$

Pour  $x \in I$  tel que  $|x - a| \leq \eta$ , on a :

$$\left\| \int_a^x h(t) dt \right\| \leq |x - a| \sup_{[a,x]} \|h\| \leq \varepsilon |x - a|^{n+1}$$

ce qui prouve le résultat □

### 4.4 Formule de Taylor-Young

#### Théorème 31

Toute fonction  $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a \in I$  donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x - a)^n)$$

### Démonstration par récurrence

- ▶ Si  $n = 0$ , la continuité de  $f$  donne  $f(x) = f(a) + o(1)$ .
- ▶ Supposons le résultat pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ . En supposant  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  on a  $f' \in \mathcal{C}^{n-1}$  et :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + o((x-a)^{n-1})$$

soit par intégration :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n). \quad \square$$

*Exemple* On peut dériver terme à terme le développement limité à l'ordre  $n$  d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ .

En effet, d'après l'unicité du développement limité il s'agit du développement de Taylor-Young de  $f$ , dont la dérivée est le développement de  $f'$ .

## 5. Dérivation d'une limite ou d'une intégrale

### 5.1 Primitivation et dérivation d'une limite

#### Primitivation

#### Proposition 32

Soient  $f$  une application continue sur  $I$  et  $g$  une primitive de  $f$ . Si  $K$  est un segment de  $I$  de longueur  $\ell$  et  $a$  un point de  $K$  on a :

$$N_\infty(g) \leq \|g(a)\| + N_1(f) \leq \|g(a)\| + \ell N_\infty(f)$$

où  $N_\infty$  et  $N_1$  désignent respectivement les normes de la convergence uniforme et de la convergence en moyenne sur  $K$ .

**Démonstration** Pour  $x \in K$ , on a :

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t) dt$$

et donc :

$$\|g(x)\| \leq \|g(a)\| + \int_{[a,x]} \|f\| \leq \|g(a)\| + N_1(f)$$

ce qui prouve le résultat puisque  $N_1 \leq \ell N_\infty$ . □

**Remarque** Dans le cas d'une fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , les inégalités précédents deviennent :

$$N_\infty(g) \leq \|g(a)\| + N_1(g') \leq \|g(a)\| + \ell N_\infty(g').$$

### Corollaire 33

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $I$  convergeant uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $f$  (alors continue). Si  $a$  est un point de  $I$  et  $g_n$  la primitive de  $f_n$  s'annulant en  $a$ , alors la suite  $(g_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers la primitive  $g$  de  $f$  s'annulant en  $a$ .

**Démonstration** Tout segment de  $I$  étant inclus dans un segment contenant  $a$ , on peut se limiter aux segments contenant  $a$ . Soit donc  $K$  un tel segment ; notons  $\ell$  sa longueur. La proposition précédente nous donne :

$$N_\infty(g - g_n) \leq \ell N_\infty(f - f_n)$$

ce qui prouve la convergence uniforme de  $(g_n)$  vers  $g$ . □

**Remarque** Plus généralement, si  $g_n$  est une primitive quelconque de  $f_n$ , et si la suite  $(g_n(a))$  converge vers un élément  $\alpha$ , alors la suite  $(g_n)$  converge uniformément vers la primitive  $g$  de  $f$  telle que  $g(a) = \alpha$ . En effet, l'inégalité de la démonstration précédente devient :

$$N_\infty(g - g_n) \leq \|g_n(a) - \alpha\| + \ell N_\infty(f - f_n).$$

On en déduit le théorème suivant :

### Dérivation

#### Theorème 34

Soit  $(g_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  convergeant simplement sur  $I$  vers une fonction  $g$  et telle que  $(g_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $f$ . Alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et l'on a  $g' = f$ .

**Démonstration** La fonction  $g_n$  est une primitive de  $g'_n$  telle que  $(g_n(a))$  converge vers  $g(a)$ . D'après la remarque précédente, la suite  $(g_n)$  converge donc uniformément sur tout segment vers la primitive de  $f$  qui vaut  $g(a)$  en  $a$ . La fonction  $g$  est donc une primitive de la fonction continue  $f$ , donc est de classe  $\mathcal{C}^1$ . □

► **Attention** Une suite d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  convergeant uniformément peut avoir une limite qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Par exemple, la suite de fonctions définies sur  $[-1, 1]$  par  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers  $x \mapsto |x|$  qui n'est pas dérivable en 0.

Par une récurrence immédiate on obtient :

### Corollaire 35

Soit  $(g_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que :

- pour tout  $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la suite  $(f_n^{(i)})$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $\varphi_i$  ;
- $(f_n^{(k)})$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $\varphi_k$ .

Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et l'on a :

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, f^{(i)} = \varphi_i.$$

### Cas des séries

En terme de série, les résultats précédents s'écrivent :

### Proposition 36

Soient  $\sum f_n$  une série de fonctions continues sur  $I$  convergeant uniformément sur tout segment de  $I$ , et  $g_n$  la primitive de  $f_n$  s'annulant en  $a \in I$ . Alors la série  $\sum g_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers la primitive de  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  qui s'annule en  $a$ .

### Théorème 37

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  convergeant simplement sur  $I$ . Si la série  $\sum f'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ , alors la somme de la série  $\sum f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et l'on a :

$$D \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} Df_n.$$

**Exemples**

1. La série  $\sum e^{-nx}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et la série dérivée  $-\sum n e^{-nx}$  converge normalement sur  $[\varepsilon, +\infty[$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . On en déduit donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} = - \left( \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \right)' = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

2. La série :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

converge normalement sur  $\mathbb{R}$ , et la série dérivée :

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

converge uniformément sur tout segment de  $]2k\pi, (2k+2)\pi[$  (proposition 13 page 779) On en déduit que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , avec :

$$\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}, S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

**Proposition 38**

Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\sum f_n$  une série de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  telles que :

- pour tout  $i \in [0, k - 1]$ , la série  $\sum f_n^{(i)}$  converge simplement sur  $I$  ;
- la série  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout compact de  $I$ .

Alors, la somme de la série  $\sum f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et l'on a :

$$\forall i \in [0, k], D^i \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D^i f_n.$$

**Exemples**

1. La fonction  $\zeta$  de Riemann définie sur  $I = ]1, +\infty[$  par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ , et l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

En effet, si  $a > 1$  et  $\alpha \in ]1, a[$ , on a lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$\frac{(-\ln n)^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

et donc la série de terme général :

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

converge absolument en  $a$ , et par suite normalement sur  $[a, +\infty[$  puisque :

$$x \geq a \implies |\varphi_n^{(k)}(x)| \leq |\varphi_n^{(k)}(a)|.$$

2. Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre normée complète, et  $a \in \mathcal{A}$ . La fonction :

$$t \xrightarrow{e_a} \exp(ta) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \quad \text{avec} \quad f_n(t) = t^n \frac{a^n}{n!}$$

est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et l'on a  $De_a = a e_a = e_a a$ .

En effet la série converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{R}$  puisque si  $K$  est borné par  $A$ , on a :

$$\|f_n(t)\| \leq \frac{|t|^n \|a\|^n}{n!} \leq \frac{(|t|A)^n}{n!}.$$

Comme  $f'_n = a f_{n-1} = f_{n-1} a$  (pour  $n \geq 1$ ), on en déduit que la série dérivée  $\sum f'_n$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{R}$ , et par suite que  $e_a$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , avec :

$$De_a = a e_a = e_a a.$$

On en déduit donc par récurrence que  $e_a$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 5.2 Dérivation sous le signe $\int$

### Théorème 39 (Formule de Leibniz)

Soit  $f : I \times [a, b] \rightarrow F$  une application continue telle  
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe et soit continue sur  $I \times [a, b]$ . Alors la fonction  $g$  définie sur  $I$  par :

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

est de classe  $C^1$  sur  $I$  et l'on a :

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$



**Démonstration** Soit  $x_0 \in I$  ; posons pour  $x \in I$  :

$$\varphi(x, t) = f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$$

de sorte que l'on ait :

$$g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt = \int_a^b \varphi(x, t) dt.$$

La fonction  $\varphi$  est dérivable par rapport à  $x$  et l'on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t).$$

En prenant  $h > 0$  tel que  $K = I \cap [x_0 - h, x_0 + h]$  soit un segment, la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est uniformément continue sur  $K \times [a, b]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe donc  $\eta > 0$  tel que pour tout  $(t, t') \in [a, b]^2$  et tout  $(x, x') \in K^2$ , on ait :

$$(|t - t'| \leq \eta \text{ et } |x - x'| \leq \eta) \implies \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x', t') \right\| \leq \varepsilon,$$

ce qui, en supposant  $\eta \leq h$ , donne :

$$\forall t \in [a, b], \forall x \in I, |x - x_0| \leq \eta \implies \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right\| \leq \varepsilon.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit :

$$\forall x \in I, |x - x_0| \leq \eta \implies \forall t \in [a, b], \|\varphi(x, t)\| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

et par intégration :

$$\left\| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right\| = \left\| \int_a^b \varphi(x, t) dt \right\| \leq \varepsilon |x - x_0| |b - a|.$$

La fonction  $g$  est ainsi dérivable en  $x_0$  avec pour dérivée :

$$g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

Enfin, la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  étant continue, le théorème de continuité sous le signe  $\int$  (théorème 26 page 494) nous donne la continuité de  $g'$  □

### Remarques

- La continuité de  $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}$  dans le théorème précédent est bien la continuité par rapport aux deux variables  $(x, t)$ , et non la continuité par rapport à  $t$  et la continuité par rapport à  $x$ .
- Le théorème s'applique en particulier si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \times [a, b]$ .

- Par récurrence, si  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $I \times [a, b]$ , la fonction :

$$g : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$$

est de classe  $C^k$  sur  $I$  et l'on a :

$$g^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

### Exemples

1. Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

La fonction  $f$  est dérivable comme primitive d'une fonction continue et la fonction :

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$$

étant de classe  $C^1$ , on en déduit que  $g$  est dérivable avec :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} x dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du \\ &= -2f'(x) f(x). \end{aligned}$$

Donc la fonction  $g + f^2$  est constante, et en prenant la valeur en 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}.$$

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$$

ce qui prouve que  $g$  tend vers 0 en  $+\infty$ . La fonction  $f$  étant positive on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. Si  $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sont continues sur  $I \times J$ , où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ , la fonction  $g$  :

$$(u, v, x) \mapsto \int_u^v f(x, t) dt$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J \times J \times I$  puisqu'elle admet des dérivées partielles continues sur  $J \times J \times I$  :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v, x) = -f(x, u), \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v, x) = f(x, v)$$

et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u, v, x) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt,$$

la dernière étant continue d'après la proposition 27 page 495.

En particulier, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions dérivables de  $I$  dans  $J$ , l'application :

$$h(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt$$

est dérivable sur  $I$  et l'on a :

$$h'(x) = \beta'(x) f(x, \beta(x)) - \alpha'(x) f(x, \alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

3. Etant donnée une application  $f : \mathbb{R} \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(f(x) - f(0)) & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

En effet, d'après le théorème fondamental :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u) du = f(0) + x \int_0^1 f'(tx) dt,$$

ce qui prouve pour  $x \neq 0$  :

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt.$$

L'égalité ci-dessus étant évidente lorsque  $x$  est nul, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$$

et donc que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , puisque  $(x, t) \mapsto f'(tx)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$

4. Plus généralement, si  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  est telle que :

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

alors il existe une fonction  $g$  de classe  $C^\infty$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n g(x),$$

comme le montre la formule de Taylor :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0)}_{=0} + x^n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(tx) dt$$

avec :

$$(x, t) \mapsto \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(tx)$$

de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ .

5. Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  et à valeurs strictement positives. Trouvons la limite, lorsque  $x$  tend vers 0 de :

$$F(x) = \left( \int_0^1 f(t)^x dt \right)^{1/x}$$

On remarque tout d'abord que :

$$\ln F(x) = \frac{1}{x} \ln \left( \int_0^1 f(t)^x dt \right) = \frac{\ln G(x) - \ln G(0)}{x}$$

avec :

$$G(x) = \int_0^1 \exp(x \ln f(t)) dt.$$

La fonction  $(x, t) \mapsto \exp(x \ln f(t))$  est continue sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , dérivable par rapport à  $x$ , et sa dérivée :

$$\ln f(t) \exp(x \ln f(t))$$

est continue sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , ce qui prouve que  $G$  est dérivable et que :

$$G'(x) = \int_0^1 \ln f(t) \exp(x \ln f(t)) dt.$$

En particulier :

$$G'(0) = \int_0^1 \ln f(t) dt$$

ce qui prouve :

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \exp \left( \frac{G'(0)}{G(0)} \right) = \exp \left( \int_0^1 \ln f(t) dt \right).$$

### 5.3 Théorème de Fubini

#### Théorème 40

Étant donnée une application  $f$  continue sur  $[a, b] \times [c, d]$ , on a :

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Démonstration** Posons :

$$H(x) = \int_a^x \left( \int_c^d f(t, y) dy \right) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_c^d \left( \int_a^x f(t, y) dt \right) dy.$$

L'application  $t \mapsto \int_c^d f(t, y) dy$  est continue (théorème 26 page 494), donc  $H$  est dérivable et :

$$H'(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

D'autre part, la fonction :

$$\Psi(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt$$

est continue sur  $[a, b] \times [c, d]$  (proposition 27 page 495) et admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$$

continue sur  $[a, b] \times [c, d]$ . Le théorème 39 page 528 entraîne la dérivabilité de  $G$  et :

$$G'(x) = \int_c^d \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) dy = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Par suite, on a  $H' = G'$ , et comme  $G(a) = H(a) = 0$ , on en déduit  $G(b) = H(b)$ , soit :

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad \square$$

**Exemple** Calcul, pour  $1 < a < b$ , de :

$$I = \int_0^\pi \ln \left( \frac{b - \cos u}{a - \cos u} \right) du.$$

Comme  $(x, u) \mapsto 1/(1 + r \cos u)$  est continue sur  $]1, +\infty[ \times [0, \pi]$ , on peut écrire :

$$I = \int_0^\pi \left( \int_a^b \frac{dx}{x - \cos u} \right) du = \int_a^b \left( \int_0^\pi \frac{du}{x - \cos u} \right) dx.$$

Par les changements de variable  $t = \tan(u/2)$  puis  $s = t \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ , on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{1}{x - \cos u} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x-1) + (x+1)t^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2}.$$

D'où :

$$I = \int_a^b \frac{\pi dx}{\sqrt{x^2-1}} = \pi \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2-1}}{a + \sqrt{a^2-1}} \right).$$

**Remarque** On aurait pu aussi calculer  $I$  en le dérivant par rapport à  $a$  ou  $b$  en utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme, ce qui n'est pas surprenant puisque les formules de Leibniz et de Fubini représentent essentiellement le même résultat, et peuvent se déduire l'une de l'autre.

## EXERCICES

### 1. Inégalité des accroissements finis

Soient  $f$  une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$  et  $g$  une fonction à valeurs réelles positives. On suppose  $f$  et  $g$  dérivables sur un intervalle  $I$  et  $\|f'\| \leq g'$  sur  $I$ .

Si  $a$  et  $b$  sont deux points de  $I$  tels que  $a < b$ , en considérant l'ensemble :

$$A = \{x \in [a, b] \mid \forall t \in [a, x], \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a)\}$$

montrer :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

### 2. Montrer que la fonction $F$ définie sur $]0, 1[$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

peut être prolongée en une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , et en déduire :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx.$$

### 3. Soit $f$ de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et telle qu'il existe $x_0$ vérifiant $f(x_0) f'(x_0) \geq 0$ .

1. Prouver l'existence de  $x_1 \geq x_0$  tel que  $f'(x_1) = 0$ .

2. Prouver l'existence d'une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  strictement croissante telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(x_k) = 0.$$

### 4. Soit $f$ une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ . On suppose $f$ de classe $C^1$ sur $]0, 1[$ et que lorsque $t$ tend vers 0 :

$$f(0) - f(t) + t f'(t) = O(t^2).$$

Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ .

### 5. Étude de :

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt.$$

### 6. 1. Soit $f$ continue par morceaux sur $[a, b]$ telle que :

$$\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x).$$

Montrer :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Calculer :

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin x} dx.$$

7. Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{[a,b]} \|f'\|$$

8. 1. Soit  $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $F'$  soit croissante et  $F(x) \sim e^x$  au voisinage de  $+\infty$ . Montrer que  $F'(x) \sim e^x$ .

2. Soit  $g$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$ . On suppose qu'au voisinage de  $+\infty$  :

$$G(x) = \int_1^x \frac{g(t)}{t} dt \sim x.$$

Donner un équivalent de  $g$  en  $+\infty$ .

9. Soit  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $f$  et  $f''$  soient bornées respectivement par  $M_0$  et  $M_2$ .

1. Montrer que pour tout  $h > 0$ , la fonction  $f'$  est bornée par  $\frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ .

2. En déduire que  $f'$  est bornée par  $2\sqrt{M_0 M_2}$ .

3. Soit  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = 2(x-1)^2 - 1.$$

Quelles sont les bornes de  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  sur  $[0, 1]$  ?

En utilisant la fonction cosinus, prolonger  $f$  en une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  pour laquelle la majoration de la question précédente est optimale.

10. Soit  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  et  $f''$  soient bornées respectivement par  $M_0$  et  $M_2$ .

1. Montrer que pour tout  $h > 0$ , la fonction  $f'$  est bornée par  $\frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ .

2. En déduire que  $f'$  est bornée par  $\sqrt{2M_0 M_2}$ .

3. Vérifier que le résultat subsiste si l'on suppose seulement  $f$  de classe  $C^1$ , et de classe  $C^2$  par morceaux, et trouver une telle fonction pour laquelle la majoration de la question précédente est optimale. On la cherchera polynomiale du second degré par morceaux.

4. Montrer que la majoration est aussi optimale parmi les fonctions de classe  $C^2$ .



11. Soit  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  de classe  $C^2$  par morceaux telle que :

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

On pose  $M = \sup |D^2 f|$ .

Montrer que  $M$  est au moins égal à 4 et déterminer les fonctions  $f$  pour lesquelles  $M = 4$ .

12. Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout segment  $J$  et tout  $k \in \mathbb{N}$  on note :

$$m_k(J) = \inf_J |f^{(k)}|.$$

1. Montrer que pour  $a < b < c < d$  et pour  $k \geq 1$ , on a :

$$m_k([a, d]) \leq \frac{1}{c-b} (m_{k-1}([a, b]) + m_{k-1}([c, d])).$$

2. Montrer que si  $J$  est de longueur  $\lambda$ , on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$m_k(J) \leq M \left(\frac{k}{\lambda}\right)^k 2^{k(k+1)/2} \quad \text{avec} \quad M = \sup_J |f|.$$

13. Soient  $P$  un polynôme réel de degré impair et  $f$  une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Montrer que  $f$  est nulle.

Le résultat subsiste-t-il si  $P$  est de degré pair ?

14. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admet en tout point  $x \in I$  un développement limité :

$$f(x+h) = f(x) + h g_1(x) + \frac{h^2}{2} (g_2(x) + \varphi(x, h))$$

où pour tout compact  $K \subset I$ ,  $\varphi(x, h)$  tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0 et ce uniformément par rapport à  $x \in K$ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in K, |h| \leq \eta \implies |\varphi(x, h)| \leq \varepsilon.$$

1. En étudiant :

$$F_h(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

montrer la continuité de  $g_2$ , puis de  $g_1$  et enfin le caractère  $C^2$  de  $f$ .

2. Donner un exemple d'application admettant en tout point un développement limité à l'ordre 2 mais n'étant pas de classe  $C^2$ .

15. Soient  $I$  un intervalle ouvert et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :

$$\forall x \in I, \forall \eta > 0, \exists h \in ]0, \eta] : f(x) \leq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}.$$

Montrer que  $f$  est convexe sur  $I$ .

16. Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$   $2\pi$ -périodique et ne s'annulant pas. Montrer :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{f(u)} du \in \mathbb{Z}.$$

17. Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$  telles que  $f(0) = f(1) = 0$  et  $f'(0) = a$ . Déterminer :

$$m = \inf_{f \in E} \int_0^1 f''(t)^2 dt.$$

18. Calculer, pour  $x \in ]-1, 1[$  :

$$f(x) = \int_0^\pi \ln(1 + x \cos u) du.$$

19 Soient  $r \in \mathbb{R}$  tel que  $|r| \neq 1$  et :

$$F(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos t + r^2) dt.$$

1. Vérifier que  $F(r)$  est bien défini pour  $|r| \neq 1$ .
2. Trouver des relations entre  $F(r)$ ,  $F(-r)$ ,  $F(r^2)$  et  $F(1/r)$ .
3. En déduire :

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 2\pi \ln |r| & \text{si } |r| > 1. \end{cases}$$

4. Montrer :

$$P(r) = \int_0^\pi \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} dt = \begin{cases} \pi & \text{si } |r| < 1 \\ -\pi & \text{si } |r| > 1. \end{cases}$$

## Chapitre 15

# Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont continues par morceaux sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points. On note  $a$  et  $b$  respectivement les bornes inférieure et supérieure de  $I$  (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ).

### 1. Intégrabilité des fonctions à valeurs réelles positives

#### 1.1 Définition

##### Définition 1

On dit qu'une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  est *intégrable* (ou *sommable*), s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout segment  $J$  inclus dans  $I$  on ait  $\int_J f \leq M$ .

On appelle alors intégrale de  $f$  sur  $I$ , le réel :

$$\int_I f = \int_a^b f(x) dx = \sup_J \int_J f.$$

**Remarques**

- Toute fonction positive continue par morceaux sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  est intégrable sur  $[a, b]$  et son intégrale est égale à celle définie au chapitre 13. En effet, si  $I$  désigne celle-ci, on a, pour tout segment  $J$  inclus dans  $[a, b]$  :

$$\int_J f \leq I$$

puisque  $f$  est positive. Comme de plus  $[a, b]$  lui-même est un segment inclus dans  $[a, b]$ , on en déduit que la borne supérieure des intégrales de  $f$  sur les segments de  $[a, b]$  est égale à  $I$ .

La nouvelle intégrale ainsi définie prolonge donc l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment, et il n'y a donc pas d'ambiguïté dans

l'écriture  $\int_{[a,b]} f$ .

- Sous les mêmes hypothèses la fonction  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  et  $]a, b[$  et l'on a :

$$\int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b]} f.$$

En effet, chacune de ces trois intégrales est inférieure à  $I$ , puisque tout segment inclus dans un intervalle de bornes  $a$  et  $b$  est inclus dans  $[a, b]$ . Enfin, si  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suites d'éléments de  $]a, b[$  convergeant respectivement vers  $a$  et  $b$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a_n, b_n]} f = I,$$

ce qui prouve  $I \leq \int_{]a,b[} f$  et donc l'égalité des quatre intégrales.

- De même, si  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  ou  $]a, b]$ , on verra page 544 qu'elle l'est aussi sur  $]a, b[$  et que les deux intégrales sont égales.

Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans l'écriture  $\int_a^b f(x) dx$  : c'est l'intégrale de  $f$  sur n'importe quel intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$  sur lequel  $f$  est intégrable.

**Proposition 1**

Il existe une *suite exhaustive de segments* de l'intervalle  $I$ , c'est-à-dire une suite croissante de segments inclus dans  $I$ , dont la réunion est égale à  $I$ .

**Démonstration** Soient  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  les extrémités de  $I$ . Si  $a \in I$ , on prend  $a_n = a$  sinon  $(a_n)$  est une suite décroissante d'éléments de  $I$  tendant vers  $a$ . En prenant de la même façon une suite croissante  $(b_n)$  d'éléments de  $I$  tendant vers  $b$  (constante si  $b \in I$ ), la suite des segments  $J_n = [a_n, b_n]$  répond à la question. □

**Remarque** Si  $(J_n)$  est une suite exhaustive de segments de  $I$ , tout segment  $[\alpha \beta]$  de  $I$  est contenu dans au moins un des  $J_n$ . En effet, on peut trouver  $p$  et  $q$  tels que  $\alpha \in J_p$  et  $\beta \in J_q$ , et  $n = \max(p, q)$  convient.

**Proposition 2**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux et positive sur l'intervalle  $I$ . Si  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite exhaustive de segments de  $I$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est intégrable,
- (ii) la suite  $\left(\int_{J_n} f\right)$  est majorée,
- (iii) la suite  $\left(\int_{J_n} f\right)$  est convergente.

On a alors :

$$\int_I f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{J_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f.$$

**Démonstration** Puisque  $f$  est positive et la suite  $(J_n)$  croissante, la suite  $\left(\int_{J_n} f\right)$  est croissante, ce qui prouve l'équivalence (ii)  $\iff$  (iii) ainsi que la dernière égalité. Comme les  $J_n$  sont des segments de  $I$  et que réciproquement tout segment de  $I$  est contenu dans un  $J_n$ , on a l'équivalence (i)  $\iff$  (ii) ainsi que la première égalité.  $\square$

**Exemples**

1. La fonction exponentielle est intégrable sur  $\mathbb{R}_-$  puisque en considérant la suite exhaustive  $([-n, 0])$  de segments de  $\mathbb{R}_-$ , on a :

$$\int_{-n}^0 e^x dx = 1 - e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et donc :} \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx = 1.$$

2. La fonction  $x \mapsto x^\alpha$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  si, et seulement si,  $\alpha < -1$  puisque :

$$\int_1^n t^\alpha dt = \begin{cases} \frac{n^{\alpha+1} - 1}{1 + \alpha} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln n & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

admet une limite finie quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si, et seulement si,  $\alpha < -1$

On a alors :

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = -\frac{1}{1 + \alpha}.$$

3. De même, la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  est intégrable sur  $]0, 1]$  si, et seulement si  $\alpha > -1$ , et l'on a alors :

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{1 + \alpha}.$$

### Proposition 3

Une fonction  $f$  continue, positive et intégrable sur  $I$  est nulle si, et seulement si, son intégrale est nulle.

**Démonstration** L'intégrale de  $f$  sur  $I$  est nulle si, et seulement si, son intégrale sur tout segment de  $I$  est nulle, c'est-à-dire si, et seulement si,  $f$  est nulle sur tout segment de  $I$  (elle est continue et positive), c'est-à-dire nulle sur  $I$ .  $\square$

**Remarque** Une fonction continue par morceaux positive peut avoir une intégrale nulle sans être nulle. En revanche, elle est nulle sauf sur une partie de  $I$  dont la trace sur chaque segment de  $I$  est finie.

Le résultat de la proposition précédente peut se généraliser pour toute fonction continue par morceaux qui ne peut vérifier cette dernière propriété sans être identiquement nulle. Par exemple :

- pour les fonctions continues,
- pour les fonctions continues en  $b$  (si  $b \in I$ ) et continues à droite en tout autre point,
- pour les fonctions continues en  $a$  (si  $a \in I$ ) et continues à gauche en tout autre point,
- pour les fonctions continues en  $a$  et  $b$  (s'ils appartiennent à  $I$ ) et vérifiant sur  $]a, b[$  la condition de Dirichlet :

$$\forall x \in ]a, b[, f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

## 1.2 Conditions d'intégrabilité

### Proposition 4

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux telles que  $0 \leq f \leq g$ .

- Si  $g$  est intégrable alors  $f$  aussi et l'on a  $\int_I f \leq \int_I g$ .
- Si  $f$  n'est pas intégrable, alors  $g$  n'est pas intégrable.

2. Si  $f$  et  $g$  sont continues par morceaux positives et intégrables sur  $I$ , alors pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$  positifs, la fonction  $\lambda f + \mu g$  est intégrable et :

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

**Démonstration**

1. Le premier point est immédiat, puisque  $\int_I g$  est un majorant des intégrales de  $f$  sur tout segment de  $I$ . Le deuxième se déduit du premier par contraposition.
2. Soit  $(J_n)$  une suite exhaustive de segments de  $I$ . Pour tout  $n$ , l'intégrale :

$$\int_{J_n} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{J_n} f + \mu \int_{J_n} g$$

tend vers  $\lambda \int_I f + \mu \int_I g$ , ce qui prouve le résultat. □

**Exemples**

1. La fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_-$  puisque :

$$\forall x \leq 0, e^{-x^2} \leq e^{1-x} = e e^{-x}.$$

2. La fonction  $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x^\alpha}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  pour  $\alpha > 1$ .

**Proposition 5**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux positive. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est intégrable sur  $I$  ;
- (ii) les primitives de  $f$  sont bornées sur  $I$  .
- (iii) les primitives de  $f$  admettent des limites finies en  $a$  et  $b$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , l'intégrale de  $f$  est alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_b F - \lim_a F.$$

**Démonstration**

- Les primitives d'une fonction positive étant croissantes continues, on a l'équivalence (ii)  $\iff$  (iii).
- Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Si  $[\alpha, \beta]$  est un segment de  $I$ , avec  $\alpha < \beta$ , on a :

$$\int_{[\alpha, \beta]} f = F(\beta) - F(\alpha),$$

ce qui prouve (iii)  $\implies$  (i), ainsi que .

$$\sup_{(\alpha, \beta) \in I^2} \int_{[\alpha, \beta]} f = \lim_b F - \lim_a F.$$

► Enfin, si  $F$  admet une limite infinie (c est-à-dire  $+\infty$ ) en  $b$  ou une limite infinie (c est-à-dire  $-\infty$ ) en  $a$ , alors  $F(\beta) - F(\alpha)$  n'est pas majoré lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  parcourent  $I$  ce qui prouve (i)  $\implies$  (iii) □

**Exemple** Si  $f$  est intégrable sur  $]a, b[$ , alors toute primitive de  $f$  est continue en  $a$  donc admet une limite en  $a$ . Cela prouve l'intégrabilité de  $f$  sur  $]a, b[$  avec :

$$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,b[} f.$$

De même, si  $f$  est intégrable sur  $]a, b]$  elle est intégrable sur  $]a, b[$  et :

$$\int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f.$$

**Corollaire 6**

Étant donné un point  $c$  de  $I$ , une fonction  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si, elle est intégrable sur  $I \cap ]-\infty, c]$  et sur  $I \cap [c, +\infty[$ , et l'on a alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Démonstration** La fonction  $F$  :

$$x \mapsto \int_c^x f(t) dt$$

est une primitive de  $f$ . Elle est bornée sur  $I$  si, et seulement si, elle bornée sur  $I \cap ]-\infty, c]$  et sur  $I \cap [c, +\infty[$ , ce qui prouve l'équivalence annoncée. L'égalité des intégrales provient alors des relations :

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= F(c) - \lim_a F \\ \int_c^b f(x) dx &= \lim_b F - F(c) \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_b F - \lim_a F. \end{aligned}$$

□

**Exemple** La fonction  $x \mapsto x^\alpha$  n'est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour aucune valeur de  $\alpha$ , puisqu'elle n'est intégrable sur  $[1, +\infty[$  que pour  $\alpha < -1$ , et sur  $]0, 1]$  que pour  $\alpha > -1$ .

Grâce au corollaire précédent, l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle qui n'est pas un segment (cas trivial), se ramène à l'intégrabilité sur des intervalles de la forme  $]a, b[$  (avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ) ou de la forme  $]a, b]$  (avec  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $b \in \mathbb{R}$ ).



Nous ne traiterons dans la suite que le premier cas, le deuxième étant similaire.

Soit donc  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  avec  $b > a$ . On considère l'intervalle  $I = [a, b[$ . D'après ce qui précède, une fonction  $f$  continue par morceaux est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, la fonction :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

admet une limite finie en  $b$ . L'intégrale de  $f$  est alors égale à cette limite

### Proposition 7

Une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  est intégrable sur  $I = [a, b[$  si, et seulement si, il existe un élément  $c \in I$  tel que  $f$  soit intégrable sur  $[c, b[$ .

**Démonstration** La fonction  $f$  étant continue par morceaux sur le segment  $[a, c]$ , elle y est intégrable. Le résultat est donc une conséquence du corollaire 6 page précédente  $\square$

### Proposition 8

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux et positive sur  $I = [a, b[$ . Si, au voisinage de  $b$ , la fonction  $f$  est dominée par une fonction  $g$  positive et intégrable sur un intervalle de la forme  $[\alpha, b[$ , alors  $f$  est intégrable sur  $I$ .

**Démonstration** La domination de  $f$  par  $g$  se traduit par l'existence d'un réel  $M$  et d'un élément  $\beta$  de  $I$  tels que :

$$\forall x \in I, x \geq \beta \implies f(x) \leq M g(x).$$

Comme la fonction  $g$  est intégrable sur  $[\beta, b[$ , on en déduit l'intégrabilité de  $f$  sur  $[\beta, b[$ , et donc sur  $I$ .  $\square$

### Corollaire 9

- Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I = [a, +\infty[$  et positive. S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .
- Soient  $b$  un réel strictement supérieur à  $a$  et  $f$  une fonction continue par morceaux et positive sur  $I = [a, b[$ . S'il existe  $\alpha < 1$  tel que  $\lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\alpha f(x) = 0$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ .

**Démonstration** La fonction  $f$  est négligeable respectivement devant  $1/x^\alpha$  et  $1/(b-x)^\alpha$  qui sont intégrables respectivement sur  $[a, +\infty[$  et  $[a, b[$ .  $\square$

**Corollaire 10**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux positives sur  $I = [a, b[$ . Si  $f \sim g$  au voisinage de  $b$  les deux fonctions sont simultanément intégrables sur  $I$ .

**Démonstration** En effet, chacune des deux domine l'autre au voisinage de  $b$ . □

Ce résultat permet, pour étudier l'intégrabilité d'une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b[$ , de chercher un équivalent de  $f(x)$  de la forme  $\lambda/x^\alpha$  lorsque  $b = +\infty$  et de la forme  $\lambda/(b-x)^\alpha$  lorsque  $b \in \mathbb{R}$ .

**Exemples**

1. La fonction  $f : x \mapsto (1+x^3)^\alpha$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  si, et seulement si,  $\alpha < -1/3$ , puisque  $f(x) \sim x^{3\alpha}$  au voisinage de  $+\infty$ .

Comme  $f(x) \sim 3^\alpha (x+1)^\alpha$  au voisinage de  $-1$ , la fonction  $f$  est intégrable sur  $] -1, 0]$  si, et seulement si,  $\alpha > -1$ .

En définitive,  $f$  est intégrable sur  $] -1, +\infty[$  si, et seulement si,  $\alpha \in ] -1, -1/3[$ .

2. La fonction positive  $f(x) = -\ln x$  est intégrable sur  $]0, 1]$ , puisqu'elle est continue sur  $]0, 1]$  et que l'on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = 0$ . Pour trouver la valeur de son intégrale, il suffit d'utiliser sa primitive  $x - x \ln x$  qui admet une limite en 0 (ce qui prouve aussi au passage que  $f$  est intégrable). On a ainsi :

$$\int_0^1 f(x) dx = 1.$$

3. Comme en 0, on a  $\ln(\sin x) \sim \ln x$ , on en déduit l'intégrabilité sur  $]0, \pi/2]$  de  $\ln(\sin x)$ , et par le changement de variable  $y = \pi - x$ , son intégrabilité sur  $[\pi/2, \pi[$ . La fonction  $\ln(\sin x)$  est donc intégrable sur  $]0, \pi[$ , et l'on a :

$$\int_0^\pi \ln(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx.$$

De plus, par le changement de variable  $u = \pi/2 - x$ , on en déduit l'intégrabilité de  $\ln(\cos x)$  sur  $[0, \pi/2[$  avec :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(\sin x) dx &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_0^\pi \ln(\sin x) dx = -\pi \ln 2.$$

**Remarque** Bien entendu, toutes ces fonctions étant négatives il faudrait en toute rigueur travailler avec leurs opposées.

### 1.3 Utilisation des séries

Supposons  $I = [a, b[$ .

#### Proposition 11

Soit  $(b_n)$  une suite d'éléments de  $I = [a, b[$  convergeant vers  $b$ .

Une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si, la suite :

$$\left( \int_a^{b_n} f(x) dx \right)_n$$

admet une limite finie, et l'on a alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{b_n} f(x) dx.$$

**Démonstration** La primitive  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  d'une fonction  $f$  positive étant croissante, l'existence d'une limite finie en  $b$  est équivalente à l'existence d'une limite finie pour la suite  $(F(b_n))$  □

**Remarque** Lorsque  $(b_n)$  est croissante, c'est aussi une conséquence du caractère exhaustif de la suite  $([a, b_n])$ .

Rappelons les résultats suivants, déjà vus dans le chapitre consacré aux séries numériques.

**Proposition 12**

Soit  $(b_n)$  une suite d'éléments de  $I = [a, b[$  convergeant vers  $b$ .

Une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, la série de terme général :

$$\int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x) dx$$

est convergente, et l'on a alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x) dx.$$

**Remarque** Réciproquement, la convergence d'une série positive  $\sum a_n$  est équivalente à l'intégrabilité de la fonction  $f$  en escalier sur  $\mathbb{R}_+$  valant  $a_n$  sur  $[n, n + 1[$  pour tout  $n$ . On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

**Proposition 13**

Si  $f$  est une fonction continue par morceaux positive et **décroissante** sur  $[a, +\infty[$ , l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, +\infty[$  est équivalente à la convergence de la série  $\sum f(n)$ .

► **Attention** Bien prendre garde que le fait qu'une fonction tende vers 0 en  $+\infty$  n'est une condition ni nécessaire ni suffisante pour son intégrabilité sur un intervalle du type  $[a, +\infty[$ . En effet :

- $x \mapsto 1/x$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$  ;
- une fonction intégrable sur un intervalle non majoré peut même ne pas être bornée au voisinage de  $+\infty$ , comme le montre l'exemple de la fonction  $f$  suivante définie sur  $[1, +\infty[$  :

$$f(x) = n \quad \text{si } x \in [n, n + 1/n^3] \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

On a :

$$\int_n^{n+1} f(x) dx = \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

En revanche, si une fonction intégrable sur  $[a, +\infty[$  admet une limite en  $+\infty$  celle-ci est nécessairement nulle. En effet, si cette limite  $\ell$  était non nulle, la fonction serait équivalente à la fonction constante  $\ell$  qui n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

## 2. Intégrale des fonctions à valeurs vectorielles

### 2.1 Intégrabilité

On considère dans la suite de ce chapitre des fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$  complet.

#### Définition 2

Une fonction  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  est *intégrable* (ou *sommable*) sur  $I$  si la fonction réelle positive  $\|f\|$  l'est

On note alors :

$$N_1(f) = \int_I \|f\|.$$

L'intégrabilité d'une fonction vectorielle se ramène donc à l'intégrabilité des fonctions réelles positives. On peut donc utiliser tous les résultats vus dans la première section.

#### Exemples

1. Une fraction rationnelle définie sur un intervalle  $I = [a, +\infty[$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, son degré  $d$  est inférieur ou égal à  $-2$ , puisqu'elle admet (ou plutôt sa valeur absolue admet) un équivalent à l'infini de la forme  $\lambda x^d$
2. Une fraction rationnelle n'est jamais intégrable sur un intervalle  $I$  contenant au moins un de ses pôles. En effet soit ce pôle est à l'intérieur de  $I$ , et elle n'est pas continue par morceaux sur  $I$  (ni prolongeable en une fonction continue par morceaux sur  $I$ ), soit il s'agit d'une borne  $a$  de  $I$ , et elle est équivalente à  $\lambda/(x - a)^\alpha$  au voisinage de  $a$ , avec  $\alpha \geq 1$ .

**Proposition 14**

Soient  $f : I \rightarrow F$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions continues par morceaux sur  $I$  telles que  $\|f\| \leq g$ . Si  $g$  est intégrable, alors  $f$  aussi et l'on a :

$$N_1(f) \leq \int_I g.$$

**Exemples**

1. Pour  $\alpha > 1$ , les fonctions :

$$x \mapsto \frac{e^{ix}}{x^\alpha} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$$

sont intégrables sur  $[1, +\infty[$ .

2. En revanche, elles ne sont pas intégrables lorsque  $\alpha \leq 1$ . Pour la première, c'est évident ; pour la seconde, il suffit d'étudier la série de terme général :

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx.$$

Or :

$$u_n \geq \frac{1}{(n\pi)^\alpha} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{(n\pi)^\alpha}$$

et donc la série  $\sum u_n$  diverge.

**Proposition 15**

Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b[$ , et si  $f$  est dominée au voisinage de  $b$  par une fonction  $g$  intégrable sur un intervalle du type  $[\alpha, b[$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ .

**Démonstration** Conséquence de la majoration  $\|f\| \leq M \|g\|$  au voisinage de  $b$ , avec  $\|g\|$  intégrable sur  $[\alpha, b[$ . □

**Proposition 16**

L'ensemble  $\mathcal{L}^1(I, F)$  des fonctions continues par morceaux intégrables est un espace vectoriel.

**Démonstration** Conséquence des relations :

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad \text{et} \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

□

## 2.2 Intégrale des fonctions sommables

### Lemme

Si  $J$  et  $K$  sont deux segments de  $I$  tels que  $J \subset K$ , on a pour toute fonction  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  :

$$\left\| \int_K f - \int_J f \right\| \leq \int_K \|f\| - \int_J \|f\|.$$

**Démonstration** En notant  $K = [a, b]$  et  $J = [\alpha, \beta]$ , on a par la relation de Chasles :

$$\int_K f - \int_J f = \int_{[a, \alpha]} f + \int_{[\beta, b]} f$$

et donc :

$$\left\| \int_K f - \int_J f \right\| \leq \int_{[a, \alpha]} \|f\| + \int_{[\beta, b]} \|f\| = \int_K \|f\| - \int_J \|f\|. \quad \square$$

### Théorème 17

Soit  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  une application intégrable sur  $I$ . Pour toute suite exhaustive  $(J_n)$  de segments de  $I$  la suite des intégrales  $\left( \int_{J_n} f \right)$  converge.

Sa limite ne dépend pas de la suite  $(J_n)$  ; on l'appelle *intégrale* de  $f$  sur  $I$  et on la note :

$$\int_I f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) dx$$

où  $a$  et  $b$  sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de  $I$ .

### Démonstration

► D'après le lemme précédent, pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ , on a :

$$\left\| \int_{J_{n+p}} f - \int_{J_n} f \right\| \leq \int_{J_{n+p}} \|f\| - \int_{J_n} \|f\|.$$

Comme  $f$  est intégrable, la suite  $\left( \int_{J_n} \|f\| \right)$  converge vers l'intégrale de  $\|f\|$  donc est de Cauchy. On en déduit que la suite  $\left( \int_{J_n} f \right)$  est aussi de Cauchy, donc converge dans l'espace vectoriel normé complet  $F$ .

- Soient  $(J_n)$  et  $(K_n)$  deux suites exhaustives de segments de  $I$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset K_n$ . D'après le lemme précédent :

$$\left\| \int_{K_n} f - \int_{J_n} f \right\| \leq \int_{K_n} \|f\| - \int_{J_n} \|f\|$$

et comme  $\int_{J_n} \|f\|$  et  $\int_{K_n} \|f\|$  ont la même limite  $N_1(f)$ , les suites  $\left(\int_{J_n} f\right)$  et  $\left(\int_{K_n} f\right)$  ont aussi des limites égales

- Dans le cas général, si  $(J_n) = ([\alpha_n, \beta_n])$  et  $(J'_n) = ([\alpha'_n, \beta'_n])$  sont des suites exhaustives de segments de  $I$ , les segments  $K_n = [\min(\alpha_n, \alpha'_n), \max(\beta_n, \beta'_n)]$  forment une suite exhaustive, et ce qui précède prouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{J_n} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{K_n} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{J'_n} f. \quad \square$$

**Cohérence**

- Si  $f$  est une fonction intégrable à valeurs réelles positives, la proposition 2 page 541 prouve que son intégrale selon cette définition est bien la même que celle donnée à la définition 1 page 539.
- Lorsque  $I = [a, b]$  est un segment, toute fonction continue par morceaux sur  $I$  est intégrable sur  $[a, b]$ , et son intégrale sur cet intervalle est égale à son intégrale au sens du chapitre 13. Il suffit en effet d'adopter les segments  $J_n = [a, b]$  comme suite exhaustive.

**Remarque** On pourrait aussi définir l'intégrale sur  $\mathcal{L}^1(I, F)$  en utilisant le théorème de prolongement des applications linéaires continues. Il n'y a en effet aucune difficulté à définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur  $I$  à support compact, c'est-à-dire nulle en dehors d'un segment de  $I$ . On peut facilement montrer que pour toute fonction  $f$  intégrable, il existe une suite  $(f_n)$  de fonctions continues par morceaux à support compact telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(f - f_n) = 0$ .

La difficulté consiste à trouver un espace vectoriel sur lequel l'application  $N_1$  est une norme ce qui n'est pas le cas de  $\mathcal{L}^1(I, F)$ , puisque  $N_1(f)$  peut être nul sans que  $f$  soit nulle. Des solutions consistent à considérer :

- le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}^1(I, F)$  constitué des fonctions continues à droite en tout point,
- le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}^1(I, F)$  constitué des fonctions continues à gauche en tout point,
- ou plus symétriquement le sous-espace vectoriel constitué des fonctions vérifiant en tout point la condition de Dirichlet.



On peut alors prolonger l'intégrale des fonctions à support compact à ce sous-espace vectoriel à l'aide du théorème 19 page 395 puis définir l'intégrale de toute fonction intégrable. Les propriétés de l'intégrale présentées ci-dessous sont évidentes pour les fonctions à support compact, et se prolongent par densité à toutes les fonctions intégrables.

### 2.3 Propriétés de l'intégrale

#### Proposition 18 (Linéarité de l'intégrale)

L'intégrale sur  $I$  est une application linéaire de  $\mathcal{L}^1(I, F)$  dans  $F$ .

**Démonstration** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables ainsi que  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires. Si  $(J_n)$  est une suite exhaustive de segments de  $I$ , on a par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{J_n} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{J_n} f + \mu \int_{J_n} g$$

et l'on en déduit :

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$$

par passage à la limite. □

#### Proposition 19 (Inégalité triangulaire)

Pour tout  $f \in \mathcal{L}^1(I, F)$ , on a :

$$\left\| \int_I f \right\| \leq \int_I \|f\|.$$

**Démonstration** Si  $(J_n)$  est une suite exhaustive de segments de  $I$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| \int_{J_n} f \right\| \leq \int_{J_n} \|f\|,$$

d'où le résultat par passage à la limite. □

#### Proposition 20

Soit  $T$  une application linéaire continue de  $F$  dans un espace vectoriel normé complet  $G$ . Si  $f \in \mathcal{L}^1(I, F)$ , alors  $Tf \in \mathcal{L}^1(I, G)$  et l'on a :

$$\int_I Tf = T \left( \int_I f \right).$$

**Démonstration** La continuité de  $T$  nous donne l'existence d'une constante  $M$  telle que :

$$\|Tf\| \leq M \|f\|,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de  $Tf$ .

Soient  $f \in \mathcal{L}^1(I, F)$  et  $(J_n)$  une suite exhaustive de segments de  $I$ . On sait d'après les propriétés de l'intégrale sur un segment que l'égalité :

$$\int_{J_n} Tf = T \left( \int_{J_n} f \right)$$

est vraie pour tout  $n$ . On obtient le résultat par passage à la limite en utilisant la continuité de  $T$   $\square$

### Corollaire 21

Une application  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont intégrables sur  $I$ , et l'on a :

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

### Démonstration

► Si  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont intégrables, alors  $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$  est intégrable, et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

► Réciproquement, si  $f$  est intégrable, alors  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont intégrables puisque les applications partie réelle et partie imaginaire sont linéaires (continues). On a de plus :

$$\operatorname{Re} \left( \int_I f \right) = \int_I \operatorname{Re} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left( \int_I f \right) = \int_I \operatorname{Im} f. \quad \square$$

### Corollaire 22

Une application  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si,  $\bar{f}$  est intégrable sur  $I$ , et l'on a :

$$\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}.$$

**Démonstration** Idem avec la conjugaison  $\square$

**Remarque** Plus généralement, une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est sommable si, et seulement si, les fonctions réelles ou complexes  $f_k$  définies par :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k$$

sont sommables. On a alors :

$$\int_I f = \sum_{k=1}^n \left( \int_I f_k \right) e_k.$$

**Proposition 23**

Une application  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si,  $f^+$  et  $f^-$  le sont, et l'on a alors :

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- \quad \text{et} \quad \int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-.$$

**Démonstration**

► L'équivalence vient des relations :

$$0 \leq f^+ \leq |f| \quad 0 \leq f^- \leq |f| \quad \text{et} \quad |f| \leq f^+ + f^-.$$

► Il suffit d'écrire :

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

□

**2.4 Calcul d'une intégrale**

**Proposition 24**

Soit  $c \in I$ . Une application  $f$  continue par morceaux sur  $I$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, elle l'est sur  $I \cap ]-\infty, c]$  et sur  $I \cap [c, +\infty[$ , et l'on a alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Démonstration** D'après le corollaire 6 page 544 appliqué à  $\|f\|$ , on a l'équivalence.

On constate que si  $([\alpha_n, c])$  et  $([c, \beta_n])$  sont des suites exhaustives respectivement de  $I \cap ]-\infty, c]$  et  $I \cap [c, +\infty[$ , alors  $([\alpha_n, \beta_n])$  est une suite exhaustive de  $I$ . On conclut par utilisation de la relation de Chasles sur  $[\alpha_n, \beta_n]$  et par passage à la limite. □

Ce résultat permet de ramener le calcul de l'intégrale sur un intervalle quelconque à celui de l'intégrale sur un segment et sur un intervalle du type  $[a, b[$  ou  $]a, b]$ . Les deux derniers cas étant similaires, nous nous limiterons par la suite au premier.

### Proposition 25

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b[$ . L'application :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

admet une limite en  $b$  et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

**Démonstration** Pour montrer que :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

tend vers  $\int_a^b f(t) dt$  en  $b$ , il suffit de montrer que pour toute suite croissante  $(x_n)$  d'éléments de  $[a, b[$  convergeant vers  $b$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \int_a^b f(t) dt,$$

ce qui est une conséquence du fait que la suite  $([a, x_n])$  est une suite exhaustive de segments de  $[a, b[$  □

► **Attention** Il se peut qu'une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I = [a, b[$  ne soit pas intégrable sur  $I$ , mais que l'application :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

admette une limite en  $b$ .

Cette limite est alors appelée *intégrale impropre* de  $f$  sur  $[a, b[$  et se note encore :

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**Exemples**

1. L'application :

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$$

n'est pas intégrable sur  $[2\pi, +\infty[$  puisque son module n'est pas intégrable. Pourtant, à l'aide d'une intégration par parties :

$$F(x) = \int_{2\pi}^x \frac{e^{it}}{t} dt = \frac{i}{2\pi} - \frac{ie^{ix}}{x} - i \int_{2\pi}^x \frac{e^{it}}{t^2} dt.$$

Comme la fonction  $t \mapsto e^{it}/t^2$  est intégrable sur  $[2\pi, +\infty[$ , on en déduit que  $F$  admet une limite en  $+\infty$ .

2. En prenant les parties réelle et imaginaire on en déduit l'existence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

ainsi que de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

puisque la fonction  $\sin x/x$  est prolongeable par continuité sur  $[0, 2\pi]$ .

**Corollaire 26**

Si  $f$  est intégrable sur un intervalle  $I$  de bornes inférieure et supérieure respectivement  $a$  et  $b$ , alors pour toutes suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  convergent respectivement vers  $a$  et  $b$ , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x) dx.$$

**Démonstration** En coupant l'intervalle  $I$  en deux (proposition 24 page 555), on se ramène au cas où  $I$  est de la forme  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\alpha, \beta[$ ,  $] \alpha, \beta]$ , et il suffit d'utiliser la proposition 25 page précédente.  $\square$

**Corollaire 27**

Si  $f$  est continue par morceaux sur un segment  $[a, b]$ , alors elle est intégrable sur les intervalles  $[a, b[$ ,  $] a, b]$  et  $] a, b[$  et :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f.$$

**Démonstration** On sait déjà d'après la remarque de la page 540 que si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , alors elle est intégrable sur tout intervalle de bornes  $a$  et  $b$ . Pour l'égalité des intégrales, il suffit de prendre deux suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  d'éléments de  $]a, b[$  convergeant vers  $a$  et  $b$ . L'intégrale de  $f$  sur  $[\alpha_n, \beta_n]$  converge alors d'après le corollaire précédent vers chacune des quatre intégrales.  $\square$

### Proposition 28

Si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors elle est intégrable sur tout intervalle  $I' \subset I$  et :

$$\int_{I'} f = \int_I \chi_{I'} f.$$

**Démonstration** L'intégrabilité sur  $I'$  est évidente.

D'après le corollaire 27 page précédente, on peut supposer que  $I'$  est fermé dans  $I$ . Il est alors facile de voir en étudiant les différents cas pour  $I'$  et  $I$  que si  $(J_n)$  est une suite exhaustive de segments de  $I$ , alors  $(J_n \cap I')$  est une suite exhaustive de segments de  $I'$ .

Comme pour tout segment  $J_n$  on a :

$$\int_{J_n \cap I'} f = \int_{J_n} \chi_{I'} f$$

on en déduit le résultat par passage à la limite.  $\square$

## 2.5 Intégration des relations de comparaison

### Proposition 29

Étant donné un intervalle  $I = [a, b[$ , on considère une fonction  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  et une fonction  $\varphi \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$  positive et intégrable sur  $I$ .

1. Si  $f$  est dominée par  $\varphi$  au voisinage de  $b$  alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et au voisinage de  $b$  :

$$\int_x^b f(t) dt = \mathcal{O} \left( \int_x^b \varphi(t) dt \right).$$

2. Si  $f$  est négligeable devant  $\varphi$  au voisinage de  $b$ , alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et au voisinage de  $b$  :

$$\int_x^b f(t) dt = \mathcal{o} \left( \int_x^b \varphi(t) dt \right).$$

**Démonstration** On sait déjà (proposition 8 page 545) que dans les deux cas  $f$  est intégrable.

1. Prenons  $A \in I$  et  $M \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in [A, b[ , \|f(x)\| \leq M \varphi(x).$$

Alors, pour  $A \leq x \leq y < b$ , on a :

$$\left\| \int_x^y f(t) dt \right\| \leq \int_x^y \|f(t)\| dt \leq M \int_x^y \varphi(t) dt.$$

Les fonctions  $f$  et  $\varphi$  étant intégrables, on peut faire tendre  $y$  vers  $b$  pour obtenir :

$$\left\| \int_x^b f(t) dt \right\| \leq M \int_x^b \varphi(t) dt$$

ce qui prouve le résultat.

2. De la même façon, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on prend  $A$  tel que :

$$\forall x \in [A, b[ , \|f(x)\| \leq \varepsilon \varphi(x)$$

et on a, pour  $x \geq A$  :

$$\left\| \int_x^b f(t) dt \right\| \leq \varepsilon \int_x^b \varphi(t) dt.$$

□

**Proposition 30**

Étant donné un intervalle  $I = [a, b[$ , on considère une fonction  $f \in \mathcal{CM}(I, F)$  et une fonction  $\varphi \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$  **positive** et non intégrable sur  $I$ .

1. Si au voisinage de  $b$  la fonction  $f$  est dominée par  $\varphi$ , alors :

$$\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x \varphi(t) dt\right).$$

2. Si au voisinage de  $b$  la fonction  $f$  est négligeable devant  $\varphi$ , alors :

$$\int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x \varphi(t) dt\right).$$

**Démonstration**

1. Soit  $A$  tel que  $\forall x \in I, x \geq A \implies \|f(x)\| \leq M \varphi(x)$ . On a :

$$\left\| \int_A^x f(t) dt \right\| \leq \int_A^x \|f(t)\| dt \leq M \int_A^x \varphi(t) dt \leq M \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Comme  $\varphi$  est positive non intégrable, son intégrale sur  $[a, x]$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $b$ . Donc il existe un réel  $B$  tel que :

$$x \geq B \implies \left\| \int_a^A f(t) dt \right\| \leq \int_a^x \varphi(t) dt$$

ce qui donne .

$$x \geq \max(A, B) \implies \left\| \int_a^x f(t) dt \right\| \leq (M + 1) \int_a^x \varphi(t) dt$$

et prouve le résultat.

2 Pour  $\varepsilon > 0$ , prenons  $A$  tel que  $x \geq A \implies \|f(x)\| \leq \varepsilon \varphi(x)$ . On a alors :

$$x \geq A \implies \left\| \int_A^x f(t) dt \right\| \leq \varepsilon \int_A^x \varphi(t) dt \leq \varepsilon \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Comme  $\int_a^x \varphi(t) dt$  tend vers  $+\infty$ , il existe  $B$  tel que pour  $x \geq B$  :

$$\left\| \int_a^A f(t) dt \right\| \leq \varepsilon \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Pour  $x$  assez grand, on a donc :

$$\left\| \int_a^x f(t) dt \right\| \leq 2\varepsilon \int_a^x \varphi(t) dt$$

ce qui prouve le résultat. □

► **Attention** La positivité de  $\varphi$  est indispensable dans ces deux résultats. Par exemple, pour  $f(x) = |\sin x|$  et  $\varphi(x) = \sin x$ , on a  $f = O(\varphi)$  et  $\varphi$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Pourtant,  $\int_a^x f(t) dt$  n'est pas majorée alors que  $\int_a^x \varphi(t) dt$  est bornée.

**Corollaire 31**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur  $I = [a, b[$ , et équivalentes en  $b$ .

1. Si  $g$  est intégrable sur  $I$ , alors  $f$  aussi et au voisinage de  $b$  :

$$\int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt.$$

2. Si  $g$  n'est pas intégrable sur  $I$ , alors  $f$  non plus et au voisinage de  $b$  :

$$\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt.$$



**Démonstration** Conséquence des résultats précédents, puisque  $g - f = o(g)$ . □

► **Attention** Ce résultat est faux si les fonctions ne sont pas de signe constant (au moins au voisinage de  $b$ ). Par exemple, les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}$$

sont équivalentes au voisinage de  $+\infty$ . Elles ne sont intégrables sur  $[\pi/2, +\infty[$  ni l'une ni l'autre mais :

$$\int_{\pi/2}^x f(t) dt$$

est bornée alors que :

$$\int_{\pi/2}^x g(t) dt$$

tend vers  $-\infty$ .

En effet, une intégration par parties donne :

$$\int_{\pi/2}^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \int_{\pi/2}^x \frac{\cos t}{2t^{3/2}} dt$$

et la fonction  $t \mapsto \frac{\cos t}{2t^{3/2}}$  étant dominée par  $t^{-3/2}$  est intégrable sur  $[\pi/2, +\infty[$ , ce qui prouve que  $f$  admet une intégrale impropre sur  $[\pi/2, +\infty[$ .

En revanche :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O(x^{-3/2}). \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est donc somme :

- de  $f$  dont les primitives sont bornées,
- de  $x \mapsto -\sin^2 x/x$  qui est négative et non intégrable donc dont les primitives tendent vers  $-\infty$  en  $+\infty$ ,
- d'une fonction dominée par  $x^{-3/2}$ , donc intégrable.

On en déduit que les primitives de  $g$  tendent vers  $-\infty$ , et donc que l'on n'a pas :

$$\int_{\pi/2}^x f(t) dt \sim \int_{\pi/2}^x g(t) dt.$$

**Exemples**

1. La fonction  $x \mapsto \ln(\ln(1+x))$  est intégrable sur  $]0, 1]$  puisque continue et équivalente en 0 à  $\ln(x)$ . Comme ces fonctions sont négatives, en appliquant le résultat précédent à leurs opposées, on obtient au voisinage de 0 :

$$\int_0^x \ln(\ln(1+t)) dt \sim \int_0^x \ln t dt \sim x \ln x - x \sim x \ln x.$$

2. Pour trouver un équivalent en  $+\infty$  de :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt,$$

il suffit de trouver une fonction dont la dérivée est équivalente à  $e^{x^2}$  (qui n'est évidemment pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ ). Or :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{e^{x^2}}{x} \right) = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2} \sim 2e^{x^2}.$$

On a donc :

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \int_1^x e^{t^2} dt \sim \left[ \frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x \sim \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

**2.6 Convergence en moyenne et en moyenne quadratique****Convergence en moyenne****Proposition 32**

L'application  $N_1 : f \mapsto \int_I \|f\|$  est une application de  $\mathcal{L}^1(I, F)$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant :

- $\forall f \in \mathcal{L}^1(I, F), \forall \lambda \in \mathbf{K}, N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$
- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}^1(I, F)^2, N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$

**Démonstration**

- ▶ Par définition de  $\mathcal{L}^1(I, F)$ , l'application  $N_1$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .
- ▶ La relation  $N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$  est évidente
- ▶ En intégrant l'inégalité  $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$ , on obtient :

$$N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g).$$

□

**Remarque** L'application  $f \mapsto \int_I \|f\|$  n'est pas une norme sur  $\mathcal{L}^1(I, F)$  puisqu'elle ne vérifie pas l'axiome de séparation : si une fonction  $f$  est telle que  $N_1(f) = 0$ , on peut seulement dire qu'elle est nulle sauf sur une partie dont la trace sur tout segment de  $I$  est finie.

Il s'agit néanmoins une semi-norme sur  $\mathcal{L}^1(I, F)$  puisque la proposition précédente montre qu'elle est sous-linéaire.

**Définition 3**

Une suite  $(f_n)$  de fonctions continues intégrables converge en moyenne vers  $f \in \mathcal{L}^1(I, F)$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(f - f_n) = 0$ . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

**Démonstration** La dernière égalité provient de l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \int_I f - \int_I f_n \right\| = \left\| \int_I (f - f_n) \right\| \leq \int_I \|f - f_n\|.$$

□

**L'espace vectoriel normé  $\mathcal{L}_c^1(I, F)$**

**Corollaire 33**

L'application  $N_1$  est une norme sur l'espace vectoriel  $\mathcal{L}_c^1(I, F)$  constitué des fonctions continues et intégrables sur  $I$ .

**Démonstration** L'axiome de séparation vient de la proposition 3 page 542 appliquée à  $\|f\|$

□

**Proposition 34**

Une suite  $(f_n)$  de fonctions continues intégrables converge en moyenne vers  $f \in \mathcal{L}_c^1(I, F)$  si, et seulement si, elle converge dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{L}_c^1(I, F), N_1)$ . C'est pourquoi, l'application  $N_1$  s'appelle *norme de la convergence en moyenne*.

**Remarque** De même que dans le cas de l'intégrale sur un segment l'espace vectoriel normé  $\mathcal{L}_c^1(I, F)$  n'est pas complet.

**Proposition 35**

L'intégrale sur  $I$  est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{L}_c^1(I, F), N_1)$  dans  $F$ . Sa norme est égale à 1.

**Démonstration** Conséquence de l'inégalité :

$$\left\| \int_I f \right\| \leq \int_I \|f\|$$

qui est une égalité pour toute fonction de la forme  $x \mapsto \varphi(x)a$ , où  $a$  est un élément non nul de  $F$ , et  $\varphi$  une application réelle positive non nulle, continue et intégrable sur  $I$ , par exemple  $\varphi(x) = e^{-x^2}$  □

**L'espace vectoriel normé  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$** 

On utilise ici les notions de forme sesquilinéaire et de produit scalaire introduites au chapitre 18

■ **Notation** On note  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions complexes continues de carré intégrable, c'est-à-dire des fonctions  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$  telles que  $|f|^2$  soit intégrable sur  $I$ . Si  $f \in \mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$ , on pose :

$$N_2(f) = \sqrt{\int_I |f|^2}.$$

**Proposition 36**

Si  $f$  et  $g$  sont de carré intégrable, alors le produit  $f g$  est intégrable.

**Démonstration** Conséquence de la positivité de  $(|f| - |g|)^2$  qui donne l'inégalité :

$$2|f||g| \leq |f|^2 + |g|^2. \quad \square$$

**Proposition 37**

L'ensemble des fonctions continues de carré intégrable constitue un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ .

**Démonstration** La seule difficulté consiste à montrer que la somme de deux fonctions de carré sommable et encore de carré sommable, ce qui provient des relations :

$$|f + g|^2 = (\bar{f} + \bar{g})(f + g) = |f|^2 + |g|^2 + \bar{f}g + f\bar{g}$$

et de la proposition précédente □

**Proposition 38**

Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$  peut être muni du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto (f | g) = \int_I \bar{f} g$$

dont la norme associée est  $N_2$ .

**Démonstration** Cette application est bien définie d'après la proposition 36 page précédente. Elle est évidemment sesquilinéaire, hermitienne et positive. Pour démontrer qu'elle est définie positive, il suffit de remarquer que si  $(f | f) = 0$ , la fonction continue positive  $|f|^2$  a une intégrale nulle, donc est nulle.  $\square$

**Corollaire 39**

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues de carré intégrables, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_I \bar{f} g \right|^2 \leq \int_I |f|^2 \int_I |g|^2,$$

avec égalité si, et seulement si,  $f$  et  $g$  sont proportionnelles

En se limitant au cas des fonctions et des scalaires réels, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 40**

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$  peut être muni du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto (f | g) = \int_I f g$$

dont la norme associée est  $N_2$ .

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles continues de carré intégrables on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left( \int_I f g \right)^2 \leq \int_I f^2 \int_I g^2,$$

avec égalité si, et seulement si,  $f$  et  $g$  sont proportionnelles.

**Remarque** En terme de produit scalaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit (aussi bien dans le cas réel que complexe) :

$$|(f | g)| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)N_2(g).$$

Le produit scalaire est donc une application bilinéaire ou sesquilinéaire continue sur l'espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable.

#### Définition 4

Une suite  $(f_n)$  de fonctions continues de carré intégrable converge en moyenne quadratique vers  $f \in \mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$  si elle converge dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C}), N_2)$ , c'est-à-dire si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(f - f_n) = 0$ .

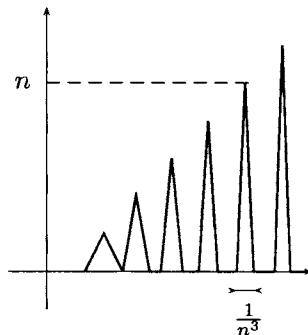
L'application  $N_2$  s'appelle donc aussi *norme de la convergence en moyenne quadratique*.

#### Remarques

- Plus généralement, une suite  $(f_n)$  de fonctions continues par morceaux de carré intégrable converge en moyenne quadratique vers  $f$  continue par morceaux et de carré intégrable si  $N_2(f - f_n) = \sqrt{\int_I |f - f_n|^2}$  tend vers 0.
- On peut démontrer que l'espace vectoriel normé  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$  n'est pas complet.

#### Exemples

1. On n'a pas d'inclusion générale entre  $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{C})$  et  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$  lorsque  $I$  n'est pas borné. En effet, si par exemple  $I = [1, +\infty[$  :
  - la fonction  $x \mapsto 1/x$  est de carré intégrable sur  $I$  mais n'est pas intégrable sur  $I$  ;
  - la fonction  $f$  affine par morceaux nulle en dehors de chacun des segments  $[n, n + 1/n^3]$  et valant  $n$  au milieu de ce segment :



est intégrable mais pas de carré intégrable, puisque :

$$\int_{[n,n+1]} f = \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \int_{[n,n+1]} f^2 = \frac{1}{3n}.$$

2. Toutefois, lorsque  $I$  est borné, on a  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{C})$  et  $N_1 \leq \sqrt{b-a} N_2$ , où  $a$  et  $b$  sont les bornes de  $I$ .

En effet, la fonction 1 est de carré intégrable, ce qui prouve que  $f = 1 \times f$  est intégrable, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left( \int_I |f| \right)^2 \leq \left( \int_I 1^2 \right) \left( \int_I |f|^2 \right).$$

L'inclusion est stricte si  $I$  n est pas un segment comme le montre l'exemple des fonctions  $x \mapsto 1/\sqrt{x-a}$  et  $x \mapsto 1/\sqrt{b-x}$  respectivement intégrables sur  $]a, b]$  et  $[a, b[$  mais pas de carré intégrable.

3. Dans le cas d'un intervalle borné, la convergence en moyenne quadratique entraîne donc la convergence en moyenne.

### 3. Théorèmes de convergence

#### 3.1 Convergence uniforme

**Proposition 41**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle  $I$  borné et convergeant uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

**Démonstration** Par convergence uniforme, il existe un entier  $p$  tel que  $N_\infty(f - f_p) \leq 1$ , ce qui donne :

$$\|f\| \leq \|f_p\| + 1$$

et prouve l'intégrabilité de  $f$  puisque la constante 1 est intégrable sur un intervalle borné.

Si  $\ell$  est la longueur de l'intervalle  $I$ , on a pour tout entier  $n$  :

$$\left\| \int_I f - \int_I f_n \right\| \leq \int_I \|f - f_n\| \leq \ell N_\infty(f - f_n)$$

ce qui prouve que l'intégrale de  $f_n$  converge vers l'intégrale de  $f$  □

**Remarques**

- On retrouve, dans le cas où  $I$  est un segment, la proposition 19 page 485.
- Comme dans le cas de l'intégrale sur un segment, la convergence uniforme sur un intervalle borné entraîne la convergence en moyenne (c'est-à-dire pour  $N_1$ ), puisque :

$$N_1(f) \leq \ell N_\infty(f)$$

où  $\ell$  est la longueur de l'intervalle.

► **Attention** Si  $I$  est non borné le résultat ne subsiste pas. En effet, la fonction  $\frac{1}{n} \chi_{[0,n]}$  converge uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ , alors que son intégrale vaut 1 pour tout  $n$ .

Dans la suite de cette section, nous donnons plusieurs théorèmes puissants de passage à la limite sous le signe  $\int$ . Ce sont des cas particuliers de résultats de la théorie de l'intégration de Lebesgue. Contrairement à la proposition précédente, ils ne demandent qu'une convergence simple en échange d'une condition supplémentaire de croissance ou de domination.

Conformément au programme, nous nous limiterons dans les démonstrations au cas (rarement insuffisant) où la convergence est uniforme sur tout compact. Voir la section 5. pour la démonstration dans le cas général.

**3.2 Convergence monotone****Théorème 42 (Théorème de convergence monotone)**

Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions de  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$  convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ .

La fonction  $f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si la suite  $\left(\int_I f_n\right)_n$  est majorée, et alors :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \sup_n \int_I f_n.$$

**Démonstration lorsque la convergence est uniforme sur tout compact**

Quitte à travailler avec  $f_n - f_0$  et  $f - f_0$ , on peut supposer toutes les fonctions positives.

- On a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \leq f$ , donc si  $f$  est intégrable, les intégrales de  $f_n$  sont majorées par l'intégrale de  $f$ .



► Supposons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I f_n \leq M.$$

Si  $J$  est un segment de  $I$ , la convergence uniforme sur  $J$  des fonctions  $f_n$  entraîne :

$$\int_J f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_n \leq M.$$

Donc  $f$  est intégrable, et :

$$\int_I f \leq M.$$

En appliquant ce qui précède avec  $M = \sup_n \int_I f_n$ , on obtient :

$$\int_I f \leq \sup_n \int_I f_n,$$

l'inégalité inverse provenant des relations  $f_n \leq f$ . □

### Corollaire 43

Soit  $(f_n)$  une suite décroissante de fonctions intégrables sur  $I$  convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ .

La fonction  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si, la suite  $\left(\int_I f_n\right)_n$  est minorée, et alors :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \inf_n \int_I f_n.$$

**Démonstration** Appliquer la théorème de convergence monotone à  $-f_n$  et  $-f$ . □

### Exemples

1. Soit  $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$ .

La fonction  $f_n(x) = e^{-x^n}$  converge simplement en décroissant sur  $]1, +\infty[$  vers une fonction nulle sauf en 1. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

On peut de plus remarquer, qu'en travaillant sur  $]1, +\infty[$  à la place de  $[1, +\infty[$ , la convergence est uniforme sur tout compact, ce qui permet de n'utiliser que la version démontrée du théorème de convergence monotone.

2. Pour trouver un équivalent de  $I_n$ , on peut effectuer le changement de variable  $t = x^n$ . On a ainsi :

$$n I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}} dt = \int_1^{+\infty} t^{1/n} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Sur  $[1, +\infty[$ , la fonction  $t^{1/n} \frac{e^{-t}}{t}$  converge en décroissant vers  $\frac{e^{-t}}{t}$ , d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \alpha = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

et  $I_n \sim \alpha/n$ .

**Remarque** Lorsque les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont continues, la démonstration du théorème faite dans le cas d'une convergence uniforme sur tout compact suffit, puisque d'après le théorème de Dini (cf. proposition 13 page 446), une suite monotone de fonctions continues qui converge simplement sur un compact vers une fonction continue, converge alors uniformément sur ce compact.

#### Corollaire 44

Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions **positives** intégrables sur  $I$ , convergeant simplement vers une fonction  $S$  continue par morceaux.

La fonction  $S$  est intégrable si, et seulement si, la série numérique :

$$\sum \int_I u_n$$

converge, et alors :

$$\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_I u_n \right).$$

**Exemple** Étudions l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt \quad \text{avec} \quad \alpha > 0$$

Commençons par écrire, pour  $t > 0$  :

$$\frac{t^\alpha}{e^t - 1} = \frac{t^\alpha e^{-t}}{1 - e^{-t}} = t^\alpha e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = t^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

La fonction  $u_n(t) = t^\alpha e^{-nt}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et (pour  $n \geq 1$ ) intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  puisque  $u_n(t) = o(1/t^2)$  au voisinage de  $+\infty$ . De plus :

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-nt} dt = \frac{1}{n^{1+\alpha}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du$$

par le changement de variable  $u = nt$ , et par conséquent la série  $\sum \int_0^{+\infty} u_n(t) dt$  converge.

Ainsi la fonction  $\frac{t^\alpha}{e^t - 1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (ce que l'on aurait pu vérifier immédiatement en étudiant le comportement asymptotique de la fonction en 0 et en  $+\infty$ ), et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Par exemple, si  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = (\alpha - 1)!$$

(voir page 585) et donc :

$$I(\alpha) = (\alpha - 1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

### Théorème 45

Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions de  $\mathcal{CM}(I, F)$  intégrables sur  $I$  convergeant simplement vers une fonction  $S$  continue par morceaux.

Si la série  $\sum \int_I \|u_n\|$  converge, alors la fonction  $S$  est intégrable sur  $I$  et

l'on a :

$$\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_I u_n \right).$$

### Démonstration

► Posons  $g_n = \sum_{k=0}^n \|u_k\|$ . Pour  $x \in I$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  à partir duquel :

$$\left\| \sum_{k=0}^n u_k(x) - S(x) \right\| \leq \varepsilon$$

et donc :

$$\left\| \sum_{k=0}^n u_k(x) \right\| \geq \|S(x)\| - \varepsilon$$

ce qui donne  $g_n(x) \geq \|S(x)\| - \varepsilon$ .

La suite  $h_n = \inf(g_n, \|S\|)$  converge donc simplement vers  $\|S\|$  et comme :

$$\int_I h_n \leq \int_I g_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \|u_n\|$$

le théorème de convergence monotone entraîne l'intégrabilité de  $\|S\|$  avec :

$$\int_I \|S\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \|u_n\|. \quad (*)$$

► D'autre part :

$$\left\| \int_I \sum_{p=0}^n u_p - \int_I S \right\| = \left\| \int_I \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \right\| \leq \int_I \left\| \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \right\|$$

et en appliquant la relation (\*) à la série  $\sum_{p>n} u_p$ , on obtient :

$$\int_I \left\| \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \right\| \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_I \|u_p\|.$$

Comme la série  $\sum \int_I \|u_n\|$  converge, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_I \|u_p\| = 0$$

et donc que les sommes partielles :

$$\sum_{p=0}^n \int_I u_p = \int_I \sum_{p=0}^n u_p$$

convergent vers l'intégrale de  $S$ , ce qu'il fallait démontrer □

### Remarques

- On a au passage montré :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I \left\| \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \right\| = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1 \left( S - \sum_{p=0}^n u_p \right) = 0$$

qui traduit la convergence en moyenne de la série.

- Si la série  $\sum \|u_n\|$  converge vers une fonction continue par morceaux la preuve de l'intégrabilité de  $S$  est une conséquence directe du théorème de convergence monotone. En effet, la convergence de la série  $\sum \int_I \|u_n\|$  entraîne l'intégrabilité de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$  et donc de  $S$ , puisque :

$$\|S\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

- Mais la série  $\sum \|u_n\|$  peut très bien ne pas converger vers une fonction continue par morceaux, voire même ne pas converger sur tout l'intervalle  $I$  (cf. exemple 2. ci-dessous).

**Exemples**

1. On peut généraliser l'exemple de la page 570 à  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re } \alpha > 0$  puisqu'alors :

$$\int_0^{+\infty} |t^\alpha e^{-nt}| dt = \int_0^{+\infty} t^{\text{Re } \alpha} e^{-nt} dt$$

est le terme général d'une série convergente. On en déduit :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

2. Sur  $[0, 1]$ , la série de terme général :

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}}$$

converge simplement (d'après le théorème des série alternées pour  $t = 1$ ) et :

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+n^2}} dt = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n^2}$$

ce qui prouve que la série  $\sum \int_I \|u_n\|$  converge et donc que :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{1+n^2}}.$$

On peut remarquer que la série  $\sum |u_n|$  ne converge pas en 1. Néanmoins, la convergence étant uniforme sur tout segment de  $[0, 1[$ , sa somme est une fonction continue sur  $[0, 1[$ , et la convergence de la série :

$$\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt$$

entraîne son intégrabilité sur  $[0, 1[$  d'après le corollaire 44 page 570, et l'on a donc aussi :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{\sqrt{1+n^2}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+n^2}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+n^2}}.$$

### 3.3 Convergence dominée

#### Théorème 46 (théorème de convergence dominée)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{CM}(I, F)$  intégrables et convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux.

S'il existe une fonction  $g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$  intégrable telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\| \leq g \quad (\text{condition de domination})$$

alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

#### Démonstration lorsque la convergence est uniforme sur tout compact

L'intégrabilité de  $f$  est évidente puisque  $\|f\| \leq g$ , avec  $g$  intégrable

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un segment  $K$  de  $I$  tel que :

$$\int_I (1 - \chi_K) g = \int_I g - \int_K g \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

et comme  $\|f - f_n\| \leq 2g$ , on en déduit :

$$\int_I \|f - f_n\| - \int_K \|f - f_n\| = \int_I (1 - \chi_K) \|f - f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur le segment  $K$  on peut trouver un entier  $n_0$  à partir duquel on a :

$$\int_K \|f - f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour  $n \geq n_0$  :

$$\left\| \int_I f - \int_I f_n \right\| \leq \int_I \|f - f_n\| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat. □

**Corollaire 47**

Sous les hypothèses du théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(f - f_n) = 0.$$

Autrement dit, la suite  $(f_n)$  converge en moyenne vers  $f$ .

**Démonstration** La suite  $\|f - f_n\|$  converge simplement vers 0 et elle est dominée par la fonction  $2g$  intégrable. □

► **Attention** L’hypothèse de domination est indispensable pour avoir le résultat. Par exemple, la suite :

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

converge simplement vers 0 sur  $[0, 1]$ , et pourtant :

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^n t e^{-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1.$$

**Remarque** Dans le cas où  $I$  est un segment, la condition de domination est équivalente à dire que les fonctions  $f_n$  sont bornées par une même constante, puisque les fonctions intégrables sont les fonctions continues par morceaux, et que ces dernières sont bornées sur un segment. Cette condition (lorsqu’elle est satisfaite) est très facile à vérifier et évite d’avoir à montrer la convergence uniforme pour utiliser la proposition 41 page 567.

**Exemples**

1. La suite de fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge simplement vers  $f(x) = e^{-x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+$  puisque, pour  $n \geq x$  :

$$f_n(x) = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$$

D'autre part, la convexité de l'exponentielle nous donne :

$$1 - \frac{x^2}{n^2} \leq e^{-x^2/n^2} \quad \text{et donc : } 0 \leq f_n(x) \leq e^{-x^2} \quad \text{pour } x \leq n$$

ces inégalités étant évidentes si  $x > n$ .

La suite  $(f_n)$  est donc dominée par la fonction  $e^{-x^2}$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui prouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Remarque** Dans cet exemple, on peut montrer que la suite  $(f_n)$  est croissante, et donc le théorème de convergence monotone aurait aussi pu être utilisé. Mais ici la domination est plus rapide à vérifier que la monotonie.

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$  de partie réelle strictement comprise entre  $-1$  et  $1$ . Montrons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(zt)}{\text{sh} t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}.$$

- Tout d'abord, la fonction :

$$f(t) = \frac{\text{sh}(zt)}{\text{sh} t}$$

est sommable sur  $\mathbb{R}_+$ , puisqu'elle est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}_+$  et que si  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{sh}(zt) &= \text{sh}(at) \text{ch}(ibt) + \text{ch}(at) \text{sh}(ibt) \\ &= \text{sh}(at) \cos(bt) + i \text{ch}(at) \sin(bt) \end{aligned}$$

et donc :

$$\left| \frac{\text{sh}(zt)}{\text{sh} t} \right| \leq 2 \frac{\text{ch}(at)}{\text{sh} t} \sim 2e^{(|a|-1)t} \quad \text{avec } |a| < 1.$$

- Pour  $t > 0$ , on a :

$$f(t) = 2e^{-t} \text{sh}(zt) \frac{1}{1 - e^{-2t}} = 2 \text{sh}(zt) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)t}.$$

La suite :

$$S_n(t) = 2 \text{sh}(zt) \sum_{p=0}^n e^{-(2p+1)t}$$

converge donc simplement vers  $f$  et comme :

$$|S_n(t)| \leq 2 |\text{sh}(zt)| \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)t} = |f(t)|$$

la suite  $S_n$  est dominée par  $|f|$  qui est intégrable.



- Le résultat s'en suit puisque :

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{+\infty} e^{-kt} \operatorname{sh}(zt) dt &= \int_0^{+\infty} e^{(z-k)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-(z+k)t} dt \\
 &= \frac{1}{k-z} - \frac{1}{k+z} = \frac{2z}{k^2 - z^2}
 \end{aligned}$$

### En résumé

- Pour pouvoir échanger une limite et une intégrale, il suffit en plus de la convergence simple, de montrer la monotonie (pour les suites réelles) ou la domination par une fonction intégrable.
- Pour pouvoir intégrer terme à terme une série  $\sum u_n$ , il suffit de montrer en plus de la convergence simple (au choix) :

\*  $\sum_n \int_I \|u_n\|$  converge ;

\*  $\left\| \sum_{p=0}^n u_p(x) \right\| \leq g(x)$  avec  $g$  intégrable.

## 4. Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette section, nous étudions des conditions de continuité et de dérivabilité de fonctions définies par une intégrale sur un intervalle quelconque. Ces résultats, conséquences du théorème de convergence dominée, demandent des hypothèses beaucoup plus faibles que leurs homologues des deux chapitres précédents, et sont donc très utiles même dans le cas où l'intervalle d'intégration est un segment.

### 4.1 Continuité sous le signe $\int$

#### Théorème 48

Soit  $f$  une application de  $A \times I$  dans  $F$  où  $A$  est une partie d'un espace vectoriel normé. Si :

- pour tout  $x \in A$  la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$
- pour tout  $t \in I$  l'application  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall t \in I, \forall x \in A, \|f(x, t)\| \leq \varphi(t),$$

alors l'application  $g : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$  est continue sur  $A$

**Démonstration** L'hypothèse de domination assure l'existence de  $\int_a^b f(x, t) dt$  pour tout  $x \in A$ .

Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $A$  convergeant vers  $x \in A$ . D'après la deuxième hypothèse, la suite  $(f(x_n, t))$  converge vers  $f(x, t)$  pour tout  $t \in I$ . Comme les fonctions  $t \mapsto f(x_n, t)$  sont continues par morceaux et dominées par une fonction intégrable, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f(x_n, t) dt = \int_I f(x, t) dt$$

ce qui prouve la continuité de  $g$  □

### Remarques

- Les deux premières conditions du théorème sont évidemment vérifiées lorsque  $f$  est continue sur  $A \times I$ . Dans ce cas, à l'aide de l'uniforme continuité sur tout compact de  $A \times I$ , on peut démontrer la continuité de  $g$  sans faire appel au théorème de convergence dominée, par une démonstration similaire à celle de la page 574. D'ailleurs la continuité de  $f$  entraîne la convergence uniforme sur tout compact de la suite de fonctions  $(f(x_n, t))$  ce qui permet, dans la démonstration précédente, de n'utiliser que la version prouvée du théorème de convergence dominée.
- Il est clair que l'hypothèse de domination peut n'être vérifiée que localement au voisinage de chaque point de  $A$ , voire même seulement sur toute partie compacte de  $A$ .

### Exemples

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Sa transformée de Fourier :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} dt$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ . Ici, la domination est réalisée par la fonction  $|f|$  elle-même

2. Soit  $f$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ . Si  $x_0 \in \mathbb{R}$  est tel que  $t \mapsto f(t) e^{-x_0 t}$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , alors il en est de même pour tout  $x \geq x_0$ . La transformée de Laplace de  $f$  :

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

est donc définie sur un intervalle  $I$  non majoré. Elle est alors continue sur  $I$  car  $x \mapsto f(t) e^{-xt}$  est continue sur  $I$  et :

- si  $I = [x_0, +\infty[$  la fonction à intégrer est dominée par  $|f(t) e^{-x_0 t}|$
- si  $I$  est ouvert elle est dominée sur tout intervalle  $[x - \eta, x + \eta] \subset I$  par  $|f(t) e^{-(x-\eta)t}|$ .

3. On peut définir :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2 t^2} dt$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  puisque la fonction  $t \mapsto \frac{x}{1+x^2 t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  (pour  $x = 0$  c'est évident, et pour  $x > 0$  elle est négligeable devant  $t^{-3/2}$  au voisinage de  $+\infty$ ).

Comme on a :

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } x > 0,$$

la fonction  $F$  n'est pas continue en 0.

On ne peut donc pas trouver de fonction  $\varphi$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  telle que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{x}{1+x^2 t^2} \leq \varphi(t).$$

## 4.2 Dérivation sous le signe $\int$

### Théorème 49

Soit  $f$  une application de  $J \times I$  dans  $F$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si :

- pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$  (en particulier continue par morceaux),
- pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est dérivable et la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  pour tout  $x$ ,
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall x \in J, \forall t \in I, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right\| \leq \varphi(t),$$

alors la fonction  $g$  définie sur  $J$  par :

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

est dérivable sur  $J$  et l'on a :

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

**Démonstration** Soit  $x_0 \in J$ . Posons :

$$h(x, t) = \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} \quad \text{si } x \neq x_0 \quad \text{et} \quad h(x_0, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$$

On a pour  $x \neq x_0$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_I h(x, t) dt,$$

et donc il suffit de montrer que :

$$x \mapsto \int_I h(x, t) dt$$

est continue en  $x_0$ .

Or d'après les hypothèses, la fonction  $x \mapsto h(x, t)$  est continue, et d'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour  $x \neq x_0$  :

$$\|h(x, t)\| \leq \sup_{u \in [x_0, x]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(u, t) \right\| \leq g(t),$$

l'inégalité étant également vraie lorsque  $x = x_0$ .

D'après le théorème de continuité sous le signe  $\int$ , on en déduit le résultat □

**Remarques**

- En combinant les théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe  $\int$ , on en déduit que si de plus pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^1$ , alors  $g$  est de classe  $C^1$ .
- Bien entendu, si  $f$  est de classe  $C^1$  et si  $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sont dominées par des fonctions intégrables, alors on peut appliquer le théorème et la fonction  $g$  est encore de classe  $C^1$ .
- Comme pour la continuité, l'hypothèse de domination peut n'être vérifiée qu'au voisinage de chaque point de  $J$ .

**Exemples**

1. Si  $f$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$  admet une transformée de Laplace :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

définie sur un intervalle  $I = ]a, +\infty[$ , alors celle-ci est dérivable sur  $I$ , et l'on a :

$$\forall x \in I, F'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt.$$

En effet, si  $x_0 \in I$ , en prenant  $x_1$  et  $x_2$  dans  $I$  tels que  $a < x_1 < x_2 < x_0$  on a pour  $x \geq x_2$  :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (f(t) e^{-xt}) \right| = t |f(t)| e^{-xt} \leq t |f(t)| e^{-x_2 t}$$

et cette dernière fonction est intégrable puisque au voisinage de  $+\infty$  on a  $t e^{-x_2 t} = o(e^{-x_1 t})$ .

2. Par exemple, la transformée de Laplace de  $1/(1+t^2)$  est :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

définie sur  $\mathbb{R}_+$ . Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec :

$$\forall x > 0, F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

Elle est donc une deuxième fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a :

$$\forall x > 0, F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt \quad \text{et ainsi } F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}.$$

Pour trouver une autre expression de  $F$ , il suffit de résoudre l'équation différentielle  $y'' + y = 1/x$ .

Cherchons, par la méthode de variation des constantes, une solution particulière sous la forme :

$$y = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x \quad \text{avec} \quad \lambda'(x) \cos x + \mu'(x) \sin x = 0.$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda'(x) \cos x + \mu'(x) \sin x = 0 \\ -\lambda'(x) \sin x + \mu'(x) \cos x = 1/x \end{cases}$$

qui admet pour solution :

$$\lambda'(x) = -\frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad \mu'(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

On peut prendre pour  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= - \int_{2\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt + \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \\ \mu(x) &= \int_{2\pi}^x \frac{\cos t}{t} dt - \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \end{aligned}$$

ces intégrales impropres existant d'après l'exemple 2. page 557.

On a donc :

$$F(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt + A \cos x + B \sin x.$$

D'autre part, comme  $F'' \geq 0$ , on a  $0 \leq F(x) \leq 1/x$  ce qui prouve que  $F$  tend

vers 0 en  $+\infty$  et donc que  $A$  et  $B$  sont nuls. Ainsi :

$$\begin{aligned} F(x) &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt & (*) \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt. \end{aligned}$$

La fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  puisque  $\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$  est continue en  $(x, t)$  et dominée par  $\frac{1}{1+t^2}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Donc :

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

en utilisant la relation (\*). On trouve ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

3. Montrons directement que la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$$

est deux fois dérivable et vérifie  $G + G'' = 1/x$ .

Il s'agit d'une intégrale impropre, puisque la fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{x+t}$  n'est pas intégrable, mais par une intégration par parties on trouve :

$$\int \frac{\sin t}{x+t} dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{x+t} \right] + \int \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt,$$

et la fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2}$  étant intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , on obtient :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt.$$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme pour obtenir :

$$G'(x) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^3} dt,$$

la condition de domination étant assurée sur tout intervalle  $[a, +\infty[ \subset \mathbb{R}_+^*$  puisque :

$$\forall t \geq 0, \forall x \geq a, \left| \frac{1 - \cos t}{(x+t)^3} \right| \leq \frac{2}{(a+t)^3}.$$

Par une autre intégration par parties, on a :

$$2 \int \frac{1 - \cos t}{(x + t)^3} dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{(x + t)^2} \right] - \int \frac{\sin t}{(x + t)^2} dt$$

soit :

$$G'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x + t)^2} dt.$$

En réitérant le procédé, on voit que  $G$  est deux fois dérivable, avec :

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x + t)^2} dt$$

ce qui donne :

$$G(x) + G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x + t)^2} = \frac{1}{x}.$$

**Corollaire 50**

Si  $f$  est une application de classe  $C^k$  sur  $J \times I$ , et s'il existe des fonctions  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$  intégrables sur  $I$  telles que :

$$\forall i \leq k, \forall x \in J, \forall t \in I, \left\| \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) \right\| \leq \varphi_i(t),$$

alors la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

est de classe  $C^k$  sur  $I$  et l'on a :

$$g^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

**4.3 Un exemple : la fonction  $\Gamma$**

**Proposition 51**

Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  la fonction  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et l'on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

**Démonstration**

► La fonction  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a au voisinage de 0 :

$$t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1} \quad \text{avec} \quad x-1 > -1$$

et au voisinage de  $+\infty$  :

$$t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve son intégrabilité sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

► Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}_+^*$  (avec  $a < b$ ). Pour  $x \in [a, b]$ , on a :

$$t^{x-1} \leq t^{a-1} \quad \text{si } t \leq 1 \quad \text{et} \quad t^{x-1} \leq t^{b-1} \quad \text{si } t \geq 1.$$

Donc  $t^{x-1} e^{-t}$  est dominée, pour  $x \in [a, b]$  par la fonction  $t \mapsto t^{a-1} e^{-t} + t^{b-1} e^{-t}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc  $\Gamma$  est continue sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ , et par suite continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

► Pour montrer que  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$ , il suffit de faire le même travail avec les dérivées successives par rapport à  $x$  de  $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ .

Or,  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$  est continue par rapport à  $t$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme pour  $x > 0$ , on a au voisinage de  $+\infty$  :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et au voisinage de 0 :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = o(t^{x/2-1}) \quad \text{avec} \quad \frac{x}{2} - 1 > -1$$

elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et la relation :

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(b, t) \right|$$

pour  $0 < a \leq x \leq b$  donne la condition de domination sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

□

**Proposition 52**

Pour  $x > 0$ , on a :

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$



**Démonstration** À l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}] + x \int t^{x-1} e^{-t} dt$$

ce qui, en prenant les limites lorsque  $t$  tend vers 0 et vers  $+\infty$ , donne le résultat. □

**Corollaire 53**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n! = \Gamma(n + 1)$ .

**Démonstration** Il suffit de remarquer :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

et d'utiliser la proposition précédente □

**Exemples**

1. En utilisant le changement de variable  $u = \sqrt{t}$  :

$$\int \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int e^{-u^2} du$$

ce qui donne :

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

d'après l'exemple 1. page 530.

2. On a ainsi, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1/2) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n - 1)(2n - 3) \dots 1}{2^n} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

3. La relation  $\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x)$  ainsi que la continuité de  $\Gamma$  en 1 montrent que la fonction  $\Gamma$  tend vers  $+\infty$  en 0, avec comme équivalent :

$$\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

## 5. Démonstration des théorèmes de convergence (hors programme)

### 5.1 Approximation par des fonctions continues

#### Proposition 54

Étant donnée une fonction  $f$  positive et intégrable sur  $I$ , il existe, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , une fonction  $g$  continue sur  $I$  telle que :

$$0 \leq g \leq f \quad \text{et} \quad \int_I (f - g) \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Prenons un segment non vide  $J = [\alpha, \beta]$  inclus dans  $I$  tel que :

$$\int_I f - \int_J f \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quitte à élargir  $J$ , on peut supposer  $f$  continue en  $\alpha$  lorsque  $\alpha \neq \min I$  et continue en  $\beta$  lorsque  $\beta \neq \max I$ . La proposition 22 page 490 nous fournit alors une fonction  $g$  continue sur  $J$  telle que :

$$\forall x \in J, g(x) \leq f(x) \quad \text{et} \quad \int_J (f - g) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et quitte à prendre  $g^+$ , on peut supposer  $g$  positive

Le prolongement de  $g$  par 0 en dehors de  $J$  fournit une fonction qui vérifie :

$$0 \leq g \leq f \quad \text{et} \quad \int_I (f - g) \leq \varepsilon.$$

Si  $f(\alpha) = 0$ , ou si  $\alpha = \min I$  la fonction  $g$  est continue en  $\alpha$ . Sinon, on la modifie au voisinage de  $\alpha$  de la façon suivante : on prend  $\alpha' \in I$  tel que  $\alpha' < \alpha$  et que  $f$  soit continue sur  $[\alpha', \alpha]$ , et on pose :

$$\forall x \in [\alpha', \alpha] \cdot g(x) = f(x) \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} \cdot \frac{x - \alpha'}{\alpha - \alpha'}.$$

En faisant de même en  $\beta$ , on obtient une nouvelle fonction  $g$ , continue sur  $I$ , et qui vérifie toujours :

$$\forall x \in [\alpha', \alpha], 0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{et} \quad \int_I (f - g) \leq \varepsilon. \quad \square$$

#### Corollaire 55

Soient  $f$  et  $\varphi$  deux fonctions intégrables sur  $I$  et respectivement continue et continue par morceaux sur  $I$ , telles que  $0 \leq \varphi \leq f$ .

Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $g$  continue sur  $I$  telle que :

$$\varphi \leq g \leq f \quad \text{et} \quad \int_I (g - \varphi) \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** La fonction  $f - \varphi$  est positive intégrable, donc on peut trouver une fonction  $h$  continue telle que :

$$0 \leq h \leq f - \varphi \quad \text{et} \quad \int_I (f - \varphi - h) \leq \varepsilon.$$

La fonction  $g = f - h$  est alors continue et telle que  $\varphi \leq g \leq f$ . De plus,  $g - \varphi = f - \varphi - h$ , ce qui prouve :

$$\int_I (g - \varphi) \leq \varepsilon. \quad \square$$

## 5.2 Théorème de convergence monotone

### Lemme

Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions intégrables sur  $I$  convergeant simplement vers une fonction  $f$  intégrable sur  $I$ .

Alors :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \sup_n \int_I f_n.$$

### Démonstration

- ▶ Comme remarqué à la page 570, le résultat est démontré lorsque les  $f_n$  et  $f$  sont continues, puisque d'après le théorème de Dini, la convergence est alors uniforme sur tout compact.
- ▶ Évidemment, puisque  $f_n \leq f$ , on a :

$$\sup_n \int_I f_n \leq \int_I f.$$

- ▶ Supposons le résultat acquis lorsque la fonction  $f$  est continue. Alors pour une fonction  $f$  continue par morceaux quelconque, et un réel  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver d'après la proposition 54 page précédente une fonction  $g$  continue telle que  $g \leq f$  et :

$$\int_I (f - g) \leq \varepsilon.$$

En posant  $g_n = \inf(f_n, g)$ , la suite  $(g_n)$  est croissante et converge simplement vers  $g$ . D'après l'hypothèse, la fonction  $g$  étant continue, on a :

$$\sup_n \int_I g_n = \int_I g$$

et donc :

$$\int_I f \leq \int_I g + \varepsilon = \sup_n \int_I g_n + \varepsilon \leq \sup_n \int_I f_n + \varepsilon.$$

Cela étant valable pour tout  $\varepsilon > 0$  on en déduit

$$\sup_n \int_I f_n \geq \int_I f$$

et donc l'égalité annoncée.

- Supposons donc maintenant la fonction  $f$  continue. Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on va construire une suite croissante de fonctions continues  $h_n$  telles que :

$$f_n \leq h_n \leq f \quad \text{et} \quad \int_I (h_n - f_n) \leq \varepsilon.$$

La suite de fonctions continues  $(h_n)$  converge simplement en croissant vers  $f$ , donc leurs intégrales convergent vers celle de  $f$ . Alors, pour  $n$  assez grand, on a :

$$\int_I f - \int_I h_n \leq \varepsilon$$

ce qui donne

$$\int_I f - \int_I f_n \leq 2\varepsilon$$

et prouve la convergence de la suite  $\left(\int_I f_n\right)_n$  vers  $\int_I f$ .

- Construisons une suite  $(h_n)_{n \geq -1}$  de fonctions continues telles que  $h_{-1} = 0$  et qu'en posant  $\varphi_n = \sup(h_{n-1}, f_n)$ , on ait pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\varphi_n \leq h_n \leq f \quad \text{et} \quad \int_I (h_n - f_n) \leq \varepsilon.$$

Pour cela, prenons  $h_{-1} = 0$  et supposant construit  $h_{n-1}$ , prenons, grâce au corollaire 55 page 586, une fonction  $h_n$  continue telle que :

$$\varphi_n \leq h_n \leq f \quad \text{et} \quad \int_I (h_n - \varphi_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

En utilisant la relation :

$$\sup(h_{n-1}, f_n) + \inf(h_{n-1}, f_n) = h_{n-1} + f_n,$$

on obtient :

$$\varphi_n - f_n = h_{n-1} - \inf(h_{n-1}, f_n) \leq h_{n-1} - f_{n-1}$$

puisque  $f_{n-1} \leq f_n$  et  $f_{n-1} \leq \varphi_{n-1} \leq h_{n-1}$ . Il s'en suit :

$$\int_I (h_n - f_n) = \int_I (h_n - \varphi_n) + \int_I (\varphi_n - f_n) \leq \int_I (h_n - \varphi_n) + \int_I (h_{n-1} - f_{n-1})$$

ce qui donne :

$$\int_I (h_n - f_n) \leq \sum_{k=0}^n \int_I (h_k - \varphi_k) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} \leq \varepsilon.$$

□

**Théorème 56 (Théorème de convergence monotone)**

Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions intégrables sur  $I$  convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ .

La fonction  $f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si la suite  $\left(\int_I f_n\right)_n$  est majorée, et alors :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \sup_n \int_I f_n.$$

**Démonstration**

- ▶ Si la fonction  $f$  est intégrable, c'est une conséquence du lemme.
- ▶ Si la fonction  $f$  n'est pas intégrable, montrons que la suite n'est pas majorée  
 Soit  $M \in \mathbb{R}$  comme  $f$  n'est pas intégrable, on peut trouver un segment  $J \subset I$  tel que :

$$\int_J f \geq M + 1.$$

La suite de fonctions  $(\chi_J f_n)_n$  converge simplement en croissant vers  $\chi_J f$  qui est intégrable, donc d'après le lemme, il existe un entier  $n$  tel que :

$$\int_J f_n \geq \int_J f - 1 \quad \text{ce qui donne} \quad \int_I f_n \geq M. \quad \square$$

**5.3 Théorème de convergence dominée**

**Cas d'un intervalle compact**

Supposons pour commencer  $I = [a, b]$ , avec  $a < b$ . La condition de domination par une fonction intégrable est alors équivalente à la domination par une constante.

**Lemme**

Soit  $(g_n)$  une suite de fonctions réelles continues par morceaux sur  $I$  et convergeant simplement vers 0. Si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : p \geq q \geq n_0 \implies \int_I (g_p - g_q)^2 \leq \varepsilon$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I g_n = 0.$$

**Démonstration** D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left| \int_I g_p - \int_I g_q \right| \leq \int_I |g_p - g_q| \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_I (g_p - g_q)^2} \tag{*}$$

ce qui prouve que la suite des intégrales des fonctions  $g_n$  est de Cauchy. Montrons qu'elle admet une sous-suite qui converge vers 0, ce qui prouvera le résultat.

La relation (\*) et l'hypothèse du lemme permettent d'extraire une sous-suite  $(g_{\varphi(n)})$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |g_{\varphi(n+1)} - g_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{2^n}.$$

La série télescopique  $g_{\varphi(0)} + \sum (g_{\varphi(n+1)} - g_{\varphi(n)})$  converge alors simplement vers 0 et comme la série :

$$\sum \int_I |g_{\varphi(n+1)} - g_{\varphi(n)}|$$

converge, le théorème 45 page 571 (conséquence du théorème de convergence monotone) entraîne la convergence de .

$$\int_I g_{\varphi(n)} = \int_I \left( g_{\varphi(0)} + \sum_{p=0}^{n-1} (g_{\varphi(p+1)} - g_{\varphi(p)}) \right)$$

vers 0. □

**Lemme**

Soit  $(u_n)$  une suite d'un espace vectoriel normé  $E$  convergeant vers  $\ell \in E$ . On désigne par  $K_n$  l'enveloppe convexe des  $u_p$  pour  $p \geq n$ , c'est-à-dire l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de éléments  $u_p$ , avec  $p \geq n$ . Alors toute suite  $(v_n)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in K_n$$

converge vers  $\ell$ .

**Démonstration** En écrivant :

$$v_n = \sum_{p \geq n} \alpha_p u_p$$

où  $(\alpha_p)_{p \geq n}$  est une suite presque nulle de réels positifs de somme 1, on a :

$$\|v_n - \ell\| = \left\| \sum_{p \geq n} \alpha_p (u_p - \ell) \right\| \leq \sum_{p \geq n} \alpha_p \|u_p - \ell\|,$$

de sorte que lorsque l'on a, pour  $\varepsilon > 0$  :

$$\forall p \geq n_0, \|u_p - \ell\| \leq \varepsilon,$$

alors :

$$\forall n \geq n_0, \|v_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

La convergence de  $u$  vers  $\ell$  entraîne donc celle de  $v$  □

**Proposition 57**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux convergeant simplement vers une limite  $f$  continue par morceaux et dominées par une constante  $M$ .

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

**Démonstration**

► Remarquons tout d'abord que  $\|f(x)\| \leq M$  puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n(x)\| \leq M.$$

Les fonctions  $\varphi_n = \|f_n - f\|$  sont donc dominées par  $2M$  et convergent simplement vers 0. D'après l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \int_I f_n - \int_I f \right\| \leq \int_I \|f - f_n\|,$$

il suffit de montrer que l'intégrale de  $\varphi_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

► Comme :

$$0 \leq \int_I \varphi_n \leq 2M(b - a),$$

la suite  $\left(\int_I \varphi_n\right)$  est bornée. Montrons alors qu'elle ne possède que 0 comme valeur d'adhérence, ce qui prouve qu'elle converge vers 0. Pour cela, soit  $(\psi_n)$  une suite extraite de  $(\varphi_n)$  dont l'intégrale sur  $I$  converge vers un réel  $\ell$ .

► Pour  $n \in \mathbb{N}$ , considérons  $K_n$  l'enveloppe convexe des fonctions  $\psi_p$  pour  $p \geq n$ , et prenons  $(g_n)$  une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in K_n.$$

Pour  $x$  fixé, la suite  $(\psi_n(x))$  converge vers 0, donc d'après le deuxième lemme, la suite  $(g_n(x))$  converge aussi vers 0. De plus, l'intégrale de  $g_n$  est un barycentre à coefficients positifs des intégrales des  $\psi_p$ , pour  $p \geq n$ . Le même lemme entraîne donc la convergence de l'intégrale de  $g_n$  vers  $\ell$ .

Pour montrer le résultat, il ne reste donc plus qu'à construire une telle suite  $(g_n)$  dont l'intégrale tende aussi vers 0, ce qui prouvera  $\ell = 0$ .

► Posons :

$$d_n = \inf \left\{ \int_I g^2 \mid g \in K_n \right\}$$

La suite  $(d_n)$  est croissante puisque  $(K_n)$  est décroissante. De plus elle est majorée par  $(2M)^2(b-a)$ , ce qui prouve qu'elle est convergente

Prenons  $g_n \in K_n$  telle que :

$$d_n \leq \int_I g_n^2 \leq d_n + \frac{1}{n}.$$

Pour  $p \geq n$  et  $q \geq n$ , la convexité de  $K_n$  entraîne

$$\frac{g_p + g_q}{2} \in K_n \quad \text{et donc} \quad \int_I \left( \frac{g_p + g_q}{2} \right)^2 \geq d_n.$$

En intégrant sur  $I$  la relation :

$$\left( \frac{g_p + g_q}{2} \right)^2 + \left( \frac{g_p - g_q}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (g_p^2 + g_q^2)$$

on obtient :

$$\int_I \left( \frac{g_p - g_q}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \left( d_p + \frac{1}{p} + d_q + \frac{1}{q} \right) - d_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2} (d_p - d_n + d_q - d_n).$$

La suite  $(d_n)$  étant de Cauchy, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$k \geq n \implies d_k - d_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et en prenant de plus  $n \geq 2/\varepsilon$  on en déduit, pour  $p \geq n$  et  $q \geq n$ .

$$\int_I \left( \frac{g_p - g_q}{2} \right)^2 \leq \varepsilon.$$

D'après le premier lemme, on a ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I g_n = 0$$

ce qu'il fallait prouver. □

### Cas général

La démonstration du théorème de convergence dominée dans le cas d'un intervalle quelconque est essentiellement la même que dans le cas de la convergence uniforme sur tout compact, sauf que l'on remplace cette convergence uniforme par la convergence dominée sur un segment (proposition 57 page précédente).



**Théorème 58**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{CM}(I, F)$  intégrables et convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux.

S'il existe une fonction  $g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$  intégrable telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\| \leq g$$

alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

**Démonstration** L'intégrabilité de  $f$  est évidente puisque  $\|f\| \leq g$ , avec  $g$  intégrable.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un segment  $K$  de  $I$  tel que :

$$\int_I g - \int_K g \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

et comme  $\|f - f_n\| \leq 2g$ , on en déduit :

$$\int_I \|f - f_n\| - \int_K \|f - f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur le segment  $K$ , et qu'elle est dominée par  $g$  intégrable sur  $I$  donc sur  $J$ , on peut trouver un entier  $n_0$  à partir duquel on a :

$$\int_K \|f - f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour  $n \geq n_0$  :

$$\left\| \int_I f - \int_I f_n \right\| \leq \int_I \|f - f_n\| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat □

## EXERCICES

1. 1. Montrer qu'une fonction réelle ou complexe uniformément continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  tend vers 0 en  $+\infty$ .
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace l'intégrabilité par l'existence d'une intégrale impropre ?
3. Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  et  $f'^2$  soient intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est bornée.

2. Pour quelles valeurs du réel  $\alpha > 0$ , la fonction  $x \mapsto x e^{-x^\alpha \sin^2 x}$  est-elle intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  ?

3. Soit  $f$  continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-x) - f(t)| dt.$$

4. Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $]0, 1]$  par :

$$f(t) = \frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right)$$

est intégrable, et calculer son intégrale.

5. Soit  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $f^2$  et  $f''^2$  soient intégrables.

1. Montrer que  $f'^2$  est intégrable.
2. Trouver une primitive de  $f^2 - f'^2 + f''^2 - (f + f' + f'')^2$ .
3. En déduire :

$$\int_{\mathbb{R}_+} (f^2 - f'^2 + f''^2) \geq 0.$$

6. Soit  $f$  une fonction décroissante et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ , on a  $f(x) = o(1/x)$ .

7. Soit  $f$  une fonction continue croissante de  $[1, +\infty[$  dans  $]1, +\infty[$ .

Montrer que si  $\frac{1}{x \ln f(x)}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , alors  $\frac{1}{f(x)}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (on pourra utiliser l'exercice 6).

8. 1. Montrer que pour  $\lambda \in ]0, 1[$  et  $a_0 > 0$  donnés, il existe une unique suite  $(a_n)$  strictement croissante telle que pour tout  $n$  :

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1 + \cos t}{t} dt = \frac{1}{n + \lambda}.$$

Quelle est la limite de  $(a_n)$  ?

2. Montrer qu'il existe de plus une unique valeur de  $a_0$  telle que  $a_n \sim n$ .

9. Soit  $f$  de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 = 0.$$

10. Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , muni du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f g.$$

Pour  $f \in E$ , on définit sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction  $H(f)$  continue en 0 par :

$$\forall x > 0, H(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Que vaut  $H(f)(0)$  ?  
 2. Montrer que  $H$  est un endomorphisme continu de  $E$  de norme inférieure à 2.
11. Soit  $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$  admettant une intégrale impropre sur  $[0, +\infty[$ . On pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$$

lorsque cette intégrale impropre existe.

Montrer, en utilisant :

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$$

que  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

12. 1. Montrer l'existence de l'intégrale impropre :

$$I = \int_0^{+\infty} x \sin(x^3 + x) dx.$$

2. À l'aide du changement de variable  $y = x^3 + x$  montrer que la fonction  $f : x \mapsto x \sin(x^3 + x)$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

13. Soit  $f$  continue de  $[1, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que les limites suivantes existent dans  $\mathbb{R}$  simultanément et sont alors égales :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt.$$

14. 1. Calculer :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

2. En déduire :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

3. De même, calculer :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$$

et en déduire :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

15. Existence de l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \sqrt{t}} \sin t} dt.$$

16. Soit  $f$  une fonction positive intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Quelle est la limite de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2/n^2} dx ?$$

17. Déterminer la limite quand  $a$  tend vers  $0^+$  de :

$$I(a) = \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}.$$

18. Pour  $\alpha > 0$ , calculer :

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1-x} dx$$

comme somme d'une série numérique simple.

19 Soit  $(a_n)$  une suite de complexes telle que  $\sum a_n n!$  converge absolument. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} \left( e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!.$$

20. Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx,$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left( 1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \right) (1 - \text{th}(x^n)) dx$

21. Montrer que pour tout  $x > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^{c+n} dt.$$

22. Soit  $f$  continue positive et décroissante sur  $]0, 1]$ . Montrer que si  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$ , alors :

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

23. Limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de :

$$I_n = n^2 \int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x) dx.$$

24. Soient  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs. Montrer :

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p}.$$

25. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions positives intégrables sur  $I$  et convergeant simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux non intégrable. Montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = +\infty.$$

## 26. Formule de Stirling

1. On moyenné du changement de variable  $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$ , établir pour  $x > 0$  :

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds$$

où :

$$\varphi(x,s) = x \ln \left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s \sqrt{x}.$$

2. Montrer :

$$\forall s \in ]-\sqrt{x}, 0], \varphi(x,s) \leq -\frac{s^2}{2}.$$

3. Montrer :

$$\forall s \geq 0, \forall x \geq 1, \varphi(x,s) \leq \varphi(1,s).$$

4. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/2} ds$$

puis la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$

27. 1. À l'aide de la formule :

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

déterminer la dérivée en 1 de la fonction Gamma.

2. En déduire  $\Gamma'(n+1)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

28. Soit, pour  $x > 0$  :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{t^2+x^2}}.$$

1. Montrer que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Prouver que  $F$  tend vers  $+\infty$  en 0.

3. Soit  $\alpha > 0$ . Calculer :

$$I_\alpha(x) = \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{t^2+x^2}}$$

et en donner un équivalent lorsque  $x$  tend vers 0

4. En déduire un équivalent de  $F$  en 0.

5. Par un changement de variable, donner un équivalent de  $F$  en  $+\infty$ .

29. Soit  $F(x) = \int_0^{+\infty} (te^{-t})^x dt$ .

1. Domaine de définition de  $F$ .

2. On pose  $G(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)^x dt$  où  $\varphi(t) = et e^{-t}$ .

Montrer que pour tout  $\delta \in ]0, 1[$ , il existe  $A \in ]0, 1[$  tel que :

$$G(x) = \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi(t)^x dt + O(A^x).$$

3. Montrer que pour  $2\alpha < 1 < 2\beta$ , il existe  $\delta \in ]0, 1[$  tel que :

$$\forall t \in [-\delta, \delta], e^{-\beta t^2} \leq \varphi(1+t) \leq e^{-\alpha t^2}.$$

4. En admettant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

trouver un équivalent lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  de :

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-kxt^2} dt$$

où  $k > 0$  et  $\delta > 0$  sont fixés.

5. En déduire un équivalent de  $F$  en  $+\infty$  et retrouver la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$





## Chapitre 16

# Familles sommables

Dans ce chapitre,  $I$  est un ensemble, et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments d'un espace vectoriel normé complet  $F$ . On cherche à donner un sens, lorsque c'est possible, à la somme :

$$\sum_{i \in I} a_i$$

en conservant les propriétés de commutativité et d'associativité existant pour les sommes finies.

Les cas où  $I$  est fini est déjà connu ; nous pourrions donc supposer que  $I$  est infini. Dans la pratique,  $I$  sera  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}^2$  ou  $\mathbb{N}^p$

L'idée de départ de la notion de somme d'une famille sommable indexée par  $I$ , est de considérer les sommes indexées par une partie finie de  $I$ . Lorsque  $I = \mathbb{N}$ , la relation d'ordre nous incite à considérer seulement les parties finies de la forme  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , ce qui conduit naturellement à la notion de série et de sommes partielles.

Cependant cette notion n'est pas satisfaisante, car on ne peut pas permuter ni regrouper les termes d'une série convergente quelconque. Ce n'est possible que lorsqu'elle est absolument convergente. D'ailleurs, nous verrons que la convergence absolue est équivalente à la sommabilité (proposition 15 page 615).

■ **Notation** Lorsque  $J$  est une partie finie de  $I$ , on note :

$$s_J(a) = \sum_{i \in J} a_i$$

la somme des éléments de la famille finie  $(a_i)_{i \in J}$ .

# 1. Familles sommables positives

## 1.1 Définition, cas des suites

### Définition 1

Une famille  $(a_i)_{i \in I}$  de réels positifs est *sommable* si l'ensemble :

$$\{s_J(a) \mid J \subset I, J \text{ fini}\}$$

est majoré.

On appelle alors *somme de la famille*, et l'on note :

$$\sum_{i \in I} a_i \quad \text{ou} \quad s(a)$$

la borne supérieure de cet ensemble.

La somme d'une famille sommable de réels positifs est donc le plus petit réel  $M$  tel que pour toute sous-famille finie  $J$  de  $I$  on ait :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq M.$$

Le résultat suivant est immédiat.

### Proposition 1

La somme d'une famille sommable de réels positifs est un réel positif. Il est nul si, et seulement si, la famille est nulle.

*Exemple* La suite  $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable puisque pour toute partie  $J$  finie de  $\mathbb{N}$ , on a, en notant  $n$  un majorant de  $J$  :

$$\sum_{i \in J} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2.$$

On a ainsi :

$$S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \leq 2$$

et comme pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{i \in [0, n]} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n},$$

on a  $S \geq 2 - 2^{-n}$ , ce qui prouve finalement  $S = 2$

**Proposition 2**

Lorsqu'il existe une suite exhaustive  $(J_n)$  de parties finies de  $I$ , c'est-à-dire une suite croissante dont la réunion est égale à  $I$ , alors la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si, et seulement si, la suite croissante  $(s_{J_n}(a))$  est majorée et l'on a alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in J_n} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i.$$

**Démonstration** Comme toutes les parties  $J_n$  sont finies et que réciproquement toute partie finie est contenue dans l'un des  $J_n$ , on en déduit que les deux ensembles :

$$\{s_J(a) \mid J \subset I, J \text{ fini}\} \quad \text{et} \quad \{s_{J_n}(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sont simultanément majorés et que leurs bornes supérieures sont alors égales. La suite  $(s_{J_n}(a))$  étant croissante, elle est alors convergente et sa limite est sa borne supérieure.  $\square$

**Remarques**

- Rappelons (cf. théorème 3 page 4) que l'existence d'une telle suite exhaustive de parties finies est équivalente à la dénombrabilité de  $I$ .
- Dans le cas de  $\mathbb{N}$ , l'utilisation de la suite exhaustive  $(\llbracket 0, n \rrbracket)$  conduit naturellement à la notion de série et de somme partielle, ce qui donne le corollaire suivant.

**Corollaire 3**

Une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels positifs est sommable si, et seulement si, la série  $\sum a_n$  converge, et l'on a alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Dans le cas de  $\mathbb{Z}$ , l'utilisation de la suite exhaustive  $(\llbracket -n, n \rrbracket)$  donne la proposition suivante.

**Proposition 4**

Une famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de réels positifs est sommable si, et seulement si, on a l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- les séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_{-n}$  convergent,
- la série  $\sum (a_n + a_{-n})$  converge,
- la suite  $\sum_{p=-n}^n a_p$  possède une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

et la somme est alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + a_{-n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=-n}^n a_p.$$

**Démonstration** Si  $J_n = \llbracket -n, n \rrbracket$ , on a :

$$s_{J_n}(a) = \sum_{p=-n}^n a_p = \sum_{p=0}^n a_p + \sum_{p=1}^n a_{-p} = a_0 + \sum_{p=1}^n (a_p + a_{-p})$$

ce qui prouve immédiatement les équivalences annoncées ainsi que l'égalité des limites et de la somme de la famille.  $\square$

## 1.2 Propriétés

### Proposition 5

1. Soient  $(a_i)$  et  $(b_i)$  deux familles de réels positifs, indexées par  $I$ . Si :

$$\forall i \in I, a_i \leq b_i,$$

alors la sommabilité de la famille  $(b_i)$  entraîne celle de  $(a_i)$  et l'on a :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

2. Soient  $(a_i)$  et  $(b_i)$  deux familles sommables de réels positifs indexées par  $I$ . Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux réels positifs, la famille  $(\lambda a_i + \mu b_i)$  est sommable et l'on a :

$$\sum_{i \in I} \lambda a_i + \mu b_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

### Démonstration

1. La majoration :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

pour toute partie  $J$  finie montre les résultats annoncés.

2.  $\blacktriangleright$  Si  $J$  est une partie finie de  $I$ , on a :

$$\sum_{i \in J} \lambda a_i + \mu b_i = \lambda \sum_{i \in J} a_i + \mu \sum_{i \in J} b_i \leq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

ce qui prouve la sommabilité de la famille  $(\lambda a_i + \mu b_i)$  et l'inégalité :

$$\sum_{i \in I} \lambda a_i + \mu b_i \leq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

$\blacktriangleright$  Soit  $\varepsilon > 0$ . On peut trouver  $J \subset I$  fini tel que

$$\sum_{i \in J} a_i \geq \sum_{i \in I} a_i - \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{i \in J} b_i \geq \sum_{i \in I} b_i - \varepsilon.$$

On a alors :

$$\sum_{i \in J} \lambda a_i + \mu b_i = \lambda \sum_{i \in J} a_i + \mu \sum_{i \in J} b_i \geq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i - \varepsilon(\lambda + \mu)$$

ce qui prouve :

$$\sum_{i \in I} \lambda a_i + \mu b_i \geq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i - \varepsilon(\lambda + \mu).$$

Cela valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a bien l'égalité annoncée. □

**Proposition 6**

Toute sous-famille  $(a_i)_{i \in I'}$  d'une famille sommable  $(a_i)_{i \in I}$  de réels positifs est sommable, et l'on a :

$$\sum_{i \in I'} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

**Démonstration** En effet, toute partie finie de  $I'$  est une partie finie de  $I$ . □

**Proposition 7**

Si  $(a_i)_{i \in I}$  est une famille sommable de réels positifs, alors pour toute permutation  $\sigma$  de  $I$ , la famille  $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$  est sommable et :

$$\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} a_i.$$

**Démonstration** En effet, pour toute partie finie  $J \subset I$ , on a :

$$\sum_{i \in J} a_{\sigma(i)} = \sum_{i \in \sigma(J)} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

ce qui prouve la sommabilité de la famille  $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$  et l'inégalité :

$$\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

L'utilisation de  $\sigma^{-1}$  donne l'inégalité inverse. □

**Théorème 8 (Somme par paquets)**

Soit  $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une partition de  $I$ . Une famille  $(a_i)_{i \in I}$  de réels positifs est sommable si, et seulement si l'on a les deux propriétés suivantes :

- pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , la famille  $(a_i)_{i \in I_\lambda}$  est sommable de somme  $\sigma_\lambda$ .
- la famille  $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est sommable.

On a alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} a_i \right).$$

### Démonstration

- Si la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, la sommabilité des sous-familles  $(a_i)_{i \in I_\lambda}$  est une conséquence de la proposition précédente.

Soit  $\Gamma = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  une partie finie de  $\Lambda$ . Pour toutes parties finies  $J_1, J_2, \dots, J_p$  respectivement de  $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, \dots, I_{\lambda_p}$ , la réunion :

$$J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_p$$

est disjointe, puisque  $(I_\lambda)$  est une partition de  $I$ , et forme une partie finie de  $I$ . On a donc :

$$\sum_{i \in J_1} a_i + \sum_{i \in J_2} a_i + \dots + \sum_{i \in J_p} a_i = \sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

En prenant les bornes supérieures lorsque  $J_k$  parcourt l'ensemble des parties finies de  $I_{\lambda_k}$  successivement pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on obtient :

$$\sum_{\lambda \in \Gamma} \sigma_\lambda = \sigma_{\lambda_1} + \sigma_{\lambda_2} + \dots + \sigma_{\lambda_p} \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

D'où la sommabilité de  $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  et l'inégalité :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

- Supposons pour tout  $\lambda$  la famille  $(a_i)_{i \in I_\lambda}$  sommable, de somme  $\sigma_\lambda$ , et la famille  $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sommable.

Soit  $J$  une partie finie de  $I$ . Il n'existe qu'un nombre fini de  $\lambda \in \Lambda$  tels que  $J \cap I_\lambda$  soit non vide ; désignons-les par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ . Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} a_i &= \sum_{i \in J \cap I_{\lambda_1}} a_i + \sum_{i \in J \cap I_{\lambda_2}} a_i + \dots + \sum_{i \in J \cap I_{\lambda_p}} a_i \\ &\leq \sigma_{\lambda_1} + \sigma_{\lambda_2} + \dots + \sigma_{\lambda_p} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda. \end{aligned}$$

La famille  $(a_i)_{i \in I}$  est donc sommable et l'on a l'inégalité :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda. \quad \square$$

### Remarques

- Lorsque les  $I_\lambda$  sont finis (respectivement  $\Lambda$  est fini), il est naturellement inutile de vérifier la sommabilité de  $\sum_{i \in I_\lambda} a_i$  (respectivement de  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda$ ).
- Il est clair que si  $J$  est une partie finie de  $I$ , on peut adopter la partition  $(I \setminus J) \cup J$ , et donc que si  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I \setminus J} a_i + \sum_{i \in J} a_i.$$

**Exemples**

1. Les résultats de la proposition 4 page 603 peuvent se voir comme conséquence de la sommation par paquets associée aux deux partitions de  $\mathbb{Z}$  :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-^* = \{0\} \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n, -n\}.$$

2. Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite positive telle que la série  $\sum \alpha_n$  converge. Montrons que la série de terme général :

$$u_k = k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n(n+1)}$$

est convergente, et calculons sa somme.

On note tout d’abord que les inégalités :

$$0 \leq \frac{\alpha_n}{n(n+1)} \leq \alpha_n$$

prouvent l’existence de  $u_n$ .

Considérons l’ensemble :

$$I = \{(k, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid k \leq n\}$$

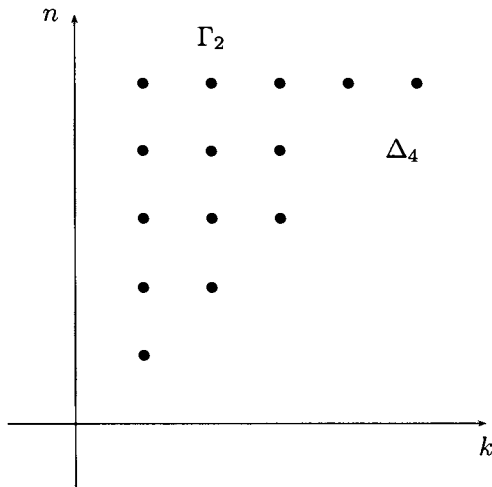
et la famille réelle positive :

$$\left( k \frac{\alpha_n}{n(n+1)} \right)_{(k,n) \in I} . \tag{*}$$

Nous allons utiliser deux partitions de  $I$  :

$$I = \bigcup_{n \geq 1} \Delta_n \quad \text{avec} \quad \Delta_n = \{(k, n) \mid k \leq n\}$$

$$I = \bigcup_{k \geq 1} \Gamma_k \quad \text{avec} \quad \Gamma_k = \{(k, n) \mid n \geq k\}$$



- La famille  $\left(k \frac{\alpha_n}{n(n+1)}\right)_{(k,n) \in \Delta_n}$  est sommable puisque  $\Delta_n$  est fini et sa somme vaut :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n k \frac{\alpha_n}{n(n+1)} = \frac{\alpha_n}{2}.$$

Comme  $\sum \alpha_n$  converge, la famille  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est sommable, donc la famille (\*) est sommable et :

$$\sum_{(k,n) \in I} k \frac{\alpha_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n.$$

- On en déduit que pour  $k$  fixé, la famille  $\left(k \frac{\alpha_n}{n(n+1)}\right)_{(k,n) \in \Gamma_k}$  est sommable (ce qui prouve à nouveau l'existence de  $u_k$ ), et que sa somme  $u_k$  constitue une famille sommable de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{(k,n) \in I} k \frac{\alpha_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$$

3. Soient  $x_1, x_2, \dots, x_k$  des réels positifs strictement inférieurs à 1. On a :

$$\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} = \frac{1}{(1-x_1) \dots (1-x_k)}.$$

En effet le résultat est évident si  $k=1$ , et en utilisant la partition :

$$\mathbb{N}^k = \bigcup_{\alpha_k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{k-1} \times \{\alpha_k\},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} &= \sum_{\alpha_k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{N}^{k-1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \right) \\ &= \frac{1}{1-x_k} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{N}^{k-1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat par récurrence

4. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\pi(n)$  le plus grand facteur premier de  $n$ . Étudions la convergence de la série :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \pi(n)}.$$

Si on note  $(p_k)$  la suite croissante des nombres premiers, on peut utiliser la partition suivante de  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  :

$$\mathbb{N} \setminus \{0, 1\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k \quad \text{où} \quad A_k = \{n \geq 2 \mid \pi(n) = p_k\}.$$



On est ainsi ramené à étudier l'existence de :

$$\sum_{n \in A_k} \frac{1}{n \pi(n)}.$$

Comme :

$$A_k = \{p_k p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \mid (\alpha_i) \in \mathbb{N}^k\}$$

l'exemple précédent nous donne :

$$\sum_{n \in A_k} \frac{1}{n \pi(n)} = \frac{1}{p_k^2} \sum_{(\alpha_i) \in \mathbb{N}^k} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}} = \frac{1}{p_k^2 (1 - 1/p_1) \dots (1 - 1/p_k)}.$$

Étudions maintenant la convergence de la série de terme général :

$$u_k = \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n \pi(n)}.$$

Par convexité de la fonction  $x \mapsto -\ln(1-x)$  sur  $[0, 1/2]$ , on a :

$$\forall x \in [0, 1/2], -\ln(1-x) \leq \lambda x \quad \text{avec} \quad \lambda = 2 \ln 2 < \frac{3}{2}$$

ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^k -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \leq \lambda \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i}.$$

Or, si  $p_k$  est premier,  $2p_k$  n'est pas premier et donc :

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2p_i} \leq \sum_{m=1}^{2p_k} \frac{1}{m} \leq 1 + \ln(2p_k).$$

On a ainsi :

$$\sum_{i=1}^k -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \leq \mu (1 + \ln 2 + \ln p_k) \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{2\lambda}{3} < 1.$$

Donc  $u_k \leq \frac{(2e)^\mu}{p_k^{2-\mu}}$ .

La suite  $\left(\frac{1}{p_k^{2-\mu}}\right)_k$  est une sous-famille de la suite  $\left(\frac{1}{n^{2-\mu}}\right)$  qui est sommable

puisque  $2 - \mu > 1$ .

Ainsi, la série :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \pi(n)}$$

converge.

### 1.3 Suites doubles

En utilisant les partitions suivantes de  $\mathbb{N}^2$  :

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{p\} \times \mathbb{N} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{q\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = n\}$$

on obtient le théorème important ci-dessous.

#### Théorème 9

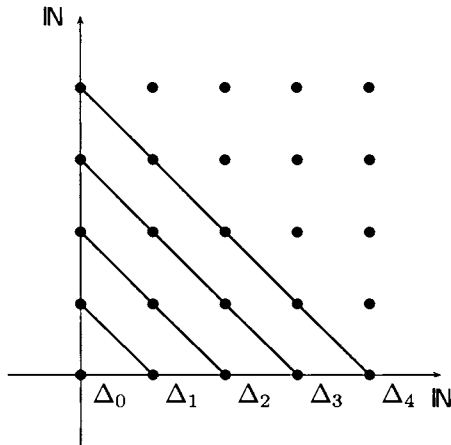
Une suite double  $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  de réels positifs est sommable si et seulement si on a l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_q a_{p,q}$  est convergente et la série de terme général  $\alpha_p = \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$  est convergente ;
- pour tout  $q \in \mathbb{N}$  la série  $\sum_p a_{p,q}$  est convergente et la série de terme général  $\beta_q = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$  est convergente ;
- la série de terme général  $\sigma_n = \sum_{p+q=n} a_{p,q}$  est convergente.

On a alors :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} a_{p,q} \right).$$

**Remarque** Les partitions utilisées consistent à écrire le plan  $\mathbb{N}^2$  comme réunion de droites verticales, comme réunion de droites horizontales, et comme réunion des diagonales  $\Delta_n$  :



*Exemples* Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Etudions la sommabilité de la suite double :

$$a_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)^\alpha}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sigma_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

La famille est donc sommable si, et seulement si, la série  $\sum \sigma_n$  converge, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\alpha > 2$ . On a alors :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. De la même façon en travaillant sur  $\mathbb{N}^{*2}$ , la suite double :

$$\left( \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$$

est sommable si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

Par équivalence des normes  $\| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , il existe deux constantes  $m$  et  $M$  strictement positives telles que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}. m(p+q)^{2\alpha} \leq (p^2+q^2)^\alpha \leq M(p+q)^{2\alpha}$$

ce qui prouve que la famille :

$$\left( \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$$

est sommable si et seulement si,  $\alpha > 1$ .

## 2. Familles sommables à valeurs vectorielles

Nous considérons maintenant des familles  $(a_i)_{i \in I}$  à valeurs dans un espace vectoriel normé complet  $F$ . Dans la pratique, on utilisera  $F = \mathbb{R}$  ou  $F = \mathbb{C}$

### 2.1 L'espace $\ell^1(I, F)$

#### Définition 2

La famille  $(a_i)_{i \in I}$  est *sommable* si la famille de réels positifs  $(\|a_i\|)_{i \in I}$  est sommable.

On note alors :

$$N_1((a_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \|a_i\|.$$

**Proposition 10**

L'ensemble  $\ell^1(I, F)$  des familles sommables d'éléments de  $F$  indexées par  $I$  muni de  $N_1$  est un espace vectoriel normé.

**Démonstration**

► Si  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont deux familles sommables, les relations :

$$\|\lambda a_i + \mu b_i\| \leq |\lambda| \|a_i\| + |\mu| \|b_i\| \quad (*)$$

montrent la sommabilité de  $(\lambda a_i + \mu b_i)$  pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ . Comme la famille nulle est évidemment sommable, on en déduit que  $\ell^1(I, F)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $F^I$ .

► L'application  $N_1$  est définie sur  $\ell^1(I, F)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . En sommant la relation (\*) ci-dessus, on obtient :

$$N_1(\lambda(a_i) + \mu(b_i)) \leq |\lambda| N_1((a_i)) + |\mu| N_1((b_i))$$

ce qui prouve que  $N_1$  est sous-linéaire. La séparation découle du fait qu'une famille positive sommable de somme nulle est nulle.  $\square$

**2.2 Cas des familles à support fini****Rappels (voir page 81)**

- On appelle *support* d'une famille  $(a_i)_{i \in I}$  l'ensemble des indices  $i$  pour lesquels  $a_i \neq 0$ .
- On note  $F^{(I)}$  le sous-espace vectoriel de  $F^I$  constitué des familles à support fini, c'est-à-dire dont le support est fini.
- La somme d'une famille  $(a_i)$  à support  $K$  fini est définie par :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in K} a_i.$$

C'est immédiatement aussi la somme sur toute partie finie contenant  $K$ .

Il est alors évident que l'ensemble  $F^{(I)}$  est un sous-espace vectoriel de  $\ell^1(I, F)$ .

**Proposition 11**

L'application  $s : (a_i) \mapsto \sum_{i \in I} a_i$  est une application linéaire continue de  $(F^{(I)}, N_1)$  dans  $F$  de norme 1.

**Démonstration**

► La linéarité est évidente : il suffit de considérer une partie finie contenant les deux supports

► Si  $J$  est le support de  $(a_i)$ , on a :

$$\left\| \sum_{i \in I} a_i \right\| = \left\| \sum_{i \in J} a_i \right\| \leq \sum_{i \in J} \|a_i\| = N_1((a_i)).$$

► La norme de  $s$  est donc inférieure ou égale à 1. Elle est égale à 1 puisque l'inégalité ci-dessus est une égalité dans le cas où la famille possède un unique terme non nul □

**Proposition 12**

Le sous-espace vectoriel  $F^{(I)}$  est dense dans  $(\ell^1(I, F), N_1)$ .

**Démonstration** Si  $(a_i)$  est une famille sommable, il existe pour tout réel  $\varepsilon > 0$  une partie  $J$  de  $I$  finie telle que :

$$\sum_{i \in I \setminus J} \|a_i\| = \sum_{i \in I} \|a_i\| - \sum_{i \in J} \|a_i\| \leq \varepsilon.$$

Considérons la famille  $(b_i) = (a_i \chi_J(i))$  à support fini contenu dans  $J$ , coïncidant avec  $(a_i)$  sur  $J$ . On a

$$N_1((a_i) - (b_i)) = \sum_{i \in I \setminus J} \|a_i\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Remarque** S'il existe une suite exhaustive  $(J_n)$  de parties finies de  $I$ , alors pour toute famille sommable  $a = (a_i)_{i \in I}$ , la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $b_n = (b_i \chi_{J_n}(i))_{i \in I}$  est une suite qui converge vers  $a$ .

**2.3 Somme d'une famille sommable**

La somme sur  $F^{(I)}$  étant une application linéaire continue à valeurs dans l'espace vectoriel normé complet  $F$ , elle se prolonge, d'après le théorème 19 page 395, en une unique application linéaire continue sur  $\ell^1(I, F)$ .

**Définition 3**

La *somme* des familles sommables est définie comme l'unique prolongement linéaire continu sur  $\ell^1(I, F)$  de la somme des familles à support fini. C'est une application linéaire de norme 1.

La somme d'une famille sommable  $(a_i)_{i \in I}$  est notée :

$$\sum_{i \in I} a_i.$$

**Coherence** Lorsque  $F = \mathbb{R}$ , la somme ainsi définie pour une famille positive coïncide avec la somme introduite dans la section 1.

En effet, le résultat est évident pour une famille à support fini et il est valable pour toute famille sommable par densité, les applications somme et  $N_1$  étant continues.

## 2.4 Propriétés

### Proposition 13

Soit  $T$  une application linéaire continue de  $F$  dans un espace vectoriel normé complet  $G$ . Si  $(a_i) \in \ell^1(I, F)$ , alors  $(Ta_i) \in \ell^1(I, G)$  et l'on a :

$$\sum_{i \in I} Ta_i = T \left( \sum_{i \in I} a_i \right).$$

**Démonstration** La continuité de  $T$  nous donne l'existence d'une constante  $M$  telle que :

$$\forall i \in I, \|Ta_i\| \leq M \|a_i\|,$$

ce qui prouve la sommabilité de  $(Ta_i)$ .

D'après la linéarité de  $T$ , l'égalité :

$$\sum_{i \in I} Ta_i = T \left( \sum_{i \in I} a_i \right)$$

est vraie pour toute famille à support fini. Par continuité de  $T$  et de la somme, on en déduit le résultat sur  $\ell^1(I, F)$  par densité.  $\square$

### Corollaire 14

- Une famille  $(a_k) \in \ell^1(I, \mathbb{C})$  est sommable sur  $I$  si, et seulement si,  $(\operatorname{Re} a_k)$  et  $(\operatorname{Im} a_k)$  sont sommables sur  $I$ , et l'on a :

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im} a_k.$$

- Une famille  $(a_k) \in \ell^1(I, \mathbb{C})$  est sommable sur  $I$  si, et seulement si,  $(\bar{a}_k)$  est sommable et l'on a :

$$\overline{\sum_{k \in I} a_k} = \sum_{k \in I} \bar{a}_k.$$

**Démonstration** Conséquence de la linéarité des applications partie réelle, partie imaginaire et conjugaison ainsi que de la relation  $a_k = \operatorname{Re} a_k + i \operatorname{Im} a_k$   $\square$

**Remarque** Plus généralement, une famille  $(a_i)_{i \in I}$  à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est sommable si, et seulement si, les familles réelles ou complexes  $(a_i^k)_{i \in I}$  définies par :

$$\forall i \in I, a_i = \sum_{k=1}^n a_i^k e_k$$

sont sommables. On a alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i \in I} a_i^k \right) e_k.$$

**Proposition 15**

Une suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est sommable si, et seulement si, la série  $\sum a_n$  est absolument convergente, et l'on a alors :

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

**Démonstration**

- ▶ Par définition, la famille  $(a_n)$  est sommable si, et seulement si, la famille  $(\|a_n\|)$  est sommable, ce qui est équivalent à la convergence de la série  $\sum \|a_n\|$  d'après le corollaire 3 page 603.
- ▶ On a alors :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\| = N_1((a_n))$$

ce qui prouve la continuité de l'application linéaire  $(a_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

Comme on a :

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

dès que  $(a_n)$  est à support fini, on en déduit par densité l'égalité pour toute famille sommable □

**Attention** Bien remarquer qu'une série convergente mais non absolument convergente n'est pas sommable.

**Proposition 16**

Si  $(a_i)_{i \in I}$  est une famille sommable, alors pour toute permutation  $\sigma$  de  $I$ , la famille  $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$  est sommable et :

$$\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} a_i.$$

**Démonstration** La sommabilité est une conséquence de la proposition 7 page 605 correspondant au cas des familles réelles positives. De plus :

$$\left\| \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} \right\| \leq \sum_{i \in I} \|a_{\sigma(i)}\| = \sum_{i \in I} \|a_i\| = N_1((a_i))$$

ce qui prouve que l'application linéaire  $(a_i) \mapsto \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}$  est continue. Comme elle coïncide évidemment avec la somme sur  $F^{(I)}$ , elle lui est égale.  $\square$

### Corollaire 17 (Commutativité de la somme d'une série)

Si  $\sum a_n$  est une série absolument convergente, alors pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$ , la série  $\sum a_{\sigma(n)}$  est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

► **Attention** Si la série converge mais non absolument, le résultat est faux. Dans le cas d'une série réelle, on peut montrer que par permutation des termes il est possible d'obtenir :

- n'importe quel réel comme somme,
- une somme égale à  $+\infty$  ou à  $-\infty$ ,
- n'importe quel intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  comme ensemble des valeurs d'adhérence de la suite des sommes partielles.

### Théorème 18 (Sommatation par paquets)

Soit  $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une partition de  $I$ .

Étant donnée une famille sommable  $(a_i)_{i \in I}$ , on a les propriétés suivantes :

- pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , la famille  $(a_i)_{i \in I_\lambda}$  est sommable de somme  $\sigma_\lambda$  ;
- la famille  $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est sommable.

$$\bullet \sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} a_i \right).$$

### Démonstration

► Une sous-famille d'une famille sommable est sommable d'après la proposition 6 page 605. Donc la famille  $(a_i)_{i \in I_\lambda}$  est sommable, et l'on a :

$$\|\sigma_\lambda\| = \left\| \sum_{i \in I_\lambda} a_i \right\| \leq \sum_{i \in I_\lambda} \|a_i\|.$$



► D'après le théorème de sommation par paquets des familles positives cela prouve la sommabilité de la famille  $(\sigma_\lambda)$ , et l'on a :

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda \right\| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \|\sigma_\lambda\| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} \|a_i\| \right) = N_1((a_i)).$$

► On a ainsi prouvé l'existence et la continuité de l'application :

$$\begin{aligned} \ell^1(I, F) &\longrightarrow F \\ (a_i) &\longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} a_i \right). \end{aligned}$$

► Il suffit donc de prouver que cette application coïncide avec la somme pour toute famille à support fini pour avoir le résultat.

Or, si  $(a_i)$  est à support fini  $J$ , il n'y a qu'un nombre fini  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  de  $\lambda \in \Lambda$  tels que  $I_\lambda \cap J$  soit non vide, et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i &= \sum_{i \in J} a_i \\ &= \sum_{i \in I_{\lambda_1} \cap J} a_i + \sum_{i \in I_{\lambda_2} \cap J} a_i + \dots + \sum_{i \in I_{\lambda_p} \cap J} a_i \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} a_i \right). \end{aligned} \quad \square$$

**Exemple** La série de terme général  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  étant absolument convergente la famille  $\left( \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est sommable, et l'on peut calculer sa somme en séparant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs, ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}.$$

De la même façon :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}.$$

ce qui, sachant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

donne :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

## 2.5 Calcul d'une somme

### Proposition 19

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille sommable.

Si il existe une suite exhaustive  $(J_n)$  de parties finies de  $I$ , c'est-à-dire une suite croissante dont la réunion est égale à  $I$ , alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i.$$

**Démonstration** On obtient une partition de  $I$  en considérant les parties  $J_n \setminus J_{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  (avec la convention  $J_{-1} = \emptyset$ ).

Donc si la famille est sommable, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i \in J_n \setminus J_{n-1}} a_i \right).$$

Or, d'après la proposition 15 page 615, cette dernière somme est égale à la somme de la série télescopique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in J_n \setminus J_{n-1}} a_i \right)$$

dont les sommes partielles sont :

$$\sum_{i \in J_n} a_i.$$

D'où le résultat. □

### Remarques

- Pour pouvoir utiliser ce résultat, il faut que  $I$  possède une suite exhaustive de parties finies, c'est-à-dire qu'il soit dénombrable (cf. théorème 3 page 4).
- Ce n'est d'ailleurs pas une restriction, puisque dans la pratique l'ensemble  $I$  sera toujours dénombrable, et que s'il ne l'est pas, alors son support l'est (voir proposition 29 page 626).
- La réciproque de cette proposition est fautive : la suite  $\left( \sum_{i \in J_n} \right)$  peut avoir une limite sans que la famille soit sommable comme le montre l'exemple de la suite  $((-1)^n)$  avec  $J_n = \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket$ .

**Exemples** Dans la pratique, on utilise les suites exhaustives ci-dessous.

1. Lorsque  $I = \mathbb{N} : J_n = \llbracket 0, n \rrbracket$ .
2. Lorsque  $I = \mathbb{Z} : J_n = \llbracket -n, n \rrbracket$ .
3. Lorsque  $I = \mathbb{N}^2 : J_n = \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$  ou  $J_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q \leq n\}$ .

On retrouve ainsi la proposition 15 page 615 ainsi que les corollaires suivants.

**Corollaire 20**

Une famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable si, et seulement si, la série de terme général  $\|a_n\| + \|a_{-n}\|$  converge, et l'on a alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=-n}^n a_p = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{-n} + a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$

**Démonstration** L'équivalence est une conséquence de la proposition 4 page 603 appliquée à la suite des normes. □

► **Attention**

- La convergence de la série  $\sum (u_n + u_{-n})$  ne suffit pas pour prouver la sommabilité de la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  comme le prouve l'exemple de la famille  $(n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .
- La convergence des deux séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \leq 0} u_n$  ne suffit pas non plus.

Prendre par exemple la famille  $\left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$  pour laquelle la convergence des deux séries est une conséquence du théorème des séries alternées.

**Corollaire 21**

Pour toute famille sommable  $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ , on a :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{p,q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \left( \sum_{q=0}^n a_{p,q} \right).$$

**Corollaire 22**

Une famille  $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable si, et seulement si, la série de terme général :

$$\sum_{p+q=n} \|a_{p,q}\|$$

est convergente, et sa somme est alors donnée par :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} a_{p,q} \right).$$

**Démonstration** L'équivalence est une conséquence de la proposition 9 page 610 appliquée à la famille  $(\|a_{p,q}\|)$ . □

**Exemples**

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . Montrons l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{1 - z^{2n-1}}.$$

Chacune des deux séries converge absolument, puisque :

$$\frac{z^n}{1 - z^{2n}} \sim z^n \quad \text{et} \quad \frac{z^{2n-1}}{1 - z^{2n-1}} \sim z^{2n-1}$$

avec  $|z| < 1$ .

Pour  $n$  fixé, on a :

$$\frac{z^n}{1 - z^{2n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^n (z^{2n})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{n(2k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} z^{n(2k-1)}.$$

Considérons donc la série double :

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^*{}^2} z^{n(2k-1)}$$

et montrons que la famille des modules est sommable

- Pour  $n$  fixé, la série  $\sum_k |z|^{n(2k-1)}$  est convergente puisque  $|z|^{2n} < 1$  de somme :

$$\sigma_n = \frac{|z|^n}{1 - |z|^{2n}}.$$

- La famille  $(\sigma_n)$  est sommable (remplacer  $z$  par  $|z|$  dans l'existence des sommes de l'énoncé).

On a alors :

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^*{}^2} z^{n(2k-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left( \sum_{k=1}^{+\infty} z^{2n(k-1)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}$$

et :

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^*{}^2} z^{n(2k-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (z^{2k-1})^n \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{1 - z^{2k-1}}$$

ce qui prouve le résultat.

2. Soit la suite double :

$$u_{p,q} = \frac{2(p-q)}{(p+q+1)(p+q+2)(p+q+3)}.$$

- La décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} u_{p,q} &= -\frac{2q+1}{p+q+1} + 2\frac{2q+2}{p+q+2} - \frac{2q+3}{p+q+3} \\ &= (2q+3) \left( \frac{1}{p+q+2} - \frac{1}{p+q+3} \right) - (2q+1) \left( \frac{1}{p+q+1} - \frac{1}{p+q+2} \right) \end{aligned}$$

montre que la série  $\sum_p u_{p,q}$  est convergente de somme :

$$\alpha_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{2q+3}{q+2} - \frac{2q+1}{q+1} = \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2}.$$

La série  $\sum \alpha_q$  est donc convergente de somme 1, ce qui donne :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = 1.$$

- Puisque  $u_{q,p} = -u_{p,q}$ , on a donc aussi :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = -1.$$

- Enfin, pour tout  $n$  :

$$\sum_{p+q=n} u_{p,q} = 0,$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} u_{p,q} = 0.$$

Cet exemple montre qu'évidemment la suite double  $u_{p,q}$  n'est pas sommable, mais aussi que la condition de sommabilité est indispensable pour pouvoir échanger l'ordre des sommations.

**Method** En conclusion, pour étudier une famille  $(a_i)_{i \in I}$ , on procède dans la pratique de la manière suivante.

- On commence par prouver sa sommabilité. Pour cela, on prend la famille réelle positive  $(\|a_i\|)_{i \in I}$  et on lui applique :
  - soit une majoration des sommes finies,
  - soit une partition judicieuse en appliquant le théorème 8 page 605.
- Une fois cette sommabilité prouvée, toute partition  $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de  $I$  conduit à des familles sommables et à la formule :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} a_i \right).$$

## 2.6 Les espaces $\ell^1(I, F)$ et $\ell^2(I, \mathbb{C})$

### Complétude de $\ell^1(I, F)$

*Exemple* Si  $F$  est un espace vectoriel normé complet, l'espace vectoriel normé  $(\ell^1(I, F), N_1)$  est complet.

Soit en effet  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $\ell^1(I, F)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $x^n = (x_i^n)_{i \in I}$ .

Pour tout  $i \in I$ , l'application  $(a_i) \mapsto a_i$  étant 1-lipschitzienne de  $\ell^1(I, F)$  dans  $F$ , on en déduit que la suite  $(x_i^n)_n$  est de Cauchy dans  $F$  qui est complet. Elle converge donc vers un élément de  $F$  que l'on notera  $a_i$ .

Nous allons montrer que la famille  $a = (a_i)_{i \in I}$  est sommable puis que la suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$  pour la norme  $N_1$ .

- Comme la suite  $(x^n)$  est de Cauchy, on peut trouver  $n_1$  tel que :

$$\forall p \geq n_1, \forall q \geq n_1, \sum_{i \in I} \|x_i^p - x_i^q\| \leq 1.$$

Si  $J$  est une partie finie de  $I$ , on en déduit :

$$\forall p \geq n_1, \forall q \geq n_1, \sum_{i \in J} \|x_i^p - x_i^q\| \leq 1.$$

et en prenant  $p = n_1$  et en faisant tendre  $q$  vers  $+\infty$  (dans une somme finie) :

$$\sum_{i \in J} \|x_i^{n_1} - a_i\| \leq 1.$$

Ainsi la famille  $x^{n_1} - a$  est dans  $\ell^1(I, F)$ , et par suite  $a$  aussi.

- Soit  $\varepsilon > 0$ . On peut trouver un entier  $n_\varepsilon$  tel que :

$$\forall p \geq n_\varepsilon, \forall q \geq n_\varepsilon, \sum_{i \in I} \|x_i^p - x_i^q\| \leq \varepsilon.$$

De la même façon que ci-dessus, en prenant une partie  $J$  finie de  $I$  et en faisant tendre  $q$  vers  $+\infty$ , on obtient :

$$\forall p \geq n_\varepsilon, \sum_{i \in J} \|x_i^p - a_i\| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi, pour  $p \geq n_\varepsilon$ , la relation  $N_1(x^p - a) \leq \varepsilon$ , ce qui prouve la convergence de  $(x^n)$  vers  $a$ .

### L'espace $\ell^2(I, \mathbb{C})$

On utilise ici les notions de forme sesquilinéaire et de produit scalaire introduites au chapitre 18.

■ **Notation** On note  $\ell^2(I, \mathbb{C})$  l'ensemble des familles de carré sommable c'est-à-dire des familles  $(a_i)_{i \in I}$  telles que  $(|a_i|^2)$  soit sommable. Si  $a = (a_i) \in \ell^2(I, \mathbb{C})$ , on pose :

$$N_2(a) = \sqrt{\sum_{i \in I} |a_i|^2}.$$

**Proposition 23**

Si  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont de carré sommable, alors le produit  $(a_i b_i)$  est sommable.

**Démonstration** Conséquence de l'inégalité  $2|a_i b_i| \leq |a_i|^2 + |b_i|^2$ . □

**Proposition 24**

L'ensemble des familles de carré sommable constitue un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^I$ .

**Démonstration** La famille nulle est de carré sommable. Si  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont de carré sommable, alors pour  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  :

$$|\lambda a_i + \mu b_i|^2 \leq (|\lambda| |a_i| + |\mu| |b_i|)^2 = |\lambda|^2 |a_i|^2 + 2|\lambda \mu| |a_i b_i| + |\mu|^2 |b_i|^2$$

qui est sommable d'après les hypothèses et la proposition précédente. □

**Exemple** Toute famille sommable  $a = (a_i)$  est de carré sommable et vérifie :

$$N_2(a) \leq N_1(a).$$

En effet, en posant  $M = N_1(a)$ , on a donc  $\forall i \in I, |a_i| \leq M$ , et donc  $\forall i \in I, |a_i|^2 \leq M |a_i|$  ce qui prouve que  $a$  est de carré sommable et :

$$N_2(a)^2 = \sum_{i \in I} |a_i|^2 \leq M \sum_{i \in I} |a_i| = N_1(a)^2.$$

**Proposition 25**

Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\ell^2(I, \mathbb{C})$  peut être muni du produit scalaire :

$$((a_i), (b_i)) \mapsto ((a_i) | (b_i)) = \sum_{i \in I} \bar{a}_i b_i$$

dont la norme associée est  $N_2$ .

**Démonstration** Cette application est bien définie d'après la proposition 23 page précédente. Elle est évidemment sesquilineaire, hermitienne et positive. Elle est définie positive puisque :

$$\sum_{i \in I} |a_i|^2 = 0 \implies \forall i \in I, a_i = 0. \quad \square$$

### Corollaire 26

Si  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont deux familles de carré sommable, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{i \in I} \bar{a}_i b_i \right|^2 \leq \sum_{i \in I} |a_i|^2 \sum_{i \in I} |b_i|^2,$$

avec égalité si, et seulement si,  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont proportionnelles.

En se limitant au cas des familles et des scalaires réels, on obtient le résultat suivant.

### Proposition 27

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\ell^2(I, \mathbb{R})$  des familles réelles de carré sommable peut être muni du produit scalaire :

$$((a_i), (b_i)) \mapsto (a_i | b_i) = \sum_{i \in I} a_i b_i$$

dont la norme associée est  $N_2$ .

Si  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont deux familles réelles de carré sommable, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left( \sum_{i \in I} a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i \in I} a_i^2 \sum_{i \in I} b_i^2,$$

avec égalité si, et seulement si,  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont proportionnelles.

### Remarques

- En terme de produit scalaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit (aussi bien dans le cas réel que complexe) :

$$|(a | b)| \leq N_1(ab) \leq N_2(a) N_2(b).$$

Le produit scalaire est donc une application respectivement bilinéaire continue et sesquilineaire continue respectivement sur  $\ell^2(I, \mathbb{R})$  et  $\ell^2(I, \mathbb{C})$ .

- On démontre de la même façon que dans le cas de  $\ell^1(I, F)$  que  $\ell^2(I, \mathbb{C})$  est un espace de Banach.



### 3. Applications

#### 3.1 Produit de Cauchy de deux séries

Le théorème suivant a déjà été vu dans le chapitre sur les séries numériques. Nous en donnons une deuxième preuve utilisant la théorie des familles sommables.

#### Théorème 28

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries complexes absolument convergentes. La série de terme général :

$$\sum_{p+q=n} a_p b_q$$

est absolument convergente, et l'on a :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} a_p b_q \right).$$

**Démonstration** Il suffit de montrer que la famille  $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et d'appliquer le corollaire 22 page 619.

Or, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la famille  $(|a_p b_q|)_{q \in \mathbb{N}}$  est sommable de somme :

$$\alpha_p = |a_p| \sum_{q=0}^{+\infty} |b_q|.$$

La famille  $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est alors sommable puisque proportionnelle à la famille  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ . Cela prouve la sommabilité de la famille  $(a_p b_q)$  et donc le théorème.  $\square$

**Exemple** Sachant que pour  $|z| < 1$  on a :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

la série étant absolument convergente, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} z^p z^q \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n. \end{aligned}$$

**Produit de Dirichlet de deux séries** En utilisant la partition suivante de  $\mathbb{N}^{*2}$  :

$$\mathbb{N}^{*2} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{(p, q) \mid pq = n\}$$

on obtient que si les séries :

$$\sum_{n \geq 1} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} b_n$$

convergent absolument, alors la série de terme général :

$$\sum_{d|n} a_d b_{n/d}$$

(la somme est étendue à tous les diviseurs de  $n$ ) est absolument convergente et que l'on a :

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{d|n} a_d b_{n/d} \right).$$

En posant, pour  $\alpha > 1$  :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

on trouve ainsi par exemple :

- si  $N(n)$  désigne le nombre de diviseurs de  $n$ , la série de terme général  $N(n)/n^\alpha$  converge pour  $\alpha > 1$  et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{N(n)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{p|n} \frac{1}{p^\alpha} \right) = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \right)^2 = \zeta(\alpha)^2;$$

- si  $\varphi(n)$  représente le nombre d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  premiers avec  $n$  (indicatrice d'Euler), alors pour  $\alpha > 2$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}.$$

En effet, on a (voir par exemple l'exercice 6 page 42) :

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

## 3.2 Support d'une famille sommable

### Proposition 29

Le support d'une famille sommable est dénombrable.

**Démonstration** Soit  $(a_i)$  une famille sommable de norme :

$$S = \sum_{i \in I} \|a_i\|.$$

Son support est :

$$\{i \in I \mid a_i \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} I_n$$

avec :

$$I_n = \{i \in I \mid \|a_i\| \geq S/n\}.$$

Il est clair que  $I_n$  est fini puisqu'il possède au maximum  $n$  éléments. La suite  $(I_n)$  est donc une suite exhaustive de parties finies du support de la famille, ce qui prouve que celui-ci est dénombrable. □

**Exemple** L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réelle monotone est dénombrable.

Soit en effet une fonction monotone d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Quitte à considérer  $\pm \arctan \circ f$ , on peut supposer  $f$  croissante et bornée.

Pour chaque  $x$  de l'intérieur de  $I$ , on peut poser :

$$\delta_x = f(x^+) - f(x^-).$$

Si  $J$  est une partie finie d'un intervalle  $]a, b[$  tel que  $a$  et  $b$  soient dans  $I$  on a :

$$\sum_{x \in J} \delta_x \leq f(b) - f(a) \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

La famille  $(\delta_x)_{x \in I}$  est donc sommable, ce qui prouve que son support qui est l'ensemble des points de discontinuité de  $f$ , est dénombrable.

On déduit de la proposition précédente une caractérisation intéressante des ensembles dénombrables :

**Proposition 30**

Un ensemble  $I$  est dénombrable si, et seulement si, on peut trouver une famille sommable de réels positifs dont le support est égal à  $I$

**Démonstration**

- ▶ L'exemple de la suite  $(2^{-n})_{n \in \mathbf{N}}$  montre que l'on peut trouver une famille sommable dont le support est égal à  $\mathbf{N}$ , donc par bijection égal à n'importe quel ensemble dénombrable infini (le cas d'un ensemble fini est évident).
- ▶ La réciproque est une conséquence de la proposition précédente □

*Exemple* Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points (et donc  $\mathbb{R}$  lui même) est non dénombrable.

En effet, soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points. Montrons que toute famille sommable indexée par  $I$  a un support différent de  $I$ , ce qui prouvera le résultat d'après la proposition 30 page précédente.

Soit donc une famille sommable  $(\alpha_x)_{x \in I}$ . Prenons  $a_0 < b_0$  deux points de  $I$ . L'ensemble des éléments  $x$  de  $I$  tels que  $\alpha_x > 1$  est fini. On peut donc trouver  $a_1 < b_1$  dans  $[a_0, b_0]$  tels que :

$$\forall x \in [a_1, b_1], \alpha_x \leq 1.$$

Supposant construit  $a_{n-1} < b_{n-1}$ , on peut trouver de même  $a_n < b_n$  dans  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$  tels que :

$$\forall x \in [a_n, b_n], \alpha_x \leq \frac{1}{n}. \quad (*)$$

On construit ainsi une suite  $([a_n, b_n])$  de segments emboîtés vérifiant (\*). Leur intersection non vide contient donc un élément  $x$  vérifiant  $\alpha_x = 0$ .

## EXERCICES

1. Montrer que l'étude de la sommabilité d'une famille  $u = (u_i)_{i \in I}$  peut se ramener à l'étude de la sommabilité — de l'intégrabilité — d'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$ .
2. Étudier la sommabilité (et calculer la somme éventuelle) de la famille  $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  où  $u_k = \frac{(-1)^k}{(|k| + 1)^2}$ .

3. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \left( \sum_{q=0}^n \frac{1}{(p+q+1)^3} \right).$$

4. Démontrer l'existence d'une suite  $a$  telle que, pour tout complexe  $z$  vérifiant  $|z| \leq \frac{1}{2}$ , on ait l'égalité :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z + z^2)^{2^n - 1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p.$$

5. 1. Si  $a = (a_i)$  et  $b = (b_j)$  sont des suites sommables alors la suite double  $u$  de terme général  $a_i b_j$  l'est aussi. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} s(u) &= \sum_{(i,j)} a_i b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i+j=n} a_i b_j \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) \\ &= \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \right) = s(a) s(b). \end{aligned}$$

2. En déduire que la série des inverses des nombres premiers est divergente.
3. Soit la famille réelle  $u = (u_x)_{x \in [0,1]}$  où  $u_x = 0$  si  $x$  est irrationnel, et  $u_x = \frac{1}{b^2}$  si  $x = \frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux. Étudier la sommabilité de  $u$ .
6. 1. Montrer que, pour une suite double  $u = (u_{p,q})$  indexée par  $\mathbb{N}^2$ , la convergence des séries de sommes  $v_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$  et la convergence de la série  $\sum v_q$  n'impliquent pas la sommabilité de la suite  $u$ .
2. Même question en exigeant, cette fois-ci, l'absolue convergence des séries de sommes  $v_q$  et de celle de la série  $\sum v_q$ .

7. Soit  $I$  l'ensemble des parties non vides de  $\mathbb{N}$ . À tout élément  $A$  de  $I$ , l'on associe son cardinal  $c \in [1, +\infty]$ , son minimum  $m \in [0, +\infty[$  et son maximum  $M \in [0, +\infty]$ . Étudier la sommabilité (et la somme éventuelle) des familles indexées par  $I$  et respectivement définies par  $u_A = e^{-c}$ ,  $v_A = e^{-m}$  et  $w_A = e^{-M}$  où l'on pose, par définition,  $e^{-\infty} = 0$ .
8. 1. Pour tout réel  $a > 0$  et tout complexe  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels on pose  $a^z = \exp(z \ln a)$ . Calculer le module de  $a^z$
2. Étudier la sommabilité de la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $z_n = \frac{1}{n^z}$ .
3. Soit  $h$  un nombre réel. Étudier la sommabilité et la somme éventuelle de la suite double  $u$  définie sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  par :

$$u_{p,q} = \frac{(-1)^p h^p \ln^p q}{p! q^z}.$$

9. Soit  $k$  un entier fixé, ainsi que  $k + 1$  nombres réels  $\alpha_h \geq 1$  et un nombre complexe  $z$  de module strictement inférieur à 1. On note  $I$  l'ensemble des listes  $i = (n_0, n_1, \dots, n_k)$  d'entiers  $n_h$  vérifiant les relations  $0 < n_0 < n_1 < \dots < n_k$  et  $u$  la suite multiple définie sur  $I$  par les égalités :

$$u_i = \frac{z^{n_k}}{n_0^{\alpha_0} n_1^{\alpha_1} \dots n_k^{\alpha_k}}.$$

Montrer que cette suite est sommable et que sa somme peut s'exprimer sous la forme  $s(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  où l'on explicitera les nombres  $a_n$  à l'aide d'un symbole de sommation finie.

10. *Le but de cet exercice est de redémontrer la formule d'interversion des sommations dans le cas d'une suite double de nombres complexes (parfois appelée formule de Fubini, par analogie avec le théorème du même nom en théorie de l'intégration), et ce sans faire appel au théorème d'associativité généralisée ou de sommation par paquets, dont il est un cas particulier historiquement important puisqu'ayant suggéré le cas général démontré dans le cours*

1. Montrer que si  $u$  est une famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable  $I$  et si la suite  $(J_n)$  est une suite croissante de parties finies de  $I$  dont la réunion est égale à  $I$ , alors le nombre  $\lim_n s_{J_n}(u)$  existe et est indépendant de la suite  $(J_n)$ .

2. En déduire que pour que  $u$  soit sommable, il faut et il suffit que la série de terme général  $s_{J_0}(|u|)$  si  $n = 0$  et :

$$s_{J_n}(|u|) - s_{J_{n-1}}(|u|) = s_{J_n \setminus J_{n-1}}(|u|) = \sum_{k \in J_n \setminus J_{n-1}} |u_k|$$

si  $n > 0$  soit convergente.

3. Montrer que pour qu'une suite double  $u = (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  de nombres complexes indexée par  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  soit sommable, il faut et il suffit que la série de terme général  $\sum_{p=0}^n |u_{p,n-p}|$  soit convergente et que, dans ces conditions, sa somme est donnée par les relations :

$$s(u) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^n u_{p,n-p} \right).$$

4. Montrer qu'une suite double  $u = (u_{p,q})$  de nombres réels positifs indexée par  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est sommable si, et seulement si, pour tout entier  $q$  la série  $\sum_p u_{p,q}$  est convergente ainsi que la série  $\sum_q \left( \sum_p u_{p,q} \right)$ , et que dans ces conditions sa somme est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} s(u) &= \sum_{(p,q)} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^n u_{m,n-m} \right) \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right). \end{aligned}$$

5. Montrer que si une suite double  $u = (u_{p,q})$  de nombres complexes indexée par  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est sommable, alors pour tout entier  $q$  la série  $\sum_p u_{p,q}$  est absolument convergente, ainsi que les séries  $\sum_q \left( \sum_p u_{p,q} \right)$  et  $\sum_q \left( \sum_p |u_{p,q}| \right)$  et que dans ces conditions, sa somme est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} s(u) &= \sum_{(p,q)} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^n u_{m,n-m} \right) \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \end{aligned}$$

6. Montrer qu'une suite double  $u = (u_{p,q})$  de nombres complexes indexée par  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est sommable si, et seulement si, pour tout entier  $q$  la série  $\sum_p |u_{p,q}|$  est convergente ainsi que la série  $\sum_q \left( \sum_p |u_{p,q}| \right)$ , et que dans ces conditions, sa somme est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} s(u) &= \sum_{(p,q)} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^n u_{m,n-m} \right) \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right). \end{aligned}$$

11. 1. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{N}^2$  dans un espace vectoriel normé telle qu'il existe, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g(n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f(n,p)$  et, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $h(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n,p)$ , cette dernière limite étant atteinte uniformément par rapport à  $p$ .  
Démontrer que l'existence de  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n)$  implique celle de  $\ell' = \lim_{p \rightarrow +\infty} h(p)$  et que  $\ell' = \ell$ .
2. Soit  $I$  un ensemble dénombrable et  $(J_n)$  une suite exhaustive de parties de  $I$  (c'est-à-dire une suite croissante de parties finies de  $I$  dont la réunion est  $I$ ). Soit  $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une partition de  $I$  indexée par un ensemble d'indices  $\Lambda$ . Montrer que  $\Lambda$  est dénombrable ; on notera  $(\Lambda_p)$  une suite exhaustive de  $\Lambda$ .
3. Montrer que, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , la suite  $(J_n \cap I_\lambda)$  est une suite exhaustive de  $I_\lambda$ .
4. On note, pour tout entier  $p$ ,  $H_p = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_p} I_\lambda$  la partie de  $I$  formée des indices  $i$  appartenant à l'un des  $I_\lambda$  où  $\lambda$  décrit  $\Lambda_p$ . La suite  $(H_p)$  est-elle une suite exhaustive de  $I$  ?
5. Montrer que, pour tout entier  $n$ , il existe un entier  $m$  tel que pour tout entier  $p \geq m$ , on ait  $J_n \subset H_m \subset H_p$ .
6. Soit  $u$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on note  $u_\lambda$  la restriction de  $u$  à  $I_\lambda$  et  $u^\lambda$  l'application de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $u_i^\lambda = u_i$  si  $i \in I_\lambda$  et  $u_i^\lambda = 0$  sinon. Vérifier la majoration  $|u^\lambda| \leq |u|$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , et calculer les nombres  $\sum_{\lambda \in \Lambda} u_i^\lambda$  et  $s_{J_n \cap I_\lambda}(u_\lambda)$  où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \Lambda$  et  $i \in I$ .
7. Désormais  $u$  est supposée sommable. Démontrer l'existence d'une application  $v$  de  $\Lambda$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $v_\lambda = s(u^\lambda)$ .



8. Calculer  $s_{\Lambda_p}(v)$  et en déduire que  $v$  est une famille sommable
9. Calculer la somme de  $v$  en posant  $f(n, p) = \sum_{\lambda \in \Lambda_p} s_{J_n}(u^\lambda)$ . En déduire les égalités :

$$s(u) = \sum_{\lambda \in \Lambda} s(u^\lambda) = s(v), \quad \sum_{j \in I} u_j = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i \in I_\lambda} u_i \right)$$

**(sommaton par paquets, ou associativité généralisée).**

12. Montrer que la suite  $u = (u_n) = \left( \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$  n est pas sommable en considérant les partitions :

$$(I_m) = (\{2m + 2, 4m + 1, 4m + 3\}) \text{ et } (I''_m) = (\{2m + 1, 4m + 2, 4m + 4\})$$

de  $\mathbb{N}$  où  $m$  décrit  $\mathbb{N}$ .

13. *Cet exercice permet de retrouver simplement dans le cadre des familles sommables définies sur un ensemble dénombrable d'indices, deux théorèmes importants, dont le second est analogue à l'un des résultats fondamentaux de la théorie de Lebesgue, énoncé et démontré sous une forme plus restreinte (convergence bornée) dans sa thèse de 1902, puis généralisé et finalement publié dans ses. Leçons sur l'intégration éditées en 1904.*

*Ces théorèmes résultent évidemment de la remarque explicitée dans le premier exercice de ce chapitre, montrant que l'étude de toute famille sommable pouvait se ramener à celle d'une fonction sommable, et des théorèmes vus dans le cours d'intégration sur un intervalle quelconque.*

1. Démontrer que si  $f$  est une application de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , les deux quantités suivantes, éventuellement infinies, sont égales :

$$\sup_n \sup_m f(n, m) = \sup_m \sup_n f(n, m).$$

2. En déduire que si  $(a^m)$  est une suite croissante de familles sommables à valeurs réelles définies sur un ensemble dénombrable d'indices  $I$  et y admettant une famille  $a$  comme limite simple, alors  $a$  est sommable sur  $I$  si et seulement si la suite  $(s(a^m))$  est majorée et que, dans ces conditions :

$$s(a) = \sup_m s(a^m) = \lim_m s(a^m)$$

**(théorème de convergence monotone).**

3. Dédurre du théorème de convergence monotone que, si  $(a^m)$  est une suite de familles sommables à valeurs complexes définies sur  $I$  et y admettant une limite simple  $a$  et si  $b$  est une famille positive sommable sur  $I$  vérifiant, pour tout entier  $m$ , la majoration  $|a^m| \leq b$ , alors  $a$  est sommable la suite  $(s(a^m))$  est convergente et vérifie les relations :

$$s(a) = \lim_m s(a^m), \quad |s(a)| \leq s(b)$$

(théorème de convergence dominée).

(On pourra commencer par le cas où les  $a^m$  et  $b$  sont à valeurs réelles).

4. Démontrer que si  $(a^m)$  est une suite de familles positives sommables sur  $I$  qui vérifie la majoration uniforme  $s(a^m) \leq M$  et qui admet sur  $I$  une limite simple  $a$ , alors  $a$  est sommable et vérifie la majoration  $s(a) \leq M$  (lemme de Fatou.)

14. On conserve les notations et définitions de l'exercice précédent.

- Démontrer directement le théorème de convergence dominée à l'aide d'une suite exhaustive  $(J_n)$  de parties de  $I$  en comparant notamment  $s_{J_{n+p}}(a^m) - s_{J_n}(a^m)$  et  $s(b) - s_{J_n}(b)$ .
- En déduire le théorème de convergence monotone.

15. Cet exercice étend la notion de famille sommable à des familles à valeurs dans un espace vectoriel normé complet  $E$ . Rappelons que la définition est exactement la même que dans le cas complexe, sauf à y remplacer la notion de module (ou de valeur absolue) de nombre par celle de norme de vecteur. Les résultats ci-dessus s'étendent pour la plupart sans aucune difficulté et leurs extensions seront tacitement admises dans ce qui suit.

Toutefois, une différence notable s'introduit dès que l'on passe d'un espace vectoriel normé de dimension finie, où le concept de famille sommable est indépendant de la norme choisie puisqu'elles sont toutes équivalentes, à un espace de Banach où il faut préciser la norme.

De plus, l'on y verra que dans un Banach, certaines propriétés simples des familles sommables deviennent inexactes, ce qui conduit à y distinguer la sommabilité telle qu'elle est définie dans le programme et ce cours, et une autre sorte de sommabilité plus générale, que l'on peut appeler sommabilité non absolue. Pour simplifier, les familles considérées seront toutes définies sur un ensemble dénombrable d'indices  $I$ , et l'espace  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel : le passage au cas d'un  $\mathbb{R}$ -espace est évident.

- Montrer que pour toute famille sommable  $u : I \rightarrow E$  et toute forme linéaire continue  $\varphi$  définie sur  $E$ , la famille complexe  $\varphi \circ u$  est sommable et vérifie :

$$s(\varphi \circ u) = \varphi(s(u)).$$

2. Montrer qu'une famille  $u$  à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est sommable si, et seulement si, ses coordonnées dans une base arbitraire le sont.
3. Montrer qu'une famille réelle  $u$  est sommable si, et seulement si, ses sommes partielles  $s_J(u)$  sont bornées.
4. Montrer qu'une famille sommable  $u$  à valeurs dans un espace vectoriel a ses sommes partielles  $s_J(u)$  bornées.
5. Montrer qu'une famille  $u$  à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est sommable si, et seulement si, ses sommes partielles  $s_J(u)$  sont bornées.
6. Montrer que si  $u$  est une famille sommable  $u$  pour laquelle il existe un vecteur  $S$  tel que, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $J$  de  $I$  vérifiant :

$$\|s_K(u) - S\| \leq \varepsilon$$

pour toute partie finie  $K$  de  $I$  contenant  $J$ , alors  $u$  a ses sommes partielles  $s_H(u)$  bornées.

7. Montrer que pour toute famille sommable  $u$  à valeurs dans un espace vectoriel  $E$ , il existe un vecteur  $S$  tel que, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $J$  de  $I$  vérifiant :

$$\|s_K(u) - S\| \leq \varepsilon$$

pour toute partie finie  $K$  de  $I$  contenant  $J$ , et  $S$  est alors la somme  $s(u)$  de la famille  $u$ . La réciproque est vraie si  $E$  est de dimension finie.

8. Montrer que, pour toute famille  $u$  à valeurs dans un espace de dimension finie les assertions suivantes sont équivalentes :
  - il existe un vecteur  $S$  tel que, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $J$  de  $\mathbb{N}$  vérifiant  $\|s_K(u) - S\| \leq \varepsilon$  pour toute partie finie  $K$  de  $\mathbb{N}$  contenant  $J$  ;
  - les suites partielles  $s_J(u)$  sont bornées ;
  - les suites partielles  $s_J(\|u\|)$  sont bornées ;
  - $u$  est sommable.

9. Montrer qu'il existe une suite  $u$ , à valeurs dans l'espace de Hilbert  $\ell^2$  des suites réelles  $u$  dont le carré est sommable muni de la norme  $N(u) = \sqrt{s(u^2)}$ , telle que :

- il existe une suite  $S \in \ell^2$  telle que, pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe une partie finie  $J$  de  $\mathbb{N}$  vérifiant  $\|s_K(u) - S\| \leq \varepsilon$  pour toute partie finie  $K$  de  $\mathbb{N}$  contenant  $J$  ;
- les sommes partielles  $s_J(u)$  sont bornées ;
- les sommes partielles  $s_J(\|u\|)$  ne sont pas bornées ;
- $u$  n'est pas sommable.

10. Montrer qu'il existe une suite  $u$ , à valeurs dans l'espace  $c_0$  des suites convergeant vers 0 muni de la norme max, telle que :

- il n'existe pas de suite  $S \in c_0$  telle que, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $J$  de  $\mathbb{N}$  vérifiant  $\|s_K(u) - S\| \leq \varepsilon$  telle pour toute partie finie  $K$  de  $\mathbb{N}$  contenant  $J$  ;
- les sommes partielles  $s_J(u)$  sont bornées ;
- les sommes partielles  $s_J(\|u\|)$  ne sont pas bornées ;
- $u$  n'est pas sommable.

16 Soient  $k$  un entier strictement positif, et  $I_k$  l'ensemble des éléments  $i = (n_1, n_2, \dots, n_k)$  de  $\mathbb{N}^k$  vérifiant les inégalités :

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k.$$

À tout élément  $s = (s_1, s_2, \dots, s_k)$  de  $\mathbb{R}^k$ , on associe une famille  $x^s = (x_i^s)_{i \in I_k}$  définie par :

$$x_i^s = \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}.$$

À quelles conditions sur  $k$  et  $s$  cette famille est-elle sommable ?

(Indication : on pourra encadrer la somme  $\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  où  $m$  est un entier strictement positif et  $\alpha$  un réel strictement supérieur à 1.)

# Chapitre 17

## Séries entières

### 1. Généralités

#### 1.1 Définition d'une série entière

##### Définition 1

On appelle *série entière* toute série d'applications  $\sum f_n$  dans laquelle  $f_n$  est une application  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme  $z \mapsto a_n z^n$  où  $(a_n)$  est une suite complexe.

Désormais, une telle série entière sera notée  $\sum a_n z^n$  ; la suite  $(a_n)$  est appelée la *suite des coefficients de la série entière*.

**Remarque** On prendra garde dans ce qui suit de bien distinguer (mais le contexte sera clair) la série  $\sum a_n z^n$  en tant que série d'applications de la série numérique  $\sum a_n z^n$  pour  $z$  complexe fixé.

On notera  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  la série entière indexée seulement à partir de  $n_0$ .

De manière similaire :

- On appelle *série entière complexe de variable réelle* toute série d'applications  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  où  $(a_n)$  est une suite complexe.

- On appelle *série entière réelle de variable réelle* toute série d'applications  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  où  $(a_n)$  est une suite réelle.

## 1.2 Opérations sur les séries entières

Si  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  sont deux séries entières, on appelle :

- *série somme*, la série entière  $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$
- *série produit* (appelé souvent *produit de Cauchy*), la série entière  $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

- *série produit par  $\lambda \in \mathbb{C}$* , la série entière  $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) z^n$ .

Muni de ces trois lois, l'ensemble des séries entières a une structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative.

On appelle également :

- *série entière dérivée*, la série entière  $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ .
- *série entière primitive*, toute série de la forme  $k + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$  avec  $k \in \mathbb{C}$

## 2. Convergence d'une série entière et fonction somme

### 2.1 Rayon de convergence d'une série entière

Dans cette sous-section, on considère une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

#### Lemme d'Abel

#### Proposition 1

S'il existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que la suite  $(a_n z_0^n)$  soit bornée, alors, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge absolument donc converge.

**Démonstration** Si  $z_0 = 0$  le résultat est clairement vrai ; supposons donc  $z_0 \neq 0$ . Soit  $M$  un majorant de la suite  $(|a_n z_0^n|)$ , on a :

$$|a_n z^n| \leq M \left( \frac{|z|}{|z_0|} \right)^n$$

La série  $\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|$ , majorée par une série convergente est donc elle-même convergente.  $\square$

**Corollaire 2**

Si la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  converge, alors la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge absolument en tout point  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < |z_0|$ .

**Démonstration** Si la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  converge, alors son terme général tend vers 0, donc est borné.  $\square$

**Définition 2**

On appelle *rayon de convergence* de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , la borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$  de l'ensemble  $I$  des nombres réels positifs  $r$  tels que la suite  $(a_n r^n)$  soit bornée.

**Remarque** L'ensemble  $I$  est non vide car il contient 0. On a de plus clairement que si  $r \in I$ , alors  $[0, r] \subset I$ , ce qui assure que  $I$  est un intervalle.

Dans la suite,  $R$  désignera le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

**Théorème 3**

- Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge absolument.
- Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > R$ , la suite  $(a_n z^n)$  n'est pas bornée donc la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  diverge.

**Démonstration**

- Si  $R = 0$ , alors  $I = \{0\}$  et les deux conditions sont bien vérifiées
- Si  $R > 0$ , soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ , alors il existe  $r \in I$  tel que  $|z| < r$  et le lemme d'Abel montre que la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.
- Supposons  $R \neq +\infty$  Si  $|z| > R$ , alors  $|z| \notin I$ , donc la suite  $(a_n z^n)$  n'est pas bornée et la série diverge.  $\square$

## Exemples

1. Les séries entières  $\sum a_n z^n$ ,  $\sum |a_n| z^n$  et  $\sum \lambda a_n z^n$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  ont le même rayon de convergence.
2. La série  $\sum \frac{z^n}{n!}$  converge en tout point de  $\mathbb{C}$ , donc son rayon de convergence est infini.
3. La série  $\sum n^n z^n$  ne converge qu'en 0 donc son rayon de convergence est nul.
4. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$  a un rayon de convergence égal à 1.

## Remarques

1. Le résultat et la définition qui précèdent sont valables dans le cas d'une série entière de variable réelle.
2. Le résultat précédent montre que  $R$  est également la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels  $r$  tels que la suite  $(a_n r^n)$  tende vers 0
3. Par contraposition, si la série  $\sum a_n z^n$  converge, alors  $|z| \leq R$  et si la série  $\sum a_n z^n$  diverge, alors  $|z| \geq R$ .
4. Détecter les points en lesquels  $(a_n z^n)$  est bornée ou détecter les points en lesquels  $(a_n z^n)$  ne tend pas vers 0 permet souvent de déterminer  $R$ . Par exemple, la série  $\sum n^{(-1)^n} z^n$  a pour rayon de convergence égal à 1 car pour  $|z| < 1$ ,  $|n^{(-1)^n} z^n| \leq n|z|^n$  et est borné donc  $R \geq |z|$  et donc  $R \geq 1$ . De plus, pour  $z = 1$ ,  $n^{(-1)^n}$  est non borné donc  $R \leq 1$ .
5. Si  $R$  est fini, on ne peut prévoir le comportement de la série pour  $z$  tel que  $|z| = R$ . Ce comportement peut être varié, comme le montrent les exemples qui suivent.

- La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$  dont le rayon de convergence est 1, diverge au point  $z = 1$  mais converge en tout autre point tel que  $|z| = R$ . En effet si  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$  alors la somme  $|1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$  est bornée indépendamment de  $n$  et la transformation d'Abel montre que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$  converge.
- La série  $\sum z^n$  diverge en tout point tel que  $|z| = 1$ .
- La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$  converge en tout point tel que  $|z| = 1$ .



**Disque de convergence et fonction somme**

**Définition 3**

Si  $R \neq 0$ , on appelle *disque de convergence* de la série  $\sum a_n z^n$ , la boule ouverte  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  et *cercle de convergence* le cercle  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ .

On appelle *somme de la série entière*, l'application  $S$  définie en tout point où cela a un sens, par :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

**Remarque** L'ensemble  $\mathcal{E}$  des points en lesquels la fonction somme est définie, vérifie :  $D \subset \mathcal{E} \subset D \cup C = \overline{D}$ .

**Attention** Bien que le cercle  $C$  s'appelle cercle de convergence, il faut bien noter qu'il n'y a pas nécessairement convergence de la série en un point de ce cercle.

Dans le cas d'une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  de la variable réelle, l'intervalle ouvert  $] -R, R[$  est appelé *intervalle de convergence* de la série.

**Règles de d'Alembert et de Cauchy**

Dans ce paragraphe, nous poserons :

$$\frac{1}{R} = 0 \text{ si } R = +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{R} = +\infty \text{ si } R = 0.$$

En appliquant la règle de Cauchy pour les séries numériques (voir page 255), on obtient la proposition suivante.

**Proposition 4**

Si la suite  $\sqrt[n]{|a_n|}$  converge vers  $L \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , alors  $R = \frac{1}{L}$ .

**Exemple** La série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^n} z^n$  a un rayon de convergence de 3.

Si la série est telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ , alors on a le résultat qui suit qui découle de la règle de d'Alembert (voir page 257)

**Proposition 5**

Si la suite  $\left( \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$  converge vers  $L \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , alors  $R = \frac{1}{L}$ .

**Exemples**

1. Soit  $F$  une fraction de  $\mathbb{C}(X)$  n'ayant pas de pôle entier naturel, la série entière

$$\sum_{n \geq 0} F(n)z^n$$

a un rayon de convergence égal à 1, puisque la suite  $\left( \frac{F(n+1)}{F(n)} \right)$

(définie pour  $n$  assez grand) converge vers 1. La série entière  $\sum C_{n+k-1}^{k-1} z^n$  ( $k \in \mathbb{N}^*$  fixé) a donc un rayon de convergence égal à 1. On montrera que sa somme est  $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ .

2. La proposition précédente ne peut pas être appliquée aux séries de la forme  $\sum a_n z^{kn}$ , où  $k$  est un entier supérieur ou égal à 2. En effet pour une telle série la suite des coefficients  $(\alpha_n)$  est en réalité :

$$\begin{cases} \alpha_j = 0 & \text{pour } j \neq kn \\ \alpha_{kn} = a_n \end{cases}$$

et il est clair que l'on ne dispose pas de la suite  $\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right|$ . On peut alors faire appel directement à la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

Par exemple, pour la série  $\sum 2^n z^{2n}$ , on fixe  $z \neq 0$  et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2^{n+1} z^{2n+2}}{2^n z^{2n}} \right| = 2|z|^2,$$

ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière est  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Plus généralement, on montre que si la suite  $(a_n)$  a un rayon de convergence égal à  $R$ , alors la série  $\sum a_n z^{kn}$  a un rayon égal à  $\sqrt[k]{R}$ .

**Propriétés**

Dans ce paragraphe  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

**Proposition 6**

Si  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|$ , alors  $R_a \geq R_b$ .

**Démonstration** Soit  $r \in \mathbb{R}_+$  tel que la suite  $(b_n r^n)$  soit bornée. Puisque  $|a_n r^n| \leq |b_n r^n|$ , la suite  $(a_n r^n)$  est également bornée. On a donc  $R_b \leq R_a$ . □

**Exemples**

1. On a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $e^{-1} \leq e^{\cos n} \leq e$ . Les séries  $\sum_{n \geq 0} e^{-1} z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} e z^n$  étant de rayon de convergence égal à 1, la série  $\sum_{n \geq 0} e^{\cos n} z^n$  est de rayon de convergence égal à 1.
2. Si  $a_n$  est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de  $n$ , on a  $1 \leq a_n \leq n$  donc  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est de rayon égal à 1.

**Proposition 7**

Si  $a_n = O(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$ .

**Démonstration** Il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  et un rang  $N$  à partir duquel  $|a_n| \leq M|b_n|$ . La série  $\sum_{n \geq 0} M b_n z^n$  ayant pour rayon de convergence  $R_b$ , la proposition précédente conduit à  $R_a \geq R_b$ . □

**Proposition 8**

Si  $a_n \sim b_n$ , alors  $R_a = R_b$ .

**Démonstration** Si  $a_n \sim b_n$ , alors  $a_n = O(b_n)$  et  $b_n = O(a_n)$ , donc d'après la proposition précédente, on a  $R_a \geq R_b$  et  $R_a \leq R_b$ . □

**Théorème 9**

Le rayon de convergence  $\rho$  de la somme des deux séries  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  vérifie :

- si  $R_a \neq R_b$ ,  $\rho = \min(R_a, R_b)$ ,
- si  $R_a = R_b$ ,  $\rho \geq R_a = R_b$ .

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

**Démonstration**

► Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ , les deux séries numériques  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  convergent absolument donc la série  $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$  converge absolument, ce qui entraîne

$$\rho \geq \min(R_a, R_b) \text{ et } \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n.$$

► Dans le cas où  $R_a \neq R_b$ , on peut supposer, par exemple,  $R_a < R_b$ . Pour  $z$  tel que  $R_a < |z| < R_b$ , la série diverge, comme somme d'une série divergente et d'une série convergente. □

**Remarque** Si  $R_a = R_b$ , il est possible que  $\rho > R_a$ , en effet si la série  $\sum a_n z^n$  a un rayon de convergence fini, la série  $\sum (-a_n) z^n$  a le même rayon, mais la somme des deux séries a un rayon de convergence infini.

**Exemple** Si les deux séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sont telles que pour tout  $n$ ,  $a_n = 0$  ou  $b_n = 0$  et ont le même rayon de convergence  $R$ , alors la série somme  $\sum (a_n + b_n) z^n$  a pour rayon de convergence  $R$ . En effet, le théorème précédent assure que  $\rho \geq R$ . De plus, soit  $r \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(|a_n + b_n| r^n)$  soit majorée. Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n + b_n| r^n = |a_n| r^n + |b_n| r^n \geq |a_n| r^n$ , ce qui montre que la suite  $(|a_n| r^n)$  est majorée et donc  $\rho \leq R$ . On a alors facilement que si  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  ont pour rayons respectifs  $R_a$  et  $R_b$ , la serie  $\sum a_n z^{2n} + \sum b_n z^{2n+1}$  a pour rayon de convergence  $\min(\sqrt{R_a}, \sqrt{R_b})$ .

**Théorème 10**

Le rayon de convergence  $\rho$  de la série entière produit  $\sum c_n z^n$  avec  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  vérifie  $\rho \geq \min(R_a, R_b)$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$  on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

**Démonstration** Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ , les deux séries numériques  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$ , convergeant absolument, la série numérique produit  $\sum c_n z^n$  converge absolument (d'après le théorème 44 page 286) avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Cela assure de plus que  $\rho \geq \min(R_a, R_b)$ . □

**Remarque** Même si  $R_a \neq R_b$ , on ne peut pas conclure que  $\rho = \min(R_a, R_b)$ . La série  $\sum z^n$  a un rayon de convergence égal à 1. La série  $1 - z = \sum a_n z^n$  avec  $a_0 = 1, a_1 = -1$  et  $\forall n \geq 2, a_n = 0$ , a un rayon de convergence infini. Or la série produit  $\sum c_n z^n$  où  $c_0 = 1$  et  $\forall n \neq 0, c_n = \sum_{p=0}^n a_p = 1 - 1 = 0$  est de rayon de convergence infini. De plus, on a pour tout  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| < 1$  :

$$(1 - z) \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1.$$

**Exemple** La série entière définie par  $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) t^n$  qui a un rayon de convergence égal à 1, est le produit des séries  $\sum_{n \geq 0} t^n$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} t^n$  (complétée par 0 pour  $n = 0$ ). En utilisant la proposition 44 page 663, on peut même montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) t^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} t^n\right) = \frac{\ln(1-t)}{t-1}$ .

**Théorème 11**

La série entière dérivée  $\sum (n + 1)a_{n+1}z^n$  de la serie  $\sum a_n z^n$  a le même rayon de convergence qu'elle

**Démonstration** Notons  $R$  et  $R'$  respectivement les rayons de convergence de la série et de sa dérivée.

► Soit  $r \in \mathbb{R}_+$  tel que la suite  $\left|(n + 1)a_{n+1}\right| r^n$  soit bornée. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| r^n \leq |na_n| r^n = r|na_n| r^{n-1},$$

ce qui assure que la suite  $(|a_n| r^n)$  est bornée et donc  $R \geq R'$

► Soit  $r \in \mathbb{R}_+$  avec  $r < R$  et soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $r + h < R$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n + 1)r^n h \leq C_{n+1}^0 r^{n+1} + C_{n+1}^1 r^n h + \dots + C_{n+1}^n h^{n+1} = (r + h)^{n+1}$$

d'où :

$$\left|a_{n+1}(n + 1)r^n\right| \leq \frac{1}{h} |a_{n+1}| (r + h)^{n+1}$$

ce qui montre que  $(n + 1)|a_{n+1}| r^n$  est bornée et donc  $R' \geq R$

□

## 2.2 Convergence uniforme et séries entières

### Théorème 12

Une série entière converge normalement et donc uniformément sur toute boule fermée contenue dans son disque de convergence.

**Démonstration** Soit  $r < R$ , on a  $\sup_{|z| \leq r} |a_n z^n| = |a_n| r^n$  qui est le terme général d'une série convergente. □

#### Remarques

1. En général, il n'y a pas convergence uniforme sur le disque de convergence. La série  $\sum z^n$  a pour rayon 1 et ne converge pas uniformément sur son disque de convergence, puisque son terme général ne converge pas uniformément vers 0 sur ce disque.
2. Si  $R \in \mathbb{R}$ , les séries qui convergent uniformément sur le disque de convergence sont celles qui convergent uniformément sur le disque fermé. En effet, la convergence uniforme sur  $D$  se traduit par le critère de Cauchy sous la forme :
 
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall p \geq 0, \forall z \in D, |a_n z^n + \dots + a_{n+p} z^{n+p}| \leq \varepsilon.$$
 Pour  $n$  et  $p$  fixés, la fonction  $z \mapsto |a_n z^n + \dots + a_{n+p} z^{n+p}|$  est continue, l'inégalité ci-dessus serait également vraie sur le disque fermé  $\bar{D}$ . On en déduit que s'il existe un point du cercle de convergence en lequel la série diverge, alors la série ne converge pas uniformément sur  $D$ .
3. S'il existe un point  $z_0$  du cercle de convergence en lequel la série converge absolument, alors il y a convergence normale sur le disque de convergence puisque  $\sup_{z \in D} |a_n z^n| = |a_n| |z_0|^n$  qui est le terme général d'une série convergente.
4. On peut montrer qu'il existe une série entière telle qu'il y ait convergence uniforme sur  $D$  sans qu'il y ait convergence absolue en un point de  $C$ .

### Corollaire 13

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ , alors cette série converge normalement et donc uniformément sur toute partie compacte incluse dans son disque de convergence.

**Démonstration** Soit  $X$  une partie compacte incluse dans le disque de convergence, l'application  $z \mapsto |z|$  a une borne supérieure  $r$  atteinte sur  $X$  donc vérifiant  $r < R$  □

*Exemples*

1. Formule de Cauchy

Soit  $\sum a_n z^n$  de rayon  $R > 0$  et de somme  $S$ . Soit  $0 < r < R$ , comme la série converge uniformément sur  $|z| \leq r$ , pour  $n$  fixé, la série de fonctions de  $\theta \mapsto (\sum_{p \geq 0} a_p (r e^{i\theta})^p) e^{-in\theta}$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$  vers la fonction  $\theta \mapsto S(r e^{i\theta}) e^{-in\theta}$ . On a donc :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \int_0^{2\pi} (r e^{i\theta})^p e^{-in\theta} d\theta.$$

Ce qui donne, en remarquant que pour  $q \in \mathbb{N}^*$   $\int_0^{2\pi} e^{iq\theta} d\theta = 0$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = a_n r^n.$$

Cette formule lie les coefficients  $a_n$  aux valeurs de la fonction somme: elle a de nombreuses applications dont le théorème suivant.

2. Théorème de Liouville

Si la somme  $S$  d'une série entière de rayon infini est bornée sur  $\mathbb{C}$  alors  $S$  est constante, en effet :

$$|a_n r^n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} S(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \|S\|_\infty,$$

ce qui conduit en faisant tendre  $r$  vers  $+\infty$  à  $a_n = 0$  si  $n \neq 0$ .

### 3. Propriétés de la fonction somme d'une série entière

Dans cette section,  $\sum a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R$  non nul et de fonction somme  $S$ .

#### 3.1 Continuité de la fonction somme

**Théorème 14**

La fonction somme  $S$  est continue sur le disque de convergence.

**Démonstration** La série de fonctions  $\sum a_n z^n$  converge uniformément sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence  $D$  et toutes les fonctions  $z \mapsto a_n z^n$  sont continues sur  $D$ . □

**Corollaire 15**

Pour tout  $p \geq 0$ , la fonction somme  $S$  admet un développement limité à l'ordre  $p$  au voisinage de l'origine dont la partie régulière est :

$$a_0 + a_1z + \dots + a_pz^p.$$

**Démonstration** Si  $|z| < R$ , on a :

$$S(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_pz^p + z^{p+1} \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_nz^{n-p-1}.$$

Or  $\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_nz^{n-p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p+1}z^n$  est une série de rayon de convergence  $R$ , dont la somme est continue à l'origine et admet donc  $a_{p+1}$  comme limite à l'origine, ce qui conduit à  $z^{p+1} \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_nz^{n-p-1} = O(z^{p+1})$ . □

**3.2 Intégration de la fonction somme**

Dans cette sous-section et la suivante,  $\sum a_n t^n$  désigne une série entière de la variable réelle de rayon de convergence  $R > 0$ .

**Théorème 16**

Si  $[a, b]$  un segment inclus dans l'intervalle de convergence  $] -R, R[$ , alors on a :

$$\int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n dt.$$

**Démonstration** La série de fonctions  $\sum a_n t^n$  converge uniformément sur  $[a, b]$ . □

**Théorème 17**

La fonction somme  $S$  est continue sur l'intervalle de convergence et ses primitives sont de la forme :

$$t \mapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \text{ avec } k \in \mathbb{C}.$$

**Démonstration** On applique le théorème précédent sur un segment  $[0, t]$ . □



### 3.3 Dérivabilité de la fonction somme

#### Théorème 18

La fonction somme définie sur  $] -R, R[$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et sa dérivée est la fonction somme de la série entière dérivée.

**Démonstration** Les fonctions  $f_n : t \mapsto a_n t^n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $] -R, R[$  et  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  converge uniformément sur toute partie compacte de  $] -R, R[$ , donc la fonction somme est de classe  $\mathcal{C}^1$ . □

On a alors clairement :

#### Corollaire 19

La fonction somme définie sur  $] -R, R[$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ses dérivées successives étant les fonctions sommes des séries entières dérivées successives.

#### Théorème 20

Soient  $S$  la fonction somme d'une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R$  et  $\varphi$  une application d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , vérifiant :

$$\forall t \in I, |\varphi(t)| < R.$$

Alors l'application de  $I$  dans  $\mathbb{C}$   $t \mapsto S(\varphi(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et si  $S'$  désigne la somme de la série entière dérivée  $\sum (n + 1)a_{n+1}z^n$ , sa dérivée est :

$$t \mapsto S'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

#### Démonstration

- Puisque pour tout  $t \in I$ ,  $|\varphi(t)| < R$ , on dispose bien de l'application de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\varphi(t))^n$ . Pour prouver que cette application est de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour obtenir l'expression de sa dérivée, on peut se limiter à l'étude sur un intervalle  $J$  compact inclus dans  $I$ .
- Posons :

$$\begin{aligned} f_n &: J \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto a_n(\varphi(t))^n. \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 1$ , chaque application  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de dérivée  $t \mapsto na_n(\varphi(t))^{n-1}\varphi'(t)$ . Comme  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{C}$  est continue, on dispose de  $r = \max_{t \in J} |\varphi(t)| < R$ . On constate que :

- $\sup_{t \in J} |a_n(\varphi(t))^n| \leq |a_n|r^n$  et que  $\sum |a_n|r^n$  converge
- $\sup_{t \in J} |na_n(\varphi(t))^{n-1}\varphi'(t)| \leq n \max_{t \in J} |\varphi'(t)| |a_n|r^{n-1}$  et que  $\sum n|a_n|r^{n-1}$  converge.

Les deux séries  $\sum f_n$  et  $\sum f'_n$  convergent normalement donc uniformément sur  $J$ . On conclut que  $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que sa dérivée est

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\varphi(t))^{n-1}\varphi'(t) = S'(\varphi(t))\varphi'(t). \quad \square$$

**Remarque** Ainsi peut-on composer avec une règle simple de dérivation des applications  $\varphi$  de  $I$  dans le disque de convergence de la fonction somme d'une série entière. On verra ainsi que si  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $t \mapsto \exp(\varphi(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que sa dérivée est  $t \mapsto \exp(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

### 3.4 Problèmes sur le bord

Nous venons d'étudier le comportement de la fonction somme en des points  $z$  du disque de convergence (ou en des points  $t$  de l'intervalle de convergence). Dans cette sous-section, nous considérons maintenant un point  $z_0$  du cercle de convergence (ou une borne de l'intervalle de convergence) en lequel la série converge et nous allons envisager cette situation dans différents cas. Toutes les situations vont conduire au même résultat :  $\lim_{t \rightarrow 1^-} S(tz_0) = S(z_0)$ .

#### Cas où la série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument

Si la série  $\sum a_n z_0^n$  converge absolument, il est alors clair que la série  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur la boule fermée  $|z| \leq R$  et donc uniformément sur le segment  $[0, z_0]$ .

#### Cas d'une série réelle de variable réelle à coefficients positifs

Il est clair que si  $\sum a_n R^n$  converge, nous sommes dans les conditions qui précèdent puisque  $|a_n|R^n = a_n R^n$  et il y a convergence uniforme sur  $[0, R]$ . Remarquons que dans ce cas, si au contraire  $\sum a_n R^n$  diverge, on peut montrer  $\lim_{t \rightarrow R} S(t) = +\infty$ . (voir exercice 11)

**Cas d'une série réelle alternée de variable réelle**

On se ramène au cas où  $R = 1$  et on a le résultat suivant :

**Proposition 21**

Une série de la forme  $\sum (-1)^n a_n t^n$  de rayon de convergence 1 où  $(a_n)$  est une suite décroissante tendant vers 0, converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$ .

**Démonstration** Il suffit d'appliquer la proposition 29 page 458 en remarquant que :

- pour chaque  $t \in [0, 1]$ , la suite  $(a_n t^n)$  est décroissante,
- la suite de fonctions  $(a_n t^n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[0, 1]$ . □

**Remarque** La fonction somme est donc en particulier continue sur  $[0, R]$ , ce qui conduit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{t \rightarrow R^-} S(t).$$

**Exemples**

1. En appliquant ce qui précède à la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}$  dont la somme vaut  $\ln(1+t)$  (voir proposition 44 page 663), on trouve :

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

2. En utilisant la série  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$  dont la somme vaut  $\arctan t$  (voir proposition 46 page 665), on trouve :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Cas général**

La convergence de la série en  $z_0$  suffit pour avoir la convergence uniforme sur le segment  $[0, z_0]$ .

**Proposition 22**

S'il existe un point  $z_0$  du cercle de convergence en lequel la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  converge, alors la série converge uniformément sur le segment  $[0, z_0]$

**Démonstration**

- Quitte à remplacer  $z$  par  $\frac{z}{z_0}$ , on peut supposer  $R = 1$  et  $z_0 = 1$ .
- Nous allons montrer que la série vérifie sur  $[0, z_0]$  le critère de Cauchy uniforme. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \geq 1$ , notons  $s_{n,p} = a_{n+1}z^{n+1} + \dots + a_{n+p}z^{n+p}$  et  $\sigma_n = a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$ . À l'aide d'une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} s_{n,p} &= \sigma_{n,1}z^{n+1} + (\sigma_{n,2} - \sigma_{n,1})z^{n+2} + \dots + (\sigma_{n,p} - \sigma_{n,p-1})z^{n+p} \\ &= z^{n+1}(1-z)(\sigma_{n,1} + \sigma_{n,2}z + \dots + \sigma_{n,p-1}z^{p-2}) + \sigma_{n,p}z^{n+p}. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , la série  $\sum a_n$  étant convergente, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$  et  $p \geq 1$ , on ait  $|\sigma_{n,p}| \leq \varepsilon$ . On a donc, pour  $n \geq N$ ,  $p \geq 1$  et pour tout  $z \in [0, 1]$  :

$$|s_{n,p}| \leq \varepsilon(1-z)(1+z+\dots+z^{p-2}) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

ce qui montre la convergence uniforme de la série sur le segment. □

Ce résultat reste clairement vrai dans le cas de séries réelles et montre donc que si la série converge au point  $R$ , il y a convergence uniforme sur le segment  $[0, R]$

**Remarque** On peut montrer (voir l'exercice 32) que l'on a convergence uniforme dans un secteur angulaire  $S$  de la forme :

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 - re^{i\varphi}, \theta_0 - \alpha \leq \varphi \leq \theta_0 + \alpha, 0 \leq r \leq \rho\}.$$

**Corollaire 23**

Si la série converge en un point  $z_0$  du cercle de convergence, alors :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} S(tz_0) = S(z_0)$$

**Démonstration** La série de fonctions converge uniformément sur le segment  $[0, z_0]$ . □

**Remarque** On peut avoir une limite pour  $S(tz_0)$  lorsque  $t$  tend vers  $1^-$  sans pour autant que la série converge en  $z_0$ . La série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n$  ne converge pas en

$z = 1$  alors que  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$  tend vers  $\frac{1}{2}$  lorsque  $t$  tend vers  $1^-$ .

## 4. Séries entières classiques

### 4.1 Séries entières complexes

#### Fractions rationnelles

Nous avons déjà remarqué page 645, que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  a un rayon de convergence égal à 1 et que pour tout  $z$  avec  $|z| < 1$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Plus généralement, on a :

#### Proposition 24

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . La série entière  $\sum C_{n+k-1}^{k-1} z^n$  a un rayon de convergence égal à 1 et pour tout  $z$  avec  $|z| < 1$ , on a :

$$\sum_{n \geq 0} C_{n+k-1}^{k-1} z^n = \frac{1}{(1-z)^k}.$$

#### Démonstration

- Le coefficient d'ordre  $n$  de la série étant un polynôme en  $n$ , il est clair que le rayon de convergence est égal à 1.
- Pour  $k = 1$ , le résultat a déjà été démontré. Supposons que le résultat soit vrai à l'ordre  $k$  avec  $k \geq 1$  et montrons le à l'ordre  $k + 1$ . Pour ce faire, remarquons que le produit de Cauchy des séries  $(1 - z)$  et  $\sum C_{n+k}^k z^n$  est égal à  $\sum (C_{n+k}^k - C_{n-1+k}^k) z^n = \sum C_{n+k-1}^{k-1} z^n$ . Pour  $z$  tel que  $|z| < 1$ , on a donc :

$$(1 - z) \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k}^k z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k-1}^{k-1} z^n$$

ce qui est le résultat à l'ordre  $k + 1$  □

**Exemple** Nous pouvons alors exprimer la somme de la série  $\sum P(n)z^n$  où  $P$  est un polynôme de degré  $k$  de  $\mathbb{C}[X]$ . Nous savons déjà que son rayon de convergence est 1. Le polynôme  $P$  se décompose sur la base :

$$\left( 1, (X + 1), \frac{(X + 2)(X + 1)}{2!}, \dots, \frac{(X + k) \dots (X + 2)(X + 1)}{k!} \right)$$

de  $\mathbb{C}_k[X]$  sous la forme :

$$P = \alpha_0 1 + \alpha_1 (X + 1) + \alpha_2 \frac{(X + 2)(X + 1)}{2!} + \dots + \alpha_k \frac{(X + k) \dots (X + 2)(X + 1)}{k!}.$$

On a donc pour tout  $z$  avec  $|z| < 1$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)z^n = \frac{\alpha_0}{1-z} + \frac{\alpha_1}{(1-z)^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{(1-z)^{k+1}}.$$

**Théorème 25**

Toute fraction rationnelle  $F$  de  $\mathbb{C}(X)$  n admettant pas 0 pour pôle est la somme d'une série entière dont le rayon est le minimum des modules des pôles de  $F$ .

**Démonstration**

► On décompose  $F$  en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ . Il suffit donc de considérer un élément simple de la forme  $\frac{1}{(z-z_0)^\alpha}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ . Or pour tout  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| < |z_0|$ , on a :

$$\frac{1}{(z-z_0)^\alpha} = \frac{1}{(-z_0)^\alpha} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-\alpha} = \frac{1}{(-z_0)^\alpha} \sum_{n=\alpha}^{+\infty} C_{n-\alpha}^{\alpha-1} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-\alpha}$$

ce qui montre que  $t \mapsto \frac{1}{(z-z_0)^\alpha}$  est la somme d'une série entière de rayon  $|z_0|$ . En notant  $\rho$  le minimum des modules de ses pôles complexes, la fonction  $F$  est la somme d'une série entière de rayon  $R$  au moins égal à  $\rho$ .

► Supposons que l'on ait  $R > \rho$ . Il existerait un pôle  $z_0$  de  $F$  avec  $\rho = |z_0| < R$ . La fonction  $F$  serait alors continue en  $z_0$  ce qui est impossible puisque  $|F(z)|$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ . □

**Exemple** La fraction  $F(z) = \frac{1-z^2}{1-2z \cos(\alpha) + z^2} = -1 + \frac{1}{1-ze^{-i\alpha}} + \frac{1}{1-ze^{i\alpha}}$  est la somme de la série entière :

$$-1 + \sum e^{in\alpha} z^n + \sum e^{-in\alpha} z^n = 2 \sum \cos(n\alpha) z^n - 1$$

sur  $] -1, 1[$ .

**L'exponentielle complexe**

**Définition 4**

On appelle *exponentielle complexe*, notée  $\exp : z \mapsto e^z$ , la somme de la série entière  $\sum \frac{z^n}{n!}$  qui est de rayon infini. On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

En appliquant à la série exponentielle le théorème 20 page 649, on a :

**Proposition 26**

Si  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $t \mapsto \exp(\varphi(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et sa dérivée est  $t \mapsto \exp(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

Rappelons qu'en première année, nous avons défini :

- la fonction logarithme népérien, notée  $\ln$ , comme l'unique primitive sur  $\mathbb{R}_+$  de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , qui s'annule en 1.
- la fonction exponentielle réelle, comme la réciproque de la fonction logarithme népérien.

Nous avons alors montré que l'exponentielle réelle est l'unique fonction solution de  $y' = y$  telle que  $y(0) = 1$ .

Cette propriété nous permet à l'aide de la proposition 26 de montrer que la restriction à  $\mathbb{R}$  de l'exponentielle complexe est bien l'exponentielle réelle définie en première année.

**Proposition 27**

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

**Démonstration** Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes, les deux séries  $\sum \frac{z_1^n}{n!}$  et  $\sum \frac{z_2^n}{n!}$  convergent absolument respectivement vers  $e^{z_1}$  et  $e^{z_2}$  donc leur produit  $\sum \left( \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right)$  converge absolument vers  $e^{z_1}e^{z_2}$ . Or :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k z_1^k z_2^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 28**

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout nombre complexe  $z$  :

$$e^z \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

**Démonstration**

►  $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1.$

►  $\overline{e^z} = \overline{\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}}.$

►  $|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\operatorname{Re}(z)}.$  Donc :  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$  □

**Corollaire 29**

$$\forall z \in \mathbb{C}, |e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}.$$

**Démonstration**

$$|e^z| = 1 \iff e^{\operatorname{Re}(z)} = 1 \iff \operatorname{Re}(z) = 0. \quad \square$$

**Theorème 30**

L'application  $z \mapsto e^z$  est un morphisme continu surjectif du groupe additif  $(\mathbb{C}, +)$  sur le groupe multiplicatif  $(\mathbb{C}^*, \times).$

**Démonstration**

► L'application  $z \mapsto e^z$  est bien continue sur  $\mathbb{C}$  comme somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout compact et c'est bien un morphisme d'après la proposition 27.

► Montrons la surjectivité de cette application. Soit  $z_0 \in \mathbb{C}.$

- Supposons que  $z_0 \notin \mathbb{R}.$  On paramètre le segment joignant le point d'affixe 1 et le point d'affixe  $z_0$  du plan complexe par :

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto (1-t) + tz_0.$$



L'application  $f$  est clairement de classe  $C^1$  et ne s'annule pas, puisque  $z_0 \notin \mathbb{R}_-$ . Il est donc possible de considérer l'application :

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \int_0^t \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

qui est de classe  $C^1$ . L'application  $f e^{-g}$  est alors également de classe  $C^1$ , de dérivée :

$$f' e^{-g} - f \frac{f'}{f} e^{-g} = 0.$$

Cette fonction est donc constante égale à sa valeur en 0, d'où :

$$\forall t \in [0, 1] , f(t)e^{-g(t)} = f(0)e^{-g(0)} = 1.$$

On a alors  $f(1)e^{-g(1)} = z_0 e^{-g(1)} = 1$  d'où  $z_0 = e^{g(1)}$ , ce qui montre que  $z_0$  a au moins un antécédent par la fonction  $\exp$ .

- Supposons à présent  $z_0 \in \mathbb{R}_*$ . D'après l'étude précédente, il existe  $\theta \in \mathbb{C}$  tel que  $e^\theta = i$ . Puisque  $-z_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et que l'application  $t \mapsto e^t$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $-z_0 = e^t$ , alors  $z_0 = e^{t+2\theta}$ . □

**Remarque** L'application  $z \mapsto e^z$  de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}^*$  n'est pas injective, en effet, en reprenant les notations de la démonstration précédente,  $e^{4\theta} = 1 = e^0$  et  $\theta \neq 0$ .

### Théorème 31

L'application  $\varphi : t \mapsto e^{zt}$  est un morphisme continu surjectif du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe  $(U, \times)$  des nombres complexes de module 1. Il existe un nombre réel  $a > 0$  unique tel que  $\text{Ker } \varphi = a\mathbb{Z}$ . On note alors  $\pi = \frac{a}{2}$ .

**Démonstration** L'application est clairement un morphisme continu du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe  $(U, \times)$ .

Montrons qu'il est surjectif : soit  $z_0 \in U$ , puisque  $z_0 \neq 0$ , il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z_0 = e^z$ . Or  $|z_0| = 1$  assure que  $z \in i\mathbb{R}$ .

Le noyau de  $\varphi$  est donc un sous groupe fermé de  $(\mathbb{R}, +)$  distinct de  $\mathbb{R}$ . Il est également distinct de  $\{0\}$  car  $\varphi$  n'est pas injective ( $e^{4\theta} = 1$  et  $\theta \in i\mathbb{R}$ ). Il existe donc  $a > 0$  unique tel que  $\text{Ker } \varphi = a\mathbb{Z}$ . □

**Corollaire 32**

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{it} = 1 \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}$$

**Démonstration** C'est une conséquence directe du théorème précédent □

**Corollaire 33**

- 1 L'application  $t \mapsto e^{it}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  est périodique et le sous-groupe de ses périodes est  $2\pi\mathbb{Z}$ .
- 2 L'application  $z \mapsto e^z$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  est périodique et le sous-groupe de ses périodes est  $2i\pi\mathbb{Z}$ .

**Démonstration**

$$1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}, e^{i(t+T)} = e^{it}) \iff e^{iT} = 1 \iff T \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$2 \quad (\forall z \in \mathbb{C}, e^{z+T} = e^z) \iff e^T = 1 \iff T \in 2i\pi\mathbb{Z}. \quad \square$$

**Proposition 34**

Il existe une unique fonction continue  $\varphi$  définie sur le plan complexe privé du demi-axe réel négatif telle que  $\varphi(1) = 0$  et pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  :

$$\exp(\varphi(z)) = z.$$

Cette fonction est appelée *détermination principale du logarithme* notée  $z \mapsto L(z)$  et coïncide avec la fonction  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Démonstration**

- En reprenant la démonstration du théorème 30, on montre que la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  par :

$$\varphi(z) = \int_0^1 \frac{z-u}{(1-u)+uz} du$$

vérifie  $\exp(\varphi(z)) = z$ .

L'application  $(z, u) \mapsto \frac{z-u}{(1-u)+uz}$  étant continue sur  $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) \times [0, 1]$ ,  $\varphi$  est bien continue.

- Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux fonctions qui conviennent, alors puisque  $\exp(\varphi_1(z)) = \exp(\varphi_2(z))$ , il existe  $k$  (qui dépend de  $z$ ) tel que  $\varphi_1(z) = \varphi_2(z) + 2ik\pi$ . La fonction  $z \mapsto \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Or elle est continue sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  qui est connexe par arcs, donc elle est constante. La condition  $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 0$ , montre alors que cette constante est nulle.
- On a pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi(t) \in \mathbb{R}$  et  $\exp(\varphi(t)) = t$ , ce qui montre que la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{R}$  est la réciproque de l'exponentielle réelle, c'est-à-dire la fonction  $\ln$  □

**Remarque** En anticipant sur la section suivante, on peut envisager sur le plan complexe privé du demi-axe réel négatif, la fonction  $\psi$  définie par :

$$z = x + iy \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Comme  $x^2 + y^2 > 0$  on a  $x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  sur cet ouvert et il est clair que  $\psi$  est continue. On constate que :

$$e^{\psi(z)} = \sqrt{x^2 + y^2} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

avec  $\theta = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$  d'où :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta = x \\ \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta = y \end{cases}$$

et  $e^{\psi(z)} = z$ . Comme  $\psi(1) = \ln(1) = 0$ , on a  $\psi(z) = L(z)$ .

### Les fonctions trigonométriques et hyperboliques complexes

#### Définition 5

On appelle fonctions *cosinus et sinus complexes*, respectivement notées  $\cos$  et  $\sin$ , les applications de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définies par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

#### Définition 6

On appelle fonctions *cosinus et sinus hyperboliques complexes*, respectivement notées  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ , les applications de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définies par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les propositions suivantes sont immédiates

**Proposition 35**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \cos(iz) &= \operatorname{ch} z & \operatorname{ch}(iz) &= \cos(z) \\ \sin(iz) &= i \operatorname{sh} z & \operatorname{sh}(iz) &= i \sin z. \end{aligned}$$

**Proposition 36**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} e^z &= \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z & e^{-z} &= \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z \\ e^{iz} &= \cos z + i \sin z & e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1 & \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1. \end{aligned}$$

**Proposition 37**

Pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \operatorname{ch}(a + b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh}(a + b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b. \end{aligned}$$

**Proposition 38**

- L'application  $z \mapsto \cos z$  est périodique paire et son groupe des périodes est  $2\pi\mathbb{Z}$ . On a de plus pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\cos(z + \pi) = -\cos z, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z.$$

- L'application  $z \mapsto \sin z$  est périodique impaire et son groupe des périodes est  $2\pi\mathbb{Z}$ . On a de plus pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z.$$

- L'application  $z \mapsto \operatorname{ch} z$  est périodique paire et son groupe des périodes est  $2i\pi\mathbb{Z}$ . On a de plus pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\operatorname{ch}(z + i\pi) = -\operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch}\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = i \operatorname{sh} z.$$

- L'application  $z \mapsto \operatorname{sh} z$  est périodique impaire et son groupe des périodes est  $2i\pi\mathbb{Z}$ . On a de plus pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\operatorname{sh}(z + i\pi) = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh}\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ch} z.$$

**Exemples**

1. Calcul de  $|\sin z|$ .

$$\begin{aligned} |\sin(x + iy)|^2 &= |\sin(x) \cos(iy) + \cos(x) \sin(iy)|^2 \\ &= |\sin(x) \operatorname{ch}(iy) + i \cos(x) \operatorname{sh}(y)|^2 \\ &= \sin^2(x) \operatorname{ch}^2(y) + \cos^2(x) \operatorname{sh}^2(y) \\ &= \sin^2(x) + \operatorname{sh}^2(y) = \operatorname{ch}^2(y) - \cos^2(x). \end{aligned}$$

2. Les zéros de la fonction sinus sont donc exactement ses zéros réels. En calculant  $|\cos z|$ , on montrerait le même résultat sur la fonction cosinus.
3. Résolution de l'équation  $\cos(z) = a$ .

L'équation est équivalente à  $e^{2iz} - 2ae^{iz} + 1$  qui conduit à l'équation du second degré  $u^2 - 2au + 1 = 0$  qui a deux solutions  $u_1$  et  $u_2$ . Il reste ensuite à résoudre  $e^{iz} = u_1$  et  $e^{iz} = u_2$  dont l'ensemble des solutions sont de la forme  $z_1 + 2\pi\mathbb{Z}$  et  $z_2 + 2\pi\mathbb{Z}$  où  $z_1$  et  $z_2$  sont des solutions particulières de chacune des équations. La condition  $u_1 u_2 = 1$  conduit à  $z_1 + z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ . L'ensemble des solutions cherché est donc  $(z_0 + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (-z_0 + 2\pi\mathbb{Z})$  où  $z_0$  est une solution particulière de l'équation.

**Définition 7**

On appelle fonctions *tangente et cotangente complexes*, notées respectivement  $\tan$  et  $\cotan$ , les fonctions impaires et  $\pi$ -périodiques définies par :

$$\begin{aligned} \forall z \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \quad \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} \\ \forall z \notin \pi\mathbb{Z}, \quad \cotan z &= \frac{\cos z}{\sin z} + \tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \end{aligned}$$

**4.2 Séries entières réelles**

**L'exponentielle réelle**

La restriction de l'exponentielle complexe à  $\mathbb{R}$  conduit à l'exponentielle réelle qui vérifie donc :

**Proposition 39**

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

**Remarque** Nous savons que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ,  $\exp(L(z)) = z$ , ce qui par restriction à  $\mathbb{R}_+^*$  donne, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\exp(\ln x) = x$ , ce qui montre que la restriction de l'exponentielle complexe à  $\mathbb{R}$  est bien la fonction réciproque du logarithme réel.

### Les fonctions trigonométriques et hyperboliques réelles

Les restrictions des fonctions trigonométriques complexes à  $\mathbb{R}$  permettent de définir les fonctions trigonométriques réelles dont nous avons admis l'existence en première année :

#### Définition 8

Pour tout réel  $t$  :

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les propriétés suivantes admises en première année sont alors claires :

#### Proposition 40

- La fonction cosinus est paire de classe  $C^\infty$  et sa dérivée est l'opposée de la fonction sinus.
- La fonction sinus est impaire de classe  $C^\infty$  et sa dérivée est la fonction cosinus.
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ .
- Les fonctions sinus et cosinus sont  $2\pi$ -périodiques.

La propriété suivante nous permettra de montrer que  $2\pi$  est bien la plus petite période positive de la fonction cosinus et de la fonction sinus.

#### Proposition 41

Le plus petit nombre réel positif annulant la fonction cosinus est  $\frac{\pi}{2}$ .

#### Démonstration

- L'égalité  $(e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = -1$  conduit à  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  ou  $e^{i\frac{\pi}{2}} = -i$ , ce qui montre que  $\frac{\pi}{2}$  est bien un zéro de la fonction cosinus.
- Soit  $a$  un zéro positif de la fonction cosinus. On a  $\sin a = \varepsilon \in \{1, -1\}$  donc  $e^{ia} = i\varepsilon$  d'où  $e^{4ia} = 1$  donc  $4a \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Or  $a > 0$  conduit donc à  $4a \geq 2\pi$ , donc à  $a \geq \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

L'étude des variations des fonctions cosinus et sinus sur  $[0, 2\pi]$  conduit alors à la proposition suivante.

### Proposition 42

La plus petite période positive de la fonction cosinus et de la fonction sinus est  $2\pi$ .

Les restrictions des fonctions hyperboliques complexes à  $\mathbb{R}$  sont les fonctions hyperboliques réelles définies en première année, que l'on peut donc écrire comme somme de séries entières :

### Proposition 43

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

## Fonction logarithme

Nous savons déjà que :

$$\forall t \in ]-1, 1[ , \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

donc :

$$\forall t \in ]-1, 1[ , \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n.$$

Par intégration, nous en déduisons :

### Proposition 44

L'application  $t \mapsto \ln(1+t)$  est la somme d'une série entière sur  $] -1, 1[$  et l'on a :

$$\forall t \in ]-1, 1[ , \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n.$$

**Remarque** Nous avons vu page 651 que la formule précédente est également vraie pour  $t = 1$ , on a donc :

$$\forall t \in ]-1, 1] , \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n.$$

## Fonction puissance

### Proposition 45

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto (1+t)^\alpha$  est la somme d'une série entière sur  $] -1, 1[$  et l'on a :

$$\forall t \in ]-1, 1[ , (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n.$$

**Démonstration** La formule de Taylor avec reste intégral donne pour  $t \in ]-1, +\infty[$  :

$$(1+t)^\alpha - \sum_{P=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-P+1)}{P!} t^P = \rho_n$$

avec :

$$\rho_n = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)t^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} (1+tu)^{\alpha-n-1} du.$$

La fonction  $u \mapsto \frac{1-u}{1+tu}$  est décroissante sur  $[0, 1]$  et prend la valeur 1 en 0 et 0 en 1 on a donc pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $\left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^n} \right| \leq 1$  ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} |\rho_n| &= \left| \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)t^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^n} (1+tu)^{\alpha-1} du \right| \\ &\leq \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!} |t^{n+1}| \int_0^1 (1+tu)^{\alpha-1} du. \end{aligned}$$

La série  $\sum \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!} |t^{n+1}|$  converge pour  $|t| < 1$  (c'est clair si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , sinon on utilise la règle de d'Alembert sur les séries numériques). Donc, si  $|t| < 1$ , la suite  $(\rho_n)$  tend vers 0, ce qui montre le résultat annoncé.  $\square$

**Remarque** Il faut noter que le rayon de convergence est infini dans le cas où  $\alpha \in \mathbb{N}$ .



En prenant des primitives respectivement de  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ , on montre que les fonctions arcsin et arctan sont somme de séries entières de rayon de convergence 1 avec :

**Proposition 46**

$$\forall t \in ]-1, 1[ , \arctan t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$$

$$\forall t \in ]-1, 1[ , \arcsin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Remarques**

- On peut aussi écrire :

$$\forall t \in [-1, 1] , \arcsin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2.4 \dots (2n))^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

- On peut montrer que les séries précédentes sont absolument convergentes en 1 et en  $-1$  et donc que les formules de la proposition 46 restent vraies en  $-1$  et 1.

## 5. Fonctions développables en série entière

### 5.1 Généralités

**Définition 9**

Soit  $f$  une fonction d'une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est *développable en série entière* en 0, s'il existe une série entière  $\sum a_n t^n$  de rayon  $R > 0$  et  $r \in ]0, R]$  avec  $]-r, +r[ \subset X$  tel que :

$$\forall t \in ]-r, +r[ , f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

**Définition 10**

On dit que  $f$  est développable en série entière en  $t_0$  si la fonction  $t \mapsto f(t - t_0)$  est développable en série entière en 0.

**Remarques**

1. La notion de fonction développable en série entière en 0 est une notion locale donc si une fonction  $f$  coïncide localement au voisinage de 0 avec une fonction  $g$  développable en série entière en 0, alors  $f$  l'est également
2. Même si  $f$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ , on a pas nécessairement  $r = R$ , comme le montre la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1} & \text{si } x \leq -1, \\ e^x & \text{si } -1 < x < 1 \\ e & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

qui est développable en série entière en 0 et égale à la somme de la série entière  $\sum \frac{t^n}{n!}$  sur  $] -1, 1[$  et non pas sur  $\mathbb{R}$  bien que  $\sum \frac{t^n}{n!}$  soit de rayon infini.

**Exemples**

1. Dans la section précédente, nous avons montré que les fonctions exponentielle, sinus, cosinus, cosinus et sinus hyperboliques,  $t \mapsto \ln(1 + t)$ ,  $t \mapsto (1 + t)^\alpha$ , arc-tangente et arcsinus sont développables en séries entières en 0 et nous avons donné leurs développements.
2. Tout polynôme  $P$  est développable en série entière en tout point  $t_0$  de  $\mathbb{R}$  d'après la formule de Taylor :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$$

**Proposition 47**

Si la fonction  $f$  est développable en série entière en  $t_0$ , alors il existe un voisinage de  $t_0$  sur lequel  $f$  est de classe  $C^\infty$  et le développement en série entière de  $f$  en  $t_0$  est  $\sum \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$ . Cette série est appelée *série de Taylor* de  $f$  en  $t_0$ .

**Démonstration** Soit  $0 < r \leq R$  tel que pour tout  $t \in ]t_0 - r, t_0 + r[$  :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n.$$

Or, la somme  $S$  de la série entière  $\sum a_n (t - t_0)^n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]t_0 - r, t_0 + r[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, S^{(n)}(t_0) = n! a_n$ . □

**Remarques**

1. La proposition précédente assure l'unicité du développement en série entière.
2. Il est possible que  $f$  soit de classe  $C^\infty$  dans un voisinage de  $t_0$  sans être développable en série entière en  $t_0$ . La fonction définie par :

$$\begin{cases} f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

est de classe  $C^\infty$  et toutes ses dérivées en zéro sont nulles. Si  $f$  était développable en série entière en 0, elle serait nulle sur un voisinage de 0, ce qui est clairement faux.

3. Les nombres  $\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}$  sont entièrement déterminés par la donnée de  $f$  sur un intervalle ouvert centre en  $t_0$ . Donc si deux fonctions sont développables en série entière en  $t_0$  et sont égales sur un intervalle du type  $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ , elles sont égales sur l'intervalle commun sur lequel elles sont développables. Évidemment, elles peuvent différer en dehors de cet intervalle (remarque 2, page 666).

**Proposition 48**

Soit  $f$  développable en série entière en 0 et  $\sum a_n t^n$  son développement en série entière au voisinage de 0, alors :

- si  $f$  est paire, on a  $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$ ,
- si  $f$  est impaire, on a  $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0$ .

**Démonstration** Soit  $0 < r < R$  tel que  $f$  soit égale à la somme de sa série de Taylor sur  $] -r, r[$ . La fonction  $g$  définie sur  $] -r, r[$  par  $g(t) = f(-t)$  est développable en série entière en 0 et :

$$\forall t \in ] -r, r[ , g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n.$$

Si  $f$  est paire, alors  $g = f$  et par unicité du développement en série entière  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n a_n$ , ce qui conduit à  $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$ . On raisonne de manière similaire si  $f$  est impaire. □

**Exemple** Montrons que la fonction somme  $S$  d'une série entière  $\sum a_n t^n$  est développable en série entière en chacun des points de son intervalle  $I$  de convergence.

Soit  $t_0 \in I$  et  $u$  tel que  $|t_0| + |u| \in I$ . On a :

$$S(t_0 + u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t_0 + u)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{p=0}^n C_n^p u^p t_0^{n-p}.$$

Posons pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  :  $\alpha_{n,p} = a_n C_n^p u^p t_0^{n-p}$  (avec la convention  $C_n^p = 0$  pour  $p > n$ ). La série double  $\sum_{n,p} \alpha_{n,p}$  est sommable. En effet considérons la série double positive  $\sum_{n,p} |\alpha_{n,p}|$ , on constate pour  $n$  fixé la convergence de  $\sum_p |\alpha_{n,p}|$  avec :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} |\alpha_{n,p}| = \sum_{p=0}^n |a_n C_n^p |u|^p |t_0|^{n-p} = |a_n| (|u| + |t_0|)^n$$

et la convergence de  $\sum_n |a_n| (|u| + |t_0|)^n$  car  $|u| + |t_0| < R$  ce qui assure la sommabilité.

En utilisant alors le théorème de sommation par paquets, on constate :

$$S(t_0 + u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left( \sum_{p=0}^n C_n^p u^p t_0^{n-p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=p}^{+\infty} a_n C_n^p u^p t_0^{n-p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=p}^{+\infty} a_n C_n^p t_0^{n-p} \right) u^p.$$

**Proposition 49**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur un intervalle  $I$  ouvert contenant 0. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in I$ ; notons  $R_n(t)$  le reste :

$$R_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Alors  $f$  est développable en série entière en 0 si, et seulement si, il existe un intervalle ouvert contenant 0, sur lequel la suite  $(R_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.

**Démonstration**

► Supposons que  $f$  soit développable en série entière en 0, alors il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant 0 sur lequel :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

La suite  $(R_n)$  converge donc bien simplement sur  $I$  vers la fonction nulle.

► Réciproquement, supposons qu'il existe un intervalle ouvert  $I$  sur lequel la suite  $(R_n)$  converge simplement vers la fonction nulle, il existe alors  $\eta > 0$  tel que la suite  $(R_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $]-\eta, +\eta[$ . La série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$  a donc un rayon de convergence  $R$  vérifiant  $R \geq \eta > 0$ , ce qui montre que  $f$  est développable en série entière en 0 sur  $]-\eta, +\eta[$ . □

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que  $f$  soit développable en série entière en 0.

**Proposition 50**

Si  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur un intervalle de la forme  $I = ]-a, a[$  et s'il existe  $\rho > 0$  et  $M \in \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors  $f$  est développable en série entière en 0 sur  $]-R, R[$  où  $R = \min(a, \rho)$ .

**Démonstration** Il suffit d'écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|R_n(t)| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [0,t]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M \frac{|t|^{n+1}}{\rho^{n+1}}. \quad \square$$

**Remarques**

1. Le résultat montre que si les dérivées successives sont uniformément bornées sur  $I$ , alors  $f$  est développable en série entière en 0 sur  $I$ .
2. On peut montrer que la condition précédente est en fait une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit développable en série entière en 0. (voir exercice 15)

**Exemple Théorème de Bernstein**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur voisinage de 0 telle que  $f$  et toutes ses dérivées soient positives sur ce voisinage. Montrons que  $f$  est développable en série entière en 0. Soit  $\alpha > 0$  tel que  $[-\alpha, 2\alpha] \subset I$  et soit  $x \in [-\alpha, \alpha]$ . La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x + \alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) + \alpha^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x + \alpha u) du$$

Tous les termes du second membre étant positifs, on a :

$$0 \leq \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) \leq f(x + \alpha) \leq f(2\alpha)$$

la dernière inégalité provenant de la croissance de  $f$ . La proposition précédente s'applique alors et montre le résultat annoncé.

### 5.2 Opérations sur les fonctions développables en série entière

On montre facilement les propriétés suivantes.

**Proposition 51**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions développables en série entière en 0 de développements respectifs  $\sum a_n t^n$  et  $\sum b_n t^n$ . Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ , la fonction  $\lambda f + \mu g$  est développable en série entière en 0 et son développement est  $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) t^n$

**Exemples**

1. On montre facilement que la fonction  $t \mapsto \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4x})$  est développable en série entière en 0 sur  $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} [$  et que son développement est  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} C_{2n-2}$ .

Le coefficient  $a_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}$  est appelé  $n^{\text{ième}}$  nombre de Catalan et on peut montrer qu'il représente le nombre de parenthésages possibles sur une expression du type  $x_1 * x_2 * \dots * x_n$  où  $*$  est une loi de composition interne dans un ensemble  $E$ , c'est à dire le nombre d'arbres binaires à  $n$  feuilles.

2. Pour développer en série entière la fonction  $t \mapsto \ln(1 + t + t^2)$ , on remarque que pour tout  $t \in ]-1, 1[$   $\ln(1 + x + x^2) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)$ . On développe les deux logarithmes et l'on fait la différence, ce qui donne pour tout  $t \in ]-1, 1[$  :

$$\ln(1 + t + t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ où } a_{3p} = -\frac{2}{3p}, a_{3p+1} = \frac{1}{3p+1} \text{ et } a_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}.$$

**Proposition 52**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions développables en série entière en 0 de développements respectifs  $\sum a_n t^n$  et  $\sum b_n t^n$ , alors la fonction produit  $fg$  est développable en série entière en 0 et son développement en 0 est le produit des deux séries entières.

**Exemple** La fonction  $x \mapsto \cos x \operatorname{ch} x$  est développable en série entière en 0 sur  $\mathbb{R}$  et son développement en série en 0 est obtenu par produit des deux développements

en serie. On a donc  $\cos x \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$  où :

$$a_{2n} = \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q \frac{1}{(2p-2q)!(2q)!} = \frac{1}{(2p)!} \left( C_{2p}^0 - C_{2p}^2 + \dots + (-1)^p C_{2p}^{2p} \right).$$

L'expression entre parenthèses est la partie réelle de  $(1+i)^{2p}$  qui est nulle si  $p$  est impair et vaut  $(-1)^n 2^{2n}$  si  $p = 2n$ . Le développement cherché est donc :

$\cos x \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(4n)!} x^{4n}$ . On obtiendrait le même résultat en écrivant :

$$\cos x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (\cos(1+i)x + \cos(1-i)x).$$

### Proposition 53

Soit  $f$  une fonction développable en série entière en 0 de développement  $\sum a_n t^n$ , alors il existe un intervalle  $I$  ouvert contenant 0 sur lequel  $f$  est dérivable et la fonction dérivée  $f'$  est développable en série entière en 0 sur  $I$ , son développement étant la série obtenue en dérivant terme à terme la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ , soit  $\sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}$ .

**Remarque** Les dérivées successives d'une fonction développable en série entière en 0 sont donc développables en série entière en 0 et leurs développements sont obtenus en dérivant successivement terme à terme le développement de la fonction.

### Proposition 54

Si  $f$  est une fonction développable en série entière en 0 sur  $I$  de développement  $\sum a_n t^n$ , alors  $f$  est continue sur  $I$  et si  $F$  est l'une de ses primitives sur  $I$ , alors  $F$  est développable en série entière en 0 et son développement est  $F(0) + \sum \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ .

**Exemple** La fonction  $x \mapsto \int_0^x \sin(t^2) dt$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est  $f'(x) = \sin(x^2)$ . En intégrant le développement de  $\sin(x^2)$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \sin(t^2) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}.$$

### 5.3 Méthode de l'équation différentielle

Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière et pour trouver son développement, il est souvent judicieux d'utiliser la méthode de l'équation différentielle. Cela consiste à :

- trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients polynomiaux, de préférence de petits degrés telle que la fonction  $f$  soit la solution d'un problème de Cauchy associé à cette équation,
- supposer que la fonction  $f$  est développable en série entière et en déduire son développement à l'aide de l'équation différentielle,
- étudier le rayon de convergence la série entière obtenue ; s'il est non nul, la somme de la série sera solution du problème de Cauchy sur l'intervalle de convergence et sera donc égale à  $f$  sur ce dernier.

Illustrons cette méthode avec la fonction  $f : t \mapsto \cos(\alpha \arcsin t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- L'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -1, 1[$  et vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$(1 - t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0. \quad (E)$$

L'application  $f$  est donc l'unique solution sur  $] -1, 1[$  du problème de Cauchy défini par l'équation (E) et la condition  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .

- Supposons que  $f$  soit la somme d'une série entière  $\sum a_n t^n$  sur un intervalle  $] -R, R[$  avec  $R \leq 1$ . Alors  $f'$  (resp.  $f''$ ) est la somme de la série entière  $\sum (n+1)a_{n+1}t^n$  (resp.  $\sum (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$ ) sur  $] -R, R[$ . On en déduit que la fonction  $t \mapsto (1 - t^2)f''(t) - tf'(t) + \alpha^2 f(t)$  est la somme de la série entière :

$$\sum \left( (n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n + \alpha^2)a_n \right) t^n.$$

sur  $] -R, R[$ . Or  $f$  étant solution de (E), l'unicité du développement en série entière assure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 - \alpha^2)a_n$$

La fonction  $f$  étant paire, tous les coefficients impairs sont nuls et par récurrence, en utilisant  $a_0 = f(0) = 1$ , on trouve :

$$a_{2p} = \frac{(-4)^p \alpha}{(2p!)} \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\alpha}{2} - p + 1 \right) \left( \frac{\alpha}{2} - p + 2 \right) \dots \left( \frac{\alpha}{2} + p - 2 \right) \left( \frac{\alpha}{2} + p - 1 \right)$$



- Dans le cas où  $\alpha$  est un nombre entier pair, les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang et  $f$  est polynomiale, ce qui s'explique par le fait que  $\cos(\alpha\theta)$  est un polynôme pair en  $\cos \theta$ , donc un polynôme en  $\sin \theta$ . Dans le cas contraire, la règle de d'Alembert montre que la série entière  $\sum a_{2n}t^{2n}$  a un rayon de convergence égale à 1.

Dans les deux cas, la fonction somme définie par cette série sur  $] -1, 1[$  est solution du problème de Cauchy cité ci-dessus et est donc égale à la fonction  $f$ .

**Remarque** On aurait pu trouver le développement en série entière de  $(1+t)^\alpha$  en utilisant cette méthode.

## EXERCICES

1. Soit  $d(n)$  le nombre de diviseurs de  $n \in \mathbb{N}$ . Trouver le rayon de convergence de la série entière  $\sum d(n)z^n$ .
2. Montrer que les séries  $\sum a_n z^n$  et  $\sum \frac{n}{n^2 + n - 2} a_n z^n$  ont même rayon de convergence.
3. Trouver les rayons de convergence des séries entières  $\sum a_n z^n$  pour :
  1.  $a_n$  est la somme des carrés des diviseurs de  $n$  ;
  2.  $a_n = 1$  si  $n$  est premier,  $a_n = 0$  sinon.
  3.  $a_n$  est le nombre de couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $x^2 + y^2 \leq n^2$  ;
  4.  $a_n = n^{(-1)^n}$  ;
  5.  $a_n = \frac{\text{ch } n}{n}$  ;
  6.  $a_n = \left( \frac{1}{1 + \sqrt{n}} \right)^n$ .
4. Soit  $\sum a_n$  une série divergente à termes réels strictement positifs, telle que, si  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $\frac{a_n}{S_n}$  tende vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Déterminer les rayons de convergence de  $\sum a_n z^n$  et  $\sum S_n z^n$ .
5. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles suivantes :
  1.  $\sum (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$  ;
  2.  $\sum (\text{ch } n) x^n$  ;
  3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$ .
6. Étudier la convergence et calculer la somme de la série  $\sum a_n z^n$ , où :
 
$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k \cdot k!.$$
7. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$ , où  $p_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  nombre premier.

8. Soit  $R$  le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ . Lui comparer les rayons de convergence des séries entières de termes généraux :

1.  $n^\alpha a_n z^n$ ,  $\alpha$  réel quelconque ;
2.  $a_n^2 z^n$  ;
3.  $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$  ;
4.  $a_n z^{2n}$  ;
5.  $a_n z^{n^2}$ .

9. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  tels que la série entière  $\sum a_n x^n$  converge, où  $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$ .

10. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de  $\sum a_n z^n$ , où  $a_n = \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2 \ln n}$ . Étudier la convergence aux bornes de l'intervalle  $] -R, R[$ .

11. Soit  $(a_n)$  une suite de réels positifs telle que la série entière  $\sum a_n z^n$  ait pour rayon de convergence  $R > 0$  et telle que  $\sum a_n R^n$  diverge. Montrer que la fonction  $f : ] -R, R[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  tend vers  $+\infty$  en  $R$ .

12. Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières, de sommes respectives  $f(z)$  et  $g(z)$ , telles que les  $b_n$  soient tous positifs, et  $a_n = o(b_n)$ .

1. On suppose de plus que le rayon de convergence de  $\sum b_n z^n$  est infini. Montrer que  $f(x) = o(g(x))$  si  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2. En supposant cette fois-ci que le rayon de convergence de  $\sum b_n z^n$  est  $R$  fini, et  $\sum b_n R^n$  diverge, comparer  $f$  et  $g$  au voisinage de  $R$  à gauche.
3. On remplace dans la question précédente l'hypothèse  $a_n = o(b_n)$  par  $a_n \sim b_n$ . Comparer les fonctions  $f$  et  $g$  au voisinage de  $R$  à gauche.
4. Application. Soit  $(a_n)$  une suite réelle convergente de limite  $a \neq 0$ . Trouver le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} z^n$ . Pour  $t \in ] -1, 1[$ , on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} t^n. \text{ Calculer } \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{f(t)}{\ln(1-t)}.$$

13. En utilisant les résultats de l'exercice 12, pour  $k$  entier positif donner un équivalent de  $f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$  lorsque  $x$  tend vers 1 dans  $]0, 1[$ .

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 1 \text{ dans } ]0, 1[.$$

14. Soit  $\alpha$  un entier strictement supérieur à 1. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum \frac{z^n}{(n!)^\alpha}$ . Montrer que sa somme  $f(z)$  vérifie  $|f(z)| = o\left(e^{\alpha|z|^{1/\alpha}}\right)$  si  $|z| \rightarrow \infty$ . On pourra utiliser l'exercice 12.

15. Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  la somme sur  $] -R, R[$  d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Montrer que, pour tout  $a \in ]0, R[$ , il existe des constantes  $A$  et  $\lambda$  positives telles que, pour tout  $p \geq 0$ , et tout  $x \in [-a, a]$ ,  $|f^{(p)}(x)| \leq A\lambda^p p!$ .

16. Montrer qu'une série entière qui converge uniformément sur le cercle unité converge uniformément sur le disque unité fermé.

17. 1. Soient  $(u_n)$  une suite réelle,  $N \in \mathbb{N}^*$ , et  $\varepsilon \geq 0$  tels que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_{n+1}| \leq \varepsilon|u_n| + (1 + \varepsilon)|u_{n-1}|$ . Alors le rayon de convergence de  $\sum u_n z^n$  est supérieur ou égal à  $\frac{1}{1 + \varepsilon}$ .

2. On se donne un couple  $(a, x)$  de  $\mathbb{R}^2$ . On définit une suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = x$ , et, pour  $n \geq 1$ ,  $(n + 1)u_{n+1} = xu_n - (a - 1 + n)u_{n-1}$ .

Montrer que la série entière  $\sum u_n z^n$  a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Calculer  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$  lorsque  $t$  est dans  $] -1, 1[$ .

## 18. Une application de la formule de Cauchy

Soient  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ , de rayon de convergence  $R > 0$ , et  $r \in ]0, R[$ . On rappelle que, pour tout entier  $n$ ,  $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$ .

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta.$$

1. On pose  $I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ . Montrer que  $I(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ ,

et que l'application  $r \mapsto I(r)$ , définie sur  $]0, R[$ , est continue, croissante et convexe.

2. Montrer que la fonction  $J$  définie sur  $] -\infty, \ln R[$  par  $J(x) = \ln I(e^x)$  est convexe.

19. Soient  $a$  et  $b$  deux réels quelconques.

1. Soit  $M$  et  $r$  deux réels strictement positifs. Pour tout  $x \in ]-r, r[$ , on pose :

$$\varphi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}. \text{ Montrer que l'équation différentielle :}$$

$$y'' - \varphi y = 0 \tag{1}$$

admet une solution  $g$  sur  $] -r, r[$  telle que  $g(0) = |a|$ ,  $g'(0) = |b|$ , développable en série entière, écrite  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ , de rayon de convergence supérieur ou égal à  $r$ . On pourra, pour cela, chercher une solution développable en série entière de :

$$\left(1 - \frac{x}{r}\right) y'' - M y = 0, \tag{2}$$

avec les mêmes conditions initiales

2. Soit  $q$  une fonction développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence  $R$ , et soient  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer qu'il existe  $f$  solution de :

$$y'' - qy = 0 \tag{3}$$

telle que  $f(0) = a$ ,  $f'(0) = b$  et développable en série entière, écrite

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n, \text{ au voisinage de } 0 \text{ avec un rayon de convergence } R' \geq R.$$

On pourra chercher une relation de récurrence vérifiée par une éventuelle suite  $(u_n)$  solution, et montrer que, pour des réels  $M$  et  $r$  convenables, la suite  $(v_n)$  de la question précédente vérifie  $|u_n| \leq v_n$ . C'est la *méthode des séries majorantes*.

20. Soient  $M > 0$ , et  $\mathcal{S}_M$  l'ensemble des fonctions complexes  $g$  développables en

série entière sur  $] -1, 1[$  telles que, si  $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(g)x^k$ , on ait, pour tout  $k$ ,

$$|a_k(g)| \leq M.$$

On considère  $g \in \mathcal{S}_M$ , et une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $\mathcal{S}_M$ .

1. Montrer que chaque suite  $(a_k(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a_k(g)$  si, et seulement si, la suite  $(g_n)$  converge simplement vers  $g$ .

2. Y a-t-il dans ce cas convergence uniforme ?

21. Pour  $x$  et  $t$  réels, on pose  $F(x, t) = \frac{\sin t + x \cos t}{\cos t - x \sin t}$ , lorsque le dénominateur ne s'annule pas.

1. Montrer qu'il existe des polynômes  $T_n(X) \in \mathbb{R}[X]$  tels que, pour tout  $x$  réel il existe  $\varepsilon > 0$  vérifiant :

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad F(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

2. En déduire que la fonction tangente est *analytique réelle* sur  $]-\pi/2, \pi/2[$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\varphi \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , il existe  $\eta > 0$  et une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence au moins  $\eta$  vérifiant :

$$\forall t \in ]-\eta, +\eta[, \quad \tan(\varphi + t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

22. Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$ . Montrer que  $f$  a une limite finie en  $+\infty$ .

23. Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^{*+}$ , telle que la fonction  $t \mapsto e^{|t|} f(t)$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(zt) f(t) dt$  est définie dans un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$ . Développer  $F$  en série entière au voisinage de 0, autrement dit montrer qu'il existe un disque ouvert centré en 0 et une série entière  $\sum a_n z^n$  dont la somme soit  $f$  sur ce disque ouvert. Exprimer son rayon de convergence à l'aide de l'ensemble  $\mathcal{A}$  des réels  $a \geq 0$  tels que la fonction  $t \mapsto e^{a|t|}$  soit intégrable.

24. Soit  $(a_n)$  une suite de réels décroissante et tendant vers 0.

1. Montrer que la série entière  $\sum a_n z^n$  converge uniformément sur

$$\mathcal{D} = \{z / |z| \leq 1 \text{ et } |z - 1| \geq r\},$$

où  $r$  est fixé dans  $]0, 1[$ .

2. La convergence est-elle uniforme sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1, privé de 1 ?

**25** On définit une suite réelle  $(g_n)$  par  $g_0 = 1$ , et,  $\forall n \geq 1$ ,  $ng_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k}{n-k}$ .

1. Montrer que, pour tout  $n$ ,  $0 < g_n \leq 1$ .

2. Si  $|z| < 1$ , on pose  $G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n z^n$ . Montrer qu'il existe une série entière  $\sum h_n z^n$ , de rayon de convergence au moins 1, dont la somme  $H$  vérifie, pour tout  $z$  de module inférieur à 1,  $G(z) = \exp(H(z))$ . On pourra fixer  $z$  et montrer que  $g(t) = G(tz)$  vérifie une équation différentielle linéaire simple.

3. Montrer que  $g_n = O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$ .

**26.** Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur le disque unité fermé de centre 0, note  $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ , somme sur le disque ouvert d'une série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

1. Montrer que  $\mathcal{A}$  est un anneau intègre.

2. On suppose que  $f \in \mathcal{A}$  est nulle sur le cercle unité. Montrer que  $f = 0$ .

3. Soit  $g \in \mathcal{A}$  nulle sur un arc de longueur non nulle du cercle unité. Montrer que  $g = 0$ .

**27.** Montrer que  $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + z \sin t}$  est définie et développable en série entière (voir la définition dans l'énoncé d'exercice 23) sur un disque de  $\mathbb{C}$  de centre 0 et de rayon supérieur à 1 dont on déterminera la valeur. Montrer que les coefficients  $a_n$  de ce développement sont rationnels.

**28** Développement en série entière de  $x \mapsto e^{\lambda \arcsin x}$ .

**29.** Soient  $E$  un espace de Banach complexe, et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $E$ . Soit aussi  $(\lambda_n)$  une suite de nombres complexes.

1. Montrer que le rayon de la plus grande boule  $B_0$  ouverte de  $\mathcal{L}(E)$  centrée en 0 et telle que, pour tout  $u \in B_0$ ,  $\sum \lambda_n u^n$  soit convergente est égal au rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum \lambda_n z^n$ .

2. L'ensemble  $\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{L}(E) / \sum \lambda_n u^n \text{ converge}\}$  est-il connexe par arcs ?

30. 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ , on a :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p P(p) = 0.$$

On pourra considérer l'endomorphisme  $\Delta$  de  $\mathbb{C}[X]$  défini par :

$$\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X).$$

2. En déduire l'identité d'ABEL, à savoir que pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  :

$$\sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (-1)^p (pz-x)^{p-1} (pz+y)^{n-p} = - \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} x^{n-1-r} y^r \quad (1)$$

Pour cela, on développera  $(pz-x)^{p-1} (pz+y)^{n-p}$  et on appliquera le résultat de la première question à une somme de polynômes de la forme :

$$H_{q,r}(T) = (-x)^q y^r \binom{T-1}{q} \binom{n-T}{r} (Tz)^{n-1-q-r},$$

où  $\binom{X}{q}$  est nul si  $q < 0$ , et  $X(X-1) \dots (X-q+1)/q!$  sinon.

3. Montrer que, pour tout réel  $x < \frac{1}{e}$ , il existe un unique réel  $t < \frac{1}{e}$  noté  $f(x)$ , tel que  $x = te^{-t}$ . Montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle :

$$\forall x < \frac{1}{e}, \quad f(x) = xf'(x) \cdot (1 - f(x)). \quad (2)$$

4. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n z^n$ , où  $a_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$ . Soit  $g$  la restriction de sa somme à  $] -R, R[$ . En appliquant la relation (1) à  $x = 0$ ,  $y = n$ , et  $z = -1$ , montrer que  $g$  vérifie l'équation (2). Comparer  $g$  à  $f$ .

### 31. Sommabilité au sens de Borel

Fixons une série entière  $\sum \beta_n z^n$  de rayon de convergence  $R$  non nul, éventuellement infini, telle que, pour tout  $n$ ,  $\beta_n > 0$ , et telle que  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n$  tende vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $R$  en restant strictement inférieur à  $R$ .

Si  $(a_n)$  est une suite complexe, on pose  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ .



1. Nous dirons que  $(a_n)$  est  $f$ -sommable lorsque le rayon de convergence de

$$\sum s_n \beta_n z^n \text{ est supérieur ou égal à } R, \text{ et que, notant } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \beta_n x^n,$$

$\frac{S(x)}{f(x)}$  admet une limite  $L$  lorsque  $x$  tend vers  $R$  en restant strictement inférieur à  $R$ . Le nombre  $L$  sera appelé la  $f$ -somme de  $(a_n)$ .

Montrer que si  $\sum a_n$  converge, la suite  $(a_n)$  est  $f$ -sommable, et

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

2. On suppose  $(a_n)$   $f$ -sommable, de  $f$ -somme  $L$ . On définit alors la fonction  $U$  sur  $] -R, R[$  par  $U(x) = S(x) - \int_0^x \frac{Sf'}{f}$ . Montrer que la fonction

$$G = \frac{Uf'}{f^2} \text{ admet une intégrale impropre sur } [0, R[, \text{ et } \int_0^R G = L.$$

3. Dans le cas particulier où  $R = +\infty$ , et  $f(x) = e^x$ , montrer que si  $(a_n)$  est  $f$ -sommable, la série  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini, et si pour

$$x \in \mathbb{R} \text{ on note } u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n, \text{ alors la } f\text{-somme de } (a_n) \text{ est égale à}$$

$$\text{l'intégrale impropre convergente } \int_0^{+\infty} e^{-t} u(t) dt.$$

### 32 Théorème d'Abel de convergence sur un secteur angulaire

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . On suppose qu'il existe un point  $z_0$  du cercle de convergence tel que la série  $\sum a_n z_0^n$  converge. Soient  $\theta_0$  un argument de  $z_0$ ,  $\alpha$  et  $\rho$  deux nombres réels tels que  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  et  $0 \leq \rho < 2R \cos \alpha$ . Montrer que la série converge uniformément dans le secteur circulaire  $S$  défini par :

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 - r e^{i\varphi}, \theta_0 - \alpha \leq \varphi \leq \theta_0 + \alpha, 0 \leq r \leq \rho\}.$$



**Troisième partie**

**Analyse 2**



## Chapitre 18

# Espaces préhilbertiens

Dans tout ce chapitre,  $E$  désigne un espace vectoriel réel ou complexe de dimension quelconque.

### 1. Espaces préhilbertiens

La notion de produit scalaire d'un espace vectoriel réel ne peut s'étendre sans modification au cas complexe ; une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  non nulle sur un tel espace ne peut, en effet, être positive puisque pour  $x$  vérifiant  $\varphi(x, x) \neq 0$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\varphi(e^{i\theta}x, e^{i\theta}x) = e^{i2\theta} \varphi(x, x) \in \mathbb{R}_-^*.$$

Son extension utilise la notion de forme sesquilinéaire que nous allons définir.

#### 1.1 Formes sesquilinéaires

##### Definitions

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels complexes.

##### Définition 1

On dit qu'une application  $\varphi : E \rightarrow F$  est *semi-linéaire* si l'on a :

$$\forall (\alpha, \beta, x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times F \times F, \quad \varphi(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\varphi(x) + \bar{\beta}\varphi(y)$$

**Définition 2**

On appelle forme *sesquilinéaire* sur  $E$  toute application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  telle que l'application  $y \mapsto \varphi(x, y)$  soit linéaire pour tout  $x$  et l'application  $x \mapsto \varphi(x, y)$  semi-linéaire pour tout  $y$ .

On calcule avec les formes sesquilinéaires comme on le fait avec les formes bilinéaires à cette seule différence qu'il faut conjuguer les scalaires provenant des arguments situés à gauche. On obtient ainsi le développement :

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^q \beta_j y_j \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \overline{\alpha_i} \beta_j \varphi(x_i, y_j).$$

*Exemple* Soit  $E$  un espace vectoriel complexe muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Pour toute matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $M_n(\mathbb{C})$ , l'application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \overline{\alpha_i} a_{i,j} \beta_j = {}^t \overline{X} A Y$$

où  $X = (\alpha_i)$  et  $Y = (\beta_i)$  sont les colonnes des coordonnées de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}$  est une forme sesquilinéaire sur  $E$  (la conjuguée  $\overline{M}$  d'une matrice complexe est la matrice de mêmes dimensions dont les coefficients sont les conjugués de ceux de  $M$ ).

Le développement indiqué dans la remarque ci-dessus montre réciproquement que toute forme sesquilinéaire  $\varphi$  est de la forme précédente pour la matrice  $(\varphi(e_i, e_j))$ .

**Forme sesquilinéaire hermitienne définie positive****Définition 3**

On dit qu'une forme sesquilinéaire  $\varphi$  sur  $E$  est *hermitienne* si l'on a :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

**Exemples**

1. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . La forme sesquilinéaire :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \overline{\alpha_i} a_{i,j} \beta_j = {}^t \overline{X} A Y$$

de matrice  $A = (a_{i,j})$  dans  $\mathcal{B}$  est hermitienne si, et seulement si,  $A = {}^t \overline{A}$ .

En effet, si  $\varphi$  est hermitienne, on a  $\varphi(e_j, e_i) = \overline{\varphi(e_i, e_j)}$  pour tout  $(i, j)$  c'est-à-dire  $A = {}^t \overline{A}$ . Réciproquement, l'égalité  $A = {}^t \overline{A}$  entraîne :

$${}^t \overline{Y} A X = {}^t \overline{Y} {}^t \overline{A} X = {}^t ({}^t X \overline{A Y}) = {}^t X \overline{A Y} = {}^t \overline{X} A Y$$

2. Les propriétés de l'intégrale montrent immédiatement que l'application :

$$(f, g) \mapsto (f | g) = \int_{[a,b]} \bar{f}g$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne sur l'espace  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$  des applications continues par morceaux du segment  $[a, b]$  vers  $\mathbb{C}$ .

**Définition 4**

On dit qu'une forme sesquilinéaire hermitienne  $\varphi$  sur  $E$  est *définie positive* si elle vérifie les deux axiomes suivants :

- $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{axiome de positivité})$
- $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0 \quad (\text{axiome de séparation}).$

**Remarque** Rappelons que l'on dit qu'un nombre complexe  $z$  est positif ce que l'on écrit  $z \geq 0$ , si l'on a  $z \in \mathbb{R}_+$ .

*Exemples*

1. Soit  $E$  un espace vectoriel complexe muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . La forme sesquilinéaire hermitienne :

$$\varphi_{\mathcal{B}}(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_i = {}^t \bar{X}Y$$

de matrice l'identité  $I_n$  dans  $\mathcal{B}$  est définie positive.

En effet, on a évidemment  $\varphi_{\mathcal{B}}(x, x) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \geq 0$  pour tout  $x$ . De plus, la relation  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 0$  entraîne  $|\alpha_i|^2 = 0$  pour tout  $i$ , soit  $x = 0$ .

Ainsi, il existe une forme sesquilinéaire définie positive sur tout espace vectoriel complexe de dimension finie.

2. La forme sesquilinéaire hermitienne définie ci-dessus sur  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$  est positive. Elle ne vérifie pas l'axiome de séparation puisque  $\int_{[a,b]} |f|^2 = 0$  si et seulement si,  $f$  est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points. Sa restriction à l'espace  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$  des applications continues est définie positive.

## 1.2 Produit scalaire, espaces préhilbertiens

**Définition 5**

On appelle *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel ou complexe  $E$  toute forme respectivement bilinéaire symétrique définie positive ou sesquilinéaire hermitienne définie positive sur  $E$ .

*Exemple* Si  $\varphi$  est un produit scalaire sur l'espace vectoriel complexe  $E$ , l'application  $(x, y) \mapsto \operatorname{Re} \varphi(x, y)$  est un produit scalaire sur l'espace réel  $E_{\mathbb{R}}$  obtenu par restriction de la multiplication externe aux éléments de  $\mathbb{R}$ .

### Définition 6

On appelle espace *préhilbertien* réel ou complexe tout couple  $(E, \varphi)$  formé d'un espace vectoriel respectivement réel ou complexe et d'un produit scalaire sur  $E$ .

Tout sous-espace d'un espace préhilbertien est aussi un espace préhilbertien pour le produit scalaire induit.

### Définition 7

On appelle espace *euclidien* ou *hermitien* tout espace préhilbertien de dimension finie respectivement réel ou complexe.

**Notation** On note en général  $(x | y)$ , ou  $(x | y)_E$  s'il faut préciser l'espace le produit scalaire d'un espace préhilbertien  $E$  et, alors, simplement  $E$  le couple  $(E, (x | y))$ . Cette notation provient de la mécanique quantique et est due à Dirac.

On utilise aussi la notation géométrique  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  lorsque l'on considère un espace euclidien.

Dans ce qui suit, nous exposerons les propriétés des espaces préhilbertiens sans préciser le corps de base sauf si cela est nécessaire.

Pour unifier la présentation des exemples nous considérerons que  $\mathbb{K}$ , qui désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , est muni des applications conjugaison partie réelle et module, restrictions de celles de  $\mathbb{C}$ . On reviendra alors au cas réel en utilisant  $\bar{\alpha} = \alpha$ ,  $\operatorname{Re} \alpha = \alpha$  et  $|\alpha|^2 = \alpha^2$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Exemples classiques d'espaces préhilbertiens

Nous avons vu, dans le chapitre sur les formes quadratiques dans le cas réel et dans le paragraphe précédent dans le cas complexe, que tout espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  possède un produit scalaire. Plus précisément, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , l'application :

$$(x, y) \mapsto (x | y)_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_i$$

où  $(\alpha_i)$  et  $(\beta_i)$  sont les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}$  est un produit scalaire sur  $E$ .



On appelle *produit scalaire canonique* de  $\mathbf{K}^n$ , le produit scalaire :

$$(X, Y) \mapsto (X | Y) = {}^t \bar{X} Y = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_i$$

où  $X = (\alpha_i)$  et  $Y = (\beta_i)$  de matrice  $I_n$  dans la base canonique. On appelle alors structure canonique d'espace préhilbertien sur  $\mathbf{K}^n$ , l'espace préhilbertien  $\mathbf{K}^n$  muni du produit scalaire canonique.

On trouve en analyse de nombreux exemples d'espaces préhilbertiens de dimension infinie. Ils proviennent des notions de familles de carré sommable ou de fonctions de carré intégrable.

Soit  $I$  un ensemble quelconque. Nous avons vu dans le chapitre consacré aux familles sommables les deux points suivants.

1. L'ensemble  $\ell^2(I, \mathbf{K})$  des familles  $x = (x_i)_{i \in I}$  de carré sommable (telle que  $(|x_i|^2)_{i \in I}$  soit sommable) est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}^I$ .
2. Pour tout couple  $(x, y)$  de  $\ell^2(I, \mathbf{K})^2$ , la famille  $(\bar{x}_i y_i)_{i \in I}$  est sommable.

L'application :

$$(x, y) \mapsto (x | y) = \sum_{i \in I} \bar{x}_i y_i$$

est alors un produit scalaire. On appelle *espace préhilbertien des familles indexées par  $I$  de carré sommable*, et on note  $\ell^2(I, \mathbf{K})$ , l'espace  $\ell^2(I, \mathbf{K})$  muni de  $(x | y)$ . On utilise particulièrement  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbf{K})$ . Nous utiliserons  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  dans la théorie des séries de Fourier.

On obtient des espaces préhilbertiens fonctionnels de façon analogue.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  de longueur strictement positive et  $p$  une application, appelée *poids*, de  $I$  vers  $\mathbb{R}_+^*$ . Les théorèmes classiques sur les applications de carré sommable que nous avons vu dans le chapitre consacré à l'intégration sur un intervalle quelconque montrent immédiatement les deux points suivants.

1. L'ensemble  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbf{K})$  des applications  $f$  de  $\mathcal{C}(I, \mathbf{K})$  telles que  $|f| \sqrt{p}$  soit de carré intégrable (c'est-à-dire  $|f|^2 p$  soit intégrable) est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(I, \mathbf{K})$ .
2. Pour tout couple  $(f, g)$  de  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbf{K})^2$ , l'application  $\bar{f} g p$  est intégrable.

On vérifie alors immédiatement que l'application :

$$(f, g) \mapsto (f | g) = \int_I \bar{f} g p$$

est un produit scalaire. On note alors  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbf{K})$ , l'espace préhilbertien  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbf{K})$  muni de  $(f | g)$ . L'espace  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbf{K})$  est égal à  $\mathcal{C}(I, \mathbf{K})$  lorsque  $I$  est un segment, strictement inclus dans  $\mathcal{C}(I, \mathbf{K})$  sinon.

On obtient de nombreux exemples classiques d'espaces préhilbertiens de fonctions suivant les choix de  $I$  et  $p$ .

### Exemples

1. Espace de Legendre  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto \int_{[-1, 1]} fg.$$

2. Espace de Hermite  $\mathcal{H}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  des applications continues  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  telles que  $|f(x)|e^{-x^2/2}$  soit de carré intégrable muni du produit scalaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)e^{-x^2} dx.$$

Nous verrons d'autres exemples d'espaces préhilbertiens dans le chapitre consacré aux séries de Fourier.

## 1.3 Norme

Soit  $E$ , un espace préhilbertien.

Pour tout  $x \in E$ , on a  $(x | x) \geq 0$ . Cela conduit à la définition suivante :

### Définition 8

On appelle *norme* d'un vecteur  $x$  de  $E$  le réel :

$$\|x\| = \sqrt{(x | x)}.$$

On dit que  $x$  est *normé* ou *unitaire* lorsque  $\|x\| = 1$ .

### Remarques

- On évidemment  $\|x\| = 0$  si, et seulement si  $x = 0$  et :

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x | \alpha x)} = \sqrt{\overline{\alpha}\alpha (x | x)} = |\alpha| \|x\|$$

pour tout  $\alpha \in \mathbf{K}$ .

- On appelle *sphère unité* de  $E$  l'ensemble  $S(E)$  de ses vecteurs unitaires. Lorsque  $E$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , tout vecteur  $x \in E$  peut s'écrire  $\alpha u$  avec  $(\alpha, u) \in \mathbb{R}_+ \times S(E)$ . Cette écriture est unique lorsque  $x$  est non nul ; on a alors  $\alpha = \|x\|$  et  $u = \frac{1}{\|x\|}x$ .

**Identités de polarisation**

Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$\begin{aligned} (x + y | x + y) &= (x | x)^2 + (y | y)^2 + (x | y) + (y | x) \\ &= (x | x)^2 + (y | y)^2 + 2 \operatorname{Re}(x | y) \end{aligned}$$

lorsque  $E$  est complexe puisque  $(y | x) = \overline{(x | y)}$  et :

$$(x + y | x + y) = (x | x)^2 + (y | y)^2 + 2(x | y)$$

lorsqu'il est réel. On en déduit :

**Proposition 1 (cas complexe)**

Si  $E$  est un espace préhilbertien complexe, on a pour tout  $(x, y) \in E^2$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x | y) &= \frac{1}{2} \left( \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) \end{aligned}$$

et :  $(x | y) = \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i \|x + iy\|^2 + i \|x - iy\|^2 \right).$

**Démonstration** Les relations :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x | y) &= \frac{1}{2} \left( \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) \end{aligned}$$

proviennent de ce que nous avons remarqué ci-dessus. La dernière de la différence des deux précédentes.

L'égalité  $\operatorname{Im}(x | y) = \operatorname{Re}(-i(x | y)) = -\operatorname{Re}(x | iy)$  montre que l'on a :

$$\operatorname{Im}(x | y) = -\frac{1}{4} \left( \|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 \right).$$

On obtient alors la dernière relation en écrivant :

$$(x | y) = \operatorname{Re}(x | y) + i \operatorname{Im}(x | y).$$

□

**Proposition 2 (cas réel)**

Si  $E$  est un espace préhilbertien réel, on a pour tout  $(x, y) \in E^2$  :

$$\begin{aligned} (x | y) &= \frac{1}{2} \left( \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right). \end{aligned}$$

**Remarques**

1. On a dans tous les cas l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

dont l'interprétation en géométrie euclidienne est bien connue. Un théorème de J. von Neumann montre que réciproquement toute norme d'un espace vectoriel vérifiant cette relation provient d'un produit scalaire.

2. Les identités de polarisation montrent qu'une application linéaire d'un espace préhilbertien  $E$  dans un autre est une isométrie si, et seulement si, elle conserve le produit scalaire.

**Inégalités de Cauchy-Schwarz****Proposition 3 (cas complexe)**

Si  $E$  est un espace préhilbertien complexe, on a pour tout  $(x, y) \in E^2$  :

- $|\operatorname{Re}(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$  avec égalité si, et seulement si,  $(x, y)$  est lié sur  $\mathbb{R}$ ,
- $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$  avec égalité si, et seulement si,  $(x, y)$  est lié sur  $\mathbb{C}$

**Démonstration** La situation  $y = 0$  étant triviale, on supposera que  $y$  est non nul.

► Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(\lambda y + x | \lambda y + x) = \lambda^2 (y | y) + 2\lambda \operatorname{Re}(x | y) + (x | x) \geq 0.$$

On obtient  $|\operatorname{Re}(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$  en écrivant que le discriminant du trinôme ci-dessus est négatif. L'égalité dans cette relation montre alors qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $(\lambda y + x | \lambda y + x)$  soit nul, c'est-à-dire  $\lambda y + x = 0$ . La réciproque est claire.

► Le nombre complexe  $(x | y)$  peut s'écrire  $|(x | y)| e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . On a alors :

$$|(x | y)| = (e^{i\theta} x | y),$$

soit  $|(x | y)| = \operatorname{Re}(e^{i\theta} x | y)$  et  $\|e^{i\theta} x\| = \|x\|$ . L'inégalité du point précédent fournit la relation :

$$|(x | y)| = \operatorname{Re}(e^{i\theta} x | y) \leq \|e^{i\theta} x\| \|y\| = \|x\| \|y\|.$$

L'égalité dans la relation précédente entraîne  $\operatorname{Re}(e^{i\theta} x | y) = \|e^{i\theta} x\| \|y\|$ . Il existe alors  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda y + e^{i\theta} x = 0$ , ce qui prouve que  $(x, y)$  est lié sur  $\mathbb{C}$ . La réciproque est claire. □

**Proposition 4 (cas réel)**

Si  $E$  est un espace préhilbertien réel, on a pour tout  $(x, y) \in E^2$  :

$$\left| (x \mid y) \right| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si, et seulement si, le couple  $(x, y)$  est lié.

**Remarque** Les démonstrations des inégalité de Cauchy-Schwarz n'utilisent que la positivité de la forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne considérée. L'axiome de séparation n'intervient que pour préciser le cas d'égalité.

**Proposition 5**

L'application  $x \mapsto \|x\|$  est une norme sur  $E$ . On l'appelle la *norme euclidienne* de l'espace préhilbertien  $E$ .

**Démonstration** Nous avons déjà remarqué que  $x \mapsto \|x\|$  est une application de  $E$  vers  $\mathbb{R}_+$  vérifiant les axiomes de séparation et d'homogénéité.

Soit  $(x, y) \in E^2$ . On obtient par développement :

$$\left( \|x\| + \|y\| \right)^2 - \|x + y\|^2 = 2 \left( \|x\| \|y\| - \operatorname{Re}(x \mid y) \right)$$

et  $\left( \|x\| + \|y\| \right)^2 - \|x + y\|^2 \geq 0$  par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

**Remarque** L'égalité  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  est équivalente, en supposant  $x \neq 0$ , à l'existence de  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $y = \lambda x$ . Elle implique en effet la relation  $\operatorname{Re}(x \mid y) = \|x\| \|y\|$ , ce qui entraîne  $y = \lambda x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Par substitution, on voit que  $\lambda$  est positif. La réciproque est claire.

On appelle *distance euclidienne* de  $E$ , et on note  $d$ , la distance associée à la norme euclidienne de  $E$ . On a ainsi :

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y - x \mid y - x)}.$$

L'espace  $E$  muni de la norme euclidienne est un espace vectoriel normé auquel s'appliquent évidemment les notions développées dans la théorie de ces espaces.

**Proposition 6**

- L'application produit scalaire  $(x, y) \mapsto (x \mid y)$  est une application bilipschitzienne de  $E^2$  vers  $\mathbb{K}$ .
- Pour tout  $x$  de  $E$ , la forme linéaire  $y \mapsto (x \mid y)$  sur  $E$  est lipschitzienne de norme  $\|x\|$ .

**Démonstration**

► Cela découle immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| (x | y) \right| \leq \|x\| \|y\|.$$

► L'inégalité de Cauchy-Schwarz  $\left| (x | y) \right| \leq \|x\| \|y\|$  montre que la forme linéaire  $y \mapsto (x | y)$  est lipschitzienne de norme subordonnée inférieure ou égale à  $\|x\|$ . La relation  $(x | x) = \|x\|^2$  prouve que cette norme subordonnée vaut exactement  $\|x\|$   $\square$

**Définition 9**

On appelle *espace de Hilbert* tout espace préhilbertien complet.

La théorie des espaces vectoriels normés de dimension finie prouve alors la proposition suivante :

**Proposition 7**

Si  $E$  est un espace euclidien ou hermitien, alors :

1.  $E$  est complet,
2. les parties compactes de  $E$  sont les parties fermées bornées.

La proposition précédente montre que tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. Ce n'est plus le cas en dimension infinie. Nous avons vu dans le chapitre «Espaces vectoriels normés et espaces métriques : théorèmes fondamentaux» que  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  est un espace de Hilbert mais que l'espace  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  ne l'est pas.

**1.4 Orthogonalité**

Soit  $E$  un espace préhilbertien.

**Vecteurs orthogonaux****Définition 10**

On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont *orthogonaux*, ce que l'on note  $x \perp y$ , lorsque  $(x | y) = 0$ .

**Remarques**

- La symétrie de la définition précédente est justifiée par la relation  $(y | x) = \overline{(x | y)}$  dans le cas complexe et  $(y | x) = (x | y)$  dans le cas réel.
- Un vecteur est orthogonal à lui-même si, et seulement si, il est nul puisque

$x \perp x$  équivaut à  $(x | x) = 0$ .

- On dit que deux parties  $X$  et  $Y$  de  $E$  sont *orthogonales*, ce que l'on note  $X \perp Y$ , lorsque l'on a :

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \quad x \perp y.$$

**Définition 11**

On appelle *orthogonal* d'une partie  $X$  de  $E$  l'ensemble :

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X, \quad x \perp y\}.$$

**Remarques**

- On appelle orthogonal d'un vecteur  $x$ , et on note  $x^\perp$ , l'ensemble  $\{x\}^\perp$ . Comme noyau de la forme linéaire continue  $y \mapsto (x | y)$ , c'est un hyperplan ferme lorsque  $x$  est non nul, l'espace  $E$  tout entier sinon.
- La relation  $X \perp Y$  est équivalente à  $X \subset Y^\perp$  ou  $Y \subset X^\perp$ .
- On a  $X^\perp = (\text{Vect } X)^\perp$  par l'équivalence :  

$$x \in X^\perp \iff X \subset x^\perp \iff \text{Vect } X \subset x^\perp \iff x \in (\text{Vect } X)^\perp.$$
- On a évidemment  $\{0\}^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0\}$  puisque seul le vecteur nul est orthogonal à lui-même.

**Proposition 8**

Pour toute partie  $X$  de  $E$ , on a :

1.  $X^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  ;
2.  $X^\perp$  est égal à l'orthogonal  $(\text{Adh } X)^\perp$  de l'adhérence de  $X$ .

**Démonstration**

1. L'ensemble  $X^\perp$  est un sous-espace fermé de  $E$  comme intersection des sous-espaces fermés  $x^\perp$  lorsque  $x$  parcourt  $X$ .
2. L'inclusion  $X \subset \text{Adh } X$  montre que l'on a  $(\text{Adh } X)^\perp \subset X^\perp$ . Soit réciproquement  $x \in X^\perp$ . L'hyperplan fermé  $x^\perp$  contient  $X$ , il contient donc  $\text{Adh } X$ . On a donc  $x \in (\text{Adh } X)^\perp$ . □

**Familles orthogonales, familles orthonormées**

**Définition 12**

- Une famille de vecteurs est dite *orthogonale* lorsqu'elle est formée de vecteurs deux à deux orthogonaux.
- Une famille de vecteurs est dite *orthonormée*, ou *orthonormale*, lorsqu'elle est formée de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

**Remarque** Une famille  $(e_i)$  est orthonormée si, et seulement si, on a  $(e_i | e_j) = \delta_{i,j}$  pour tout  $(i, j)$ .

### Proposition 9 (Théorème de Pythagore)

Si  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille orthogonale d'éléments de  $E$ , on a :

$$\|x_1 + \dots + x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_p\|^2.$$

**Démonstration** On a en effet :

$$\|x_1 + \dots + x_p\|^2 = \sum_{i,j=1}^p (x_i | x_j) = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_p\|^2$$

puisque  $(x_i | x_j) = 0$  pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ . □

### Remarques

- Deux vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace préhilbertien réel sont orthogonaux si, et seulement si, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La relation  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y)$  montre en effet que l'égalité ci-dessus est équivalente à  $(x | y) = 0$ .

- Ce résultat est faux dans un espace préhilbertien complexe. On a en effet :

$$\|1 + i\|^2 = \|1\|^2 + \|i\|^2$$

dans l'espace hermitien  $(\mathbb{C}^1, (x | y))$  bien que  $(1 | i) = i$  ne soit pas nul.

### Proposition 10

Soient  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs non nuls et  $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$ .

- Si  $(x_1, \dots, x_p)$  est orthogonale, on a :

$$\forall i, \quad \alpha_i = \frac{(x_i | x)}{(x_i | x_i)}.$$

- Si  $(x_1, \dots, x_p)$  est orthonormée, on a :

$$\forall i, \quad \alpha_i = (x_i | x).$$

### Démonstration

► On a en effet :

$$(x_i | x) = \sum_{j=1}^p \alpha_j (x_i | x_j) = \alpha_i (x_i | x_i)$$

puisque  $(x_i | x_j) = 0$  pour tout  $j \neq i$  et  $(x_i | x_i) \neq 0$ .

► La relation provient de  $(x_i | x_i) = 1$ . □



**Corollaire 11**

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

**Démonstration** Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  la famille orthogonale considérée

Si  $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0$ , on obtient .

$$\forall i, \quad \alpha_i = \frac{(x_i | x)}{(x_i | x_i)} = 0.$$

□

**Théorème d'orthonormalisation de Schmidt**

Dans ce qui suit,  $N$  désigne un intervalle d'entiers de la forme  $[[0, p]]$  ou l'ensemble  $\mathbb{N}$ .

**Théorème 12**

Si  $(x_n)_{n \in N}$  une famille libre d'un espace préhilbertien il existe une et une seule famille orthonormée  $(e_n)_{n \in N}$  telle que :

$$\forall n \in N, \quad \text{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \text{Vect}(x_0, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad (e_n | x_n) \in \mathbb{R}_+^*.$$

On dit alors que la famille  $(e_n)_{n \in N}$  est l'orthonormalisée de  $(x_n)_{n \in N}$ .

**Démonstration** Nous supposons que  $E$  est un espace préhilbertien complexe. Le cas réel est analogue.

On construit par récurrence une suite  $(e_n)_{n \in N}$  vérifiant les conditions du théorème

► On vérifie immédiatement que  $e_0 = \frac{1}{\|x_0\|} x_0$  convient

► Supposons construit  $(e_0, \dots, e_n)$ .

Le vecteur :

$$e'_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=0}^n (e_k | x_{n+1}) e_k$$

est non nul puisque  $x_{n+1}$  n'appartient pas au sous-espace :

$$\text{Vect}(x_0, \dots, x_n) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n).$$

Il vérifie pour tout  $\ell \leq n$

$$(e_\ell | e'_{n+1}) = (e_\ell | x_{n+1}) - \sum_{k=0}^n (e_k | x_{n+1}) (e_\ell | e_k) = 0$$

puisque  $(e_\ell | e_k) = \delta_{\ell,k}$  pour tout  $k \leq n - 1$ .

Posons alors  $e_{n+1} = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|} e'_{n+1}$ . La famille  $(e_0, \dots, e_{n+1})$  est orthonormée. On a de plus :

$$(e_{n+1} | x_{n+1}) = \left( (e_{n+1} | e'_{n+1}) + \sum_{k=0}^n (e_k | x_{n+1}) e_k \right) = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|} > 0$$

et : 
$$\text{Vect}(e_0, \dots, e_{n+1}) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n, x_{n+1}) = \text{Vect}(x_0, \dots, x_{n+1}).$$

On montre par récurrence que toute suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les mêmes conditions est égale à  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$

► L'égalité  $\text{Vect}(f_0) = \text{Vect}(e_0)$  permet d'écrire :

$$f_0 = \alpha_0 e_0.$$

Les vecteurs étant normés, on a  $|\alpha_0| = 1$ . Comme de plus  $(e_0 | x_0)$  et  $(f_0 | x_0)$  sont positifs, la relation :

$$(f_0 | x_0) = \overline{\alpha_0} (e_0 | x_0)$$

montre que  $\alpha_0$  vaut 1. On a donc  $f_0 = e_0$ .

► Supposons  $(f_0, \dots, f_n) = (e_0, \dots, e_n)$ . L'égalité :

$$\text{Vect}(f_0, \dots, f_{n+1}) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_{n+1})$$

permet d'écrire  $f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k e_k$ . On a alors  $\alpha_k = (e_k | f_{n+1}) = (f_k | f_{n+1}) = 0$  pour

tout  $k \leq n$ . Cela prouve  $f_{n+1} = \alpha_{n+1} e_{n+1}$ . Les vecteurs étant normés, il vient  $|\alpha_{n+1}| = 1$ . Comme de plus  $(e_{n+1} | x_{n+1})$  et  $(f_{n+1} | x_{n+1})$  sont positifs, la relation :

$$(f_{n+1} | x_{n+1}) = \overline{\alpha_{n+1}} (e_{n+1} | x_{n+1})$$

montre comme ci-dessus que  $\alpha_{n+1}$  vaut 1. On a donc  $f_{n+1} = e_{n+1}$ . □

Dans les conditions du théorème, la famille  $(e_0, \dots, e_n)$  est une base orthonormée du sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(x_0, \dots, x_n)$  dans laquelle la matrice de  $(x_0, \dots, x_n)$  est triangulaire supérieure à diagonale positive. Comme la matrice inverse est de la même forme, on obtient :

$$e_n = \alpha_{n,0} x_0 + \dots + \alpha_{n,n} e_n \quad \text{avec} \quad \alpha_{n,n} > 0$$

et :

$$x_n = \beta_{n,0} e_0 + \dots + \beta_{n,n} e_n \quad \text{avec} \quad \beta_{n,n} > 0$$

pour tout  $n$ .

La démonstration du théorème fournit un algorithme de construction de la famille orthonormalisée d'une famille libre qui peut aisément s'écrire dans un langage informatique.

*Exemple* Dans de nombreux exemples d'espaces préhilbertiens fonctionnels  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbb{K})$  associés à la donnée d'un intervalle  $I$  et d'un poids  $p$ , l'espace vectoriel  $\mathbb{K}[x]$  des polynômes (plus précisément des applications polynomiales de  $I$  vers  $\mathbb{K}$ ) est inclus dans  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbb{K})$ .

Le théorème de Schmidt nous fournit alors par orthonormalisation de  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite orthonormée  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbb{R})$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Vect}(q_0, \dots, q_n) = \text{Vect}(x^0, \dots, x^n) \quad \text{et} \quad (q_n | x^n) \in \mathbb{R}_+^*.$$

Chaque application  $q_n$  est de la forme

$$q_n = \alpha_{n,0} + \dots + \alpha_{n,n}x^n \quad \text{avec} \quad \alpha_{n,n} > 0$$

par ce qui précède. C'est donc un polynôme de degré  $n$  dont le coefficient dominant est strictement positif.

La famille orthonormée  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'appelle la suite des polynômes *orthonormés* de  $\mathcal{L}_p^2(I, \mathbb{C})$ . Elle engendre le sous-espace  $\mathbb{R}[x]$ .

### Famille de sous-espaces orthogonaux

#### Définition 13

On dit qu'une famille  $(E_1, \dots, E_p)$  de sous-espaces vectoriels de  $E$  est *orthogonale* si elle est formée de sous-espaces deux à deux orthogonaux.

#### Proposition 13

Toute famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de  $E$  est en somme directe.

**Démonstration** Soit  $(E_1, \dots, E_p)$  une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Si  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  vérifie  $x_1 + \dots + x_p = 0$ , on a :

$$\|x_1\|^2 + \dots + \|x_p\|^2 = \|x_1 + \dots + x_p\|^2 = 0$$

par la relation de Pythagore. Cela montre que  $x_i$  est nul pour tout  $i$ . □

#### Définition 14

Soit  $(E_1, \dots, E_p)$  une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- La somme des sous-espaces de  $(E_1, \dots, E_p)$ , qui est directe par la proposition précédente, s'appelle la *somme directe orthogonale* de  $(E_1, \dots, E_p)$ .
- On la note, pour marquer l'orthogonalité de la famille :

$$F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_p.$$

### Supplémentaire orthogonal

#### Définition 15

On dit que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels *supplémentaires orthogonaux* de  $E$  si l'on a :

$$F \overset{\perp}{\oplus} G = E.$$

**Proposition 14**

Un sous-espace  $F$  de  $E$  possède un supplémentaire orthogonal si et seulement si :

$$F + F^\perp = E.$$

Dans ces conditions,  $F^\perp$  est le seul supplémentaire orthogonal de  $F$  et  $(F^\perp)^\perp = F$ .

**Démonstration** Si  $G$  est un sous-espace vectoriel tel que  $F \oplus G = E$ , on a  $G \subset F^\perp$  donc  $F + F^\perp = E$ . On obtient la réciproque en remarquant que  $(F, F^\perp)$  étant en somme directe,  $F + F^\perp = E$  entraîne que  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires

Si  $G$  est un sous-espace vectoriel tel que  $F \oplus G = E$ , nous avons, c'est le point précédent,  $G \subset F^\perp$ . Soit alors  $x \in F^\perp$ . Il existe  $(f, g)$  de  $F \times G$  tel que  $x = f + g$ . On a alors

$$(x | f) = (f | f) + (g | f) = (f | f)$$

et, par la relation  $(x | f) = 0$ , l'égalité  $f = 0$ . Cela prouve  $F^\perp \subset G$  et, finalement  $G = F^\perp$ . Comme  $F^\perp \oplus F = E$ , on a par symétrie  $F = (F^\perp)^\perp$ .  $\square$

**Corollaire 15**

Tout sous-espace possédant un supplémentaire orthogonal est fermé.

**Démonstration** On sait, en effet, que  $(F^\perp)^\perp$  est fermé  $\square$

Comme le montre le deuxième point de l'exemple suivant, le corollaire précédent n'admet pas de réciproque. Un théorème de F. Riesz montre néanmoins que tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert possède un supplémentaire orthogonal.

**Exemples**

1. On se place dans l'espace préhilbertien  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ . On note  $e_n$  la suite  $(\delta_{n,k})_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{F}$  le sous-espace engendré par ces éléments. Il s'agit de l'ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. La suite  $s = \left(\frac{1}{k+1}\right)_k$  appartient à  $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$  puisque la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$  converge. Elle n'appartient évidemment pas à  $\mathcal{F}$ .

Le sous-espace  $\mathcal{F}$  n'est pas fermé dans  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  puisqu'il ne contient pas la limite  $s$  de la suite :

$$\left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} e_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}.$$

Il ne possède donc pas de supplémentaire orthogonal par le corollaire précédent. On retrouve aisément ce résultat en remarquant que le sous-espace orthogonal de  $\mathcal{F}$ , l'ensemble des éléments  $x = \left(x(k)\right)_k$  de  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  vérifiant :

$$(e_n | x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{k,n} x(k) = x(n) = 0$$

pour tout  $n$ , est nul. On a donc :

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp = \mathcal{F} \subsetneq \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}).$$

2. Considérons maintenant le sous-espace vectoriel  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{F}$  formé des éléments  $x$  vérifiant  $(s | x) = 0$ .

Le sous-espace  $\mathcal{H}$  est ferme comme noyau de la restriction à  $\mathcal{F}$  de l'application continue  $x \mapsto (s | x)$ . Il est différent de  $\mathcal{F}$  puisqu'il ne contient pas  $e_0$ .

Le sous-espace  $\mathcal{H}$  contient les vecteurs  $h_n = e_0 - (n + 1)e_n$  pour tout  $n$ . Un élément  $x$  de  $\mathcal{F}$  orthogonal à  $\mathcal{H}$ , vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (h_n | x) = x(0) - (n + 1)x(n) = 0,$$

est de la forme :

$$x = \left(\frac{x(0)}{n + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Comme ses composantes sont nulles à partir d'un certain rang, on a  $x = 0$ . L'orthogonal de  $\mathcal{H}$  est donc nul et  $\mathcal{H}$  n'a pas de supplémentaire orthogonal dans  $\mathcal{F}$ .

### Projecteurs orthogonaux

#### Définition 16

On appelle *projecteur orthogonal* de  $E$  toute projection sur un sous-espace possédant un supplémentaire orthogonal, parallèlement à son supplémentaire orthogonal.

On appelle, de même, *symétrie orthogonale* de  $E$  toute symétrie par rapport à un sous-espace possédant un supplémentaire orthogonal, parallèlement à son supplémentaire orthogonal.

#### Définition 17

On appelle famille des projecteurs orthogonaux associés à une décomposition de  $F$  en somme directe orthogonale la famille des projecteurs de cette décomposition.

**Proposition 16**

Un projecteur  $p$  de  $E$  est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est 1-lipschitzien.

**Démonstration** Nous supposons que  $E$  est un espace préhilbertien complexe. Le cas réel est analogue.

Soit  $p$  le projecteur orthogonal sur  $F$  associé à  $F \oplus F^\perp = E$ . Tout vecteur  $x$  de  $E$  peut s'écrire de façon unique sous la forme  $x = f + g$  avec  $f = p(x) \in F$  et  $g \in F^\perp$ . On a alors par la relation de Pythagore :

$$\|f\|^2 \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 = \|x\|^2$$

et ainsi  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .

Supposons maintenant que  $p$  soit un projecteur 1-lipschitzien. Soit  $(f, g)$  de  $\text{Im } p \times \text{Ker } p$ . On a  $\|tf\| \leq \|tf + g\|$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En élevant au carré, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 \|f\|^2 \leq t^2 \|f\|^2 + 2t \text{Re}(f | g) + \|g\|^2$$

ce qui implique  $\text{Re}(f | g) = 0$ . Comme  $\text{Im}(f | g) = \text{Re}(if | g) = 0$  puisque  $(if, g)$  appartient à  $\text{Im } p \times \text{Ker } p$ , on obtient :

$$(f | g) = \text{Re}(f | g) + i \text{Im}(f | g) = 0.$$

Ainsi,  $\text{Im } p$  et  $\text{Ker } p$  sont orthogonaux. □

## 2. Espaces euclidiens ou hermitiens

Dans cette section,  $E$  désigne un espace euclidien ou hermitien de dimension  $n$ .

### 2.1 Bases orthonormées

#### Définition

#### Définition 18

On appelle *base orthonormée* de  $E$  toute famille orthonormée qui constitue une base de  $E$ .

Une base de  $E$  est orthonormée si, et seulement si, la matrice du produit scalaire dans cette base est égale à  $I_n$ . En particulier, la base canonique de  $\mathbf{K}$  est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.

Une famille orthonormée est une base orthonormée si, et seulement si, elle possède  $n$  éléments puisqu'elle est libre.

#### Existence de bases orthonormées

Le théorème d'orthonormalisation de Schmidt prouve le résultat suivant :

**Proposition 17**

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$ , il existe une unique base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) \quad \text{et} \quad (e_k | x_k) > 0.$$

On dit que  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base orthonormalisée de  $(x_1, \dots, x_n)$ .

**Corollaire 18**

Tout espace euclidien ou hermitien possède une base orthonormée

La base orthonormalisée  $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$  d'une base  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$  engendre le même drapeau que  $\mathcal{B}$  et la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

Ainsi, tout drapeau  $\mathcal{D}$  de  $E$  est engendré par une base orthonormée : il suffit de considérer la base orthonormalisée d'une base adaptée à  $\mathcal{D}$ .

**Corollaire 19**

Si  $u$  est un endomorphisme scindé de  $E$ , alors il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure

**Démonstration** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  scindé. Il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure. Dans la base orthonormalisée de cette base, la matrice de  $u$  est encore triangulaire supérieure. □

**Complétion d'une famille orthonormée**

**Proposition 20**

Toute famille orthonormée de  $E$  peut être complétée en une base orthonormée.

**Démonstration** Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille orthonormée. Il existe par le théorème de la base incomplète une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  de la forme :

$$(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Considérons alors la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  orthonormalisée de  $\mathcal{B}$ . La suite  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  vérifie les conditions du théorème de Schmidt par rapport à  $(e_1, \dots, e_p)$ . L'unicité de l'orthonormalisée montre que l'on a :

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = (e_1, \dots, e_p).$$

Ainsi, la base orthonormée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  complète  $(e_1, \dots, e_p)$ . □

**Corollaire 21**

Tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  admet un supplémentaire orthogonal.

**Démonstration** Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $F$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  complétant cette famille.

On vérifie aisément que  $F^\perp$  est égal à  $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ . On a donc :

$$F \oplus F^\perp = E. \quad \square$$

Nous verrons ci-dessous une généralisation importante de ce résultat ainsi que l'expression analytique de la projection orthogonale sur  $F$ .

**2.2 Calculs dans une base orthonormée**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

**Proposition 22**

Si les vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  s'écrivent  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ , on a :

1.  $\alpha_i = (e_i | x)$  pour tout  $i$ .

2.  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^p |\alpha_i|^2$ .

3.  $(x | y) = \sum_{i=1}^p \overline{\alpha_i} \beta_i$ .

4.  $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^p |\beta_i - \alpha_i|^2}$

**Corollaire 23**

Si  $u$  appartient à  $\mathcal{L}(E)$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left( (e_i | u(e_j)) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}.$$

**Démonstration** Il suffit de remarquer que la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée de  $u(e_j)$  est  $(e_i | u(e_j))$ .  $\square$

En particulier, la trace de  $u$  est donnée par :

$$\text{tr } u = \sum_{i=1}^n (e_i | u(e_i)).$$



### 2.3 Relation entre l'espace et son dual

Pour tout  $x \in E$ , on note  $\varphi_x$  la forme linéaire  $y \mapsto (x | y)$  sur  $E$ .

**Proposition 24**

L'application  $x \mapsto \varphi_x$  est une application bijective de  $E$  sur  $E^*$ , semi-linéaire dans le cas complexe et linéaire dans le cas réel.

**Démonstration** La relation :

$$\forall y, \varphi_{\alpha x + \beta x'}(y) = \bar{\alpha}\varphi_x(y) + \bar{\beta}\varphi_{x'}(y)$$

montre que  $x \mapsto \varphi_x$  est semi-linéaire dans le cas complexe et linéaire dans le cas réel.

Cette application est injective puisque son noyau, en tant que morphisme de groupes additifs, est :

$$\left\{ x \in E \mid \forall y, (x | y) = 0 \right\} = E^\perp = \{0\}.$$

On montre qu'elle est surjective dans le cas réel par le théorème du rang. On procède directement dans le cas complexe. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Si  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $E$ , il existe  $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que pour tout  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  de  $E$ , on ait :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i.$$

On obtient  $\forall x \in E, \varphi(x) = (a | x)$  pour  $a = \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i e_i$ . □

**Remarque** Supposons que  $E$  soit euclidien et notons  $\Phi : E \rightarrow E^*$  l'isomorphisme  $x \mapsto \varphi_x$ .

Pour tout sous-espace  $F$  de  $E$ , le vecteur  $x$  appartient à  $F^\perp$  si, et seulement si,  $\varphi_x$  s'annule sur  $F$ , c'est-à-dire si et seulement si,  $\varphi_x$  appartient à l'orthogonal de  $F$  au sens de la dualité :

$$F^\circ = \left\{ \varphi \in E^* \mid \varphi(F) = \{0\} \right\}.$$

On a donc  $F^\perp = \Phi^{-1}(F^\circ)$ .

Les propriétés de l'orthogonalité euclidienne peuvent ainsi se déduire de celles de l'orthogonalité de dualité.

## 2.4 Arcs paramétrés d'un espace euclidien

### Dérivée du produit scalaire de deux applications

#### Proposition 25

Si  $f$  et  $g$  sont deux applications dérivables (resp. de classe  $C^k$ ) d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers un espace euclidien  $E$ , alors l'application  $(f | g) : t \mapsto (f(t) | g(t))$  est dérivable (resp. de classe  $C^k$ ) et sa dérivée est donnée par :

$$(f | g)' = (f' | g) + (f | g').$$

**Démonstration** Cela découle des propriétés générales des applications dérivables à valeurs dans des espaces de Banach en remarquant que le produit scalaire est une application bilinéaire continue.  $\square$

#### Corollaire 26

Si  $f$  est une application dérivable (resp. de classe  $C^k$ ) d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers un espace euclidien  $E$ , alors l'application  $\|f\|^2 : t \mapsto \|f(t)\|^2$  est dérivable (resp. de classe  $C^k$ ) et sa dérivée est donnée par :

$$(\|f\|^2)' = 2(f' | f).$$

**Démonstration** C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de la relation :

$$(f | f)' = (f' | f) + (f | f') = 2(f' | f)$$

due à la symétrie du produit scalaire.  $\square$

#### Corollaire 27

Si  $f$  est une application dérivable (resp. de classe  $C^k$ ) d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers un espace euclidien  $E$  ne prenant pas la valeur 0, alors l'application  $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$  est dérivable (resp. de classe  $C^k$ ) et sa dérivée est donnée par :

$$\|f\|' = \frac{(f' | f)}{\|f\|}.$$

**Démonstration** L'application  $\|f\|$  est dérivable (resp. de classe  $C^k$ ) comme composée de  $\|f\|^2$  et de  $x \mapsto \sqrt{x}$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans lui-même et sa dérivée est égale à :

$$\|f\|' = \frac{2(f' | f)}{2\sqrt{(f | f)}}.$$

$\square$

**Corollaire 28**

Si  $f$  est une application dérivable d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers un espace euclidien  $E$  à valeurs unitaires, alors  $f'(t)$  est orthogonal à  $f(t)$  pour tout  $t \in I$ .

**Démonstration** En dérivant la relation  $\|f\|^2 = 1$ , on obtient :

$$\forall t \in I, \quad (f'(t) \mid f(t)) = 0. \quad \square$$

**Arcs paramétrés d'un espace euclidien**

La notion d'arc paramétré (ou de courbe paramétrée) du plan euclidien étudiée dans le cours de première année s'étend immédiatement au cas d'un espace euclidien de dimension quelconque.

**Définition 19**

On appelle *arc paramétré*, ou *courbe paramétrée*, de classe  $C^1$  d'un espace euclidien  $E$  toute application  $f$  de classe  $C^1$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $E$ . L'ensemble  $f(I)$  est appelé support (ou image) de l'arc  $f$ .

On retrouve alors les notions de changement de paramétrage, d'orientation, de tangente et de point régulier. Bien sûr, l'arc  $f$  possède en tout point régulier  $f(t_0)$  une tangente dirigée par  $f'(t_0)$ .

On définit aussi la longueur et l'abscisse curviligne :

**Définition 20**

On appelle *longueur* d'un arc paramétré  $f \in C^1([a, b], E)$ , le réel positif :

$$L(f) = \int_{[a,b]} \|f'\|.$$

Si  $g \in C^1([c, d], E)$  est un paramétrage admissible de  $f$ , on a bien sûr :

$$L(g) = L(f).$$

**Définition 21**

On appelle *abscisse curviligne* de l'arc orienté régulier  $f \in C^1(I, E)$ , toute application  $\sigma$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, \quad \sigma(t_2) - \sigma(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt.$$

Une application  $\sigma$  de  $I$  vers  $\mathbb{R}$  est une abscisse curviligne de l'arc régulier  $f$  si, et seulement si, elle est dérivable et vérifie  $\sigma' = \|f'\|$ . Elle est donc déterminée à une constante près par  $f$ .

Une abscisse curviligne est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $I$  sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ . L'arc :

$$g : s \mapsto f(\sigma^{-1}(s))$$

est un reparamétrage de  $f$ . Ce paramétrage est dit *normal* parce qu'il vérifie :

$$\|g'\| = 1.$$

*Exemple* Un arc paramétré  $f \in C^1([a, b], E)$  est de longueur  $L$  supérieure ou égale à la distance  $d$  de  $f(a)$  à  $f(b)$ . On a l'égalité  $L = d$  si, et seulement si, l'application  $f$  est de la forme :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = f(a) + \varphi(t)e$$

où  $\varphi$  est une application de classe  $C^1$  croissante de  $[a, b]$  sur  $[0, d]$  et  $e$  un vecteur unitaire de  $E$ . Son image est donc le segment  $[f(a), f(b)]$

Choisissons, en effet, un repère orthonorme  $(e_i)_{i \in [1, n]}$  tel que  $f(b) - f(a) = de_1$ . En notant  $f_i$  les coordonnées de  $f$ , les inégalités :

$$\|f'\| = \sqrt{\sum_i^n (f'_i)^2} \geq |f'_1| \geq f'_1$$

impliquent :

$$\int_{[a, b]} \|f'\| \geq \int_{[a, b]} |f'_1| \geq \int_{[a, b]} f'_1 = f_1(b) - f_1(a),$$

soit  $L \geq d$ .

L'égalité  $L = d$  entraîne  $\int_{[a, b]} \|f'\| = \int_{[a, b]} f'_1$  et, les fonctions étant continues,

$\|f'\| = f'_1$ . Cela implique  $f'_1 \geq 0$  et  $f'_i = 0$  pour tout  $i \geq 2$ . L'application  $\varphi = f_1 - f_1(a)$  est alors de classe  $C^1$  et croissante de  $[a, b]$  sur  $[0, d]$ . On peut donc écrire :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = f(a) + \varphi(t)e_1.$$

### 3. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

Dans cette section,  $E$  désigne un espace préhilbertien de dimension quelconque.

#### 3.1 Supplémentaire orthogonal

**Proposition 29**

Si  $F$  est un sous-espace de dimension finie de  $E$ , alors :

1.  $F$  possède un supplémentaire orthogonal.
2. Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$ , la projection orthogonale  $p_F$  de  $E$  sur  $F$  est donnée par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i.$$

**Démonstration** Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $F$  et  $p$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$\forall x \in F, \quad p(x) = \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i.$$

► Soit  $x \in E$ . On a évidemment  $p(x) \in F$ . Comme d'autre part on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (e_j | x - p(x)) = (e_j | x) - \sum_{i=1}^p (e_i | x) (e_j | e_i) = 0,$$

le vecteur  $x - p(x)$  appartient à  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp = F^\perp$ .

La relation  $x = p(x) + (x - p(x))$  montre alors  $F + F^\perp = E$ .

► Le sous-espace  $F$  possède donc un supplémentaire orthogonal. Par définition l'application  $p$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

Cela montre les deux points de la proposition. □

Dans les conditions précédentes,

- le sous-espace  $F^\perp$  est de codimension finie dans  $E$  et sa codimension est égale à la dimension de  $F$ ,
- on a  $(F^\perp)^\perp = F$ .

**Exemple** Si  $F$  est le sous-espace engendré par le vecteur non nul  $a$  (non nécessairement unitaire), on a :

$$p_F(x) = \frac{(a | x)}{(a | a)} a.$$

### 3.2 Distance à un sous-espace

Soit  $x \in E$ .

Si  $Y$  est une partie non vide de  $E$ , on appelle distance de  $x$  à  $Y$  le réel :

$$d(x, Y) = \inf \left\{ d(x, y) \mid y \in Y \right\}.$$

#### Proposition 30

Si  $F$  est un sous-espace de dimension finie de  $E$ , alors l'application :

$$f \mapsto \|x - f\|$$

de  $F$  vers  $\mathbb{R}$  atteint son minimum  $d(x, F)$  en un point et un seul, à savoir  $p_F(x)$ .

**Démonstration** Pour tout  $f \in F$ , on a  $x - f = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - f)$ . Comme les vecteurs  $x - p_F(x)$  et  $p_F(x) - f$ , qui appartiennent à  $F^\perp$  et  $F$ , sont orthogonaux, la relation de Pythagore s'écrit :

$$\|x - f\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2.$$

► On a donc  $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - f\|$  pour tout  $f \in F$ . Comme  $p_F(x)$  appartient à  $F$ , on obtient :

$$\inf \left\{ d(x, f) \mid f \in F \right\} = \|x - p_F(x)\|.$$

► La relation  $\|x - f\| = \|x - p_F(x)\|$  entraîne  $\|p_F(x) - f\|^2 = 0$  et donc  $f = p_F(x)$ . ◻

**Remarque** On a :

$$\|x - f\|^2 = d(x, F)^2 + \|p_F(x) - f\|^2$$

pour tout  $f \in F$ . Cela donne en particulier  $\|x\|^2 = d(x, F)^2 + \|p_F(x)\|^2$ .

**Exemple** Montrons que l'application :

$$I : (\alpha, \beta) \mapsto \int_0^1 (t^2 - \alpha - \beta t)^2 dt$$

atteint son minimum sur  $\mathbb{R}^2$  et déterminons-le.

Le sous-espace vectoriel  $F$  engendré par 1 et  $t$  est de dimension finie dans l'espace préhilbertien réel  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique. L'application :

$$f \in F \mapsto \|t^2 - f\|^2 = \int_0^1 (t^2 - f(t))^2 dt$$

atteint donc son minimum sur  $F$  en un et un seul point, à savoir le projeté orthogonal  $f_0$  de  $t^2$  sur  $F$ . L'application  $I$  atteint donc son minimum sur  $\mathbb{R}^2$  en un et un seul point  $(\alpha_0, \beta_0)$  tel que  $f_0 = \alpha_0 + \beta_0 t$ .

Puisque  $f_0$  est caractérisé par  $(t^2 - f_0) \perp 1$  et  $(t^2 - f_0) \perp t$ , le couple  $(\alpha_0, \beta_0)$  est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} \int_0^1 (t^2 - \alpha_0 - \beta_0 t) dt = 0 \\ \int_0^1 (t^2 - \alpha_0 - \beta_0 t) t dt = 0 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \frac{1}{2}\beta_0 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{3}\beta_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

et  $(\alpha_0, \beta_0) = \left(-\frac{1}{6}, 1\right)$ . Le minimum  $I\left(-\frac{1}{6}, 1\right)$  est alors égal à :

$$\int_0^1 \left(t^2 + \frac{1}{6} - t\right)^2 dt = \frac{1}{180}.$$

### 3.3 Inégalité de Bessel

#### Theorème 31 (Inégalité de Bessel)

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  est une famille orthonormée de  $E$ . Pour tout  $x$  de  $E$ , on a :

$$\sum_{i=1}^p |(e_i | x)|^2 \leq \|x\|^2$$

**Démonstration** Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(e_1, \dots, e_p)$ . La projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  étant donnée par  $\sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i$ , on a :

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p |(e_i | x)|^2$$

Il vient alors :

$$\sum_{i=1}^p |(e_i | x)|^2 \leq d(x, F)^2 + \sum_{i=1}^p |(e_i | x)|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

La différence  $\|x\|^2 - \sum_{i=1}^p |(e_i | x)|^2$  est ainsi égale à  $d(x, F)^2$ .

### 3.4 Égalité de Parseval-Bessel

Dans ce qui suit, nous supposons que  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille orthonormée. Si  $I$  est infini dénombrable, on pourra supposer qu'il est égal à  $\mathbb{N}$  et utiliser le langage des séries ; une famille  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  étant sommable si, et seulement si, la série

$\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i$  est absolument convergente.

#### Proposition 32

Pour tout  $x \in E$ , la famille  $\left( (e_i | x) \right)_i$  est de carré sommable et vérifie :

$$\sum_{i \in I} \left| (e_i | x) \right|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Démonstration** Pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , on a par l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i \in J} \left| (e_i | x) \right|^2 \leq \|x\|^2$$

Par définition même, la famille  $\left( \left| (e_i | x) \right|^2 \right)_i$  est donc sommable de somme inférieure ou égale à  $\|x\|^2$ . □

#### Théorème 33 (Égalité de Parseval-Bessel)

Soit  $x \in E$ . On a l'égalité dite de Parseval-Bessel :

$$\sum_{i \in I} \left| (e_i | x) \right|^2 = \|x\|^2$$

si, et seulement si,  $x$  est adhérent au sous-espace vectoriel engendré par la famille orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$ .

**Démonstration** Notons  $F$  le sous-espace engendré par  $(e_i)_{i \in I}$ .

► Supposons que l'on ait  $\sum_{i \in I} \left| (e_i | x) \right|^2 = \|x\|^2$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $J \subset I$  telle que :

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i \in J} \left| (e_i | x) \right|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Le vecteur  $p_J(x) = \sum_{i \in J} (e_i | x) e_i$  est la projection orthogonale de  $x$  sur le sous-espace vectoriel engendré par  $(e_i)_{i \in J}$ . Il appartient à  $F$  et vérifie :

$$\|x - p_J(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in J} \left| (e_i | x) \right|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Cela valant pour tout  $\varepsilon$ , le vecteur  $x$  est adhérent à  $F$ .



► Supposons que  $x$  soit adhérent à  $F$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $J \subset I$  et un élément  $\sum_{i \in J} \alpha_i e_i$  de  $F$  tel que  $\left\| x - \sum_{i \in J} \alpha_i e_i \right\|^2$  soit inférieur ou égal à  $\varepsilon$ . On a donc, en notant  $F_J$  le sous-espace engendré par  $(e_i)_{i \in J}$  :

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |(e_i | x)|^2 = d(x, F_J)^2 \leq \left\| x - \sum_{i \in J} \alpha_i e_i \right\|^2 \leq \varepsilon.$$

Cela valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient  $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(e_i | x)|^2$ . □

**Définition 22**

On dit que la famille orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$  est *totale* si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans  $E$ .

Si  $E$  est de dimension finie, la famille orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$  est totale si, et seulement si, c'est une base de  $E$ .

**Proposition 34**

La famille orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$  est totale si, et seulement si, on a pour tout  $x$  de  $E$  l'égalité de Parseval-Bessel :

$$\sum_{i \in I} |(e_i | x)|^2 = \|x\|^2.$$

**Démonstration** Il suffit de remarquer que la famille orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$  est totale si, et seulement si, tout élément  $x \in E$  est adhérent au sous-espace qu'elle engendre. □

**Remarque** Lorsque  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille totale, l'application linéaire :

$$x \longmapsto \left( (e_i | x) \right)_i$$

est une isométrie de  $E$  dans  $\ell^2(I, \mathbb{C})$ . Elle conserve donc le produit scalaire. Ainsi, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , la famille :

$$\left( \overline{(e_i | y)} (e_i | x) \right)_{i \in I}$$

est sommable et l'on a :

$$\sum_{i \in I} \left( \overline{(e_i | y)} (e_i | x) \right) = (x | y).$$

*Exemple* Soit  $(q_n)$  la suite des polynômes orthonormés de l'espace préhilbertien  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  munit du produit scalaire canonique.

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ . Le théorème de densité de Weierstrass nous fournit une suite de polynômes  $(p_n)$  convergeant uniformément vers  $f$ . La majoration :

$$\|f - p_n\| = \left( \int_{[a,b]} |f - p_n|^2 \right)^{1/2} \leq (b - a)^{1/2} \|f - p_n\|_\infty$$

montre que cette suite converge aussi vers  $f$  pour la norme euclidienne. Cela valant pour tout  $f$  de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , le sous-espace  $\mathbb{K}[x]$  est dense dans  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

La famille  $(q_n)$  qui engendre  $\mathbb{K}[x]$  est donc totale dans  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ . On a alors pour tout  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , l'égalité de Parseval-Bessel :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n(f)|^2$$

où  $\alpha_n(f) = \int_{[a,b]} \overline{q_n} f$  pour tout  $n$ .

## EXERCICES

1. Démontrer que la boule unité fermée  $B$  d'un espace préhilbertien complexe est *strictement convexe*, c'est-à-dire que la norme d'un vecteur de la forme  $tx + (1 - t)y$  avec  $0 < t < 1$  et  $(x, y)$  distincts dans  $B$  est strictement inférieure à 1.

2. Soient deux vecteurs non nuls  $x$  et  $y$  d'un espace préhilbertien réel. Démontrer l'égalité :

$$\left\| \frac{1}{\|x\|^2} x - \frac{1}{\|y\|^2} y \right\| = \frac{1}{\|x\| \|y\|} \|x - y\|.$$

3. Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Déterminer l'ensemble des nombres  $\lambda$  vérifiant, pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs de  $E$  :

$$\|x\| + \|y\| \leq \lambda \max (\|x + y\|, \|x - y\|).$$

4. Soit  $E$  un espace préhilbertien complexe. Déterminer l'ensemble des nombres  $\lambda$  vérifiant, pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs de  $E$  :

$$\|x\| + \|y\| \leq \lambda \max (\|x + y\|, \|x - y\|).$$

5. Soient  $n$  vecteurs  $(x_i)$  d'un espace préhilbertien réel vérifiant les relations  $(x_i | x_j) \leq 0$  pour  $i \neq j$ , et  $x$  un vecteur du même espace vérifiant les relations  $(x | x_i) > 0$ . Montrer que la famille  $(x_i)$  est libre.

6. Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Soit  $f$  l'application de  $E$  dans lui-même définie par  $f(u) = u$  si  $\|u\| \leq 1$ ,  $f(u) = \frac{1}{\|u\|} u$  si  $\|u\| > 1$ . Déterminer la

borne supérieure  $\lambda$  du nombre  $\frac{\|f(v) - f(u)\|}{\|v - u\|}$  pour  $u$  et  $v$  distincts dans  $E$ .

Pour quels couples de vecteurs est-elle atteinte ?

7. Soient trois points  $(a, b, c)$  d'un espace préhilbertien réel tels que  $a$  soit barycentre à coefficients positifs de  $b$  et  $c$ , ainsi qu'un nombre réel  $r > 0$ . Une boule ouverte de centre  $\omega$  et de rayon  $s > 0$  varie de façon à laisser  $b$  et  $c$  à son extérieur, mais à contenir la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  (ces inclusions étant à comprendre au sens large). Déterminer la borne supérieure des nombres  $s$ . S'agit-il d'un maximum ?

8. Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3, et l'application  $\sigma$  qui, à toute base  $B = (i, j, k)$  de  $E$  associe la base  $B' = (i', j', k')$  définie par :

$$i' = \frac{1}{\delta}(j \wedge k), \quad j' = \frac{1}{\delta}(k \wedge i), \quad k' = \frac{1}{\delta}(i \wedge j)$$

où  $\wedge$  représente le produit vectoriel et  $\delta$  est le produit mixte  $(i|j|k) = (i \wedge j|k)$ .

1. Justifier l'existence de  $\sigma$  et comparer les orientations de  $B$  et  $B'$  (dites bases *supplémentaires*).
  2. Montrer que  $\sigma$  est involutive.
  3. Comment exprimer les coordonnées (dites *contravariantes*) d'un vecteur  $a$  relatives à la base  $B'$  en fonction de  $a$  et des vecteurs de  $B$  ?
9. Un vecteur non nul  $a$  d'un espace préhilbertien réel  $E$ , contenant au moins un plan, et un nombre  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  étant données, déterminer l'ensemble des minorants du nombre  $\|a + x\|$  lorsque le vecteur non nul  $x$  décrit  $E$  de façon à vérifier l'inégalité  $\theta = \text{mes}(a, x) \in \left[0, \frac{\pi}{2} + \varphi\right]$  où  $(a, x)$  est l'angle des deux vecteurs  $a$  et  $x$ .
10. Étant donnés deux points  $a$  et  $b$  de la sphère unité d'un espace préhilbertien réel contenant au moins un plan, déterminer le (ou les) points  $m$  de cette sphère rendant maximale la somme  $\|m - a\| + \|m - b\|$
11. Soit  $u$  une application d'un espace préhilbertien complexe dans lui-même vérifiant l'égalité :

$$(u(x)|u(y)) = \overline{(x|y)} = (y|x)$$

pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs. Montrer que  $u$  est semi-linéaire.

12. Soit  $H$  un hyperplan de l'espace vecteur  $\mathbb{C}[X]$  muni d'une structure préhilbertienne complexe par le produit scalaire hermitien :

$$\left( \sum_n p_n X^n \middle| \sum_m q_m X^m \right) = \sum_n \bar{p}_n q_n.$$

Si  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{C}[X]$  de noyau  $H$  montrer que l'orthogonal  $H^\perp$  de  $H$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  si, et seulement si il n'existe qu'un nombre fini d'exposants  $n$  tels que  $\varphi(X^n) \neq 0$ , et qu'alors  $H$  est fermé. La réciproque est-elle vraie ?

13. Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un espace vectoriel réel normé, liés par une application  $f : E \rightarrow F$  continue vérifiant l'égalité :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

pour tout couple de vecteurs orthogonaux  $x$  et  $y$ . L'objet de l'exercice est de déterminer la nature de  $f$ .

1. Examiner le cas où  $E$  est de dimension inférieure ou égale à un.
  2. Que peut-on dire de  $x + y$  et de  $x - y$  si  $x$  et  $y$  ont même norme ?
  3. Examiner le cas où  $f$  est paire.
  4. Examiner le cas où  $f$  est impaire.
  5. Examiner le cas général.
- 14 Cet exercice est destiné à illustrer les fondements algébriques d'une méthode d'intégration numérique dite par *polynômes orthogonaux* relatifs à un *poids*  $\theta$ .

Soit  $I$  un intervalle de la droite achevée  $\overline{\mathbb{R}}$  d'intérieur non vide  $\overset{\circ}{I}$ , et une application continue  $\theta$  définie sur  $\overset{\circ}{I}$ , à valeurs strictement positives, telle que les intégrales  $J(P) = \int_I \theta P$ , où  $P$  décrit l'ensemble des polynômes réels, aient chacune un sens.

1. Montrer que l'application  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = J(PQ)$  est une forme bilinéaire définie positive.
2. Démontrer l'existence d'une unique suite  $(P_n)$  de polynômes de degré  $n$  à coefficients dominants strictement positifs tels que  $J(P_n P_m) = \delta_{n,m}$  pour tout couple d'entiers  $(n, m)$ .
3. Déterminer la suite  $(P_n)$  pour  $I = ]-1, 1[$  et  $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  (on pourra poser  $t = \cos u$  et calculer  $\int \cos \nu \cos \mu du$ ).
4. Montrer que chaque polynôme  $P_n$  possède, dans  $\overset{\circ}{I}$ , exactement  $n$  racines  $z_i$  deux à deux distinctes.
5. Démontrer pour  $n \geq 1$  l'existence d'un unique polynôme  $L_i$  de degré au plus  $n - 1$  défini par  $L_i(z_j) = \delta_{i,j}$ . On notera  $\lambda_i = J(L_i)$ .
6. Démontrer qu'alors, pour tout polynôme  $P$  de degré strictement inférieur à  $2n$  on dispose de l'égalité  $J(P) = \sum_i \lambda_i P(z_i)$
7. Démontrer les relations  $\lambda_i = J(L_i^2) > 0$ .
8. Démontrer pour tout  $n$  l'existence d'une relation de récurrence de la forme :

$$P_{n+2} = a_n (X - b_n) P_{n+1} + c_n P_n.$$

15. Soient  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les arc cosinus des produits scalaires pris deux à deux  $(v|w), (w|u), (u|v)$  de trois vecteurs indépendants  $(u, v, w)$  de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. Démontrer les inégalités :

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma, \quad 0 < \alpha + \beta + \gamma < 2\pi.$$

16. Soient  $N$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  une famille de  $N$  vecteurs de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. On pose :

$$M = \max_{i,j} \|x_i - x_j\|, \quad S = \sum_{i < j} \|x_i - x_j\|, \quad T = \sum_{i < j} \|x_i - x_j\|^2.$$

1. Démontrer les relations  $T = N^2 - \left\| \sum_i x_i \right\|^2$  et  $S \leq N \sqrt{\frac{N(N-1)}{2}}$ .

2. Soit  $C$  la fermeture convexe (ou enveloppe convexe) de l'ensemble des vecteurs  $x_i$ , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs  $\sum_{i=1}^N a_i x_i$  avec  $a_i \geq 0$  et  $\sum_i a_i = 1$ . On suppose désormais que le vecteur nul appartient à  $C$ . En déduire la minoration  $S \geq 2(N-1)$ . Peut-on avoir égalité ?

3. Démontrer les inégalités :

$$\sqrt{2} \leq M \leq \frac{S}{N-1} \leq N.$$

17. Soit  $(u, v, w)$  une base directe formée de vecteurs de norme 1 d'un espace euclidien orienté de dimension 3. On note  $\hat{v}$  (resp.  $\hat{w}$ ) l'unique vecteur de norme 1 orthogonal à  $u$  du demi-plan d'arête  $\mathbb{R}u$  contenant  $v$  (resp.  $w$ ). On pose  $a = \text{Arc cos}(v|w)$ ,  $A = \text{Arc cos}(\hat{v}|\hat{w})$  ainsi que les nombres analogues définis par la permutation circulaire  $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$ .

L'exercice consiste à établir les relations constituant la *Trigonométrie Sphérique* à partir de méthodes calculatoires n'utilisant pas explicitement l'"intuition géométrique", même si l'élaboration de dessins est évidemment recommandée.

- Interpréter  $a$  et  $A$  en termes d'objets reliés à une sphère.
- Démontrer la *première formule fondamentale* :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

3. Démontrer les relations :

$$0 < a < \pi, \quad 0 < A < \pi, \quad 0 < a < b + c, \quad 0 < p = \frac{a + b + c}{2} < \pi.$$

4. Démontrer les relations :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}.$$

5. Démontrer les douze *analogies de Delambre* obtenues à partir de :

$$\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{a}{2} = \cos \frac{b-c}{2} \cos \frac{A}{2}$$

en changeant sinus en cosinus,  $C$  en  $-C$  et en permutant.

6. Agir de même avec les douze *analogies de Neper* obtenues à partir de :

$$\cos \frac{b+c}{2} \tan \frac{B+C}{2} = \cos \frac{b-c}{2} \cot \frac{A}{2}.$$

7. On pose  $U = v \wedge w$  (resp.  $V, W$ ) et  $\delta = (u|U)$ . Calculer  $V \wedge W$ .

8. Calculer le produit mixte (déterminant relatif à une base orthonormée directe)  $(U|V|W)$  ainsi que  $\text{Arc cos} \frac{(V|W)}{\|V\| \|W\|}$ . Démontrer les relations :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{\delta}.$$

9. Démontrer la *seconde formule fondamentale* :

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

10. Démontrer les relations :

$$B + C < \pi + A, \quad 0 < E = \frac{A + B + C - \pi}{2} < \pi, \quad 0 < A - E < \pi$$

[ $E$  s'appelle l'*excès sphérique* du triangle sphérique  $(u, v, w)$ ].

11. Donner une interprétation intuitive des réels  $A$  et  $S = 2E$  en termes d'aires ou de somme d'aires de triangles sphériques (on admettra comme une notion première, pour cette question, le concept d'aire sur une surface).

12. Démontrer les égalités :

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin E \sin(A-E)}{\sin B \sin C}}, \quad \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-E) \sin(C-E)}{\sin B \sin C}},$$

$$\tan \frac{S}{4} = \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\tan \frac{p}{2} \tan \frac{p-a}{2} \tan \frac{p-b}{2} \tan \frac{p-c}{2}}.$$

13. Que deviennent les égalités ci-dessus si  $A = \frac{\pi}{2}$  ? En déduire les rayons  $r$  et  $R$  des cercles dessinés sur la sphère unité et respectivement inscrit [c'est-à-dire tangent aux arcs de grands cercles  $[v, w]$ ,  $[w, u]$  et  $[u, v]$  de mesure inférieure à  $\pi$ ] et circonscrit (c'est-à-dire contenant les trois points  $u, v$  et  $w$ ) au triangle sphérique  $(u, v, w)$ .

14. Démontrer l'égalité :

$$\delta = 2\sqrt{\sin p \sin (p - a) \sin (p - b) \sin (p - c)}.$$

15. Retrouver des formules de trigonométrie plane en substituant  $\left(\frac{1}{\rho}a, \frac{1}{\rho}b, \frac{1}{\rho}c\right)$  à  $(a, b, c)$  et en faisant tendre  $\rho$  vers l'infini.



## Chapitre 19

# Endomorphismes des espaces euclidiens ou hermitiens

### 1. Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans cette section,  $E$  désigne un espace euclidien de dimension  $n$ .

#### 1.1 Adjoint d'un endomorphisme

##### Définition

##### Proposition 1

Pour tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il existe un unique endomorphisme, appelé *adjoint* de  $u$  et noté  $u^*$ , tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \mid u(y)) = (u^*(x) \mid y). \quad (\text{adj})$$

**Démonstration** Pour tout  $x$ , l'application  $y \mapsto (x \mid u(y))$  est une forme linéaire sur l'espace euclidien  $E$ . L'isomorphisme canonique entre  $E^*$  et  $E$  montre alors qu'il existe un unique vecteur que l'on notera  $u^*(x)$  tel que l'on ait :

$$\forall y \in E, \quad (x \mid u(y)) = (u^*(x) \mid y).$$

On obtient ainsi l'unique application  $u^* : x \mapsto u^*(x)$  de  $E$  dans lui-même vérifiant la relation (adj).

Soit  $(\alpha, \alpha', x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E \times E$ . On a pour tout  $y$  de  $E$  :

$$\begin{aligned} (u^*(\alpha x + \alpha' x') \mid y) &= (\alpha x + \alpha' x' \mid u(y)) \\ &= \alpha(x \mid u(y)) + \alpha'(x' \mid u(y)) \\ &= \alpha(u^*(x) \mid y) + \alpha'(u^*(x') \mid y) \\ &= (\alpha u^*(x) + \alpha' u^*(x') \mid y) \end{aligned}$$

soit, par orthogonalité :

$$u^*(\alpha x + \alpha' x') = \alpha u^*(x) + \alpha' u^*(x').$$

Cela vaut pour tout  $(\alpha, \alpha', x, x')$ , l'application  $u^*$  est linéaire.  $\square$

### Proposition 2

L'application  $u \mapsto u^*$  est un automorphisme d'espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  vérifiant :

1.  $(u^*)^* = u$  pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
2.  $(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$ .
3.  $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$  pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ .

**Démonstration** Soit  $(\alpha, \beta, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ . On a pour tout  $(x, y) \in E^2$  :

$$\begin{aligned} (x | (\alpha u + \beta v)(y)) &= \alpha(x | u(y)) + \beta(x | v(y)) \\ &= \alpha(u^*(x) | y) + \beta(v^*(x) | y) \\ &= ((\alpha u^* + \beta v^*)(x) | y). \end{aligned}$$

Cela donne  $(\alpha u + \beta v)^* = \alpha u^* + \beta v^*$ .

1. On a  $(x | u(y)) = (u^*(x) | y) = (x | (u^*)^*(y))$  pour tout  $(x, y) \in E^2$ . On en déduit  $(u^*)^* = u$ . L'endomorphisme  $u \mapsto u^*$  est donc involutif et, par conséquent, bijectif.
2. On a  $((\text{Id}_E)^*(x) | y) = (x | \text{Id}_E(y)) = (x | y)$  pour tout  $(x, y) \in E^2$ . Cela implique  $(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$ .
3. On a pour tout  $(x, y) \in E^2$

$$(x | (v \circ u)(y)) = (v^*(x) | u(y)) = ((u^* \circ v^*)(x) | y).$$

Donc  $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$ .  $\square$

### Propriétés

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### Proposition 3

Si  $u$  est inversible, alors  $u^*$  est inversible et l'on a :

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*.$$

**Démonstration** Les relations  $u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$  et  $u \circ u^{-1} = \text{Id}_E$  entraînent, en effet :

$$u^* \circ (u^{-1})^* = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad (u^{-1})^* \circ u^* = \text{Id}_E. \quad \square$$

**Proposition 4**

Dans toute base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} u^* = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}} u.$$

**Démonstration** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Si  $(\alpha_{i,j})$  et  $(\beta_{i,j})$  désignent les matrices de  $u$  et  $u^*$  dans  $\mathcal{B}$ , on a en effet :

$$\forall (i, j), \quad \beta_{i,j} = (e_i | u^*(e_j)) = (u(e_i) | e_j) = (e_j | u(e_i)) = \alpha_{j,i}. \quad \square$$

**Remarques**

- En particulier, l'endomorphisme adjoint de l'endomorphisme de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $A$  est l'endomorphisme associé à  ${}^t A$ .
- Si  $\mathcal{B}$  est une base quelconque, non nécessairement orthonormée, et si  $S$  est la matrice (symétrique définie positive) du produit scalaire  $(x | y)$  dans  $\mathcal{B}$ , alors on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} u^* = S ({}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}} u) S^{-1}.$$

En effet la relation  $(x | u(y)) = (u^*(x) | y)$  montre que l'on a :

$${}^t X S A Y = {}^t (B X) S Y$$

pour toutes colonnes  $X$  et  $Y$  si  $A$  et  $B$  désignent les matrices de  $u$  et  $u^*$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Corollaire 5**

On a :

$$\text{tr } u^* = \text{tr } u \quad \text{et} \quad \det u^* = \det u.$$

**Proposition 6**

On a :

$$\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$$

En particulier,  $\text{rg } u^* = \text{rg } u$ .

**Démonstration** Un vecteur  $x$  est orthogonal à  $\text{Im } u$  si, et seulement si,  $(x | u(y))$  est nul pour tout  $y$  de  $E$ . La relation :

$$(x | u(y)) = (u^*(x) | y)$$

montre que c'est équivalent à  $(u^*(x) | y) = 0$  pour tout  $y$ , c'est-à-dire  $u^*(x) = 0$ . On obtient donc :

$$(\text{Im } u)^\perp = \text{Ker } u^*.$$

Le point précédent montre que l'on a  $\text{Ker } (u^*)^* = (\text{Im } u^*)^\perp$ . En utilisant  $(u^*)^* = u$ , il vient  $\text{Ker } u = (\text{Im } u^*)^\perp$  et, donc,  $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$ .

Le théorème du rang nous fournit alors la relation :

$$\text{rg } u^* = \dim \text{Im } u^* = \dim (\text{Ker } u)^\perp = n - \dim \text{Ker } u = \text{rg } u. \quad \square$$

**Remarque** On retrouve ainsi la relation  $\text{rg } {}^t A = \text{rg } A$  pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

### Proposition 7

Un sous-espace  $F$  de  $E$  est stable par  $u$  si, et seulement si,  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

**Démonstration** Supposons  $u(F) \subset F$ . Soit  $x \in F^\perp$ . Pour tout  $y$  de  $F$ , on a :

$$(u^*(x) | y) = (x | u(y)) = 0$$

puisque  $u(y)$  appartient à  $F$  par stabilité. Ainsi  $u^*(x) \in F^\perp$ . Le sous-espace  $F^\perp$  est donc stable par  $u^*$ .

Si  $F^\perp$  est stable par  $u^*$  le point précédent montre que  $(F^\perp)^\perp$  est stable par  $(u^*)^*$ . Cela prouve que  $F$  est stable par  $u$ .  $\square$

L'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  est munie évidemment de la norme :

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

subordonnée à la norme euclidienne de  $E$ .

### Proposition 8

On a :

$$\|u^*\| = \|u\| \quad \text{et} \quad \|u^* \circ u\| = \|u\|^2.$$

**Démonstration** Pour tout  $x$  de  $E$ , on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|u(x)\|^2 = (u(x) | u(x)) = ((u^* \circ u)(x) | x) \leq \| (u^* \circ u)(x) \| \|x\| \leq \|u^* \circ u\| \|x\|^2$$

Cela implique  $\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\|$ . Il vient alors :

$$\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\| \leq \|u^*\| \|u\|$$

et, en considérant de façon particulière le cas  $u = 0$ ,  $\|u\| \leq \|u^*\|$ . Par symétrie de l'adjoint, on a  $\|u\| = \|u^*\|$ . Les relations :

$$\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\| \leq \|u^*\| \|u\| = \|u\|^2$$

prouvent finalement l'égalité  $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2$ . □

## 1.2 Endomorphismes symétriques

### Définition 1

On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est *autoadjoint*, ou *symétrique*, si l'on a  $u^* = u$ , c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x | u(y)) = (u(x) | y).$$

On notera  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble de endomorphismes symétriques de  $\mathcal{L}(E)$ .

### Exemples

1. Un projecteur  $p$  est une projection orthogonale si, et seulement si il est symétrique.

- Si  $p$  est une projection orthogonale, on a pour tout  $(x, y)$  :

$$(p(x) | y) = (p(x) | p(y)) + (p(x) | y - p(y)) = (p(x) | p(y))$$

puisque  $p(x)$  appartient à  $\text{Im } p$  et  $y - p(y)$  à  $\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$ . On obtient de même  $(x | p(y)) = (p(x) | p(y))$  d'où  $(p(x) | y) = (x | p(y))$  pour tout  $(x, y)$ . Cela montre que  $p$  est symétrique.

- Si  $p$  est un projecteur symétrique, on a :

$$\text{Ker } p = (\text{Im } p^*)^\perp = (\text{Im } p)^\perp.$$

Il s'agit donc d'une projection orthogonale.

2. Une symétrie  $s$  est une symétrie orthogonale si, et seulement si, elle est autoadjointe.

- Si  $s$  est une symétrie orthogonale, l'endomorphisme :

$$p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$$

est la projection orthogonale sur le sous-espace des points invariants de  $s$ . Comme  $p^* = \frac{1}{2}(s^* + \text{Id}_E)$ , la relation  $p^* = p$  entraîne  $s = s^*$ .

- Si  $s$  est une symétrie autoadjointe, l'endomorphisme  $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$  est alors un projecteur autoadjoint. La symétrie  $s$ , qui est la symétrie par rapport à  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$ , est donc orthogonale.

### Proposition 9

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Un endomorphisme  $u$  est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est symétrique.

**Démonstration** Cela résulte du fait que la matrice de  $u^*$  dans une telle base est la transposée de celle de  $u$ . □

On note  $S_n(\mathbb{R})$ , rappelons-le, l'ensemble des matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{R})$ .

### Proposition 10

L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  des endomorphismes symétriques de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

**Démonstration** L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  est le sous-espace vectoriel noyau de l'application linéaire  $u \mapsto u^* - u$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée de  $E$ , l'application qui associe à tout endomorphisme sa matrice dans  $\mathcal{B}$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{S}(E)$  sur l'espace vectoriel  $S_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques de taille  $n$ . La dimension de  $\mathcal{S}(E)$  est donc  $\frac{n(n+1)}{2}$ . □

### Proposition 11

L'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme symétrique est aussi symétrique.

**Démonstration** La relation  $(x | u(y)) = (u(x) | y)$  pour tout  $(x, y) \in E^2$  montre que l'endomorphisme  $v$  induit par l'endomorphisme  $u$  sur le sous-espace stable  $F$  vérifie :

$$\forall (x, y) \in F^2, (x | v(y)) = (v(x) | y). \quad \square$$

**Exemple** Un endomorphisme  $u$  symétrique est de trace nulle si, et seulement si, il existe une base orthogonale dans laquelle les éléments diagonaux de la matrice de  $u$  sont nuls.

Si les éléments diagonaux de la matrice de  $u$  dans une base sont nuls, on a  $\text{tr } u = 0$ . Supposons, réciproquement, que la trace de  $u$  soit nulle. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthogonale, on a :

$$\sum_{i=1}^n (e_i | u(e_i)) = 0.$$

Il existe donc deux indices  $i \neq j$  tels que  $(e_i | u(e_i))$  et  $(e_j | u(e_j))$  soient de signes différents. Pour tout  $\theta$  de  $[0, \pi/2]$ , le vecteur :

$$e(\theta) = \cos \theta e_i + \sin \theta e_j$$

est unitaire. La fonction  $\theta \mapsto (e(\theta) | u(e(\theta)))$  est continue sur  $[0, \pi/2]$  et prend des valeurs de signes différents en 0 et  $\pi/2$ . Il existe donc un  $\theta$  tel que  $(e(\theta) | u(e(\theta)))$  soit nul.

Soit  $\varepsilon_1$  un vecteur unitaire tel que  $(\varepsilon_1 | u(\varepsilon_1)) = 0$ . Notons alors  $F$  le sous-espace  $\{\varepsilon_1\}^\perp$ ,  $p$  la projection orthogonale sur  $F$  et  $v$  l'endomorphisme induit par  $p \circ u$  sur  $F$ . Dans une base orthonormée adaptée à  $\mathbb{R}\varepsilon_1$ , la matrice de  $u$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$$

où  $B$  est la matrice de  $v$ . Comme cette matrice est symétrique de trace nulle, il en est de même de  $B$ . L'endomorphisme  $v$  est donc symétrique de trace nulle. Par récurrence sur la dimension (le cas de la dimension un est trivial), il existe une base orthonormée  $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  de  $F$  vérifiant  $(\varepsilon_i | u(\varepsilon_i)) = 0$  pour tout  $i$  de  $[[2, n]]$ . On en déduit immédiatement que la matrice de  $u$  dans la base orthonormée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  a ses éléments diagonaux nuls.

### Formes bilinéaires symétriques

Pour tout  $u \in \mathcal{S}(E)$ , l'application  $\varphi_u : (x, y) \mapsto (x | u(y))$  est une forme bilinéaire sur  $E$ . Elle est symétrique parce que  $u$  étant symétrique, on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x | u(y)) = (u(y) | x) = (y | u(x)).$$

#### Proposition 12

L'application  $u \mapsto \varphi_u$  est un isomorphisme de l'espace  $\mathcal{S}(E)$  sur l'espace  $\mathcal{BL}_s(E)$  des formes bilinéaires symétriques sur  $E$ .

**Démonstration** Il est immédiat de vérifier que  $u \mapsto \varphi_u$  est linéaire. Si  $\varphi_u$  est nul, on a  $(x | u(y)) = 0$  pour tout  $(x, y) \in E^2$ . Cela entraîne  $u(y) = 0$  pour tout  $y$  et ainsi  $u = 0$ . L'application  $u \mapsto \varphi_u$  est donc injective. Comme les espaces  $\mathcal{S}(E)$  et  $\mathcal{BL}_s(E)$  ont même dimension, il s'agit bien d'un isomorphisme □

**Remarques**

- Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_u) = \left( (e_i \mid u(e_j)) \right) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} u.$$

Cela fournit une autre démonstration de la bijectivité de  $u \mapsto \varphi_u$ .

- En utilisant l'isomorphisme entre l'espace des formes bilinéaires et celui des formes quadratiques, on voit que l'application associant à tout  $u \in \mathcal{S}(E)$  la forme quadratique :

$$q_u(x) = (x \mid u(x))$$

est un isomorphisme.

**Endomorphismes symétriques définis positifs**

**Définition 2**

On dit qu'un endomorphisme symétrique  $u$  est :

- *positif* si l'on a  $(x \mid u(x)) \geq 0$  pour tout  $x \in E$ ,
- *défini positif* s'il est positif et si  $(x \mid u(x)) = 0$  entraîne  $x = 0$ .

Un endomorphisme  $u$  est donc positif (respectivement défini positif) si, et seulement si, la forme bilinéaire associée  $\varphi_u$  est positive (respectivement définie positive).

On notera  $\mathcal{S}^+(E)$  et  $\mathcal{S}^{++}(E)$  les ensembles des endomorphismes symétriques positifs et symétriques définis positifs de  $\mathcal{L}(E)$ . Il est clair que ces ensembles sont stables par addition et multiplication par un scalaire strictement positif.

*Exemple* Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . L'endomorphisme  $u^* \circ u$  est symétrique positif puisque l'on a  $(u^* \circ u)^* = u^* \circ u$  et :

$$\forall x \in E, \quad ((u^* \circ u)(x) \mid x) = (u(x) \mid u(x)) \geq 0.$$

Il est défini positif si, et seulement si,  $u$  est bijectif puisque la relation :

$$((u^* \circ u)(x) \mid x) = (u(x) \mid u(x))$$

montre que les implications :

$$((u^* \circ u)(x) \mid x) = 0 \implies x = 0$$

et  $u(x) = 0 \implies x = 0$  sont équivalentes. Il en est de même de  $u \circ u^*$  qui est égal à  $(u^*)^* \circ u^*$ .

Si  $A$  est une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tAA$  et  $A{}^tA$  sont donc des matrices symétriques positives. Elles sont définies positives si, et seulement si,  $A$  est inversible.



**Définition 3**

On dit qu'une matrice symétrique  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est :

- *positive* si l'on a  ${}^tXAX \geq 0$  pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,
- *définie positive* si elle est positive et si  ${}^tXAX = 0$  entraîne  $X = 0$ .

Une matrice symétrique  $A$  est donc positive (respectivement définie positive) si, et seulement si, l'endomorphisme autoadjoint associé :

$$X \mapsto AX$$

de  $\mathbb{R}^n$  est positif (respectivement défini positif).

**Proposition 13**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Un endomorphisme symétrique  $u$  est positif (respectivement défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est symétrique positive (respectivement définie positive).

**Démonstration** Il suffit de remarquer que l'on a :

$$(x | u(x)) = {}^tXAX$$

si  $A$  et  $X$  sont les matrices de  $u$  et  $x$  dans la base orthonormée considérée. □

On notera  $S_n^+(\mathbb{R})$  et  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  les ensembles de matrices symétriques positives et symétriques définies positives de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Nous avons vu dans le chapitre « Formes bilinéaires symétriques » qu'une matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  de  $S_n(\mathbb{R})$  est définie positive si, et seulement si, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \begin{array}{ccc} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,1} & \dots & \alpha_{i,i} \end{array} \right| > 0.$$

**Exemple** Toute matrice symétrique définie positive  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  peut s'écrire de façon unique :

$$A = {}^tTT$$

avec  $T$  triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs (*décomposition de Cholevski*).

La forme bilinéaire  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^n$  de matrice  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est définie positive. La famille  $\mathcal{C}$  orthonormalisée de  $\mathcal{B}$  pour  $\varphi$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est  $I_n$ . La matrice  $T$  de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs et l'on a :

$$A = {}^t T T.$$

Pour l'unicité, supposons que l'on ait  $A = {}^t T T = {}^t T_1 T_1$  avec les mêmes conditions. La matrice :

$${}^t T_1^{-1} {}^t T = T_1 T^{-1}$$

est triangulaire supérieure et inférieure. Comme ses éléments diagonaux sont strictement positifs et égaux à leur inverse, elle est égale à  $I_n$  et  $T = T_1$ .

### 1.3 Endomorphismes orthogonaux

#### Définition

#### Définition 4

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit *orthogonal* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y). \quad (\text{ortho})$$

**Remarques** Nous avons vu dans le cours de première année, les points suivants.

- L'endomorphisme  $u$  est orthogonal si, et seulement si,  $\|u(x)\| = \|x\|$  pour tout  $x \in E$ .
- Une application  $f : E \rightarrow E$  non nécessairement linéaire est un endomorphisme orthogonal si, et seulement si, c'est une isométrie telle que  $f(0) = 0$ .

#### Proposition 14

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est orthogonal si, et seulement si, on a :

$$u^* \circ u = \text{Id}_E \quad \text{ou} \quad u \circ u^* = \text{Id}_E.$$

**Démonstratio** Par définition de l'adjoint,  $u$  est orthogonal si, et seulement si, on a

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad ((u^* \circ u)(x) \mid y) = (x \mid y),$$

c'est-à-dire  $u^* \circ u = \text{Id}_E$ . Comme  $E$  est de dimension finie, cette relation est équivalente à  $u \circ u^* = \text{Id}_E$ . □

**Remarques**

- Une projection orthogonale  $p$  sur un sous-espace strict de  $E$  n'est pas un endomorphisme orthogonal puisque l'on a :

$$p^* \circ p = p \circ p = p \neq \text{Id}_E$$

- Si  $u$  est un endomorphisme orthogonal, on a  $\|u\| = 1$ . La réciproque est fautive comme le montre l'exemple d'une projection orthogonale sur un sous-espace strict non réduit à  $\{0\}$  de  $E$ .

**Exemples**

1. Une symétrie orthogonale  $s$  est un endomorphisme orthogonal ; on a en effet :

$$s^* \circ s = s \circ s = \text{Id}_E.$$

2. On appelle *réflexion* toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Soit  $a \in E$  un vecteur non nul. Nous avons vu que l'application :

$$p : x \mapsto \frac{(a | x)}{(a | a)} a$$

est la projection orthogonale sur la droite  $\mathbb{R}a$ . L'application :

$$s_a : x \mapsto x - 2 \frac{(a | x)}{(a | a)} a,$$

égale à  $\text{Id}_E - 2p$ , est donc la réflexion par rapport à l'hyperplan  $a^\perp$ .

Soient alors  $u$  et  $v$  deux vecteurs distincts de même norme de  $E$ . Si  $a$  désigne le vecteur non nul  $v - u$ , la réflexion  $s_a$  précédente échange  $u$  et  $v$ . On a en effet :

$$(a | a) = (v | v) - 2(v | u) + (u | u) = -2(a | u)$$

puisque  $(v | v) = (u | u)$ . Cela donne :

$$s(u) = u - 2 \frac{(a | u)}{(a | a)} (v - u) = u + (v - u) = v.$$

On obtient de même  $s(v) = u$ .

**Groupe orthogonal**

**Proposition 15**

Tout endomorphisme orthogonal  $u$  est inversible et vérifie :

$$\det u = \pm 1.$$

**Démonstration** Les relations  $u^* \circ u = \text{Id}_E$  et  $\det u^* = \det u$  entraînent en effet :

$$(\det u)^2 = \det u^* \det u = 1.$$

□

**Définition 5**

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $E$  est un sous-groupe de  $\mathcal{GL}(E)$  appelé *groupe orthogonal* de  $E$  et noté  $\mathcal{O}(E)$ .

**Démonstration** L'ensemble  $\mathcal{O}(E)$  des endomorphismes orthogonaux est une partie de  $\mathcal{GL}(E)$ . Il contient évidemment  $\text{Id}_E$ . Pour tout  $u \in \mathcal{O}(E)$ , on a :

$$(u^{-1})^* \circ u^{-1} = (u^*)^{-1} \circ u^{-1} = (u \circ u^*)^{-1} = \text{Id}_E$$

soit  $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ . Pour tout  $(u, v) \in \mathcal{O}(E)^2$ , on a :

$$(u \circ v)^* \circ (u \circ v) = v^* \circ u^* \circ u \circ v = v^* \circ \text{Id}_E \circ v = \text{Id}_E$$

soit  $u \circ v \in \mathcal{O}(E)$ . L'ensemble  $\mathcal{O}(E)$  est donc un sous-groupe de  $\mathcal{GL}(E)$ . □

**Définition 6**

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $E$  de déterminant positif est un sous-groupe de  $\mathcal{O}(E)$  appelé *groupe spécial orthogonal* de  $E$  et noté  $\mathcal{SO}(E)$  ou  $\mathcal{O}^+(E)$ .

**Démonstration** L'application  $u \mapsto \det u$  est un morphisme de groupes de  $\mathcal{O}(E)$  vers  $\mathbb{R}^*$  dont l'ensemble  $\mathcal{SO}(E)$  est le noyau par ce qui précède □

**Remarque** Les éléments de  $\mathcal{SO}(E)$  sont appelés les *rotations* de  $E$ .

**Proposition 16**

Les ensembles  $\mathcal{O}(E)$  et  $\mathcal{SO}(E)$  sont des parties compactes de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Démonstration** L'application  $u \mapsto u^* \circ u$  est continue de  $\mathcal{L}(E)$  vers lui-même. L'ensemble  $\mathcal{O}(E)$ , qui est l'image réciproque de  $\text{Id}_E$  par l'application précédente, est donc fermé. Comme tout endomorphisme orthogonal  $u$  vérifie  $\|u\| = 1$ , il est aussi borné. Ainsi  $\mathcal{O}(E)$  est compact. L'ensemble  $\mathcal{SO}(E)$  est l'intersection du compact  $\mathcal{O}(E)$  avec le fermé  $\mathcal{SL}(E)$ . Il est donc compact. □

**Relation avec les bases orthonormées****Proposition 17**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est orthogonal si, et seulement si, l'image de  $\mathcal{B}$  par  $u$  est orthonormée.

**Démonstration** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Supposons  $u$  orthogonal. On a :

$$\forall (i, j), \quad (u(e_i) \mid u(e_j)) = (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}.$$

La famille  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est donc une base orthonormée

Supposons que  $u$  transforme  $\mathcal{B}$  en la famille orthonormée  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ . Pour tout couple

de vecteurs  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ , on a :

$$(u(x) \mid u(y)) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (u(e_i) \mid u(e_j)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = (x \mid y). \quad \square$$

### Matrices orthogonales

#### Définition 7

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est *orthogonale* si l'endomorphisme associé :

$$X \mapsto AX$$

est un endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ .

Les points suivantes resultent des propositions précédentes appliquées au cas de l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^n$ . Elles ont été vues dans le cours de première année.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

- Les assertions suivantes sont équivalents :
  - (i)  $A$  est orthogonale.
  - (ii)  ${}^tAA = I_n$ .
  - (iii)  $A{}^tA = I_n$ .
  - (iv) Les colonnes de  $A$  forment une famille orthonormée.
  - (v) Les lignes de  $A$  forment une famille orthonormée.
- Si  $A$  est orthogonale, alors elle est inversible et vérifie  $\det A = \pm 1$ .

Les ensembles  $O(n)$  et  $SO(n)$  des matrices orthogonales et orthogonales de déterminant positif de  $M_n(\mathbb{R})$  sont des sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{R})$  appelés respectivement *groupe orthogonal* et *groupe spécial orthogonal* d'ordre  $n$ . Ce sont aussi des parties compactes de  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 18**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est orthogonal si et seulement si, sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est orthogonale.

**Proposition 19**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Une base  $\mathcal{C}$  est orthonormée si, et seulement si, la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  est orthogonale.

**Démonstration** Les colonnes de la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ , qui sont les systèmes de coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{B}$ , sont orthonormées si, et seulement si,  $\mathcal{C}$  est orthonormée.  $\square$

Une matrice de dimension 1 est orthogonale si, et seulement si, son coefficient vaut  $\pm 1$ . Le cas de la dimension deux est précisé par la proposition suivante :

**Proposition 20**

- Les matrices de  $\text{SO}(2)$  sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ vérifiant } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

- Les matrices de  $\text{O}(2)$  de déterminant négatif sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ vérifiant } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

**Démonstration** Soit  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  une matrice orthogonale. Le vecteur  $\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$  est non nul et orthogonal à  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  et il engendre ainsi le sous-espace des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  orthogonaux à ce vecteur. Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

La seconde colonne de  $A$  étant unitaire, on obtient  $\lambda = \pm 1$ .

► Toute matrice orthogonale de déterminant 1 est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  vérifie  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

► Toute matrice orthogonale de déterminant  $-1$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  vérifie  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

□

Toute matrice de  $SO(2)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

avec  $\theta \in \mathbb{R}$  unique modulo  $2\pi$ . Une telle matrice représente la rotation d'angle  $\theta$  du plan euclidien orienté canonique  $\mathbb{R}^2$ .

Toute matrice de  $O(2)$  de déterminant négatif peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

avec  $\theta \in \mathbb{R}$  unique modulo  $2\pi$ . Une telle matrice représente la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $\mathbb{R}(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$  du plan euclidien orienté canonique  $\mathbb{R}^2$ .

**Corollaire 21**

L'application :

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est un morphisme surjectif du groupe additif  $\mathbb{R}$  vers  $SO(2)$  de noyau  $2\pi\mathbb{Z}$ .  
En particulier, le groupe  $SO(2)$  est commutatif.

*Exemple* Toute matrice  $A$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$A = OT$$

avec  $O \in O(n)$  et  $T$  triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs (*décomposition d'Iwasawa*).

La famille  $(c_1, \dots, c_n)$  des colonnes de  $A$  est, en effet, une base de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base orthonormalisée de  $(c_1, \dots, c_n)$ , on a :

$$A = OT$$

où  $O$  est la matrice dont la famille des colonnes est  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $T$  est la matrice de  $(c_1, \dots, c_n)$  dans  $(e_1, \dots, e_n)$ . On conclut alors en remarquant que  $O$  est orthogonale puisque  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormée et que  $T$  est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Pour montrer l'unicité, supposons que l'on ait  $A = OT = O_1T_1$  avec les mêmes conditions. La matrice :

$$O_1^{-1}O = T_1T^{-1}$$

est alors orthogonale et triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs. Il est immédiat qu'elle est alors égale à  $I_n$ . On obtient donc  $O_1 = O$  et  $T_1 = T$ .

### Produit mixte d'un espace euclidien orienté

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont deux bases orthonormées de  $E$ , les formes déterminant dans  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont reliées par la relation :

$$\det_{\mathcal{C}} = (\det P)^{-1} \det_{\mathcal{B}}$$

où  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ . Elles sont donc égales au signe près puisque  $P$  est orthogonale.

*Exemple* Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Pour toute famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $E^n$ , on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)^2 = \det((x_i | x_j))$$

(déterminant de Gram).

En effet, si  $A = (\alpha_{i,j})$  est la matrice de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathcal{B}$ , la relation :

$$(x_i | x_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,i} \alpha_{k,j}$$

montre que l'on a  $(x_i | x_j) = {}^tAA$ .

On oriente l'espace  $E$  en choisissant l'une des classes d'équivalence, appelée classe des bases directes, de l'ensemble des bases de  $E$  muni de la relation :

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{C} \iff \det_{\mathcal{B}} \mathcal{C} > 0.$$

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont alors deux bases orthonormées directes de  $E$ , les formes déterminant dans  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont alors égales.



**Définition 8**

On appelle *produit mixte* d'un espace euclidien orienté, et l'on note :

$$[x_1, \dots, x_n],$$

la forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  égale à la forme déterminant dans toute base orthonormée directe de  $E$ .

*Exemple* Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une suite de vecteurs de  $E$ , on a l'inégalité d'Hadamard :

$$|[x_1, \dots, x_n]| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

Si la suite  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, l'inégalité est évidente. Sinon, considérons la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  orthogonalisée de  $(x_1, \dots, x_n)$ . La matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  de cette famille dans  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure. On a donc :

$$|[x_1, \dots, x_n]| = \det A = \alpha_{1,1} \cdots \alpha_{n,n} \quad \text{et} \quad \|v_i\|^2 = \sum_{k=1}^i \alpha_{k,i}^2 \geq \alpha_{i,i}^2$$

pour tout  $i$ . On voit de plus qu'il n'y a égalité que lorsque  $A$  est diagonale, c'est-à-dire lorsque  $(x_1, \dots, x_n)$  est orthogonale.

Lorsque  $E$  est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, le produit vectoriel  $x \wedge y$  de deux vecteurs est défini comme l'unique vecteur vérifiant :

$$\forall z \in E, \quad (x \wedge y \mid z) = [x, y, z].$$

**1.4 Réduction des endomorphismes symétriques**

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

**Existence d'une valeur propre réelle**

La proposition suivante est le résultat essentiel de la théorie des endomorphismes autoadjoints.

**Proposition 22**

Si  $E$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , l'endomorphisme symétrique  $u$  possède une valeur propre réelle.

**Démonstration** Par composition, l'application  $x \mapsto (x | u(x))$  est continue de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ . La sphère de centre 0 et de rayon 1 de  $E$ , étant compacte, cette application atteint sa borne supérieure :

$$\alpha_0 = \sup_{x \in S(0,1)} (x | u(x))$$

en un vecteur  $x_0 \in S(0, 1)$ .

Soit  $y$  un vecteur unitaire orthogonal à  $x_0$ . Par le théorème de Pythagore, le vecteur :

$$x(t) = (\cos t) x_0 + (\sin t) y$$

appartient à  $S(E)$ . La fonction numérique  $f(t) = (x(t) | u(x(t)))$  est donc majorée par  $\alpha_0$  et atteint cette valeur pour  $t = 0$ . Puisque  $u$  est autoadjoint, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos^2 t (x_0 | u(x_0)) + \cos t \sin t (x_0 | u(y)) \\ &\quad + \cos t \sin t (y | u(x_0)) + \sin^2 t (y | u(y)) \\ &= \cos^2 t (x_0 | u(x_0)) + 2 \cos t \sin t (u(x_0) | y) \\ &\quad + \sin^2 t (y | u(y)). \end{aligned}$$

Cela entraîne que  $f$  est dérivable et, 0 étant un maximum, la relation :

$$2 (u(x_0) | y) = f'(0) = 0.$$

Ainsi  $u(x_0)$  est orthogonal à tout vecteur unitaire de  $\{x_0\}^\perp$ . Il est donc proportionnel à  $x_0$  par double orthogonalité et il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$u(x_0) = \lambda x_0. \quad \square$$

### Remarques

- La démonstration que nous venons de donner du théorème précédent repose sur la compacité de la sphère unité de  $E$ . Nous en donnerons une démonstration reposant sur le théorème de d'Alembert dans la section suivante (corollaire 52).
- On peut aussi utiliser la caractérisation des polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ . Nous avons vu, en effet, dans l'exemple 1. page 214 du chapitre «réduction des endomorphismes» que cela entraîne qu'il existe un sous-espace vectoriel  $F$  de dimension 1 ou 2 de  $E$  stable par  $u$ .
  1. Si  $F$  est de dimension 1, tout vecteur non nul de  $F$  est un vecteur propre de  $u$  et le spectre (réel) de  $u$  est non vide.
  2. Si  $F$  est de dimension 2, l'endomorphisme  $v$  induit par  $u$  sur  $F$  est autoadjoint et sa matrice dans une base orthonormée de  $F$  est symétrique de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique :

$$C_v(X) = X^2 - (\alpha + \gamma)X + (\alpha\gamma - \beta^2)$$

est de discriminant :

$$\Delta = (\alpha + \gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2) = (\alpha - \gamma)^2 + \beta^2$$

positif. Ainsi, l'endomorphisme  $v$ , et par conséquent  $u$ , possède une valeur propre réelle.

### Orthogonalité des sous-espaces propres

#### Proposition 23

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique  $u$  sont deux à deux orthogonaux.

**Démonstration** Soient en effet deux vecteurs propres  $x_1$  et  $x_2$  de  $u$  associés à des valeurs propres distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1 | x_2) &= (\lambda_1 x_1 | x_2) - (x_1 | \lambda_2 x_2) \\ &= (u(x_1) | x_2) - (x_1 | u(x_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $u$  est symétrique. Comme  $\lambda_1 - \lambda_2$  est non nul, il vient  $(x_1 | x_2) = 0$ . □

### Théorème spectral

#### Théorème 24 (Théorème spectral)

Tout endomorphisme symétrique  $u$  d'un espace euclidien  $E$  est diagonalisable et  $E$  est la somme orthogonale des sous-espaces propres de  $u$ .

**Démonstration** La somme  $G$  des sous-espaces propres de  $u$ , qui est une somme orthogonale par le point précédent, est stable par  $u$ . Son supplémentaire orthogonal  $G^\perp$  l'est aussi puisqu'il est stable par  $u^* = u$ .

L'endomorphisme  $u'$  induit par  $u$  sur  $G^\perp$  est évidemment symétrique. Si  $G^\perp$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , il possède une valeur propre ce qui contredit  $G \cap G^\perp = \{0\}$  puisque tout vecteur propre de  $u'$  appartient aussi à  $G$ . Il vient alors  $G = E$ , ce qui achève la démonstration □

Si  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  est le spectre de l'endomorphisme symétrique  $u$ , on a :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_p}(u).$$

**Corollaire 25**

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique si, et seulement si, il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est symétrique si, et seulement si, il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

**Démonstration**

- ▶ Si  $u$  est autoadjoint, on obtient une base orthonormée de diagonalisation de  $u$  par concaténation des bases orthonormées des sous-espaces propres de  $u$ . La réciproque vient de ce qu'une matrice diagonale est symétrique et qu'un endomorphisme de matrice symétrique dans une base orthonormée est symétrique.
- ▶ Il suffit d'appliquer le point précédent à l'endomorphisme  $X \mapsto AX$  de l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^n$  en remarquant qu'une base de cet espace est orthonormée si, et seulement si, la matrice de passage de la base canonique à cette base est orthogonale.  $\square$

Dans ces conditions, on dira que  $u$  est orthogonalement diagonalisable et  $A$  orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

**Remarques**

- Le corollaire précédent fournit une condition suffisante extrêmement simple de diagonalisabilité d'une matrice réelle : il suffit qu'elle soit symétrique. On aura garde de croire que ce résultat reste vrai pour les matrices complexes : la matrice complexe symétrique  $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$  est nilpotente non nulle. Elle n'est donc pas diagonalisable.
- On cherchera évidemment à diagonaliser un endomorphisme symétrique  $u$  dans une base orthonormée. On procédera de la façon suivante.
  1. On déterminera de façon classique le spectre et les sous-espaces propres de l'endomorphisme  $u$ .
  2. On déterminera une base orthonormée de chaque sous-espace propre, en utilisant, par exemple, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. La concaténation de ces bases sera une base orthonormée  $\mathcal{C}$  de diagonalisation de  $u$ .
  3. Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ , la matrice  $P$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{B}$  est une matrice orthogonale telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale. La matrice  $D$  représente, rappelons le, la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{C}$ . Il faut remarquer pour éviter trop de calculs que,  $P$  étant orthogonale  $P^{-1}$  est égale à  ${}^tP$ .

4. On peut de plus imposer à  $\mathcal{C}$  d'avoir même orientation que  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire au déterminant de  $P$  d'être positif, en changeant si nécessaire le dernier vecteur de  $\mathcal{C}$  en son opposé.

### Réduction d'une forme bilinéaire symétrique

Soit  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  de forme quadratique associée  $Q$ . Nous avons vu qu'il existe un unique endomorphisme symétrique  $u$  tel que  $\varphi = \varphi_u$  c'est-à-dire :

$$\varphi(x, y) = (x \mid u(y)).$$

#### Proposition 26

Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est diagonale.

**Démonstration** Dans une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale, la matrice de  $\varphi$  qui est égale à celle de  $u$  est aussi diagonale. □

Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de diagonalisation de  $u$  et  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ , on a alors les points suivants :

- la forme bilinéaire  $\varphi$  s'écrit :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i,$$

- la forme quadratique  $q$  s'écrit donc comme combinaison linéaire de carrés :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

en notant  $(x_i)$  et  $(y_i)$  les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}$ .

Les  $\lambda_i$  s'appellent les invariants de  $\varphi$  (ou de  $Q$ ) et les droites  $\mathbb{R}e_i$ , les directions principales. La signature de  $\varphi$  est le couple  $(p, q)$  où  $p$  est le nombre de  $\lambda_i$  strictement positifs et  $q$  celui de  $\lambda_i$  strictement négatifs. Le rang de  $\varphi$ , égal à  $p + q$ , est aussi celui de  $u$ .

## Caractérisation des endomorphismes symétriques positifs ou définis positifs

### Proposition 27

Un endomorphisme symétrique  $u$  est :

- positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives ;
- défini positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.

**Démonstration** Si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , on a :

$$(x | u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2$$

en notant  $(\alpha_i)$  les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ .

- Si  $u$  est positif,  $\lambda_i = (e_i | u(e_i))$  est positif pour tout  $i$ . Si, réciproquement,  $\lambda_i$  est positif pour tout  $i$ , on a :

$$(x | u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \geq 0$$

pour tout  $x$ . Cela provient aussi de la considération de la signature de  $\varphi_u$ .

- Il suffit de remarquer que  $u$  est défini positif si, et seulement si, il est positif et inversible.  $\square$

**Remarque** On obtient évidemment la même caractérisation des matrices symétriques positives ou définies positives.

## Norme d'un endomorphisme

### Proposition 28

- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique, on a :

$$\|u\| = \max_{\lambda \in \text{sp}(u)} |\lambda|.$$

- Si  $v \in \mathcal{L}(E)$  est quelconque, on a :

$$\|v\| = \max_{\mu \in \text{sp}(v^* \circ v)} \sqrt{\mu}.$$

**Démonstration**

► Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est la matrice  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . En notant  $(\alpha_i)$  les coordonnées de  $x$ , on obtient :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \alpha_i^2 \leq \left( \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i| \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right).$$

Cela montre  $\|u\| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i|$ . Si  $i_0$  est un indice tel que  $|\lambda_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i|$ , on a :

$$\|u(e_{i_0})\| = |\lambda_{i_0}|.$$

Il vient finalement  $\|u\| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i|$ .

► Nous avons vu que  $v^* \circ v$  est un endomorphisme autoadjoint positif. Ses valeurs propres sont donc positives. On a alors d'après la proposition 8 page 644 :

$$\|v\| = \|v^* \circ v\|^{1/2} = \left( \max_{\mu \in \text{sp}(v^* \circ v)} \mu \right)^{1/2}. \quad \square$$

► **Attention** La norme d un endomorphisme  $v$ , même scindé, n'est pas en général égale à  $\max_{\lambda \in \text{sp}(v)} |\lambda|$ . Si  $v$  est nilpotent non nul, on a  $\|v\| \neq 0$  et  $\max_{\lambda \in \text{sp}(v)} |\lambda| = 0$ .

**Exemples**

1. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. La matrice  $B = {}^tAA$  est égale à  $\text{diag}(0, 1, \dots, 1)$ . On a donc  $\|u_A\| = \sqrt{\|u_B\|} = 1$  où  $u_A$  et  $u_B$  désignent les endomorphismes canoniquement associés à  $A$  et  $B$ .

2. Si  $u$  est un endomorphisme symétrique positif, il existe un et un seul endomorphisme symétrique positif  $v$ , appelé *racine carrée* de  $u$ , vérifiant  $u = v^2$ .

Puisque  $u$  est symétrique positif,  $u$  est diagonalisable de spectre  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  (les  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts) contenu dans  $\mathbb{R}^+$ . Ses projecteurs spectraux  $p_i$  sont autoadjoints puisque ses sous-espaces propres  $E_i$  sont orthogonaux et l on a :

$$u = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r.$$

• L'endomorphisme  $v = \sqrt{\lambda_1} p_1 + \dots + \sqrt{\lambda_r} p_r$  est symétrique positif comme somme d'endomorphismes symétriques positifs et vérifie bien sûr  $v^2 = u$ .

- Considérons alors un endomorphisme symétrique positif  $w$  vérifiant  $w^2 = u$ . Puisque  $w$  commute avec  $u$ , cet endomorphisme laisse stable les sous-espaces propres de  $u$  et peut s'écrire :

$$w = w_1 \oplus \dots \oplus w_r$$

en notant  $w_i$  l'endomorphisme induit par  $w$  sur  $E_i$ .

Il est immédiat que  $w_i$  est symétrique positif et vérifie  $w_i^2 = \lambda_i \text{Id}_{E_i}$ . Sa matrice dans une base orthogonale de diagonalisation est une matrice diagonale à diagonale positive  $D_i$  vérifiant  $D_i^2 = \lambda_i I_{n_i}$  ( $n_i = \dim E_i$ ). On a donc  $D_i = \sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$  et  $w_i = \sqrt{\lambda_i} p_i$ . Finalement  $w$  est égal à  $v$ .

3. Toute matrice  $A$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$A = OS$$

avec  $O \in O(n)$  et  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  (décomposition de Cartan).

La matrice  ${}^tAA$  est symétrique définie positive. Elle possède donc une racine carree  $S$  appartenant à  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Notons alors  $O$  la matrice  $AS^{-1}$ . La relation :

$${}^tOO = S^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}(S^2)S^{-1} = I_n$$

montre que  $O$  est orthogonale.

Pour montrer l'unicité, supposons que l'on ait  $A = OS = O_1S_1$  avec les mêmes conditions. La matrice :

$$O_1^{-1}O = S_1S^{-1}$$

est orthogonale et symétrique définie positive. Elle est donc diagonalisable de spectre réduit à  $\{1\}$ , c'est-à-dire égale à  $I_n$ . Ainsi  $O = O_1$  et  $S = S_1$ .

### 1.5 Réduction des endomorphismes normaux

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

#### Endomorphismes normaux

##### Définition 9

On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est *normal* si  $u$  et  $u^*$  commutent.

Lorsque  $E$  est de dimension 0 ou 1, tous les éléments de  $\mathcal{L}(E)$  sont normaux. Le cas de la dimension 2 est décrit par la proposition suivante :



**Proposition 29**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée d'un espace vectoriel de dimension 2.

- Un endomorphisme  $u$  de  $\mathcal{L}(E)$  est normal si, et seulement si, sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est symétrique ou de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

- Il est symétrique si, et seulement si, il possède un vecteur propre.

**Démonstration**

- L'endomorphisme  $u$  est normal si, et seulement si, sa matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{B}$  commute avec sa transposée. Cette propriété est équivalente aux relations :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ \alpha\beta + \gamma\delta &= \alpha\gamma + \beta\delta \\ \beta^2 + \delta^2 &= \gamma^2 + \delta^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, soit à  $\beta = \gamma = 0$  et  $\alpha, \delta$  quelconque, soit  $\beta = \gamma$  non nul et  $\delta = -\alpha$ , soit  $\beta = -\gamma$  non nul et  $\alpha = \delta$ .

- Le polynôme caractéristique de  $u$  est  $(X - \alpha)^2 + \beta^2$  n'a pas de racine réelle lorsque la matrice de  $u$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  avec  $\beta \neq 0$ . Ainsi, l'endomorphisme  $u$  est symétrique si, et seulement si,  $u$  possède un vecteur propre. □

**Théorème 30**

Un endomorphisme  $u$  est normal si et seulement si il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à une diagonale par blocs :

- de taille 1,
- ou de taille 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

**Démonstration** Il est évident qu'un endomorphisme possédant dans une base orthonormée une matrice de la forme indiquée est normal. Montrons l'implication directe.

Le théorème est vrai si  $E$  est de dimension 1. On raisonne par récurrence sur la dimension de  $E$  en supposant le résultat acquis en dimension strictement inférieure à  $n$ .

Soit donc  $u$  un endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension  $n$ . Les endomorphismes :

$$u + u^* \text{ et } u^* \circ u$$

sont symétriques et commutent puisque l'on a :

$$(u + u^*) \circ (u^* \circ u) = u^* \circ u \circ u + u^* \circ u^* \circ u = (u^* \circ u) \circ (u + u^*).$$

Considérons alors une valeur propre  $\lambda$  de  $u + u^*$ . Par ce qui précède, le sous-espace propre  $E_\lambda(u + u^*)$  est stable par  $u^* \circ u$ . Comme l'endomorphisme induit sur ce sous-espace par  $u^* \circ u$  est diagonalisable, il existe un vecteur non nul  $x$  et un  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que :

$$(u + u^*)(x) = \lambda x \text{ et } (u^* \circ u)(x) = \mu x.$$

Le sous-espace  $F = \text{Vect}(x, u(x))$  est de dimension 1 ou 2. Il est stable par  $u$  puisque l'on a :

$$u(u(x)) = u(\lambda x - u^*(x)) = \lambda u(x) - \mu x$$

et stable par  $u^*$  de la même façon.

L'endomorphisme  $v$  induit par  $u$  sur  $F$  est normal. Il existe donc une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $F$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}^*$$

suivant que  $v$  est autodjoint ou non.

Il est clair que le sous-espace  $F^\perp$  est stable par  $u$  et  $u^*$  et que l'endomorphisme  $w$  induit par  $u$  sur  $F^\perp$  est normal. Par hypothèse de récurrence, il existe alors une base orthonormée  $\mathcal{B}''$  de  $F^\perp$  dans laquelle la matrice a la forme indiquée dans l'énoncé du théorème. Il en est de même de la matrice de  $u$  dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$  résultant de la concaténation de  $\mathcal{B}'$  et de  $\mathcal{B}''$  □

### Automorphismes orthogonaux

Un automorphisme orthogonal  $u$  est normal puisque l'on a :

$$u^* \circ u = u \circ u^* = \text{Id}_E.$$

### Théorème 31

Un endomorphisme  $u$  est orthogonal si, et seulement si, il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à une diagonale par blocs :

- de taille un de la forme  $(\pm 1)$ ,
- ou de taille 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[.$$

**Démonstration** Puisque l'endomorphisme induit par un automorphisme orthogonal est orthogonal, le théorème du point précédent montre qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs orthogonaux de dimension 1 ou de dimension 2 de

la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}^*.$$

On conclue alors en remarquant qu'une matrice :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}^*$$

est orthogonale si, et seulement si, il existe  $\theta \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$  tel que  $\alpha = \cos \theta$  et  $\beta = \sin \theta$  et qu'une matrice  $(\gamma)$  est orthogonale si, et seulement si,  $\gamma = \pm 1$ .

La réciproque est évidente. □

## 2. Endomorphismes d'un espace hermitien

Cette section est consacrée à l'étude des endomorphismes d'un espace hermitien. Sa présentation suit la section précédente avec des allègements ; les démonstrations formellement identiques aux démonstrations euclidiennes correspondantes seront omises.

Dans cette section,  $E$  désigne un espace hermitien de dimension  $n$ .

### 2.1 Adjoint d'un endomorphisme

#### Définition

#### Proposition 32

Pour tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il existe un unique endomorphisme, appelé *adjoint* de  $u$  et noté  $u^*$ , tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \mid u(y)) = (u^*(x) \mid y). \quad (\text{adj})$$

**Démonstration** Pour tout  $x$ , l'application  $y \mapsto (x \mid u(y))$  est une forme linéaire sur  $E$ . Il existe donc un unique vecteur que l'on notera  $u^*(x)$  tel que l'on ait :

$$\forall y \in E, \quad (x \mid u(y)) = (u^*(x) \mid y).$$

On obtient ainsi l'unique application  $u^* : x \mapsto u^*(x)$  de  $E$  dans lui-même vérifiant la relation (adj).

Soit  $(\alpha, \alpha', x, x') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times E \times E$ . On a pour tout  $y$  de  $E$  :

$$\begin{aligned} (u^*(\alpha x + \alpha' x') \mid y) &= (\alpha x + \alpha' x' \mid u(y)) \\ &= \overline{\alpha}(x \mid u(y)) + \overline{\alpha'}(x' \mid u(y)) \\ &= \overline{\alpha}(u^*(x) \mid y) + \overline{\alpha'}(u^*(x') \mid y) \\ &= (\alpha u^*(x) + \alpha' u^*(x') \mid y) \end{aligned}$$

soit, par orthogonalité :

$$u^* (\alpha x + x') = \alpha u^* (x) + \alpha' u^* (x').$$

Cela valant pour tout  $(\alpha, \alpha', x, x')$ , l'application  $u^*$  est linéaire □

**Proposition 33**

L'application  $u \mapsto u^*$  est une application semi-linéaire bijective de  $\mathcal{L}(E)$  dans lui-même vérifiant :

1.  $(u^*)^* = u$  pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
2.  $(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$ .
3.  $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$  pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ .

**Démonstration** Soit  $(\alpha, \beta, u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ . On a .

$$\begin{aligned} (x \mid (\alpha u + \beta v)(y)) &= \alpha(x \mid u(y)) + \beta(x \mid v(y)) \\ &= \alpha(u^*(x) \mid y) + \beta(v^*(x) \mid y) \\ &= ((\bar{\alpha}u^* + \bar{\beta}v^*)(x) \mid y) \end{aligned}$$

pour tout  $(x, y) \in E^2$ . Cela donne  $(\alpha u + \beta v)^* = \bar{\alpha}u^* + \bar{\beta}v^*$ . L'application  $u \mapsto u^*$  est donc semi-linéaire.

Les trois autres points se démontrent comme dans le cas euclidien □

**Matrice adjointe**

Soit  $A = (\alpha_{i,j})$  une matrice de  $M_{n,m}(\mathbb{C})$ .

On appelle *adjointe* de  $A$  la matrice :

$$A^* = {}^t(\overline{A}) = (\overline{{}^tA}) = (\overline{\alpha_{j,i}}) \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$$

L'application  $A \mapsto A^*$  est une application semi-linéaire bijective de  $M_{n,m}(\mathbb{C})$  sur  $M_{m,n}(\mathbb{C})$ . Elle vérifie  $(A^*)^* = A$  et :

$$(AB)^* = B^* A^*$$

lorsque  $A$  et  $B$  sont multipliables.

### Propriétés

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

#### Proposition 34

Si  $u$  est inversible, alors  $u^*$  est inversible et l'on a :

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^* .$$

**Démonstration** Les relations  $u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$  et  $u \circ u^{-1} = \text{Id}_E$  entraînent, en effet :

$$u^* \circ (u^{-1})^* = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad (u^{-1})^* \circ u^* = \text{Id}_E . \quad \square$$

#### Proposition 35

Dans toute base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}} u)^* .$$

**Démonstration** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Si  $(\alpha_{i,j})$  et  $(\beta_{i,j})$  désignent les matrices de  $u$  et  $u^*$  dans  $\mathcal{B}$ , on a en effet :

$$\forall (i,j), \quad \beta_{i,j} = (e_i | u^*(e_j)) = (u(e_i) | e_j) = \overline{(e_j | u(e_i))} = \overline{\alpha_{j,i}} . \quad \square$$

**Remarque** En particulier, l'endomorphisme adjoint de l'endomorphisme de l'espace hermitien  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à la matrice  $A$  est l'endomorphisme associé à  $A^*$ .

#### Corollaire 36

On a :

$$\text{tr } u^* = \overline{\text{tr } u} \quad \text{et} \quad \det u^* = \overline{\det u} .$$

**Démonstration** La formule concernant le déterminant, par exemple, provient de la relation :

$$\det A^* = \det {}^t(\overline{A}) = \det \overline{A} = \overline{\det A}$$

où  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base orthonormée  $\square$

#### Proposition 37

On a :

$$\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$$

En particulier,  $\text{rg } u^* = \text{rg } u$ .

**Proposition 38**

Un sous-espace  $F$  de  $E$  est stable par  $u$  si, et seulement si,  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

L'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  est munie de la norme :

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

subordonnée à la norme euclidienne de  $E$ .

**Proposition 39**

On a :

$$\|u^*\| = \|u\| \quad \text{et} \quad \|u^* \circ u\| = \|u\|^2.$$

**2.2 Endomorphismes hermitiens****Définition 10**

On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est *autoadjoint*, ou *hermitien*, si l'on a  $u^* = u$ , c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x | u(y)) = (u(x) | y)$$

On notera  $\mathcal{H}(E)$  les ensembles de endomorphismes hermitiens de  $\mathcal{L}(E)$ .

*Exemple* De même que dans le cas euclidien, une projection et une symétrie sont orthogonales si, et seulement si, ce sont des endomorphismes autoadjoints.

**Définition 11**

On dit qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est *hermitienne* si  $A^* = A$ .

**Proposition 40**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

L'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est hermitien si, et seulement si, sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est hermitienne.

**Proposition 41**

L'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme hermitien est aussi hermitien.

On notera  $H_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices hermitiennes de  $M_n(\mathbb{C})$ .

**Formes sesquilinéaires hermitiennes**

Pour tout  $u \in \mathcal{H}(E)$ , l'application  $\varphi_u : (x, y) \mapsto (x \mid u(y))$  est une forme sesquilinéaire sur  $E$ . Elle est hermitienne, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mid u(y)) = (u(y) \mid x) = \overline{(y \mid u(x))}$$

puisque  $u$  est autoadjoint.

**Proposition 42**

L'application  $u \mapsto \varphi_u$  est un isomorphisme de l'espace  $\mathcal{H}(E)$  sur l'espace  $\mathcal{SL}_h(E)$  des formes sesquilinéaires hermitiennes sur  $E$ .

**Démonstration** Il est immédiat que l'application  $u \mapsto \varphi_u$  est linéaire de  $\mathcal{H}(E)$  dans  $\mathcal{SL}_h(E)$ .

Si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée de  $E$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

La relation  $\varphi_u = 0$  entraîne  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = 0$  et, par conséquent,  $u = 0$ . Si  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{SL}_h(E)$ , l'endomorphisme  $u$  défini par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_u)$$

est hermitien et vérifie  $\varphi = \varphi_u$ . □

**Endomorphismes hermitiens définis positifs**

**Définition 12**

On dit qu'un endomorphisme hermitien  $u$  est :

- *positif* si l'on a  $(x \mid u(x)) \geq 0$  pour tout  $x \in E$ ,
- *défini positif* s'il est positif et si  $(x \mid u(x)) = 0$  entraîne  $x = 0$ .

Un endomorphisme  $u$  est donc positif (respectivement défini positif) si, et seulement si, la forme sesquilinéaire hermitienne associée  $\varphi_u$  est positive (respectivement définie positive).

On notera  $\mathcal{H}^+(E)$  et  $\mathcal{H}^{++}(E)$  les ensembles des endomorphismes autoadjoints respectivement positifs et définis positifs de  $\mathcal{L}(E)$ . Il est clair que ces ensembles sont stables par addition et multiplication par un scalaire strictement positif.

*Exemple* Si  $u$  appartient à  $\mathcal{L}(E)$ , les endomorphismes  $u^* \circ u$  et  $u \circ u^*$  sont autoadjoints positifs. Ils sont définis positifs si, et seulement si,  $u$  est inversible.

### Définition 13

On dit qu'une matrice hermitienne  $A \in H_n(\mathbb{C})$  est :

- *positive* si l'on a  $X^*AX \geq 0$  pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,
- *définie positive* si elle est positive et si  $X^*AX = 0$  entraîne  $X = 0$ .

Une matrice symétrique  $A$  est donc positive (respectivement définie positive) si, et seulement si, l'endomorphisme hermitien associé :

$$X \mapsto AX$$

de  $\mathbb{C}^n$  est positif (respectivement défini positif).

### Proposition 43

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$

Un endomorphisme hermitien  $u$  est positif (respectivement défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est positive (respectivement définie positive).

On notera  $H_n^+(\mathbb{C})$  et  $H_n^{++}(\mathbb{C})$  les ensembles de matrices hermitiennes positives et hermitiennes définies positives de  $M_n(\mathbb{C})$ .

*Exemple* Toute matrice hermitienne définie positive  $A$  de  $M_n(\mathbb{C})$  peut s'écrire de façon unique :

$$A = T^*T$$

avec  $T$  triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs (*décomposition de Cholevski*).



## 2.3 Endomorphismes unitaires

### Définition

#### Définition 14

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit *unitaire* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y).$$

#### Proposition 44

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est unitaire si, et seulement si, on a :

$$u^* \circ u = \text{Id}_E \quad \text{ou} \quad u \circ u^* = \text{Id}_E.$$

**Démonstration** Par définition de l'adjoint,  $u$  est unitaire si, et seulement si, on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad ((u^* \circ u)(x) \mid y) = (x \mid y),$$

c'est-à-dire  $u^* \circ u = \text{Id}_E$ . Comme  $E$  est de dimension finie, cette relation est équivalente à  $u \circ u^* = \text{Id}_E$ . □

### Groupe unitaire

#### Proposition 45

Tout endomorphisme unitaire  $u$  est inversible et vérifie :

$$|\det u| = 1.$$

**Démonstration** Les relations  $u^* \circ u = \text{Id}_E$  et  $\det u^* = \det u$  entraînent en effet :

$$|\det u|^2 = \det u^* \det u = 1. \quad \square$$

#### Définition 15

L'ensemble des endomorphismes unitaires de  $E$  est un sous-groupe de  $\mathcal{GL}(E)$  appelé *groupe unitaire* de  $E$  et noté  $\mathcal{U}(E)$

**Définition 16**

L'ensemble des endomorphismes unitaires de  $E$  de déterminant 1 est un sous-groupe de  $\mathcal{U}(E)$  appelé *groupe spécial unitaire* de  $E$  et note  $SU(E)$ .

**Démonstration** L'application  $u \mapsto \det u$  est un morphisme de groupes de  $\mathcal{U}(E)$  vers  $\mathbb{C}^*$  dont l'ensemble  $SU(E)$  est le noyau.  $\square$

**Proposition 46**

Les ensembles  $\mathcal{U}(E)$  et  $SU(E)$  sont des parties compactes de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Relation avec les bases orthonormées****Proposition 47**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

L'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est unitaire si, et seulement si l'image de  $\mathcal{B}$  par  $u$  est orthonormée.

**Démonstration** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Supposons  $u$  unitaire. On a :

$$\forall (i, j), \quad (u(e_i) \mid u(e_j)) = (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}.$$

La famille  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est donc une base orthonormée

Supposons que  $u$  transforme  $\mathcal{B}$  en la famille orthonormée  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ . Pour tout couple

de vecteurs  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ , on a :

$$(u(x) \mid u(y)) = \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j (u(e_i) \mid u(e_j)) = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \beta_i = (x \mid y). \quad \square$$

**Matrices unitaires****Définition 17**

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est *unitaire* si l'endomorphisme associé :

$$X \mapsto AX$$

est un endomorphisme unitaire de l'espace hermitien  $\mathbb{C}^n$

Les points suivantes résultent des propositions précédentes appliquées au cas de l'espace hermitien canonique  $\mathbb{C}^n$

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

- Les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (i)  $A$  est unitaire.
  - (ii)  $A^*A = I_n$ .
  - (iii)  $AA^* = I_n$ .
  - (iv) Les colonnes de  $A$  forment une famille orthonormée.
  - (v) Les lignes de  $A$  forment une famille orthonormée.
- Si  $A$  est unitaire, alors elle est inversible et vérifie  $|\det A| = 1$ .

Les ensembles  $U(n)$  et  $SU(n)$  des matrices unitaires et unitaires de déterminant 1 de  $M_n(\mathbb{C})$  sont des sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{C})$  appelés respectivement *groupe unitaire* et *groupe spécial unitaire* d'ordre  $n$ . Ce sont aussi des parties compactes de  $M_n(\mathbb{C})$ .

**Proposition 48**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

L'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est unitaire si, et seulement si, sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est unitaire.

**Proposition 49**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Une base  $\mathcal{C}$  est orthonormée si, et seulement si, la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  est unitaire.

Une matrice de dimension 1 est unitaire si, et seulement si, son coefficient est de module 1. Le cas de la dimension deux est précisé par la proposition suivante :

**Proposition 50**

- Les matrices de  $SU(2)$  sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ vérifiant } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

- Les matrices de  $U(2)$  de déterminant  $e^{i\theta}$  sont de la forme :

$$e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ vérifiant } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

**Démonstration** Soit  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  une matrice unitaire. Le vecteur  $\begin{pmatrix} -\bar{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix}$  est non nul et orthogonal à  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Il engendre le sous-espace des vecteurs de  $\mathbb{C}^2$  orthogonaux à ce vecteur. Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\bar{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

La seconde colonne de  $A$  étant unitaire, on obtient  $|\lambda| = 1$ .

► Toute matrice unitaire de déterminant 1 est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  vérifie  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

► Toute matrice unitaire de déterminant  $e^{i\theta}$  peut s'écrire  $e^{i\theta/2}A$  avec  $A \in \text{SU}(2)$ . Elle est donc de la forme :

$$e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  vérifie  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . □

**Remarque** Le groupe  $\text{SU}(2)$  n'est pas commutatif comme le montre l'exemple des matrices unitaires de Dirac :

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exemple** Toute matrice  $A$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$A = UT$$

avec  $U \in \text{U}(n)$  et  $T$  triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs (*décomposition d'Iwasawa*).

## 2.4 Réduction des endomorphismes hermitiens

Soit  $u$  un endomorphisme hermitien de  $E$ .

### Spectre d'un endomorphisme hermitien

L'endomorphisme  $u$  est scindé puisque  $E$  est un espace vectoriel complexe. La proposition suivante précise son spectre.

**Proposition 51**

Les valeurs propres de  $u$  sont réelles.

**Démonstration** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $u$  et  $x \neq 0$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . On obtient :

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} - \lambda) (x | x) &= (\lambda x | x) - (x | \lambda x) \\ &= (u(x) | x) - (x | u(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $u$  est autoadjoint. Comme  $(x | x)$  est non nul, il vient  $\bar{\lambda} = \lambda$ . □

Le corollaire suivant montre, comme nous l'avions annoncé, que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien non réduit à  $\{0\}$  possède une valeur propre réelle. Il repose évidemment sur le théorème de d'Alembert puisqu'il utilise que tout endomorphisme d'un espace complexe est scindé.

**Corollaire 52**

Tout endomorphisme symétrique  $u$  d'un espace euclidien  $E$  est scindé.

**Démonstration** Il suffit de montrer que la matrice de  $u$  dans une base orthonormée, que l'on notera  $A$ , est scindée sur  $\mathbb{R}$ . Cette matrice, réelle et symétrique, est une matrice hermitienne de  $M_n(\mathbb{C})$ . L'endomorphisme  $X \mapsto AX$  de  $\mathbb{C}^n$  associé est donc autoadjoint. La proposition précédente montre que son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{R}$ . □

**Orthogonalité des sous-espaces propres**

**Proposition 53**

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme hermitien  $u$  sont deux à deux orthogonaux.

**Démonstration** Soient en effet deux vecteurs propres  $x_1$  et  $x_2$  de  $u$  associés à des valeurs propres distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On obtient alors en utilisant que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) (x_1 | x_2) &= (\lambda_1 x_1 | x_2) - (x_1 | \lambda_2 x_2) \\ &= (u(x_1) | x_2) - (x_1 | u(x_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $u$  est autoadjoint. Comme  $\lambda_1 - \lambda_2$  est non nul, il vient  $(x_1 | x_2) = 0$ . □

## Théorème spectral

### Théorème 54 (Théorème spectral)

Tout endomorphisme hermitien  $u$  d'un espace hermitien  $E$  est diagonalisable à valeurs propres réelles et  $E$  est la somme orthogonale des sous-espaces propres de  $u$ .

**Démonstration** Nous avons vu que le spectre de  $u$  est inclus dans  $\mathbb{R}$ . On termine alors la démonstration de la même façon que dans le cas euclidien.  $\square$

Si  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  est le spectre de l'endomorphisme hermitien  $u$ , on a :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_p}(u).$$

### Corollaire 55

- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est hermitien si, et seulement si, il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale réelle.
- Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est hermitienne si, et seulement si, il existe une matrice unitaire  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale réelle.

### Démonstration

- Si  $u$  est hermitien, on obtient une base orthonormée dans laquelle sa matrice est diagonale réelle en concaténant des bases orthonormées des sous-espaces propres de  $u$ . La réciproque vient de ce qu'une matrice diagonale réelle est hermitienne et qu'un endomorphisme de matrice hermitienne dans une base orthonormée est hermitien.
- Il suffit d'appliquer le point précédent à l'endomorphisme  $X \mapsto AX$  de l'espace hermitien canonique  $\mathbb{C}^n$  en remarquant qu'une base de cet espace est orthonormée si, et seulement si, la matrice de passage de la base canonique à cette base est unitaire.  $\square$

### Remarques

- On peut démontrer le premier point du corollaire précédent d'une autre façon : puisque le corps de base est  $\mathbb{C}$ , l'endomorphisme  $u$  est scindé et il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice  $A$  de  $u$  est triangulaire supérieure. Comme  $A$  est aussi hermitienne, elle est diagonale réelle. La base  $\mathcal{B}$  vérifie donc les conditions désirées.
- De même que dans le cas euclidien, on cherchera à diagonaliser un endomorphisme hermitien dans une base orthonormée. On procédera de la façon suivante.

1. On déterminera classiquement le spectre et les sous-espaces propres de l'endomorphisme  $u$ .
2. On déterminera une base orthonormée de chaque sous-espace propre, en utilisant, par exemple, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. La concaténation de ces bases sera une base orthonormée  $\mathcal{C}$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}} u$  soit diagonale réelle.
3. Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ , la matrice  $P$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{B}$  est une matrice unitaire telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale réelle. La matrice  $D$  représente, rappelons le, la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{C}$ . Il faut remarquer pour éviter trop de calculs que,  $P$  étant unitaire,  $P^{-1}$  est égale à  $P^*$ .

### Caractérisation des endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs

Si la matrice d'un endomorphisme hermitien  $u$  est  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ( $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ) dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$ , on a alors :

$$\varphi_u(x, y) = (x | u(x)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i y_i$$

où  $(x_i)$  et  $(y_i)$  sont les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}$ .

#### Proposition 56

Un endomorphisme symétrique  $u$  est :

- positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives ;
- défini positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.

### Norme d'un endomorphisme

#### Proposition 57

- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est hermitien, on a :

$$\|u\| = \max_{\lambda \in \text{sp}(u)} |\lambda|.$$

- Si  $v \in \mathcal{L}(E)$  est quelconque, les valeurs propres de  $v^* \circ v$  sont réelles positives et on a :

$$\|v\| = \max_{\mu \in \text{sp}(v^* \circ v)} \sqrt{\mu}.$$

**Démonstration** La démonstration est identique à la démonstration euclidienne en remarquant les valeurs propres de l'endomorphisme hermitien positif  $v^* \circ v$  sont réelles positives. Si  $\mu$  est une valeur propre de  $v^* \circ v$  et si  $x$  est un vecteur propre associé, on a en effet :

$$\mu(x | x) = (x | (v^* \circ v)(x)) = (v(x) | v(x)) \geq 0$$

d'où  $\mu \geq 0$ . □

**Exemples** Comme dans le cas réel, on montre les résultats suivants.

1. si  $u$  est un endomorphisme hermitien positif, il existe un et un seul endomorphisme hermitien positif  $v$ , appelé *racine carrée* de  $u$ , vérifiant  $u = v^2$ .
2. toute matrice  $A$  de  $GL_n(\mathbb{C})$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$A = OS$$

avec  $O \in U(n)$  et  $S \in H_n^{++}(\mathbb{C})$  (*décomposition de Cartan*).

## 2.5 Réduction des endomorphismes normaux

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### Endomorphismes normaux

#### Définition 18

On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est *normal* si  $u$  et  $u^*$  commutent.

#### Proposition 58

Un endomorphisme  $u$  est normal si, et seulement si, il possède une base orthonormée de diagonalisation.

**Démonstration** Il est évident qu'un endomorphisme possédant une base de diagonalisation orthogonale est normal. Montrons l'implication directe.

Puisque le corps de base est  $\mathbb{C}$ , l'endomorphisme  $u$  est scindé. Il existe donc une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  est triangulaire supérieure. La relation  $A^*A = AA^*$  entraîne :

$$|\alpha_{1,1}|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_{1,k}|^2.$$

Cela montre que  $A$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

et, par itération, que  $A$  est diagonale. □



### Automorphismes unitaires

Un automorphisme unitaire  $u$  est normal puisque l'on a :

$$u^* \circ u = u \circ u^* = \text{Id}_E.$$

#### Théorème 59

Un endomorphisme  $u$  est unitaire si et seulement si, il existe une base orthonormée  $B$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale de la forme :

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\alpha_i| = 1.$$

**Démonstration** Il est évident qu'un endomorphisme possédant une telle matrice dans une base orthogonale est unitaire. Si, réciproquement,  $u$  est unitaire, il existe une base orthogonale de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme :

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Cette matrice étant unitaire, on a  $|\alpha_i| = 1$  pour tout  $i$ . □

## EXERCICES

- 1 Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien tel que  $u$  et son adjoint  $u^*$  aient même noyau. Comparer les noyaux de  $u$  et de  $u^2$ .
- 2 Soit  $p$  un projecteur d'un espace hermitien  $E$ .
  1. Comparer les noyaux de  $p + p^*$ ,  $p$  et  $p^*$ .
  2. Montrer que  $p + p^*$  est inversible si, et seulement si, la somme des images de  $p$  et  $p^*$  est égale à  $E$ .
3. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace hermitien  $E$ , et  $u^*$  son adjoint. Déterminer les hyperplans  $H$  de  $E$  stables par  $u^*$ .
4. Soient deux nombres réels non nuls  $\alpha$  et  $\beta$  et deux vecteurs indépendants  $a$  et  $b$  d'un espace euclidien  $E$ . Étudier l'éventuelle diagonalisation de l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par :
 
$$x \mapsto u(x) = \alpha(a|x)a + \beta(b|x)b.$$
5. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$  tel que  $u^2 = 0$ . Montrer que  $u + u^*$  est inversible si, et seulement si, le noyau et l'image de  $u$  sont égaux.
6. Montrer que pour tout endomorphisme  $u$  d'un espace euclidien, il existe une base orthonormée  $(e_i)$  de  $E$  pour laquelle  $(u(e_i)|u(e_j)) = 0$  pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ .
7. Pour tout couple  $(u, v)$  d'endomorphismes d'un espace hermitien  $E$  de dimension  $n$ , on pose  $\langle u, v \rangle = \text{tr}(u^*v)$  (produit de Schur) où le symbole  $\text{tr}$  dénote la trace d'un endomorphisme ou d'une matrice.
  1. Montrer que l'on définit ainsi une forme quadratique hermitienne définie positive, associée à une norme que l'on notera  $N$ .
  2. Démontrer l'inégalité  $N(u \circ v) \leq N(u)N(v)$ . Pourrait-on y remplacer l'inégalité par une égalité ?
  3. Démontrer l'égalité  $N(p^{-1} \circ u \circ p) = N(u)$  pour tout endomorphisme  $u$  et tout endomorphisme  $p$  unitaire (c'est-à-dire vérifiant  $p^* \circ p = \text{Id}$ ).
  4. Que peut-on en déduire pour une matrice hermitienne  $A$  et la somme des carrés de ses valeurs propres ?
  5. Démontrer qu'il n'existe pas de norme dans  $E$  telle que  $N(u)$  soit le maximum de  $\|u(x)\|$  lorsque  $x$  décrit la sphère unité de l'espace.
8. Borner la somme des éléments d'une matrice orthogonale  $A$  d'ordre  $n$ .

9. Borner la somme des valeurs absolues des éléments d'une matrice orthogonale  $A$  d'ordre  $n$ .
10. Soit  $\sigma$  une permutation de l'ensemble des entiers entre 1 et  $n$ , et  $A = (a_{i,j})$  une matrice symétrique définie positive d'ordre  $n$ . Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Dans quelles conditions a-t-on l'égalité ?

11. Si  $A = (a_{i,j})$  est la matrice d'un endomorphisme normal  $u$  d'un espace hermitien  $E$  dans une base orthonormée  $(e_i)$ , démontrer l'inégalité :

$$\left| \sum_{i,j} a_{i,j} \right| \leq n \rho$$

où  $\rho$  est le maximum des modules des valeurs propres de  $u$ . Ce majorant est-il toujours atteint ?

12. Soit sur un espace euclidien de dimension  $n$  une forme quadratique définie positive  $q$ , de forme polaire  $p$ , et  $A$  l'ensemble  $q^{-1}(1)$ . On suppose connue une famille  $a = (a_i)$  de  $n$  points de  $A$  telle que  $p(a_i, a_j) = 0$  pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ . Montrer que la somme  $\sum_i \|a_i\|^2$  est indépendante de  $a$  (théorème d'Apollonius).

13. Soit sur un espace euclidien de dimension  $n$  une forme quadratique  $q$ , et  $A = q^{-1}(1)$ . On suppose connue une famille  $a = (a_i)$  de  $n$  points de  $A$  telle que  $(a_i | a_j) = 0$  pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ . Montrer que la somme  $\sum_i \frac{1}{\|a_i\|^2}$  est indépendante de  $a$ .

14. Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $m$ , et l'application  $q$  définie sur  $E$  qui à  $P$  associe la somme de la série de terme général  $P(n)P(-n)e^{-n}$ . Calculer la signature de cette forme.

15. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Montrer deux quelconques des trois propositions suivantes implique celle qui reste :

- (i)  $u$  est une isométrie ;
- (ii)  $u^2 = -\text{Id}$  ;
- (iii)  $(x | u(x)) = 0$  pour tout vecteur  $x$  de  $E$ .

16. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace hermitien  $E$ .

1. Montrer que  $u$  est autoadjoint si, et seulement si, le produit scalaire  $(x|u(x))$  est réel pour tout vecteur  $x$  de  $E$ .
2. Montrer que  $u$  est nul si, et seulement si, le produit scalaire  $(x|u(x))$  est nul pour tout vecteur  $x$  de  $E$ .
3. Ces propriétés sont-elles vérifiées par un espace euclidien ?

17. Déterminer les endomorphismes  $u$  d'un espace euclidien orienté de dimension 3 conservant le produit vectoriel, c'est-à-dire tels que :

$$u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$$

pour tous les couples  $(x, y)$  de  $E^2$ .

18. Une famille de  $p$  vecteurs  $(x_i)$  d'un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  étant donnée, on appelle  $U$  l'ensemble des endomorphismes  $u$  de  $E$  tels que chaque  $x_i$  annule  $u + u^*$ . Montrer que  $U$  est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.

19. Soient trois vecteurs indépendants  $a, b$  et  $c$  d'un espace euclidien de dimension 3, et le réseau  $L$  formé des vecteurs de la forme  $pa + qb + qc$  pour  $p, q$  et  $r$  décrivent  $\mathbb{Z}$  tel qu'il existe une rotation (isométrie positive)  $u$  de l'espace vérifiant  $u(L) = L$ . Que peut-on dire de l'angle  $\theta$  de  $u$  ?

20. Soient  $\lambda$  un nombre réel et  $a$  un vecteur non nul d'un espace euclidien  $E$ . À quelle condition l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par :

$$x \mapsto u(x) = x + \lambda(a|x)a$$

est-il une isométrie autre que l'identité ? Expliciter alors la nature géométrique de  $u$ .

21. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le triplet  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  pour que la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2a^2 - 1 & 2ba & 2ac \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{pmatrix}$$

soit celle d'un retournement.

22. Soit  $s$  une valeur propre réelle d'un endomorphisme  $u$  d'un espace euclidien telle que le noyau de  $v = u - s \text{ Id}$  soit une droite non orthogonale au noyau de  $v^*$ . Quelle est la multiplicité de la racine  $s$  du polynôme caractéristique de  $u$  ?
23. Une matrice carrée réelle  $A$  étant donnée, on définit la relation ( $A > 0$ ) par le caractère défini positif de la matrice  $A + {}^tA$ .
1. Montrer que  $A > 0$  équivaut à l'inégalité  ${}^tXAX > 0$  pour toute colonne non nulle  $X$ . Que peut-on dire du rang de  $A$  ?
  2. Si  $(-A) > 0$  et si  $S$  est une matrice symétrique définie positive, alors les valeurs propres des matrices  $SA$  et  $AS$  ont leur parties réelles strictement négatives.

24. Si  $H$  est une matrice hermitienne définie positive et  $X$  une matrice colonne de même ordre que  $H$ , démontrer pour la norme hermitienne canonique l'inégalité :

$$\|HX\|^4 \leq ({}^t\bar{X}HX) ({}^t\bar{X}H^3X).$$

Pour quelles matrices  $X$  a-t-on égalité ?

25. Soient  $u, v$  et  $w$  trois endomorphismes autoadjoints d'un espace hermitien liés par  $u = v + w$  et tels que  $v$  soit défini positif et  $w$  positif. Montrer que  $\det v \leq \det u$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité soit stricte.
26. Démontrer que l'application  $f$  qui, à tout endomorphisme autoadjoint  $u$  d'un espace hermitien de dimension  $n \geq 2$ , associe sa plus petite valeur propre est uniformément continue, mais non différentiable.
27. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  transformant tout couple de deux vecteurs orthogonaux en couple de vecteurs orthogonaux. Que peut-on dire de la nature géométrique de  $u$  ?
28. 1. Calculer la matrice  $A$  de la projection orthogonale sur la droite dirigée par le vecteur  $\omega$  dont toutes les coordonnées sont égales à 1 dans un repère orthonormé d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ . Calculer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal, son déterminant, puis ses valeurs et vecteurs propres.

2. Soit  $c$  un nombre réel et  $A$  la matrice d'ordre  $n$  définie par  $a_{i,i} = 1$  et  $a_{i,j} = c$  si  $i \neq j$ . Exprimer  $A$  en fonction de la matrice identité  $I$  et de  $E$  ; en déduire son polynôme caractéristique, son polynôme minimal, son déterminant, puis ses valeurs et vecteurs propres.
  3. Donner une condition suffisante sur  $c$  de la forme  $c \in [a, b]$  pour qu'il existe une matrice symétrique positive  $S$  telle que  $A = S^2$ . Déterminer alors une telle matrice  $S$  (exemples :  $n = 3, c = \frac{8}{9}$  et  $c = -\frac{1}{2}$ ).
  4. Décrire géométriquement l'endomorphisme  $u$  de  $E$  ayant  $A$  comme matrice ainsi que, lorsque cela a un sens, l'endomorphisme  $v$  ayant  $S$  pour matrice.
  5. Le nombre  $c \in \mathbb{R}$  étant donné, déterminer, s'il en existe, les familles normées  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  de  $E$  telle que  $(x_i | x_j) = c$  pour tout couple d'indices  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ . On déterminera en particulier le rang de ces familles éventuelles.
- 29.** Soit  $F$  l'ensemble des endomorphismes  $u$  d'un espace euclidien  $E$  vérifiant l'égalité  $u = u \circ u^* \circ u$ .
1. Montrer que le groupe orthogonal  $O(E)$  est une partie fermée de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes de  $E$  et à la fois ouverte et fermée de  $F$ . Quelle est la nature topologique de  $F$  ?
  2. Montrer l'équivalence des quatre propositions suivantes :
    - (i)  $u \in F$  ;
    - (ii)  $u \circ u^*$  est un projecteur orthogonal ;
    - (iii)  $u^* \circ u$  est un projecteur orthogonal ;
    - (iv)  $\|u(x)\| = \|x\|$  pour tout vecteur orthogonal à  $\text{Ker } u$ .

# Chapitre 20

## Séries de Fourier

Dans ce chapitre, on appelle *fonction* toute application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$

### 1. Fonctions périodiques

#### 1.1 Espaces de fonctions periodiques

##### Définitions

Rappelons tout d'abord quelques définitions.

On appelle *période* d'une fonction  $f$ , tout réel  $p$  tel que l'on ait :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t + p) = f(t).$$

L'ensemble des périodes de  $f$  est alors un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est *périodique* si elle possède une période non nulle. On dira plus précisément que  $f$  est  $p$ -périodique si  $p$  en est une période strictement positive. Il est clair que  $f$  est alors entièrement déterminée par sa restriction à tout intervalle de la forme  $[a, a + p[$  pour  $a \in \mathbb{R}$  puisque  $f(t)$  est égal à  $f(u)$  si  $u$  désigne l'unique élément de  $[a, a + p[$  tel que  $t - u$  appartienne à  $p\mathbb{Z}$ .

Dans ce qui suit, nous ne considererons que des fonctions  $2\pi$ -périodiques. Cela ne restreint pas la généralité de l'exposé. On ramènera, si l'on veut, l'étude d'une fonction  $p$ -périodique  $f$  à celle de la fonction  $2\pi$ -periodique  $g$  en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = f\left(\frac{2\pi}{p}t\right).$$

**Définition 1**

Les ensembles des fonctions  $2\pi$ -périodiques continues et des fonctions  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux sont des sous-algèbres de l'algèbre des applications continues par morceaux de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ .

On les note respectivement  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

On notera de même  $\mathcal{C}_{2\pi}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $\mathcal{C}^k \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  les sous-algèbres de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  constituées des fonctions  $2\pi$ -périodiques respectivement de classe  $\mathcal{C}^k$  et de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux.

Lorsque  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , la fonction dérivée  $f'$  appartient bien sûr à  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Lorsque  $f$  appartient à  $\mathcal{C}^1 \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , une pseudo-dérivée  $Df$  de  $f$  n'appartient à  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  que dans la mesure où on lui donne des valeurs  $2\pi$ -périodiques (0 par exemple) sur l'ensemble des points en lesquels  $f$  n'est pas dérivable.

**Construction de fonctions périodiques**

Soit  $S = [a, a + 2\pi]$  un segment de longueur  $2\pi$  de  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est une fonction  $2\pi$ -périodique, la restriction  $g$  de  $f$  à  $S$  vérifie :

$$g(a + 2\pi) = g(a)$$

et détermine entièrement  $f$  comme nous l'avons vu. Elle est continue par morceaux si  $f$  l'est. La proposition suivante établit une réciproque à cette remarque.

**Proposition 1**

Si  $g$  est une application continue par morceaux du segment  $[a, a + 2\pi]$  vers  $\mathbb{C}$  vérifiant  $g(a + 2\pi) = g(a)$ , alors il existe une et une seule fonction  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dont la restriction à ce segment est égale à  $g$ .

**Démonstration** Notons  $\{x\}$  la partie fractionnaire  $x - [x]$  de  $x \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = g\left(\left\{\frac{t-a}{2\pi}\right\} 2\pi + a\right)$$

est l'unique fonction  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  coïncidant avec  $g$  sur l'intervalle  $[a, a + 2\pi[$ . La relation :

$$f(a + 2\pi) = g(a) = g(a + 2\pi)$$

montre qu'elle coïncide avec  $g$  sur  $S$  tout entier.

Cette fonction est continue par morceaux sur  $[a, a + 2\pi]$  puisque  $g$  l'est. Elle l'est donc par translation et réunion sur tout intervalle de la forme  $[a + 2k\pi, a + 2\ell\pi]$  avec  $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ . Tout segment étant contenu dans un intervalle de cette forme,  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$



Dans ces conditions, on vérifie aisément que  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ou à  $\mathcal{C}^k \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  si  $g$  est respectivement continue ou de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux. Par contre, elle n'est pas nécessairement de classe  $\mathcal{C}^k$  lorsque  $g$  l'est.

*Exemples* On utilisera fréquemment la proposition précédente pour construire des fonctions  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux. En voici deux exemples.

1. Il existe une unique fonction  $2\pi$ -périodique continue dont la restriction à  $[-\pi, \pi]$  coïncide avec la fonction  $t \mapsto \cos at$ . Elle est  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux. Elle n'est pas  $\mathcal{C}^1$  si  $a \notin \mathbb{Z}$ .
2. Il existe une unique fonction  $f$  impaire  $2\pi$ -périodique continue par morceaux de restriction  $t \mapsto \cos t$  sur  $]0, \pi[$ . Les conditions imposées déterminent, en effet, la restriction de  $f$  à  $[-\pi, \pi]$  : on a  $f(t) = -\cos t$  pour tout  $t \in ]-\pi, 0[$ ,  $f(0) = 0$  par imparité et  $f(\pi) = f(-\pi) = -f(\pi) = 0$  par périodicité et imparité. La fonction  $f$  est alors  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux.

On dit que  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vérifie la condition de Dirichlet en  $t \in \mathbb{R}$  si on a :

$$f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)).$$

C'est évidemment le cas en tout point de continuité de  $f$ .

L'ensemble des fonctions  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux vérifiant la condition de Dirichlet en tout point est une sous-algèbre de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . On la notera  $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Toute fonction  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  coïncide sur  $\mathbb{R}$ , sauf en un nombre fini de points sur tout segment, avec une unique fonction  $\tilde{f} \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

### Propriétés des fonctions périodiques

#### Proposition 2

Toute fonction  $2\pi$ -périodique continue par morceaux est bornée.

**Démonstration** L'ensemble des valeurs de  $f$  est égal à  $f([0, 2\pi])$  par périodicité. La fonction  $f$  est donc bornée. □

**Proposition 3**

Toute fonction  $2\pi$ -périodique continue est uniformément continue.

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ .

La fonction  $f$  est uniformément continue sur  $[-\pi, 3\pi]$ . Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall (t, s) \in [-\pi, 3\pi]^2, \quad |t - s| \leq \alpha \implies |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors  $\beta = \min(\alpha, \pi)$ .

Soit un couple  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant l'inégalité  $|t - s| \leq \beta$ . Il existe un couple  $(k, t')$  de  $\mathbb{Z} \times [0, 2\pi[$  tel que  $t' = t - 2k\pi$ . Le nombre réel  $s' = s - 2k\pi$  appartient alors à  $[-\pi, 3\pi]$  puisque  $\beta \leq \pi$ . La relation  $|t' - s'| \leq \alpha$  montre que l'on a  $|f(t') - f(s')| \leq \varepsilon$  et, par translation :

$$|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Proposition 4**

Soit  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . On a :

$$\int_{[a, a+2\pi]} f = \int_{[0, 2\pi]} f$$

pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Cette valeur commune s'appelle l'intégrale de  $f$  sur une période.

**Démonstration** On a en effet :

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(t - 2\pi) dt = \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t) dt$$

par translation et périodicité. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} f(t) dt &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^{2\pi} f(t) dt + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t) dt \\ &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^{2\pi} f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) dt. \end{aligned} \quad \square$$

## 1.2 Produit scalaire et semi-normes usuelles

### Produit scalaire et semi-norme de la convergence en moyenne quadratique

#### Définition 2

On appelle *produit scalaire* des deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , le nombre complexe :

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} \bar{f} g.$$

Les fonctions considérées étant  $2\pi$ -périodiques, le produit scalaire peut être calculé par intégration sur un segment de longueur  $2\pi$  quelconque.

Il est immédiat de vérifier que l'application  $(f, g) \mapsto (f | g)$  est une forme sesquilinéaire hermitienne positive. Nous verrons ci-dessous qu'elle n'est pas définie positive sur  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . L'appellation « produit scalaire » est donc abusive. Elle est néanmoins traditionnelle.

Le produit scalaire sur  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz par positivité. L'application  $f \mapsto \sqrt{(f | f)}$  satisfait donc à l'axiome d'homogénéité et à l'inégalité triangulaire. C'est donc une *semi-norme*. Cela conduit à la définition suivante :

#### Définition 3

On appelle *semi-norme de la convergence en moyenne quadratique* d'une fonction  $f$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , le nombre réel positif :

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f | f)}.$$

On dira bien sûr qu'une fonction  $f$  est normée si  $\|f\|_2$  est égale à 1.

La proposition suivante montre que l'application  $f \mapsto \|f\|_2$  n'est pas une norme et précise quelles sont les fonctions de semi-norme nulle.

#### Proposition 5

Une fonction  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vérifie  $\|f\|_2 = 0$  si, et seulement si, elle est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points sur tout segment.

**Démonstration** Soit  $(a_0, \dots, a_p)$  une subdivision de  $[0, 2\pi]$  adaptée à  $f$ , et  $f_i$  le prolongement par continuité à  $[a_{i-1}, a_i]$  de  $f|_{a_{i-1}, a_i}$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ . Si  $\|f\|_2 = 0$ , on a :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{[a_i, a_{i+1}]} |f_i|^2 = 0.$$

On en déduit  $\int_{[a_i, a_{i+1}]} |f_i|^2 = 0$  et  $f_i = 0$  pour tout  $i$  puisque  $f_i$  est continue. La fonction  $f$  est donc nulle sur  $[0, 2\pi]$  sauf peut-être en les  $a_i$ . La réciproque est évidente.  $\square$

On dira que deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sont *orthogonales*, et on écrira  $f \perp g$ , lorsque  $(f | g)$  est nul. On obtient bien sûr, dans ces conditions, l'égalité de Pythagore :

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2.$$

On dira aussi que deux parties  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sont *orthogonales*, et on écrira  $A \perp B$ , lorsque l'on a  $f \perp g$  pour tout  $(f, g)$  de  $A \times B$ .

Le produit scalaire  $(f | g)$  donne évidemment un structure d'espace préhilbertien à tout sous-espace de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sur lequel la relation  $\|f\|_2 = 0$  implique  $f = 0$ . Les corollaires suivants en donnent deux exemples très importants.

### Corollaire 6

Le couple  $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), ( | ))$  est un espace préhilbertien.

**Démonstration** En reprenant les notations de la démonstration de la proposition 5, on a  $f|_{[0, 2\pi]} = f_1$ . La relation  $\|f\|_2 = 0$  entraîne donc  $f_1|_{[0, 2\pi]} = 0$  et, finalement,  $f = 0$ .  $\square$

### Corollaire 7

Le couple  $(\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), ( | ))$  est un espace préhilbertien.

**Démonstration** En reprenant les notations de la démonstration de la proposition 5, la relation  $\|f\|_2$  implique  $f_i = 0$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ . La condition de Dirichlet montre alors que l'on a aussi :

$$f(a_i) = \frac{1}{2} \left( \lim_{a_i^-} f + \lim_{a_i^+} f \right) = 0$$

pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, p \rrbracket$ . Ainsi,  $f$  est nulle.  $\square$

**Autres semi-normes usuelles**

Nous utiliserons aussi deux autres (semi-)normes sur  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . La norme de la convergence uniforme a déjà été étudiée.

**Définition 4**

On appelle *norme de la convergence uniforme* d'une fonction  $f$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , le nombre réel positif :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{\mathbb{R}} |f|.$$

**Définition 5**

On appelle *semi-norme de la convergence en moyenne* d'une fonction  $f$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , le nombre réel positif :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f|.$$

L'application  $f \mapsto \|f\|_1$  ne vérifie pas l'axiome de séparation ; on a  $\|f\|_1 = 0$  si, et seulement si,  $f$  est nulle sauf peut être en un nombre fini de points sur tout segment. Ainsi,  $\|f\|_1 = 0$  est équivalent à  $\|f\|_2 = 0$  et l'application  $f \mapsto \|f\|_1$  est une norme sur  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et sur  $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

La relation suivante précise les relations entre ces (semi-)normes.

**Proposition 8**

Pour tout  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on a :

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_{\infty}.$$

**Démonstration** On a :

$$\|f\|_1 = \int |f| \leq \|1\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'autre inégalité provient de l'inégalité de la moyenne. □

**1.3 Fonctions exponentielles et polynômes trigonométriques**

**Famille des fonctions exponentielles et trigonométriques**

On note  $e_n$  la fonction exponentielle  $t \mapsto e^{int}$ . L'importance de la famille des fonctions exponentielles est due à la proposition suivante :

**Proposition 9**

La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée.

**Démonstration** On a :

$$(e_n | e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} |e_n|^2 = 1$$

pour tout  $n$  et :

$$(e_n | e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = \left[ \frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

pour tout  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant  $n \neq m$ . □

On utilisera aussi la famille des fonctions trigonométriques :

$$(1, \cos nt, \sin nt)_{n \in \mathbb{N}^*} = (1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots).$$

**Proposition 10**

La famille  $(1, \cos nt, \sin nt)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est orthogonale. La norme de ses éléments est donnée par  $\|1\|_2 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|\cos nt\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \|\sin nt\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Démonstration** On ramène le calcul des produits scalaires des fonctions trigonométriques à celui des fonctions exponentielles en utilisant les formules d'Euler. On a par exemple :

$$(\sin nt | \sin nt) = \left( \frac{e_n - e_{-n}}{2i} \mid \frac{e_n - e_{-n}}{2i} \right) = \frac{1}{4} \left( (e_n | e_n) + (e_{-n} | e_{-n}) \right) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

**Remarque** On fera attention au hiatus entre la norme de 1 et celles des fonctions  $\cos nt$  et  $\sin nt$  lorsque  $n$  est strictement positif.

Les familles  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(1, \cos nt, \sin nt)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , orthogonales dans l'espace pré-hilbertien  $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), ( | ))$ , sont libres.

### Polynômes trigonométriques

Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

#### Définition 6

On appelle *polynôme trigonométrique* de degré inférieur ou égal à  $N$ , toute combinaison linéaire de  $(e_n)_{n \in [-N, N]}$ . On note  $\mathcal{P}_N$  leur ensemble.

On notera  $\mathcal{P}$  l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré quelconque.

L'ensemble  $\mathcal{P}_N$  est le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(e_n)_{n \in [-N, N]}$  de l'espace préhilbertien  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Tout polynôme trigonométrique  $P$  de degré inférieur ou égal à  $N$  s'écrit donc de façon unique sous la forme *exponentielle* suivante :

$$P = \sum_{n=-N}^N c_n e_n.$$

Les coefficients  $c_n$ , appelés *coefficients exponentiels* de  $P \in \mathcal{P}_N$ , sont donnés par les produits scalaires  $c_n = (e_n | P)$ .

#### Écriture trigonométrique

On notera, dans ce qui suit,  $\mathcal{U}_n$  le sous-espace  $\text{Vect}(e_{-n}, e_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

La décomposition en somme directe orthogonale :

$$\mathcal{P}_N = \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{U}_n$$

nous permet d'écrire de façon unique tout polynôme trigonométrique  $P$  de  $\mathcal{P}_N$

sous la forme  $P = \sum_{n=0}^N u_n$  avec  $u_0 = c_0$  et  $u_n = c_{-n}e_{-n} + c_n e_n$  pour tout  $n > 0$ .

Le couple  $(\cos nt, \sin nt)$  étant une base de  $\mathcal{U}_n$  pour  $n > 0$ , le polynôme trigonométrique  $P$  peut aussi s'écrire de façon unique sous la forme *trigonométrique* suivante :

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

avec  $\frac{a_0}{2} = u_0$  et  $u_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$  pour tout  $n$ .

Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ , appelés *coefficients trigonométriques* de  $P$ , sont donnés par les produits scalaires :

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad a_n = 2 \left( \cos nt \mid P(t) \right)$$

et :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad b_n = 2 \left( \sin nt \mid P(t) \right)$$

(c'est pour avoir l'égalité  $a_0 = 2 \left( \cos 0t \mid P(t) \right)$  que l'on écrit  $\frac{a_0}{2}$  dans l'expression trigonométrique de  $P$ ).

Le passage entre les écritures exponentielle et trigonométrique est évidemment donné par :

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad c_{-n}e_{-n} + c_n e_n = a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

soit, pour les coefficients, par les relations :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) & \text{et} & & a_n &= c_n + c_{-n} \\ c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + ib_n) & & & b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

pour tout  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  (en posant  $b_0 = 0$ ).

### Proposition 11

La norme de  $P \in \mathcal{P}_N$  est donnée en fonction des coefficients exponentiels ou trigonométriques par :

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = \frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

**Démonstration** On a :

$$\|P\|_2^2 = \|u_0\|_2^2 + \sum_{n=1}^N \|u_n\|_2^2.$$

En utilisant la valeur des normes des fonctions exponentielles ou trigonométriques, il vient  $\|u_0\|_2^2 = |c_0|^2 = \frac{1}{4} |a_0|^2$  et :

$$\|u_n\|_2^2 = |c_{-n}|^2 + |c_n|^2 = \frac{1}{2} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

pour tout  $n > 0$ . □



### 1.4 Séries trigonométriques

**Définition 7**

On appelle *série trigonométrique* toute série de fonctions :

$$S = \sum_{n \geq 0} u_n$$

où  $u_n \in \text{Vect}(e_{-n}, e_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Une série trigonometrique s'écrit évidemment de façon unique sous les forme exponentielle ou trigonométrique :

$$S = c_0 + \sum_{n \geq 1} (c_{-n}e_{-n} + c_n e_n)$$

ou encore :

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Elle est donc définie, aussi bien par la suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq 0}$ , que par les données équivalentes de la famille  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de ses coefficients exponentiels ou de suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  de ses coefficients trigonométriques ; ces éléments sont reliées par  $u_0 = c_0 = \frac{a_0}{2}$  et :

$$u_n(t) = c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int} = a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  comme il se doit.

Les séries trigonométriques, qui ne sont que des séries de fonctions particulières, sont un moyen important de construction d'applications  $2\pi$ -périodiques.

La convergence de la série  $S$  est par définition équivalente à celle de la suite des sommes partielles associées :

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Sa somme est bien sûr une application  $2\pi$ -périodique de son domaine de convergence simple vers  $\mathbb{C}$  dont on précisera la régularité en étudiant, par exemple, la convergence uniforme ou normale de  $S$ .

En particulier, si  $S$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ , sa somme  $f$  est une fonction de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

**Remarque** Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé, on notera parfois  $\sum_n x_n$  la série  $x_0 + \sum_{n \geq 1} (x_{-n} + x_n)$ . On dira alors que  $\sum_n x_n$  est convergente, si la suite  $\left( \sum_{n=-N}^N x_n \right)_N$  de ses *sommes partielles symétriques* converge et l'on notera :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n$$

sa somme.

### Critère de convergence normale

#### Théorème 12

La série trigonométrique :

$$S(t) = \sum_n c_n e_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, l'une des séries :

$$\sum_n |c_n| \quad \text{ou} \quad \sum_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|)$$

converge.

**Démonstration** Calculons, en effet, la norme uniforme de  $c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}$  pour tout  $n > 0$ . On a bien sûr :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}| \leq |c_{-n}| + |c_n|.$$

En écrivant  $c_n = \rho_n e^{i\theta_n}$  avec  $(\rho_n, \theta_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  pour tout  $n$ , on obtient pour :

$$t_0 = \frac{1}{2n} (\theta_{-n} - \theta_n)$$

les relations :

$$\begin{aligned} |c_{-n}e^{-int_0} + c_n e^{int_0}| &= |\rho_{-n}e^{i\theta_{-n}}e^{-int_0} + \rho_n e^{i\theta_n}e^{int_0}| \\ &= |(\rho_{-n} + \rho_n) e^{i(\theta_n + t_0)}| \\ &= |c_{-n}| + |c_n|. \end{aligned}$$

Cela implique :

$$\|c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}\|_{\infty} = |c_{-n}| + |c_n|.$$

La convergence normale de la série est donc équivalente à la convergence de la série numérique  $\sum_{n \geq 1} (|c_{-n}| + |c_n|)$ .

Les relations entre les coefficients exponentiels et trigonométriques fournissent l'encadrement :

$$|c_{-n}| + |c_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2 (|c_{-n}| + |c_n|).$$

On en déduit immédiatement qu'elle est aussi équivalente à celle de  $\sum_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|)$ .  $\square$

**Remarque** Soit  $S$  un segment de longueur  $\ell > 0$ . Si  $n$  est supérieur ou égal à  $\frac{\ell}{2\pi}$ , le maximum en module de  $c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}$ , qui est atteint par périodicité sur tout intervalle de longueur  $\frac{2\pi}{n}$ , est atteint sur  $S$ . On a donc :

$$\sup_{t \in S} |c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}| = |c_{-n}| + |c_n|.$$

En particulier, la convergence normale de la série trigonométrique sur  $S$  est équivalente à sa convergence normale sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

### Exemple de séries trigonométriques convergeant uniformément

En dehors du cas de convergence normale que nous venons de voir, l'étude de la convergence uniforme d'une série trigonométrique est en général assez délicate. La proposition suivante présente un cas particulier intéressant :

#### Proposition 13

Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont deux suites décroissantes tendant vers 0 de reals positifs ou nuls, alors les séries trigonométriques :

$$\sum a_n \cos nt \quad \text{et} \quad \sum b_n \sin nt$$

convergent uniformément sur tout segment de l'intervalle  $]0, 2\pi[$ .

**Démonstration** Considérons la série :

$$\sum b_n \sin nt.$$

Pour tout  $x \in ]0, 2\pi[$ , la somme géométrique  $E_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{ikt}$  est égale à :

$$E_n(t) = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} e^{int}.$$

Cela donne :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n \sin kt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} \sin nt.$$

On en déduit l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S_n(t)| \leq \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}$$

et, en effectuant une transformation d'Abel, la relation :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p+1}^q b_n \sin nt &= \sum_{n=p+1}^q b_n (S_n(t) - S_{n-1}(t)) \\ &= \sum_{n=p+1}^q b_n S_n(t) - \sum_{n=p}^{q-1} b_{n+1} S_n(t) \\ &= b_q S_q(t) - b_{p+1} S_p(t) + \sum_{n=p+1}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) S_n(t) \end{aligned}$$

pour tout couple d'entiers  $(p, q)$  vérifiant  $p < q$ .

Tout segment de  $]0, 2\pi[$  étant contenu dans un intervalle de la forme  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  avec  $\alpha \in ]0, \pi[$ , nous nous limiterons à l'étude de la convergence uniforme sur les intervalles de ce type.

Soit  $\alpha \in ]0, \pi[$ . En tenant compte des hypothèses  $b_k \in \mathbb{R}_+$  et  $b_k - b_{k+1} \in \mathbb{R}_+$  pour tout  $k$ , on a :

$$\left| \sum_{n=p+1}^q b_n \sin nt \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left( b_q + b_{p+1} + \sum_{n=p+1}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) \right) = \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} b_{p+1}$$

pour tout  $p \leq q$  et tout  $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ .

Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que  $\frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} b_N$  soit inférieur ou égal à  $\varepsilon$  puisque  $(b_n)$  tend vers 0.

On obtient alors pour tout  $(p, q)$  vérifiant  $N \leq p < q$ , la relation :

$$\forall t \in [\alpha, 2\pi - \alpha], \quad \left| \sum_{n=p+1}^q b_n \sin nt \right| \leq \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} b_{p+1} \leq \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} b_N \leq \varepsilon.$$

La série  $\sum b_n \sin nx$  vérifie donc le critère de Cauchy uniforme et converge donc uniformément sur  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ .

On démontre de la même façon que la série  $\sum a_n \cos nt$  converge uniformément sur tous les segments de  $]0, 2\pi[$  en utilisant, au lieu de  $S_n(t)$ , l'expression :

$$C_n(t) = \sum_{k=0}^n \cos kt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} \cos nt$$

qui vérifie la même inégalité. □

Dans ces conditions, les sommes des séries  $\sum a_n \cos nt$  et  $\sum b_n \sin nt$  sont des applications  $2\pi$ -périodiques continues de  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{R}$ . Se pose alors le problème de leur convergence en 0.

La série  $\sum a_n \cos nt$  ne converge en 0 que lorsque la série  $\sum a_n$  converge. Elle est alors normalement convergente et sa somme est une fonction  $2\pi$ -périodique continue de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

La série  $\sum b_n \sin nt$  est par contre simplement convergente sur  $\mathbb{R}$  dans tous les cas puisque sa somme sur les éléments de  $\pi\mathbb{Z}$  est nulle. Néanmoins, sa somme n'est pas nécessairement continue en 0. Nous verrons une telle situation dans l'exemple 1. page 793. Cette exemple montrera aussi que, contrairement à ce qui se passe dans le cas de la convergence normale, une série trigonométrique peut converger uniformément sur un segment de longueur non nulle de  $\mathbb{R}$  sans converger uniformément sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

## 2. Coefficients et sommes de Fourier

Soit  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

### 2.1 Coefficients, sommes et série de Fourier

#### Coefficients de Fourier exponentiels

Nous avons vu que les coefficients exponentiels d'un polynôme trigonométrique  $p$  sont donnés par les produits scalaires  $(e_n | p)$ . Cela conduit à la définition générale suivante :

#### Définition 8

On appelle *coefficients de Fourier exponentiels* d'une fonction  $f$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , les produits scalaires :

$$c_n(f) = (e_n | f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

Les coefficients de Fourier peuvent évidemment être calculés par intégration sur tout segment de longueur  $2\pi$ .

Les applications  $c_n : f \mapsto c_n(f)$  sont bien sûr des formes linéaires sur  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . On note habituellement  $\widehat{f}$  la fonction :

$$n \mapsto c_n(f).$$

L'application  $f \mapsto \widehat{f}$  est ainsi une application linéaire de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vers  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ .

### Coefficients de Fourier trigonométriques

Les coefficients de Fourier exponentiels sont préférables dans un contexte théorique. Dans les situations concrètes, en particulier lorsque les fonctions considérées sont réelles, paires ou impaires il est plus pratique d'utiliser les coefficients de Fourier trigonométriques suivants :

#### Définition 9

On appelle *coefficients de Fourier trigonométriques* de  $f$  les produits scalaires :

$$a_n(f) = 2 \left( \cos nt \mid f(t) \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et :

$$b_n(f) = 2 \left( \sin nt \mid f(t) \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On fera attention au facteur 2 devant les produits scalaires.

#### Proposition 14

En posant  $b_0(f) = 0$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2} (a_n(f) - ib_n(f)) & \text{et} & & a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) \\ c_{-n}(f) &= \frac{1}{2} (a_n(f) + ib_n(f)) & & & b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{aligned}$$

**Démonstration** Les formules d'Euler donnent :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt - i \sin nt) \, dt = \frac{1}{2} (a_n(f) - ib_n(f))$$

et, de la même façon,  $c_{-n}(f) = \frac{1}{2} (a_n(f) + ib_n(f))$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On obtient alors  $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$  et  $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$ . □

### Série et sommes de Fourier

Les relations précédentes entre coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques montrent que l'on a  $c_0 = \frac{a_0}{2}$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{-n}(f)e^{-int} + c_n(f)e^{int} = a_n(f) \cos nt + b_n(f) \sin nt.$$

Cela conduit à la définition suivante :

#### Définition 10

On appelle *série de Fourier* de  $f$ , la série trigonométrique :

$$S(f) = \sum_n c_n(f)e_n = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( a_n(f) \cos nt + b_n(f) \sin nt \right).$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on appelle *somme de Fourier d'ordre  $N$*  de  $f$ , et on note  $S_N(f)$ , la  $N^{\text{ième}}$  somme partielle de la série de Fourier de  $f$ . La somme de Fourier d'ordre  $N$  de  $f$  est donc le polynôme trigonométrique :

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n(f) \cos nt + b_n(f) \sin nt \right).$$

**Remarque** On retrouve dans l'expression précédente, comme dans le cas des polynômes trigonométriques, le terme  $\frac{a_0(f)}{2}$ . Il est cohérent avec la définition :

$$a_0(f) = 2(1 | f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

## 2.2 Propriétés des coefficients de Fourier

### Propriétés immédiates

#### Proposition 15

On a  $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$  pour tout  $n$ . En particulier,  $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$  si  $f$  est à valeurs réelles.

**Démonstration** On a en effet :

$$c_n(\bar{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)e^{-int} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt} = \overline{c_{-n}(f)}.$$

Si  $f$  est à valeurs réelles, on a  $\bar{f} = f$  et  $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$ . □

De même, les coefficients trigonométriques  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  d'une fonction réelle sont réels.

### Proposition 16

La fonction  $g$  définie par  $g(t) = f(-t)$  appartient à  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et on a  $c_{-n}(g) = c_n(f)$  pour tout  $n$ .

En particulier,  $c_{-n}(f) = c_n(f)$  si  $f$  est paire et  $c_{-n}(f) = -c_n(f)$  si  $f$  est impaire.

**Démonstration** On a :

$$c_{-n}(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt = c_n(f).$$

Si  $f$  est paire, on obtient  $f = g$  et  $c_{-n}(f) = c_n(f)$ . Si  $f$  impaire, on obtient  $f = -g$  et  $c_{-n}(f) = -c_n(f)$ .  $\square$

En ce qui concerne les coefficients trigonométriques, on obtient la proposition suivante très utile dans la pratique :

### Proposition 17

Si  $f$  est paire, on a  $b_n(f) = 0$  et :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt.$$

Si  $f$  est impaire, on a  $a_n(f) = 0$  et :

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

### Proposition 18

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $f_a$  désigne la fonction translatée de  $f$  par  $a$  définie par  $f_a(t) = f(t+a)$  pour tout  $t$ , on a alors  $f_a \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $c_n(f_a) = e^{ina}c_n(f)$  pour tout  $n$ .

**Démonstration** Il est immédiat que  $f_a$  appartient à  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . On a alors :

$$c_n(f_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)e^{-in(t+a)} dt = e^{ina}c_n(f). \quad \square$$



### Majoration des coefficients de Fourier

La formule de la moyenne montre la proposition suivante :

#### Proposition 19

On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

Cela implique en particulier  $|c_n(f)| \leq \|f\|_2$  et  $|c_n(f)| \leq \|f\|_\infty$ .

### Coefficients de Fourier d'une fonction continue et continûment dérivable par morceaux

Comme nous l'avons vu, toute fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  possède des pseudo-dérivées dans  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . La proposition suivante précise le rapport entre les coefficients de Fourier de  $f$  et ceux de l'une de ses pseudo-dérivées  $Df$  lorsque  $f$  est de plus continue.

#### Proposition 20

Si  $f$  de  $\mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est continue et si  $Df$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est une pseudo-dérivée de  $f$ , on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(Df) = in c_n(f).$$

**Démonstration** Par définition, il existe une subdivision  $(a_0, \dots, a_p)$  de  $[-\pi, \pi]$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  l'application  $f_k = f|_{[a_k, a_{k+1}]}$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $Df$  égale à  $f'$  sur  $]a_k, a_{k+1}[$  pour tout  $k$ . On a donc :

$$c_n(Df) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) e^{-int} dt.$$

Il vient alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) e^{-int} dt &= (f(a_{k+1})e^{-ina_{k+1}} - f(a_k)e^{-ina_k}) \\ &\quad + in \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) e^{-int} dt \end{aligned}$$

pour tout  $k$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} c_n(Df) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} (f(a_{k+1})e^{-ina_{k+1}} - f(a_k)e^{-ina_k}) \\ &\quad + \frac{in}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} (f(a_p)e^{-ina_p} - f(a_0)e^{-ina_0}) \\ &\quad + \frac{in}{2\pi} \int_{a_0}^{a_p} f(t)e^{-int} dt, \end{aligned}$$

soit, en utilisant  $f(-\pi) = f(\pi)$  :

$$c_n(Df) = inc_n(f). \quad \square$$

Lorsque  $f$  est  $\mathcal{C}^{k-1}$  et  $\mathcal{C}^k$  par morceaux, on obtient par itération :

$$c_n(D^k f) = (in)^k c_n(f)$$

Lorsque  $f$  est  $\mathcal{C}^k$ , il s'agit de dérivées usuelles et l'on a :

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f).$$

On en déduit immédiatement  $c_n(f^{(k)}) = \mathcal{O}(n^{-k})$ . Nous verrons plus loin que l'on a  $c_n(f^{(k)}) = o(n^{-k})$ .

### Coefficients de Fourier de la somme d'une série trigonométrique convergeant uniformément

#### Théorème 21

Si la série trigonométrique :

$$S = c_0 + \sum_{n \geq 1} (c_{-n}e^{-in} + c_n e^{in})$$

est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$  et de somme  $f$ , on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = c_n.$$

**Démonstration** Soit  $m \in \mathbb{Z}$ .

Les fonctions exponentielles étant bornées, la série de fonctions

$$c_0 e^{imt} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_{-n} e^{-int} + c_n e^{int}) e^{imt}$$

converge aussi uniformément vers  $f(t)e^{imt}$ . On en déduit :

$$c_m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_0 e^{imt} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (c_{-n} e^{-int} + c_n e^{int}) e^{imt} dt = c_m$$

par intégration terme à terme. □

On a bien sûr  $a_n(f) = a_n$  et  $b_n(f) = b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  lorsque  $S$  est écrite :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

et que la convergence est uniforme.

Le théorème précédent peut s'énoncer en disant qu'une série trigonométrique uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$  est la série de Fourier de sa somme.

L'exemple suivant montre comment il peut servir à déterminer la série de Fourier d'une fonction définie de façon explicite.

*Exemple* Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et :

$$f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} a - \cos t}.$$

La fonction  $f$  appartient bien sûr à  $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(t) = \frac{2}{(e^{-a} + e^a) - (e^{-it} + e^{it})} = \frac{-2e^{it}}{e^{2it} - (e^{-a} + e^a)e^{it} + 1}.$$

Par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$\frac{-2X}{X^2 - (e^{-a} + e^a)X + 1},$$

il vient :

$$f(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} a} \left( \frac{e^{-a}}{e^{it} - e^{-a}} - \frac{e^a}{e^{it} - e^a} \right)$$

On peut écrire :

$$\frac{-e^a}{e^{it} - e^a} = \frac{1}{1 - e^{-a}e^{it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-na} e^{int}$$

puisque  $|e^{-a}e^{it}| < 1$  et :

$$\frac{e^{-a}}{e^{it} - e^{-a}} = \frac{e^{-it}e^{-a}}{1 - e^{-a}e^{-it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)a} e^{-i(n+1)t}$$

puisque  $|e^{-a}e^{-it}| < 1$ . On obtient alors pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\operatorname{sh} a} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-na} e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-na} e^{-int} \right) \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sh} a} + \frac{2}{\operatorname{sh} a} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-na} \cos nt.
 \end{aligned}$$

Comme la série  $\sum e^{-na}$  converge, la série trigonométrique ci-dessus est normalement convergente et est la série de Fourier de  $f$ . Les coefficients de Fourier de  $f$  sont alors donnés par  $b_n(f) = 0$  pour tout  $n > 0$  (ce qui est normal puisque  $f$  est paire) et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{2}{\operatorname{sh} a} e^{-na}.$$

On obtient en particulier les intégrales :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos nt}{\operatorname{ch} a - \cos t} dt = \frac{1}{\operatorname{sh} a} e^{-na}.$$

On retrouve  $c_n(f) = 0 (N^{-k})$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  puisque  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

### 2.3 Inégalité de Bessel

#### Caractérisation des sommes de Fourier

##### Proposition 22

La  $N^{\text{ième}}$  somme de Fourier  $S_N(f)$  est l'unique polynôme trigonométrique  $p \in \mathcal{P}_N$  telle que la fonction  $f - p$  soit orthogonale au sous-espace  $\mathcal{P}_N$ .

**Démonstration** Pour tout  $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$ , on a  $(e_n \mid S_N(f)) = c_n(f)$ . Cela entraîne :

$$(e_n \mid f - S_N(f)) = (e_n \mid f) - (e_n \mid S_N(f)) = 0$$

pour tout  $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$ , c'est-à-dire  $f - S_N(f) \perp \mathcal{P}_N$ .

Si  $p \in \mathcal{P}_N$  vérifie  $f - p \perp \mathcal{P}_N$ , le polynôme trigonométrique :

$$S_N(f) - p = (f - p) - (f - S_N(f))$$

appartient à  $\mathcal{P}_N$  et est orthogonal à lui-même. Il est donc nul. On a donc  $p = S_N(f)$ . □

Nous avons vu que l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  muni du produit scalaire est un espace préhilbertien.

Le sous-espace  $\mathcal{P}_N$  étant de dimension finie, on peut parler de la projection orthogonale de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sur  $\mathcal{P}_N$ . On obtient alors le corollaire suivant :

**Corollaire 23**

Lorsque  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , la somme  $S_N(f)$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathcal{P}_N$ .

**Inégalité de Bessel**

**Théorème 24 (Inégalité de Bessel)**

On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

**Démonstration** Nous avons vu que l'on peut écrire  $f = S_N(f) + h$  avec  $h \perp \mathcal{P}_N$ . On a donc  $S_N(f) \perp h$  et :

$$\|S_N(f)\|_2^2 + \|h\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

par le théorème de Pythagore. On en déduit :

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 = \|S_N(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2. \quad \square$$

Il s'agit évidemment d'un simple résultat de la théorie des espaces préhilbertiens lorsque l'on se limite à  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ou à  $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

**Proposition 25**

Les séries

$$\sum_n |c_n(f)|^2$$

et :

$$\frac{1}{4} |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right)$$

sont convergentes, de même somme inférieure ou égale à  $\|f\|_2^2$ .

**Démonstration** Les sommes partielles de ces séries à termes positifs, égales à en effet à  $\|S_N(f)\|_2^2$ , sont majorées par  $\|f\|_2^2$ . □

Ainsi, les familles  $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont de carré sommable. L'application  $f \mapsto \tilde{f}$  est donc une application linéaire de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dans l'espace vectoriels des familles de carré sommable de  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ .

## Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

### Théorème 26 (Riemann-Lebesgue)

Les coefficients de Fourier de  $f$  tendent vers 0 à l'infini

**Démonstration** Cela provient de la convergence de la série :

$$\sum_n |c_n(f)|^2.$$

□

### Corollaire 27

Si  $f$  est  $\mathcal{C}^{k-1}$  et  $\mathcal{C}^k$  par morceaux, on a :

$$c_n(f) = o(|n|^{-k})$$

ainsi que :

$$a_n(f) = o(|n|^{-k}) \quad \text{et} \quad b_n(f) = o(|n|^{-k}).$$

**Démonstration** On a  $c_n(D^k f) = (in)^k c_n(f)$  avec  $D^k f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  par hypothèse. Le corollaire provient de :

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|^k} |c_n(D^k f)|$$

pour  $n \neq 0$  et de  $\lim_n c_n(D^k f) = 0$ . Les formules reliant les coefficients de Fourier trigonométriques aux coefficients exponentiels prouvent le deuxième point □

## 3. Convergence ponctuelle

### 3.1 Théorème de Dirichlet

#### Noyau de Dirichlet

Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

On appelle *noyau de Dirichlet de degré  $N$* , le polynôme trigonométrique :

$$D_N = \sum_{n=-N}^N e_n.$$

**Proposition 28**

L'application  $D_N$  est un polynôme trigonométrique à valeurs réelles pair et vérifiant :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} D_N = 1.$$

Il est donné par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$$

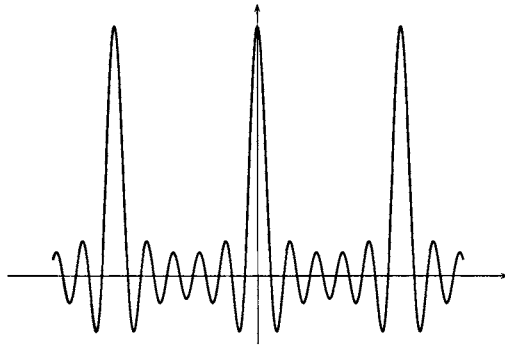
et  $D_N(t) = 2N + 1$  pour tout  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

**Démonstration** L'application  $D_N$  est évidemment un polynôme trigonométrique réel, pair vérifiant  $(e_0 | D_N) = 1$ . La formule donnant la somme d'une progression géométrique montre que l'on a :

$$D_N(t) = e^{-iNt} \frac{1 - e^{-i(2N+1)t}}{1 - e^{-it}} = \frac{e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$$

pour tout  $t$  tel que  $e^{it} \neq 1$  et  $D_N(t) = 2N + 1$  pour tout  $t$  tel que  $e^{it} = 1$ . □

Le graphe de  $D_N$  a l'allure suivante :



Le  $N^{\text{ième}}$  polynôme de Dirichlet sert à exprimer la  $N^{\text{ième}}$  somme de Fourier de  $f$  :

**Proposition 29**

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on a :

$$S_N(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - u) D_N(u) du.$$

**Démonstration** On a en effet :

$$\begin{aligned}
 S_N(f)(t) &= \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v)e^{-inv} dv \right) e^{int} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=-N}^N e^{in(t-v)} \right) f(v) dv
 \end{aligned}$$

Par le changement de variable  $t - u = v$ , il vient alors :

$$S_N(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} D_N(u)f(t-u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(u)f(t-u) du. \quad \square$$

**Théorème de convergence ponctuelle**

**Théorème 30 (Dirichlet)**

Soient  $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Si les rapports :

$$\frac{f(t_0 - t) - f(t_0^-)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{f(t_0 + t) - f(t_0^+)}{t}$$

ont des limites quand  $t \in \mathbb{R}^*_+$  tend vers 0, alors la suite  $(S_N(f)(t_0))$  converge vers :

$$\frac{1}{2} (f(t_0^-) + f(t_0^+))$$

**Démonstration** Notons  $\ell_0$  la quantité  $\frac{1}{2}(f(t_0^-) + f(t_0^+))$ .

Si  $u$  et  $v$  désignent les parties paire et impaire de la fonction  $g : t \mapsto f(t + t_0)$  les propositions 16 page 784 et 18 page 784 montrent que l'on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N(u)(0) = S_N(g)(0) = S_N(f)(t_0).$$

La fonction  $w$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad w(t) = u(t) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad w(2k\pi) = \ell_0$$

appartient à  $\mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R})$  et est continue en tout point de  $2\pi\mathbb{Z}$  puisque  $u$  converge vers  $\ell_0$  en 0.

► La fonction  $w$  possède des dérivées à droite et à gauche en tout point de  $2\pi\mathbb{Z}$ . L'application :

$$t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{w(t) - w(0)}{e^{it} - 1}$$

se prolonge donc par continuité en une fonction  $h$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R})$  et l'on peut écrire

$$w = \ell_0 + h(e_1 - 1).$$

Cela donne par simple calcul :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(w) = \ell_0\delta_{0,n} + c_n(he_1) - c_n(h) = \ell_0\delta_{0,n} + c_{n-1}(h) - c_n(h).$$



► La fonction  $u$  a évidemment les mêmes coefficients de Fourier que  $w$ . On obtient ainsi :

$$S_N(u)(0) = \ell_0 + \sum_{n=-N}^N (c_{n-1}(h) - c_n(h))$$

et, par télescopage :

$$S_N(u)(0) = \ell_0 + c_{-N-1}(h) - c_N(h).$$

Finalement, le théorème de Riemann-Lebesgue (page 790) montre que l'on a :

$$\lim S_N(t)(t_0) = \lim S_N(u)(0) = \ell_0. \quad \square$$

**Corollaire 31**

Si  $f$  est  $2\pi$ -periodique de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(t) = \frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)).$$

**Corollaire 32**

Si  $f \in \mathcal{C}^1 \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vérifie la condition de Dirichlet en  $t$ , en particulier si elle y est continue, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(t) = f(t).$$

Dans les conditions du corollaire précédent, on écrit évidemment :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos nt + b_n(f) \sin nt)$$

**Remarque** Dans le théorème de Dirichlet, l'hypothèse «  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux » ne peut pas être remplacée par «  $f$  continue par morceaux ». Il existe, en effet, des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques  $f$  dont les sommes de Fourier ne convergent pas vers  $f(0)$  en 0. Le premier exemple d'une telle fonction est dû à Dubois-Reymond (1876).

**Exemples**

1. Soit  $f$  l'unique fonction impaire,  $2\pi$ -périodique et égale à 1 sur  $]0, \pi[$ .

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et vérifie la condition de Dirichlet. Ses coefficients de Fourier trigonométriques  $a_n(f)$  sont nuls puisqu'elle est impaire et ses coefficients  $b_n(f)$  donnés par :

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} [-\cos nt]_0^\pi = \frac{2}{\pi} [1 - (-1)^n]_0^\pi,$$

soit :

$$b_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \frac{4}{\pi(2p-1)} & \text{si } n = 2p-1 \end{cases},$$

pour tout  $n > 0$ . Le théorème de Dirichlet montre que l'on a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p-1} \sin(2p-1)t$$

Cela donne en particulier :

$$\forall t \in ]0, \pi[, \quad 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p-1} \sin(2p-1)t.$$

- Comme la fonction  $f$  n'est pas continue sur  $[0, \pi]$ , la série de Fourier de  $f$  ne converge pas uniformément sur  $[0, \pi]$ . La proposition 13 page 779 montre néanmoins qu'elle converge uniformément sur tout segment de  $]0, \pi[$ .
- La fonction  $f$  vérifie de plus une propriété remarquable, appelée phénomène de Gibbs, qui illustre bien que sa série de Fourier ne converge pas uniformément sur le fermé  $[0, \pi]$ . Étudions pour cela sa  $(2P-1)^{\text{ième}}$  somme de Fourier :

$$s_P(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^P \frac{1}{2p-1} \sin(2p-1)t$$

sur  $[0, \pi]$ . La fonction  $s_P$  est symétrique par rapport à  $\frac{\pi}{2}$  et de dérivée :

$$s'_P(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^P \cos(2p-1)t = \frac{2 \sin 2Pt}{\pi \sin t}$$

( $t \notin \pi\mathbb{Z}$ ) Elle atteint donc ses maximums en  $\frac{(2k-1)\pi}{2P}$  pour  $k \in [1, P]$  et ses minimums en  $\frac{2k\pi}{2P}$  pour  $k \in [1, P-1]$ . La variation des différences :

$$s_P\left(\frac{k\pi}{2P}\right) - s_P\left(\frac{(k+1)\pi}{2P}\right) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2P}} \frac{\sin 2Pu}{\sin\left(\frac{k\pi}{2P} + u\right)} dt$$

lorsque  $k$  va de 1 à  $P-1$  montre que  $s_P$  atteint son maximum sur  $[0, \pi]$  en  $\frac{\pi}{2P}$ . Elle y vaut :

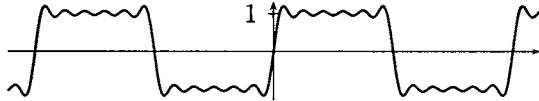
$$s_P\left(\frac{\pi}{2P}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^P \frac{1}{2p-1} \sin \frac{(2p-1)\pi}{2P}.$$

La quantité  $s_P\left(\frac{\pi}{2P}\right)$  est la somme de Riemann associée à la subdivision  $\left(\frac{2p\pi}{2P}\right)_{p \in [0, P]}$  et à la famille de points  $\left(\frac{(2p-1)\pi}{2P}\right)_{p \in [0, P]}$  de la fonction

$\frac{2 \sin t}{\pi t}$ . On obtient ainsi :

$$\lim_P s_P \left( \frac{\pi}{2P} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \simeq 1,179 > 1.$$

Ainsi, le maximum de  $s_P$  sur  $[0, \pi]$  ne tend pas vers le maximum de  $f$  sur cet intervalle. On appelle ce résultat, le phénomène de Gibbs. Il montre bien sûr que la convergence de  $s_P$  vers  $f$  n'est pas uniforme sur  $[0, \pi]$ .



2. Une identité d'allure paradoxale :

$$\forall t \in ]0, \pi[, \quad \cos t = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nt.$$

Il ne s'agit évidemment pas de développer la fonction  $\cos$  mais l'unique fonction impaire  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  égale à  $\cos t$  sur  $]0, \pi[$ . On a  $a_n(f) = 0$  et :

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos t \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(n+1)t}{n+1} - \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \right]_0^\pi$$

soit :

$$b_n(f) = \frac{2n \left( (-1)^n + 1 \right)}{\pi (n^2 - 1)} = \begin{cases} \frac{8p}{\pi(4p^2 - 1)} & \text{si } n = 2p \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n = 2p - 1 \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

La fonction  $f$  étant de classe  $C^1$  par morceaux, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{4p^2 - 1} \sin 2pt$$

d'où la relation désirée sur  $]0, \pi[$ .

### 3.2 Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et continûment dérivable par morceaux

Nous avons vu qu'une série trigonométrique :

$$S = c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_{-n} e^{-int} + c_n e^{int})$$

est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, la série :

$$\sum_{n \geq 1} (|c_{-n}| + |c_n|)$$

est convergente.

**Proposition 33**

Lorsque  $f$  est  $2\pi$ -périodique continue et de classe  $C^1$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ , la série :

$$\sum_{n \geq 1} (|c_{-n}(f)| + |c_n(f)|)$$

est convergente.

**Démonstration** Soit  $Df$  la dérivée généralisée de  $f$ . On a  $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(Df)$  pour tout  $n$  non nul. Les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} |c_n(Df)|^2$  étant convergentes, l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |c_n(Df)|^2 \right)$$

montre que  $\sum_{n \geq 1} |c_n(f)|$  converge. De la même façon,  $\sum_{n \geq 1} |c_{-n}(f)|$  converge.  $\square$

Les familles  $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$  ainsi que  $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont donc sommables.

**Théorème 34**

Lorsque  $f$  est  $2\pi$ -périodique continue et de classe  $C^1$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ , la série de Fourier de  $f$  :

$$c_0(f) + \sum_{n \geq 1} (c_{-n}(f)e^{-int} + c_n(f)e^{int})$$

est normalement convergente de somme  $f$ .

**Démonstration** La série  $\sum_{n \geq 1} (|c_{-n}(f)| + |c_n(f)|)$  convergeant, la série de Fourier de  $f$  est normalement convergente. Sa somme en  $t$ , limite de la suite  $(S_N(f)(t))_N$ , vaut  $f(t)$  puisque  $f$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux.  $\square$

**Exemples**

- Soient  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $f$  l'unique fonction  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$  égale à  $\cos \alpha t$  sur  $[-\pi, \pi]$ . La fonction  $f$  est paire, continue et de classe  $C^1$  par morceaux. Elle n'est pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Les coefficients  $b_n(f)$  sont nuls. On obtient alors :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha t \cos n t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\alpha - n)t + \cos(\alpha + n)t) \, dt$$

soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(\alpha - n)t}{(\alpha - n)} \right]_0^\pi + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(\alpha + n)t}{(\alpha + n)} \right]_0^\pi = (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

Le théorème précédent montre que la série de Fourier de  $f$  converge normalement et que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nt.$$

(la convergence normale se voit *a posteriori* sans difficulté sur les coefficients)

L'égalité ci-dessus fournit deux identités remarquables. Pour  $t = 0$  et  $t = \pi$  on obtient respectivement :

$$1 = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

et :

$$\cos \alpha\pi = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

Cela conduit, en posant  $x = \alpha\pi$ , aux développements eulériens :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cotg x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}.$$

2. Soit  $f$  l'unique fonction de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vérifiant la condition de Dirichlet égale à  $t^2 + bt$  sur  $]-\pi, \pi[$ . La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Elle est continue sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si,  $b = 0$ .

Par de simples calculs, on trouve  $a_0(f) = \frac{2}{3}\pi^2$  et lorsque  $n$  est strictement positif :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + bt) \cos nt \, dt = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

et :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + bt) \sin nt \, dt = (-1)^{n+1} \frac{b}{n}.$$

La fonction  $f$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{4}{n^2} \cos nt - \frac{b}{n} \sin nt \right).$$

On constate alors qu'il n'y a convergence normale que lorsque  $b$  est nul c'est-à-dire  $f$  continue.

Lorsque  $b = 0$ , on obtient  $t^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nt$ . On obtient alors en  $t = 0$  et  $t = \pi$  les identités remarquables :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Les deux points suivants sont deux conséquences remarquables du théorème de convergence normale.

### Segments de convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction continûment dérivable par morceaux

#### Théorème 35

La série de Fourier d'une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^1 \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment contenu dans l'ensemble ouvert de ses points de continuité.

**Démonstration** On supposera, ce qui ne change rien, que  $f$  est continue en 0 et vérifie la condition de Dirichlet. Soit alors  $(a_k)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}$  la subdivision de  $[0, 2\pi]$  telle  $\left\{ a_k \mid k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \right\}$  soit l'ensemble des points de  $[0, 2\pi]$  où  $f$  n'est pas continue. On notera :

$$\delta_k = f(a_k^+) - f(a_k^-)$$

pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ .

Notons alors  $c$  l'unique fonction de  $\mathcal{C} \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  impaire valant  $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$  sur  $]0, 2\pi[$ . La fonction  $c$  appartient à  $\mathcal{C}^1 \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et est continue sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Un simple calcul montre que sa série de Fourier est :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin nt.$$

Nous savons par la proposition 13 de la page 779 que cette série converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

Pour tout  $k$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\delta_k}{\pi} c(t - a_k) - f(a_k)$  appartient à  $C^1 \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus (a_k + 2\pi\mathbb{Z})$ . Ses limites à gauche et à droite en  $a_k$  sont :

$$-\frac{\delta_k}{\pi} \frac{\pi}{2} - f(a_k) = -f(a_k^-) \quad \text{et} \quad \frac{\delta_k}{\pi} \frac{\pi}{2} - f(a_k) = -f(a_k^+).$$

De plus, sa série de Fourier :

$$S_k(t) = -f(a_k) + \frac{\delta_k}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin n(t - a_k)$$

converge uniformément sur les segments de  $\mathbb{R}$  ne contenant pas de point de  $a_k + 2\pi\mathbb{Z}$ .

La fonction :

$$g(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{p-1} \left( \frac{\delta_k}{\pi} c(t - a_k) - f(a_k) \right)$$

appartient alors à  $C^1 \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ . Sa série de Fourier  $S(g)(t)$  converge donc normalement sur  $\mathbb{R}$ . La série de Fourier de  $f$ , égale à :

$$S(g)(t) - \sum_{k=1}^{p-1} S_k(t)$$

converge donc uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$  ne contenant aucun point de discontinuité de  $f$ . □

### Approximation des fonctions continues $2\pi$ -périodiques

Soit  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

#### **Théorème 36 (Weierstrass)**

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $p$  tel que :

$$\|f - p\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Pour démontrer ce théorème nous aurons besoin de la proposition suivante :

#### **Proposition 37**

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une application  $h \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dont la restriction à  $[0, 2\pi]$  est affine par morceaux telle que :

$$\|f - h\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Le théorème 18 page 449 du chapitre « suites et séries de fonctions » montre qu'il existe une application continue et affine par morceaux  $g$  de  $[0, 2\pi]$  vers  $\mathbb{C}$  vérifiant  $g(0) = f(0)$ ,  $g(2\pi) = f(2\pi)$  et dont la distance uniforme à  $f|_{[0, 2\pi]}$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon$ . On a alors  $g(0) = g(2\pi)$ .

La fonction  $2\pi$ -périodique  $h$  dont la restriction à  $[0, 2\pi]$  vaut  $g$  vérifie alors les conditions de la proposition.  $\square$

**Démonstration du théorème** Soit  $\varepsilon > 0$

D'après la proposition précédente, il existe une fonction  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dont la restriction à  $[0, 2\pi]$  est affine par morceaux telle que  $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon/2$ .

La fonction  $h$  étant continue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|h - S_N(h)\|_\infty \leq \varepsilon/2$ . On a donc :

$$\|f - S_N(h)\|_\infty \leq \varepsilon. \quad \square$$

### Remarques

- On remarquera l'analogie du théorème précédent avec le théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des polynômes. On peut d'ailleurs, mais c'est laborieux, déduire le théorème précédent du théorème de Weierstrass.
- Le théorème de Weierstrass trigonométrique ne fournit pas de suites explicites de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers  $f$ .
- En général, les sommes de Fourier d'une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ne fournissent pas une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers  $f$  puisqu'il existe des cas, rappelons-le, où la suite de ces sommes ne converge même pas en tout point.

## 3.3 Théorème de Fejér

Si  $f$  est une fonction de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on appelle *sommes de Fejér d'ordre*  $N \in \mathbb{N}$  de  $f$ , le polynôme trigonométrique :

$$T_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f).$$

### Noyau de Fejér

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

On appelle *noyau de Fejér de degré*  $N$ , le polynôme trigonométrique :

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n.$$



**Proposition 38**

L'application  $F_N$  est un polynôme trigonométrique à valeurs réelles pair et vérifiant :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} F_N = 1.$$

Il est donné par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad F_N(t) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2 \frac{Nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

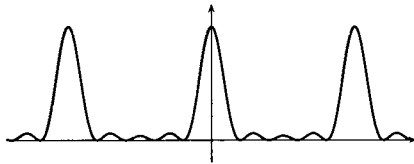
et  $F_N(t) = N$  pour tout  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

**Démonstration** L'application  $F_N$  est évidemment un polynôme trigonométrique réel, pair vérifiant  $(e_0 | D_N) = 1$ . On a aussi :

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n+1/2)t} = \frac{1}{N} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} e^{i\frac{t}{2}} \frac{e^{iNt} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{1}{N} \frac{\sin^2 \frac{Nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

pour tout  $t$  tel que  $e^{it} \neq 1$  et  $F_N(t) = N$  pour tout  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$  par un simple calcul. La fonction  $F_N$  est donc positive. □

Le graphe de  $F_N$  a l'allure suivante :



On remarquera que  $F_N$  est positif et que ses valeurs importantes se concentrent au voisinage des points  $2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le noyau de Fejér sert à exprimer les sommes de Fejér de  $f$  :

**Proposition 39**

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on a :

$$T_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)F_N(u) du.$$

**Démonstration** Il vient en effet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u) \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(u) \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u) F_N(u) du. \end{aligned} \quad \square$$

### Théorème de convergence uniforme de Fejér

Si  $u = (u_n)$  est une suite d'un espace vectoriel normé, la suite des moyennes de Cesàro de  $u$  est, rappelons-le, la suite  $v = (v_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Le théorème de Cesàro (corollaire 63 page 428) du chapitre «Espaces vectoriels normés et espaces métriques : théorèmes fondamentaux» montre que lorsque  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , il en est de même de  $(v_n)$ .

Les sommes de Fejér d'une fonction  $f$  sont évidemment les moyennes de Cesàro de la suite de ses sommes de Fourier. Nous allons démontrer que lorsque  $f$  est continue, elle fournissent une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers  $f$ . Nous utiliserons pour cela la proposition 62 page 427 du même chapitre :

### Théorème 40 (Fejér)

Si  $f$  est une fonction  $2\pi$ -périodique continue de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ , la suite  $\left( T_N(f)(t) \right)_N$  des sommes de Fejér de  $f$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration** Considérons l'espace vectoriel normé  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  muni de la norme uniforme  $\| \cdot \|_{\infty}$ .

L'application  $T_N : f \mapsto T_N(f)$  est évidemment une application linéaire de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dans lui-même. Puisque la fonction  $F_N$  est positive, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u) F_N(u) du \right| \leq \|f\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) du = \|f\|_{\infty},$$

soit  $\|T_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ . L'endomorphisme  $T_N$  est donc 1-lipschitzien.

Soit  $p$  un polynôme trigonométrique  $p$  de degré  $n$ . Pour tout  $N \geq n$ , on a  $S_n(p) = p$  et, par conséquent :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(p) + \frac{N-n}{N} p.$$

La suite  $(T_N(p))_N$  converge donc vers  $p = \text{Id}_{\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})}(p)$  dans  $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ .

Puisque l'espace  $\mathcal{P}$  des polynômes trigonométriques est dense dans  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , la proposition 62 page 427 montre que la suite  $(T_N(f))_N$  converge vers  $f = \text{Id}_{\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})}(f)$  dans  $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  pour tout  $f$  de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . □

### Application

#### Corollaire 41

Si  $f$  est une fonction de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , alors la suite  $(T_N(f)(t))_N$  tend vers la valeur moyenne  $\frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+))$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Démonstration** Il suffit, comme dans la démonstration du théorème de Dirichlet de la page 792, de démontrer que la suite  $(T_N(u)(0))_N$  converge vers  $u(0)$  pour toute fonction  $u$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  paire et continue en 0.

Considérons alors un intervalle de la forme  $[-\alpha, \alpha]$  avec  $0 < \alpha < \pi$  sur lequel  $u$  est continue et la fonction paire  $\psi$  de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  telle que :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \alpha/2] \\ 2 - \frac{2}{\alpha}t & \text{si } t \in ]\alpha/2, \alpha[ \\ 0 & \text{si } t \in [\alpha, \pi] \end{cases}$$

Posons  $v = \psi u$  et  $w = (1 - \psi) u$ . On a bien sûr et  $u = v + w$  et :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad T_N(u)(0) = T_N(v)(0) + T_N(w)(0).$$

Puisque  $v$  appartient à  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $(T_N(v)(0))_N$  converge vers  $v(0)$ . Puisque  $w$  est nulle sur  $[-\alpha/2, \alpha/2]$ , le théorème de Dirichlet montre que  $(S_N(w)(0))_N$  converge vers  $w(0)$ . Le théorème de Cesàro montre alors que  $(T_N(w)(0))_N$  converge vers  $w(0)$ . On en déduit que  $(T_N(u)(0))_N$  converge vers  $u(0)$ . □

Le corollaire précédent et le théorème de Cesàro montrent que la suite  $(S_N(f)(t_0))_N$  des sommes de Fourier d'une fonction de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  en  $t_0$  ne peut converger que vers  $\frac{1}{2} (f(t_0^-) + f(t_0^+))$  ; si elle ne converge pas vers cette valeur, elle ne converge pas dans  $\mathbb{C}$ .

## 4. Convergence en moyenne quadratique

### 4.1 Espace des fonctions périodiques continues

Nous avons vu que l'espace  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  muni du produit scalaire  $(f | g)$  est un espace préhilbertien complexe. Ce qui suit n'est qu'une application de la théorie de ces espaces à cette situation.

#### Polynôme de meilleur approximation en moyenne quadratique

Le sous-espace  $\mathcal{P}_N$  des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $N$  est un sous-espace de dimension finie dont  $(e_n)_{n \in [-N, N]}$  est une base orthonormée. Il possède donc un supplémentaire orthogonal et l'on peut définir la projection orthogonale de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sur  $\mathcal{P}_N$ .

Pour une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , cette projection est donnée par :

$$\sum_{n=-N}^N (e_n | f) e_n.$$

Il s'agit donc, nous l'avons signalé dans le corollaire 23 page 789 de la  $N^{\text{ième}}$  somme de Fourier  $S_N(f)$  de  $f$ . On obtient alors la proposition suivante :

#### Proposition 42

Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

- La  $N^{\text{ième}}$  somme de Fourier  $S_N(f)$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathcal{P}_N$ .
- L'application  $p \mapsto \|p - f\|_2$  de  $\mathcal{P}_N$  vers  $\mathbb{R}$  atteint son minimum  $d(f, \mathcal{P}_N)$ , en un seul point, à savoir  $S_n(f)$ .

On a par le théorème de Pythagore la relation :

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2.$$

Le minimum  $d(f, \mathcal{P}_N)$  s'appelle la *distance de  $f$  au sous-espace  $\mathcal{P}_N$* . Le polynôme trigonométrique  $S_n(f)$ , unique point de  $p \in \mathcal{P}_N$  où  $\|f - p\|_2$  est égal à  $d(f, \mathcal{P}_N)$ , s'appelle le *polynôme trigonométrique de meilleure approximation quadratique* de  $f$ .

#### Approximation en moyenne quadratique

#### Théorème 43

Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $p$  telle que :

$$\|f - p\|_2 \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ .

Le théorème de Weierstrass trigonométrique nous fournit un polynôme trigonométrique  $p$  vérifiant  $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$ . L'inégalité :

$$\|f - p_k\|_2 \leq \|f - p\|_\infty$$

montre alors que l'on a  $\|f - p\|_2 \leq \varepsilon$ . □

L'espace  $\mathcal{P}$  des polynômes trigonométriques est donc dense dans  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Puisque cet espace est engendré par la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , on obtient le théorème suivant :

**Théorème 44**

La famille exponentielle  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormée *totale* de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

**Convergence en moyenne quadratique des sommes de Fourier**

**Théorème 45**

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , la suite  $(S_N(f))_N$  des sommes de Fourier de  $f$  converge en moyenne quadratique vers  $f$ .

**Démonstration** La suite  $(\|f - S_N(f)\|_2)$  des distances de  $f$  aux sous-espaces  $\mathcal{P}_N$  est décroissante puisque l'on a  $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{P}_{N+1}$ . Elle converge donc vers un nombre réel  $s \geq 0$ .

Si  $s$  est strictement positif, le théorème d'approximation en moyenne quadratique nous fournit un polynôme trigonométrique  $p$  tel que  $\|f - p\|_2 \leq \frac{s}{2}$ . On obtient alors :

$$s \leq \|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - p\|_2 \leq \frac{s}{2}$$

en notant  $N$  le degré de  $p$ .

Cette contradiction montre ce que l'on voulait □

L'application norme étant continue, la suite  $(\|S_N(f)\|_2)$  converge vers  $\|f\|_2$  pour tout  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . On obtient la proposition suivante :

**Proposition 46 (Égalité de Parseval-Bessel)**

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on a alors :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right)$$

*Exemple* Nous avons vu dans l'exemple de la page 797 que la série de Fourier de l'unique fonction  $f$  de  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  égale à  $t^2$  sur  $[-\pi, \pi]$  est :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nt.$$

Comme  $\|f\|_2^2$  vaut  $\frac{\pi^4}{5}$ , la formule de Parseval-Bessel s'écrit  $\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n^4}$ .

On en déduit la formule remarquable :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

La formule de Parseval-Bessel entraîne l'important corollaire suivant :

**Corollaire 47**

Deux fonctions de  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sont égales si, et seulement si, elles ont mêmes coefficients de Fourier.

**Démonstration** Si  $f$  et  $g$  de  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ont mêmes coefficients de Fourier, on a :

$$\|f - g\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f - g)|^2$$

d'où  $f = g$ . □

Ainsi, une application  $f$  de  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est réelle si et seulement si elle vérifie  $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$  ou  $(a_n(f), b_n(f)) \in \mathbb{R}^2$  pour tout  $n$ . De la même façon, elle est paire (respectivement impaire) si, et seulement si, on a  $c_{-n}(f) = c_n(f)$  ou  $b_n(f) = 0$  (respectivement  $c_{-n}(f) = -c_n(f)$  ou  $a_n(f) = 0$ ) pour tout  $n$ .

Nous avons vu dans le chapitre consacré aux espaces préhilbertiens que l'espace  $\ell^2(\mathbb{Z})$  des familles de carré sommables  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un espace préhilbertien pour le produit scalaire :

$$\left( (c_n) \mid (d_n) \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n} d_n$$

(la majoration  $2|\overline{c_n}d_n| \leq |c_n|^2 + |d_n|^2$  montre que famille  $(\overline{c_n}d_n)$  est sommable).

On note évidemment  $\left\| (c_n) \right\|_2$  la norme associée.

On peut alors reformuler l'égalité de Parseval-Bessel de façon suivante :

**Proposition 48**

L'application  $f \mapsto \widehat{f}$  est une application linéaire  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$  vérifiant :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \left\| \widehat{f} \right\|_2 = \|f\|_2$$

(on dit que  $f \mapsto \widehat{f}$  est une isométrie).

L'application  $f \mapsto \widehat{f}$  est donc injective. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'elle n'est pas surjective.

La formule de polarisation montre alors que l'application  $f \mapsto \widehat{f}$  conserve aussi le produit scalaire. On en déduit la proposition suivante :

**Corollaire 49**

Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$ , on a alors :

$$(f | g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{\overline{a_0(f)} a_0(g)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \overline{a_n(f)} a_n(g) + \overline{b_n(f)} b_n(g) \right)$$

(les séries ci-dessus étant absolument convergentes).

*Exemple* Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on a :

$$\operatorname{Im}(f | f') \leq (f' | f')$$

avec égalité si, et seulement si,  $f = c_0 + c_1 e^{it}$  (théorème d'Hurwitz).

En utilisant  $c_n(f') = in c_n(f)$ , on obtient en effet :

$$\operatorname{Im}(f | f') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n(f)|^2$$

et :

$$(f' | f') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2.$$

Ainsi :

$$(f' | f') - \operatorname{Im}(f | f') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 - n) |c_n(f)|^2$$

est positif. On a l'égalité  $\text{Im}(f | f') = (f' | f')$  si, et seulement si,  $c_n(f) = 0$  pour tout  $n \notin \{0, 1\}$ , c'est-à-dire si, et seulement si,  $f = c_0 + c_1 e^{it}$ .

Le théorème d'Hurwitz permet de démontrer de façon remarquable l'inégalité isopérimétrique suivante : si  $\Gamma$  un arc géométrique fermé simple de classe  $C^1$  du plan de longueur  $L$  et de surface intérieure  $S$ , on a  $\pi S \leq L^2$  et l'égalité n'a lieu que lorsque  $\Gamma$  est un cercle.

Supposons, en effet, que  $\Gamma$  soit décrit par le paramétrage normal :

$$\begin{aligned} [0, L] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (x(s), y(s)) \end{aligned}$$

avec  $(x(L), y(L)) = (x(0), y(0))$  et  $(x'(L), y'(L)) = (x'(0), y'(0))$ . La longueur de  $\Gamma$  est  $L$  et l'aire de la partie du plan intérieure à la courbe :

$$S = \frac{1}{2} \int_{[0, L]} (xy' - yx').$$

Considérons alors la fonction  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  prolongeant la fonction  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $g(t) = x(\frac{L}{2\pi}t) + iy(\frac{L}{2\pi}t)$ . La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  et on a :

$$|f'(t)| = \frac{L}{2\pi} \sqrt{x'^2 \left(\frac{L}{2\pi}t\right) + y'^2 \left(\frac{L}{2\pi}t\right)} = \frac{L}{2\pi},$$

soit  $(f' | f') = (\frac{L}{2\pi})^2$ . On voit de même que  $\text{Im}(f | f')$ , égal à :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Im} \left( \left( x \left( \frac{L}{2\pi}t \right) - iy \left( \frac{L}{2\pi}t \right) \right) \left( x' \left( \frac{L}{2\pi}t \right) + y' \left( \frac{L}{2\pi}t \right) \right) \right) \frac{L}{2\pi} dt$$

vaut :

$$\text{Im}(f | f') = \frac{1}{\pi} S.$$

La relation  $\text{Im}(f | f') \leq (f' | f')$  montre l'inégalité isopérimétrique recherchée :

$$\pi S \leq L^2.$$

De plus l'égalité n'a lieu que lorsque l'on a :

$$\text{Im}(f | f') = (f' | f')$$

soit  $f(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ , c'est-à-dire si, et seulement si,  $\Gamma$  est un cercle.



## 4.2 Espace des fonctions périodiques continues par morceaux

Bien que l'espace  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  muni du produit scalaire  $(f | g)$  ne soit pas un espace préhilbertien, nous allons voir qu'un certain nombre des résultats précédents subsistent. Il ne s'agit en général que d'adapter la terminologie. Le seul point auquel il faut être attentif est que la relation  $\|f - g\|_2 = 0$  ne signifie pas que  $f$  et  $g$  sont égales mais seulement qu'elles sont égales sauf peut-être en un nombre fini de points sur tout segment.

### Polynôme de meilleur approximation en moyenne quadratique

On ne peut plus parler de projection orthogonale, mais nous avons vu que pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , la  $N^{\text{ième}}$  somme de Fourier de  $f$  vérifie :

$$f - S_N(f) \perp \mathcal{P}_N.$$

On en déduit la proposition suivante :

#### Proposition 50

Pour tout  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , l'application  $p \mapsto \|p - f\|_2$  de  $\mathcal{P}_N$  vers  $\mathbb{R}$  atteint son minimum en un seul point, à savoir  $S_n(f)$ .

**Démonstration** Pour tout  $p \in \mathcal{P}_N$ , on a  $f - S_N(f) \perp S_n(f) - p$  et donc :

$$\|f - p\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f) - p\|_2^2.$$

Le minimum de  $\|f - p\|_2^2$  lorsque  $p$  parcourt  $\mathcal{P}_N$  est donc  $\|f - S_n(f)\|_2^2$  et est atteint lorsque

$\|p - S_n(f)\|_2^2$  est nul, c'est-à-dire  $p = S_n(f)$ . □

Le minimum  $d(f, \mathcal{P}_N)$  s'appelle, bien sûr, la distance de  $f$  au sous-espace  $\mathcal{P}_N$  et  $S_n(f)$ , le polynôme trigonométrique de meilleur approximation quadratique de  $f$ .

### Approximation en moyenne quadratique

#### Theorème 51

Soit  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $p$  telle que :

$$\|f - p\|_2 \leq \varepsilon.$$

Cette proposition ne peut évidemment pas s’obtenir directement à partir du théorème de Weierstrass. Nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme**

Soit  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  telle que :

$$\|f - g\|_2 \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ .

On sait qu’il existe une fonction  $\varphi \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  en escalier sur  $[0, 2\pi]$  telle que :

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$\|f - \varphi\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit  $S = (a_0, \dots, a_p)$  une subdivision de  $[0, 2\pi]$  adaptée à  $\varphi$ . Pour tout  $\alpha > 0$  inférieur à la moitié du pas de  $S$ , considérons la fonction  $2\pi$ -périodique continue et affine par morceaux  $\psi$  définie par :

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(t - a_k) & \forall t \in [a_k, a_k + \alpha] \\ 1 & \forall t \in [a_k + \alpha, a_{k+1} - \alpha] \\ \frac{1}{\alpha}(a_{k+1} - t) & \forall t \in [a_{k+1} - \alpha, a_{k+1}] \end{cases}$$

pour tout  $k \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket$ . On a alors :

$$\int_{[0, 2\pi]} |\varphi - \psi\varphi|^2 \leq \|\varphi\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{p-1} \left( \int_{[a_k, a_k + \alpha]} 1 + \int_{[a_{k+1} - \alpha, a_{k+1}]} 1 \right) \leq 2\alpha p \|\varphi\|_\infty^2.$$

On peut donc choisir  $\alpha$  tel que :

$$\|\varphi - \psi\varphi\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

L’application  $g = \psi\varphi$  est continue est vérifie :

$$\|f - g\|_2 \leq \|f - \varphi\|_2 + \|\varphi - g\|_2 \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Démonstration du théorème d’approximation** Soit  $\varepsilon > 0$ .

Nous avons vu qu’il existe une fonction  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  telle que  $\|f - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Le théorème d’approximation quadratique des fonctions de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  nous fournit alors un polynôme trigonométrique  $p$  tel que l’on ait  $\|g - p\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . On obtient alors :

$$\|f - p\|_2 \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Convergence en moyenne quadratique des sommes de Fourier**

On montre exactement de la même façon que dans le cas des fonctions continues le théorème suivant :

**Théorème 52**

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , la suite :

$$\left( \|S_N(f) - f\|_2 \right)$$

tend vers 0.

L'inégalité  $\left| \|S_N(f)\|_2 - \|f\|_2 \right| \leq \|S_N(f) - f\|_2$  montre alors que  $\left( \|S_N(f)\|_2 \right)$  converge vers  $\|f\|_2$  pour toute  $f$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Cela entraîne la formule de Parseval-Bessel et le corollaire suivant.

**Proposition 53 (Égalité de Parseval-Bessel)**

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on a alors :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right).$$

**Corollaire 54**

Deux fonctions de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sont égales sauf peut être en un nombre fini de points sur tout segment si, et seulement si, elles ont mêmes coefficients de Fourier.

**Démonstration** La formule de Parseval-Bessel montre, en effet, que deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ont mêmes coefficients de Fourier si, et seulement si,  $\|f - g\|_2 = 0$ .  $\square$

Comme dans le cas des fonctions continues, l'application  $f \mapsto \widehat{f}$  de l'espace  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vers  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  a son image contenue dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Par ce qui précède, son noyau est l'ensemble des fonctions nulles sauf peut être en un nombre fini de points sur tout segment.

On a bien sûr  $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$  pour tout  $f$  et, par polarisation :

$$(f | g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{\overline{a_0(f)} a_0(g)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \overline{a_n(f)} a_n(g) + \overline{b_n(f)} b_n(g) \right)$$

(les séries ci-dessus étant absolument convergentes) pour tout  $(f, g)$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$ .

L'exemple suivant montre que l'application  $f \mapsto \widehat{f}$  de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  vers  $\ell^2(\mathbb{Z})$  n'est pas surjective.

*Exemple* Soit  $(c_n)$  la famille de  $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  définie par :

$$c_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_{-n} = c_n = \frac{1}{2n}.$$

Il est clair que  $(c_n)$  appartient à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

Supposons qu'il existe une fonction  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dont la famille des coefficients exponentiels est  $(c_n)$ . La série de Fourier de  $f$  est  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nt}{n}$ . La  $N^{\text{ième}}$  somme de Fourier de  $f$  en 0 est :

$$S_N(f)(0) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

Elle tend vers  $+\infty$ . Le théorème de Cesàro montre que  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(0)$  tend aussi vers  $+\infty$ . Cela contredit le théorème de Fejér.

Ainsi, la famille  $(c_n)$  n'appartient pas à l'image de  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  par  $f \mapsto \widehat{f}$ .

## EXERCICES

1. Calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes, et en déterminer la somme et le mode de convergence (simple, normale, uniforme) :

1.  $f(x) = \sin^3 x$ ;

2.  $f(x) = \arcsin(\cos x)$ .

2. Calculer la somme de la série trigonométrique

$$\cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} + \dots = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)!}.$$

3. Développer en série de Fourier la fonction :

$$x \mapsto f(x) = \ln(2 + \cos x).$$

*On pourra d'abord développer en série de Fourier sa dérivée.*

4. Soit  $(a_n)$  une suite de réels positifs. Montrer que la série de fonctions  $\sum a_n \cos nx$  converge uniformément sur  $]0, 2\pi[$  si et seulement si  $\sum a_n$  converge.

5. La série de Fourier de la fonction  $f$  paire  $2\pi$ -périodique qui vaut  $\sqrt{x}$  sur  $[0, \pi]$  converge-t-elle uniformément ? Quelle est sa somme ?

6. Soit  $(b_n)$  une suite de réels tendant en décroissant vers 0.

1. Montrer que pour tout entier  $p$ , la série de fonctions  $\sum b_n \sin nx \sin px$  converge uniformément. On pourra utiliser une transformation d'ABEL.

2. En déduire que si la somme  $f$  de la série  $\sum b_n \sin nx$  est continue par morceaux, alors la suite  $(b_n)$  est bien la suite des coefficients de Fourier de  $f$ .

7. Soit  $(a_n)$  une suite de réels décroissante tendant vers 0, telle que la suite  $(na_n)$  soit bornée. On suppose que  $\sum a_n$  diverge. Montrer que la fonction

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx \text{ vérifie } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ > 0}} f(x) = +\infty. \text{ On pourra couper la somme}$$

en deux et utiliser une transformation d'ABEL.

8. 1. On pose  $D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$  pour  $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , et  $D_n(x) = 2n+1$  si  $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

Montrer que les nombres  $\int_0^x D_n(t) dt$  sont bornés indépendamment de  $x$  et de  $n$ . On pourra considérer le signe de  $D_n$  sur différents intervalles.

2. En déduire que les sommes  $\sum_{k=n}^N \frac{\sin kx}{k}$  sont bornées (en valeur absolue) par un nombre  $M$  indépendant de  $n \geq 1$ ,  $N \geq n$ , et  $x$ .
3. Soit  $(b_n)$  une suite de réels telle que la suite  $(nb_n)$  soit elle-même décroissante et de limite nulle. Déduire de la question précédente que  $\sum b_n \sin nx$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .
9. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continues, paires,  $2\pi$ -périodiques. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$h(x) = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)a_n(g) \cos(nx).$$

Existence et continuité de  $h$  ? Chercher les coefficients de Fourier de  $h$ . Montrer que  $\|h\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty\|g\|_\infty$ .

10. Calculer de deux manières la partie réelle de  $\int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{(n+1)i\theta} \right) dt$ , pour  $\theta \in ]0, \pi[$ . En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ .

11. Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^{**}$  tendant vers 0 à l'infini telle que, pour toute fonction  $f$  continue  $2\pi$ -périodique les coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  de  $f$  soient des  $O(\varphi(n))$ .

Donner en particulier un exemple de fonction  $f$  somme de sa série de Fourier normalement convergente qui ne vérifie pas  $a_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .

12. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^1$  telle qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = f(t + \lambda). \quad (*)$$

1. Montrer que  $f$  et  $f'$  sont développables en série de Fourier.
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $(in - e^{n\lambda})c_n(f) = 0$ , où les  $c_n(f)$  sont les coefficients de Fourier exponentiels de  $f$ . Trouver toutes les  $f$  vérifiant l'équation (\*).

**13** Soit  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique. Pour tout  $\delta > 0$  on note :

$$\Omega_f(\delta) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - f(t + \delta)| = \sup_{0 \leq t < 2\pi} |f(t) - f(t + \delta)|$$

1. Montrer que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_f(\delta) = 0$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $|a_n(f)| \leq \Omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right)$ , et de même avec  $|b_n(f)|$ .
3. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f) = 0$ , et de même avec  $b_n$  (lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions  $f$  continues).
4. En déduire que, s'il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\lambda > 0$  telles que pour tous  $x, y$  réels  $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|^\alpha$ , alors  $\forall n \geq 1$ ,  $|a_n(f)| \leq \lambda\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha$ .

**14. Taille des coefficients**

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continue par morceaux et à sauts symétriques, i.e. :

$$\forall x, \quad f(x) = \frac{1}{2} (f(x_+) + f(x_-)).$$

1. On suppose que  $c_n(f) = o(|n|^{-p})$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^{p-2}$ .
  2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de Fourier pour que  $f$  soit de classe  $C^\infty$ .
  3. On suppose que  $c_n(f) = o(e^{-r|n|})$  lorsque  $n$  tend vers  $\pm \infty$ , avec  $r > 0$ . Montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de chaque point.
- 15.** Soient  $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$  tels que le polynôme  $P(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k$  ne soit pas identiquement nul.

1. Montrer que  $\int_{-1}^1 (P(t))^2 dt = -i \int_0^\pi (P(e^{i\theta}))^2 e^{i\theta} d\theta$ .
2. Montrer que  $\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{a_n a_m}{n+m+1} \leq \pi \sum_{k=0}^N a_k^2$ .

- 16.**
1. Montrer que si la suite de modules  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$  décroît et tend vers 0, et si la série trigonométrique  $\sum_{n \geq 1} a_n \cos nx$  converge absolument en au moins un point  $x_0$ , alors  $\sum |a_n|$  converge.
  2. Ce résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus que la série des modules décroît, mais encore que  $a_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini ?

17. Pour  $t \in [0, \pi]$ , on définit la fonction  $2\pi$ -périodique  $h$  par :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad h(\theta) = \left(1 - \frac{|\theta|}{t}\right) \chi(\theta),$$

où  $\chi$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-t, t]$ .

1. Développer  $h$  en série de Fourier.

2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs telle que la série  $\sum v_n z^n$  ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et soit  $\varphi(z)$  sa somme. Montrer que :

$$\forall r \in ]0, 1[, \quad \forall t \in [0, \pi], \quad \frac{1}{2t} \int_{-t}^t |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

18. Soit  $u$  de classe  $C^2$  de  $\Delta = [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $u(x, y) = -u(-x, y)$  pour tout  $(x, y)$  dans  $\Delta$ ,  $u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , et  $u$  est harmonique c'est-à-dire  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  dans  $\Delta$ . Montrer que  $u$  est de la forme

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} ((\lambda_k e^{ky} + \nu_k e^{-ky}) \sin kx).$$

Indication :  $y$  étant fixé dans  $\mathbb{R}$ , étudier la fonction  $f_y$  de période  $2\pi$  qui à  $x$  associe  $u(x, y)$  pour  $x \in [-\pi, \pi]$ .

19. 1. **Polarisation de la formule de Parseval.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions complexes  $2\pi$ -périodiques et continues par morceaux. Montrer que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g).$$

2. **Lemme de Riemann-Lebesgue généralisé.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(t) g(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(t) dt \right) \left( \int_0^{2\pi} g(t) dt \right).$$

On pourra considérer les coefficients de Fourier de  $g_n$  et  $f g_n$ , où  $g_n(t) = g(nt)$ .

3. Étendre cela à une fonction  $f$  continue par morceaux sur un compact  $[a, b]$ , non nécessairement périodique (mais  $g$  reste  $2\pi$ -périodique).



**20. Formule sommatoire de Poisson**

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telles que, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , l'application  $x \mapsto x^n f^{(m)}(x)$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$  (fonctions à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées).

1. Montrer que  $\mathcal{S}$  n'est pas réduit à 0.
2. Pour  $f \in \mathcal{S}$ , étudier la convergence des séries de fonctions définissant :

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n), \text{ et } G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n).$$

3. Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  et 1-périodique.
4. Montrer que  $F$  est développable en série de Fourier, et exprimer ses coefficients à l'aide de  $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ty} f(t) dt$ .
5. En déduire la formule sommatoire :  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(p)$ .

**21** Soit  $D$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux à sauts symétriques, i.e. :

$$\forall x, \quad f(x) = \frac{1}{2} (f(x_+) + f(x_-)).$$

Soit  $\alpha$  réel tel que  $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ .

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme  $\tau_\alpha$  de  $D$  défini par :  $\forall x, \tau_\alpha(f)(x) = f(x - \alpha)$ .
2. Soit  $T$  une application linéaire de  $D$  dans  $D$ , continue pour la norme  $\|\cdot\|_2$ , qui commute avec  $\tau_\alpha$ . Montrer qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de complexes telle que,

$$\forall f \in D, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(T(f)) = a_n c_n(f).$$

- 22.** 1. Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique continue par morceaux telle que  $a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$ . Montrer que l'application  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est  $2\pi$ -périodique et continue. Montrer que  $F$  est somme de sa série de Fourier et la calculer.
2. En déduire que pour toute fonction  $f$  continue  $2\pi$ -périodique continue par morceaux, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n(f)}{n}$  converge.

3. On conserve les notations de la première question, mais on ne suppose plus que  $a_0(f) = 0$ . Soit  $F$  la fonction  $2\pi$ -périodique continue par morceaux, vérifiant la condition de Dirichlet, telle que, pour tout  $x \in ]-\pi, \pi[$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Donner le développement en série de Fourier de  $F$ , et montrer sa convergence. Cette convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$  ?
23. La fonction  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  est-elle continue par morceaux ?
24. Soit  $(b_n)$  une suite de réels décroissante et tendant vers 0. Montrer que la série trigonométrique  $\sum b_n \sin nx$  converge uniformément si et seulement si la suite  $(nb_n)_n$  tend vers 0.

**Quatrième partie**

**Analyse 3**



# Chapitre 21

## Calcul différentiel

Dans ce chapitre,  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, \|\cdot\|)$  désignent des espaces vectoriels normés réels de dimension finie non nulle.

Nous utiliserons éventuellement des bases  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m)$  et  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  et  $F$ . Si  $f$  est une application à valeurs dans  $F$ , on notera alors  $f_i = v_i^* \circ f$  les composantes de  $f$  dans  $\mathcal{C}$  ( $v_i^*$  désigne bien sûr la  $i^{\text{ième}}$  forme coordonnée dans la base  $\mathcal{C}$ ).

### 1. Applications continûment différentiables

Soient  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f$  une application de  $U$  vers  $F$ .

#### 1.1 Dérivée suivant un vecteur

Soit  $a \in U$ .

##### Définition

Soit  $h$  un vecteur de  $E$ .

L'application  $\varphi_{a,h} : t \mapsto f(a + th)$  est définie sur l'ensemble  $\Omega_{a,h}$  des  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $a + th \in U$ . Cet ensemble est un ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0.

##### Définition 1

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  suivant le vecteur  $h$  si l'application  $\varphi_{a,h}$  est dérivable en 0.

On appelle alors *dérivée de  $f$  en  $a$  suivant  $h$* , et on note  $D_h f(a)$ , cette dérivée.

**Remarques**

- La dérivée suivant le vecteur  $h$  est donc donnée par :

$$D_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}.$$

- La dérivation suivant un vecteur possède les propriétés de la dérivation des fonctions d'une variable réelle. En particulier, elle est indépendante des normes choisies et l'application  $f$  est dérivable en  $a$  suivant  $h$  si, et seulement si, ses composantes dans la base  $\mathcal{C}$  sont dérivables en  $a$  suivant  $h$ . On a alors :

$$D_h f(a) = \sum_i D_h f_i(a) v_i.$$

On dit bien sûr que  $f$  est dérivable suivant  $h \in E$  si elle possède une dérivée suivant  $h$  en tout  $x$  de  $U$ . On appelle alors dérivée suivant  $h$  de  $f$  et on note  $D_h f$ , l'application  $x \mapsto D_h f(x)$  de  $U$  vers  $F$ .

**Dérivées partielles et matrice jacobienne**

Rappelons que  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m)$  désigne une base de  $E$ .

**Définition 2**

On dit que  $f$  possède une *dérivée partielle d'indice  $j$*  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  en  $a$  si elle est dérivable en  $a$  suivant le vecteur  $u_j$ .

On appelle alors *dérivée partielle d'indice  $j$*  de  $f$  en  $a$ , et on note  $D_j f(a)$ , cette dérivée.

**Remarques**

- La  $j^{\text{ième}}$  dérivée partielle de  $f$  en  $a$  est donc donnée par :

$$D_j f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu_j) - f(a)}{t}.$$

- Si  $E$  est l'espace numérique  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathcal{B}$  sa base canonique on a :

$$a + tu_j = (a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_m)$$

lorsque  $a = (a_1, \dots, a_m)$ . Le changement de variable  $x_j = a_j + t$  montre alors que la  $j^{\text{ième}}$  dérivée partielle de  $f$  en  $a$  est la dérivée en  $a_j$  de la  $j^{\text{ième}}$  application partielle en  $a$  :

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_m).$$

On retrouve ainsi la notion de dérivée partielle vue dans le cours de première année que l'on note habituellement  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ . On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{x_j \rightarrow a} \frac{f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_m)}{x_j - a_j}.$$

- On ramène le cas général à cette situation en considérant l'expression analytique de  $f$ , c'est-à-dire l'application  $\varphi$  de l'ouvert  $U'$  des  $(x_j)$  de  $\mathbb{R}^m$  tels que  $x = \sum_j x_j u_j$  appartienne à  $U$ , à valeurs dans  $F$  et vérifiant :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = \varphi(x_1, \dots, x_m).$$

On voit en effet que  $f$  et  $\varphi$  possède simultanément une  $j^{\text{ième}}$  dérivée partielle en  $a$  et que l'on a alors :

$$D_j f(a) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_m).$$

Pour cette raison, on désigne fréquemment cette dérivée partielle par  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

(dans la mesure où les coordonnées de l'élément générique de  $E$  sont notées  $x_j$ ). On utilise aussi les notations  $f'_{x_j}(a)$  ou  $\partial_j f(a)$ .

### Définition 3

Si  $f$  possède des dérivées partielles en  $a$ , on appelle *matrice jacobienne* dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  de  $f$  en  $a$ , et on note  $\text{Jac } f(a)$ , la matrice :

$$\left( D_j f_i(a) \right) \in M_{n,m}(\mathbb{R}).$$

**Remarque** Si l'on désigne par  $\varphi_i$  les expressions analytiques des  $f_i$ , l'application  $f$  a une matrice jacobienne en  $a$  si, et seulement si, les dérivées partielles

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_m)$  existent. On a alors :

$$\text{Jac } f(a) = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_m) \right).$$

► **Attention** L'exemple suivant montre qu'une application peut posséder une dérivée suivant tout vecteur en un point sans être continue en ce point. On ne peut donc pas considérer que cette notion est une extension satisfaisante de la notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle.

**Exemple** L'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable en  $(0, 0)$  suivant tout vecteur  $v = (a, b)$  puisque l'on a :

$$f(t(a, b)) = t \frac{b^2}{a} \quad \text{et} \quad D_{(a,b)}f(0, 0) = \frac{b^2}{a}$$

lorsque  $a$  est non nul et :

$$f(t(a, b)) = 0 \quad \text{et} \quad D_{(a,b)}f(0, 0) = 0$$

lorsque  $a$  est nul.

Néanmoins  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$  puisque la suite  $(f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , constante de valeur 1, ne tend pas vers  $f(0, 0)$  qui est nul.

## 1.2 Applications différentiables

La notion d'application différentiable est la véritable généralisation de la notion d'application dérivable d'une variable réelle. Faute de pouvoir en général diviser par les éléments de  $E$ , elle ne peut évidemment s'appuyer sur la notion de taux d'accroissement. Elle utilisera celle de développement limité d'ordre 1.

Soit  $a \in U$ .

### Différentielle

L'application  $h \mapsto f(a + h)$  est définie sur l'ensemble  $U - a$  des  $h \in E$  tels que  $a + h \in U$ . Cet ensemble est un ouvert de  $E$  contenant 0.

► **Attention** On distinguera soigneusement l'ensemble  $U - a$ , translate de  $U$  par  $-a$ , de l'ensemble  $U \setminus \{a\}$  formé des éléments de  $U$  différents de  $a$ .

### Définition 4

On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$f(a + h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|).$$

On dit alors que  $u$  est tangente à  $f$  en  $a$ . La proposition suivante montre qu'elle est unique.

### Proposition 1

Si l'application linéaire  $u$  est tangente à  $f$  en  $a$ , alors  $f$  est dérivable suivant tout vecteur  $h$  en  $a$  et :

$$D_h f(a) = u(h).$$



**Démonstration** En explicitant le développement limité précédent, on a :

$$f(a + h) = f(a) + u(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

avec  $\varepsilon : U - a \rightarrow F$  telle que  $\lim_0 \varepsilon = 0$ . Soit alors  $h \in E$ . Par substitution il vient pour tout  $t \in \Omega_{a,h}$  :

$$f(a + th) = f(a) + tu(h) + |t| \|h\| \varepsilon(th).$$

La fonction  $\varphi_{a,h}$  est donc dérivable de dérivée  $u(h)$  en  $a$ . □

**Définition 5**

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , on appelle *différentielle* de  $f$  en  $a$ , et on note  $df(a)$  ou  $df_a$ , l'unique application linéaire tangente à  $f$  en  $a$ .

**Remarques**

- On montre que  $f$  est différentiable en  $a$  de différentielle  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  en écrivant l'accroissement de  $f$  sous la forme :

$$f(a + h) - f(a) = u(h) + r(h)$$

où le reste  $r(h)$  est négligeable devant  $\|h\|$ . On prouve que l'application  $r(h)$ , définie sur  $U - a$  tout entier et nulle en 0, est négligeable devant  $\|h\|$  en vérifiant :

- ▶ soit que l'on peut écrire :

$$r(h) = \|h\| \varepsilon(h)$$

où  $\varepsilon$  est une application de  $U - a$  vers  $F$  vérifiant  $\lim_0 \varepsilon = 0$  et, donc,  $\varepsilon(0) = 0$ .

- ▶ soit que l'on a :

$$\lim_{(U-a) \setminus \{0\}} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

- La différentiabilité de  $f$  s'exprime par le développement limité du premier ordre :

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|)$$

que l'on réécrit parfois, après le changement de variable  $x = a + h$  sous la forme :

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + o(\|x - a\|).$$

- On sait qu'en dimension finie la relation  $\varphi = o(\|h\|)$  en 0 est indépendante des normes choisies sur les espaces  $E$  et  $F$ . Il en est donc de même de la notion d'application différentiable et de différentielle en un point

## Exemples

1. Montrons que l'application continue  $\exp : u \mapsto e^u$  de  $\mathcal{L}(E)$  dans lui-même est différentiable en 0.

Pour tout  $h \in \mathcal{L}(E)$ , on a :

$$e^h = \text{Id}_E + h + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} h^n.$$

Considérons alors l'application linéaire  $\text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$  et le reste associé :

$$r(H) = e^h - \text{Id}_E - \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}(h).$$

La majoration :

$$\|r(h)\| = \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} h^n \right\| \leq \|h\|^2 g(\|h\|)$$

où  $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n-2}$  montre que  $r(h)$  est négligeable devant  $\|h\|$ . L'application exponentielle est donc différentiable en 0 et sa différentielle en ce point est  $\text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ .

2. On dit qu'une application  $f$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  est *dérivable au sens complexe* en  $z_0 \in U$  si le rapport d'accroissement :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

possède une limite en  $z_0$ . Cette limite s'appelle alors la *dérivée au sens complexe* de  $f$  en  $z_0$  et est notée  $f'(z_0)$ .

Si  $f$  est dérivable au sens complexe en  $z_0$ , on peut écrire, comme dans le cas réel :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(\|h\|).$$

L'application  $f$  est donc différentiable en  $z_0$  et sa différentielle  $df(z_0)$ , qui est l'application :

$$h \mapsto hf'(z_0)$$

de  $\mathbb{C}$  dans lui-même, n'est pas simplement  $\mathbb{R}$ -linéaire mais aussi  $\mathbb{C}$ -linéaire.

Si  $f$  est différentiable en  $z_0$  et si  $df(z_0)$  appartient à  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ , il existe un nombre complexe  $b$  tel que l'on ait  $df(z_0) = b \text{Id}_{\mathbb{C}}$ . Le développement limité :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(\|h\|)$$

montre alors immédiatement que  $f$  est dérivable au sens complexe en  $z_0$  et que l'on a  $f'(z_0) = b$ .

Pour terminer remarquons qu'un endomorphisme  $u$  de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire si, et seulement si, on a  $u(i) = iu(1)$ . En rapportant  $\mathbb{C}$  à sa base canonique  $(1, i)$

sur  $\mathbb{R}$  dans laquelle on écrit  $z = x + iy$ , les relations :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)(1) = f'(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = df(z_0)(i) = f'(z_0)i$$

montrent alors que  $f$  est dérivable au sens complexe en  $z_0$  si, et seulement si, elle est différentiable en  $z_0$  et si ses dérivées partielles en ce point vérifient l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

### Définition 6

On dit que  $f$  est *différentiable* si elle est différentiable en tout point de  $U$ . On appelle alors *différentielle* de  $f$ , et on note  $df$ , l'application  $x \mapsto df(x)$  de  $U$  vers  $\mathcal{L}(E, F)$ .

### Continuité d'une application différentiable

#### Proposition 2

Si l'application  $f$  est différentiable en  $a$ , alors elle est continue en  $a$ .

**Démonstration** On a :

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|).$$

L'application linéaire  $df(a)$  étant continue (nous sommes en dimension finie)  $f(a + h)$  tend vers  $f(a)$  lorsque  $h$  tend vers 0. □

### Expression dans une base de $F$

#### Proposition 3

L'application  $f$  est différentiable en  $a$  si, et seulement si, ses composantes  $f_i$  dans la base  $\mathcal{C}$  sont différentiables en  $a$ . On a alors pour tout  $h \in E$  :

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n df_i(a)(h)v_i.$$

**Démonstration** La  $i^{\text{ième}}$  composante du développement limité exprimant la différentiabilité de  $f$  en  $a$ , soit :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + df(a)_i(h) + \varepsilon_i(h) \|h\|$$

où  $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ , montre que  $f$  est différentiable en  $a$  et que  $df_i(a) = df(a)_i$ . Il vient alors :

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n df(a)_i(h)v_i = \sum_{i=1}^n df_i(a)(h)v_i.$$

On obtient la réciproque par sommation. □

### Dérivée suivant un vecteur d'une application différentiable

Nous avons vu que lorsque  $f$  est différentiable en  $a$ , elle possède une dérivée en  $a$  suivant tout vecteur  $h$  donnée par :

$$D_h f(a) = df(a)(h).$$

On en déduit les corollaires suivants

#### Corollaire 4

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , on a pour tout  $h = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j$  :

$$D_h f(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j D_j f(a).$$

**Démonstration** On obtient en effet :

$$D_h f(a) = df(a)(h) = \sum_{j=1}^m \lambda_j df(a)(u_j)$$

et  $df(a)(u_j) = D_j f(a)$ . □

#### Corollaire 5

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , la matrice de  $df(a)$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  est la matrice jacobienne :

$$(D_j f_i(a)).$$

**Démonstration** Le  $(i, j)^{\text{ième}}$  terme de la matrice  $df(a)$  est en effet la  $i^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $df(a)(u_j) = D_j f(a)$ . □

► **Attention** Une fonction peut posséder des dérivées en un point suivant tout vecteur sans être différentiable en ce point. La fonction  $f$  considérée dans l'exemple de la page 824 n'est pas différentiable en 0 puisqu'elle n'est pas continue en ce point. On peut remarquer aussi que l'application  $(a, b) \mapsto D_{(a,b)}f(0)$  n'est pas linéaire.

### 1.3 Applications continûment différentiables

#### Définition

#### Définition 7

On dit que  $f$  est *continûment différentiable*, ou de classe  $C^1$ , si elle est différentiable et si pour tout  $h$  de  $E$  l'application  $D_h f$  est continue.

► **Remarque** Comme les notions précédentes, la notion d'application continûment différentiable est indépendante des normes choisies.

#### Exemples

1. On munit  $\mathcal{L}(E)$  d'une norme d'algèbre. On sait que l'ensemble  $\mathcal{GL}(E)$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(E)$  et que l'application  $I : u \mapsto u^{-1}$  de  $\mathcal{GL}(E)$  vers  $\mathcal{L}(E)$  est continue.
  - Soit  $u \in \mathcal{GL}(E)$ . L'application  $L : h \mapsto -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ . Pour montrer qu'elle est tangente à  $I$  en  $u$ , considérons l'application reste associé :

$$h \mapsto r(h) = (u + h)^{-1} - u^{-1} + u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

Pour tout  $h \in \mathcal{GL}(E) - u$ , le reste  $r(u)$  peut s'écrire :

$$r(h) = (u + h)^{-1} \circ (u - (u + h)) \circ u^{-1} + u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$$

soit  $r(h) = (u^{-1} - (u + h)^{-1}) \circ h \circ u^{-1}$ . La majoration :

$$\|r(h)\| \leq \|u^{-1}\| \left\| u^{-1} - (u + h)^{-1} \right\| \|h\|$$

et la continuité de  $I$  en  $u$  montrent alors que  $r(h) = o(\|h\|)$ .

On en déduit que  $I$  est différentiable en  $u$  et  $dI(u) = L$

- Pour tout  $h \in E$ , l'application  $u \in \mathcal{GL}(E) \mapsto dI(u)(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$  est continue. L'application  $I$  est donc continûment différentiable.

2. Montrons que l'application continue  $\exp : u \mapsto e^u$  de  $\mathcal{L}(E)$  dans lui-meme est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $h \in \mathcal{L}(E)$ , on a :

$$e^{u+h} - e^u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} ((u+h)^n - u^n).$$

Pour tout  $n$ , la différence  $(u+h)^n - u^n$  est de la forme  $\ell_n(h) + r_n(h)$  où :

$$\ell_n(h) = \sum_{i=1}^n u \circ \dots \circ u \circ h \circ u \circ \dots \circ u$$

et où  $r_n(u, h)$  est une somme de  $2^n - n - 1$  produit de  $n$  facteurs égaux à  $u$  ou  $h$  ayant au moins deux  $h$ .

La relation  $\|\ell_n(h)\| \leq n \|u\|^{n-1} \|h\|$  montre que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ell_n(h)}{n!}$  est absolument convergente. Il est alors clair que l'application :

$$\ell : h \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \ell_n(h)$$

est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .

La relation  $\|r_n(h)\| \leq (\|u\| + \|h\|)^n - \|u\|^n - n \|u\|^{n-1} \|h\|$  montre que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} r_n(h)$  est absolument convergente et que sa somme  $r(h)$  vérifie :

$$\|r_n(h)\| \leq e^{\|u\|+\|h\|} - e^{\|u\|} - \|h\| e^{\|u\|} = e^{\|u\|} (e^{\|h\|} - 1 - \|h\|).$$

La formule de Taylor appliquée à  $e^x$  montre alors que  $r_n(h) = o(\|h\|)$ .

Finalement, l'application exponentielle est différentiable en  $u$  et sa différentielle en ce point est l'endomorphisme  $\ell$ .

- Pour montrer que cette application est de classe  $\mathcal{C}^1$ , il suffit de vérifier que, pour tout  $h \in \mathcal{L}(E)$ , l'application :

$$u \mapsto d(\exp)(u)(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{i=1}^n u \circ \dots \circ u \circ h \circ u \circ \dots \circ u \right)$$

est continue. Pour cela nous allons montrer que c'est une série de fonctions convergeant normalement sur les boules fermés de  $\mathcal{L}(E)$ .

Soit  $R > 0$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \left\| \sum_{i=1}^n u \circ \dots \circ u \circ h \circ u \circ \dots \circ u \right\| &\leq \frac{1}{(n-1)!} \|u\|^{n-1} \|h\| \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} R^{n-1} \|h\| \end{aligned}$$

pour tout  $u$  vérifiant  $\|u\| \leq R$ . La convergence de la série exponentielle montre alors que la série considérée est normalement convergente sur  $B(0, R)$ .

Finalement, l'application  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### Expression dans une base de $F$

#### Proposition 6

L'application  $f$  est continûment différentiable si, et seulement si, ses composantes dans  $\mathcal{C}$  sont continûment différentiables.

**Démonstration** Nous avons vu que  $f$  est différentiable si, et seulement si, ses composantes le sont. Pour tout  $h$ , l'application  $D_h f$  est continue si, et seulement si, ses composantes  $D_h f_i$  le sont.  $\square$

### Définitions équivalentes

#### Proposition 7

Pour tout  $k \geq 1$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- (ii)  $f$  est différentiable et  $D_j f : U \rightarrow F$  est continue pour tout  $j$ .
- (iii)  $f$  est différentiable et  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est continue.

**Démonstration** Il est évident que (i) implique (iii). On obtient la réciproque en remarquant que pour tout  $h$ , l'application  $D_h f$  est combinaison linéaire des  $D_j f$ . L'équivalence entre (ii) et (iii) vient de ce que la matrice de  $df$  dans les bases considérées est  $(D_j f_i)$ .  $\square$

## 1.4 Caractérisation des applications continûment différentiables par leurs dérivées partielles

### Théorème 8

Une application est continûment différentiable si et seulement si elle possède des dérivées partielles continues.

**Démonstration** Si  $f$  est continûment différentiable, ses dérivées partielles sont continues d'après la page 7. La démonstration de la réciproque est plus difficile. Supposons donc que  $f$

possède des dérivées partielles continues sur  $U$ . Comme nous l'avons vu, sa différentielle en  $x$  (si elle existe) ne peut être que l'application :

$$u : h = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j \mapsto \sum_{j=1}^m \lambda_j D_j f(x).$$

On munit  $E$  de la norme  $\|x\| = \max_j |x_j|$  où  $(x_1, \dots, x_m)$  sont les coordonnées de  $x$ . Soient  $a \in U$  et  $r > 0$  tels que  $B(a, r) \subset U$ . Soit  $h \in B(0, r)$ .

- Si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  sont les coordonnées de  $h$ , on note  $h_k$  le vecteur  $\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j$ . On a évidemment  $\|h_k\| \leq \|h\|$  et  $a + h_k \in U$  pour tout  $k$ . Il vient :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^m (f(a + h_k) - f(a + h_{k-1})).$$

Si  $r(h)$  désigne le reste  $f(a + h) - f(a) - u(h)$ , on obtient donc :

$$r(h) = \sum_{k=1}^m (f(a + h_k) - f(a + h_{k-1}) - \lambda_k D_k f(a)).$$

- Notons  $r_k(h) = f(a + h_k) - f(a + h_{k-1}) - \lambda_k D_k f(a)$ . Par définition de la notion de dérivées partielles, la fonction :

$$s \mapsto f(a + h_{k-1} + s u_k) - s D_k f(a)$$

est dérivable en tout  $t \in [0, \lambda_k]$  de dérivée  $D_k f(a + h_{k-1} + t u_k) - D_k f(a)$ . Elle est donc continûment dérivable. L'inégalité des accroissement fini donne alors :

$$\|r_k(h)\| = |\lambda_k| \sup_{t \in [0, \lambda_k]} \|D_k f(a + h_{k-1} + t u_k) - D_k f(a)\|.$$

Comme on a  $\|h_{k-1} + t u_k\| \leq \|h\|$ , le vecteur  $h_{k-1} + t u_k$  appartient à  $U$  pour tous  $k$  et  $t \in [0, \lambda_k]$ . On obtient alors après sommation :

$$\|r(h)\| \leq \sum_{k=1}^m \|r_k(h)\| \leq |\lambda_k| \sup_{\|\ell\| \leq \|h\|} \sum_{k=1}^m \|D_k f(a + \ell) - D_k f(a)\|.$$

- Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité, il existe  $s \in ]0, r[$  tel que :

$$\forall \ell, \quad \|\ell\| \leq s \implies \sum_{k=1}^m \|D_k f(a + \ell) - D_k f(a)\| \leq \varepsilon.$$

On a donc pour tout  $h \in B(0, r)$  vérifiant  $\|h\| \leq s$  la relation  $\|r(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$ .

- On en déduit  $r(h) = o(\|h\|)$  et que  $f$  est différentiable en  $a$ .

L'application  $f$  est donc différentiable. Elle est continûment différentiable puisque les applications  $D_j f$  sont continues pour tout  $j$ . □



**Remarque** Ce théorème a été démontré dans le cours de première année pour les applications numériques définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Le théorème de caractérisation des applications continûment différentiables ramène leur étude à celles de leurs dérivées partielles. Celles-ci n'étant essentiellement que des dérivées usuelles, on pourra leur appliquer les théorèmes du calcul différentiel des applications d'une variable réelle. En revanche, leur continuité ne se ramène pas à la continuité de fonctions d'une variable nulle.

**Exemples**

1. Soit  $\det$  l'application déterminant de l'espace  $M_n(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{R}$ . Les coordonnées d'une matrice  $A$  dans la base canonique de  $M_n(\mathbb{R})$  sont ses coefficients  $a_{i,j}$ .

Fixons  $i$  et  $j$ . On calcule la dérivée partielle  $\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A)$  en dérivant  $\det A$  par rapport à la seule variable  $a_{i,j}$ . En remarquant que les cofacteurs  $A_{k,j}$  sont indépendants de  $a_{i,j}$ , le développement par rapport à la  $j^{\text{ème}}$  colonne :

$$\det A = \sum_{k=1}^n A_{k,j} a_{k,j}$$

montre que cette dérivée partielle existe et vaut :

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A) = A_{i,j}.$$

Ces dérivées partielles étant continues puisque polynomiales, l'application  $\det$  est continûment différentiable. Si  $H = (h_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ , la valeur de sa différentielle au point  $A$  en  $H$  vaut :

$$d(\det)(A)(H) = \sum_{i,j} A_{i,j} h_{i,j}.$$

En utilisant la matrice  $\tilde{A}$  complémentaire de  $A$ , égale par définition à la transposée de la matrice  $(A_{i,j})$  des cofacteurs de  $A$ , il vient :

$$d(\det)(A)(H) = \text{tr}(\tilde{A}H).$$

2. On dit qu'une application  $f$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  est *holomorphe* si elle est dérivable au sens complexe en tout point  $z$  de  $U$  et si l'application dérivée  $f' : z \mapsto f'(z)$  est continue sur  $U$ .

Nous avons vu dans l'exemple de la page 826 que  $f$  est holomorphe si, et seulement si, elle est continûment différentiable sur  $U$  et si la différentielle  $df(z)$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire pour tout  $z$ . Le théorème précédent montre qu'il en est ainsi si, et seulement si,  $f$  est de classe  $C^1$  et si les dérivées partielles de  $f$  dans la base canonique

(1,  $i$ ) de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{R}$  vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Soient  $S = \sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  strictement positif et  $f : B(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  l'application somme définie par :

$$\forall z \in B(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

La série entière dérivée  $S' = \sum_n n a_n z^{n-1}$  est aussi de rayon de convergence  $R$ .

Notons  $g$  son application somme. Nous avons vu théorème 20 page 649) que pour toute application de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  vers  $B(0, R)$ , l'application composée  $f \circ \varphi$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  de dérivée :

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)'(t) &= \varphi'(t) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n \varphi(t)^{n-1} \\ &= g(\varphi(t)) \varphi'(t).. \end{aligned}$$

On en déduit alors en considérant les applications  $t \mapsto t + iy$  et  $t \mapsto x + it$  que  $f$  possède en tout point  $z = x + iy$  des dérivées partielles données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = g(z)$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = i \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = ig(z).$$

L'application  $g$  étant continue,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann. Elle est donc holomorphe sur  $B(0, R)$ .

On dit qu'une application  $f$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  est *analytique* si pour tout point  $a$  de  $U$ , il existe une série entière  $S = \sum_n a_n z^n$  de rayon de convergence  $R$  strictement positif et un réel  $r$  strictement positif vérifiant  $r < R$  et  $B(a, r) \subset U$  tels que :

$$\forall z \in B(a, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n.$$

Par ce qui précède, une application analytique est holomorphe. Il est remarquable que la réciproque soit vraie. Nous verrons cela dans l'exemple de la page 840.

## 2. Exemples d'applications continûment différentiables

### 2.1 Applications linéaires et bilinéaires

#### Applications linéaires

##### Proposition 9

Toute application linéaire  $u : E \rightarrow F$  est continûment différentiable. Sa différentielle en  $a \in E$  est égale à  $u$ .

**Démonstration** On a pour tout accroissement  $h$  la relation :

$$u(a + h) = u(a) + u(h).$$

Il s'agit d'un développement de reste nul. L'application  $u$  donc est différentiable de différentielle  $u$  en tout  $a$  de  $E$ . □

Suivant la convention usuelle, on identifie une application constante et sa valeur. La différentielle  $du : x \mapsto u$  est donc  $u$ .

**Remarque** De même, une application affine  $h \mapsto v + u(h)$  de  $E$  vers  $F$  où  $(v, u) \in F \times \mathcal{L}(E, F)$  est continûment différentiable de différentielle  $u$ .

#### Applications bilinéaires

Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces vectoriels réels de dimension finie.

##### Proposition 10

Toute application bilinéaire  $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  est continûment différentiable. Sa différentielle en  $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$  est l'application linéaire :

$$(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2 \mapsto B(h_1, a_2) + B(a_1, h_2) \in F.$$

**Démonstration** On sait qu'il existe une constante  $K$  telle que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad \|B(x_1, x_2)\| \leq K \|x_1\| \|x_2\|.$$

On munit  $E_1 \times E_2$  de la norme  $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ .

► Par bilinéarité, on obtient pour tout  $(h_1, h_2)$  :

$$B(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = B(a_1, a_2) + B(h_1, a_2) + B(a_1, h_2) + B(h_1, h_2).$$

Le reste  $B(h_1, h_2)$  vérifie la majoration :

$$\|B(h_1, h_2)\| \leq K \|h_1\| \|h_2\| \leq K \|(h_1, h_2)\| \|(h_1, h_2)\|.$$

Il est donc négligeable devant  $\|(h_1, h_2)\|$  au voisinage de  $(0, 0)$ . Ainsi  $B$  est différentiable en  $(a_1, a_2)$  de différentielle :

$$dB(a_1, a_2) : (h_1, h_2) \mapsto B(h_1, a_2) + B(a_1, h_2)$$

► L'application :

$$(x_1, x_2) \mapsto B(h_1, x_2) + B(x_1, h_2)$$

étant continue pour tout  $(h_1, h_2)$ , l'application  $B$  est continûment différentiable □

## 2.2 Applications d'une variable réelle

Supposons  $E = \mathbb{R}$ .

L'application  $f$  est donc une fonction d'une variable réelle  $t \in U \mapsto f(t) \in F$

### Proposition 11

L'application  $f$  est différentiable en  $a \in U$  si, et seulement si, elle est dérivable en ce point. Sa différentielle en  $a$  est alors l'application linéaire :

$$h \in \mathbb{R} \longmapsto hf'(a) \in F.$$

Ainsi l'application  $f$  est continûment différentiable si et seulement si, elle est continûment dérivable.

**Démonstration** Remarquons tout d'abord que l'application  $u \mapsto u(1)$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$  sur  $F$ . L'isomorphisme réciproque associe à tout vecteur  $v \in F$  l'application linéaire  $h \mapsto h.v$ .

► La remarque ci-dessus montre que  $f$  est différentiable de différentielle  $h \mapsto h.v$  en  $a$  si, et seulement si, on a :

$$f(a+h) = f(a) + h.v + o(|h|)$$

c'est-à-dire si, et seulement si, elle est dérivable de dérivée  $v$  en  $a$ . Sa dérivée partielle (dans la base 1 de  $\mathbb{R}$ ) est  $f'(a)$

► L'application  $f$  est donc différentiable si, et seulement si, elle est dérivable. Elle est continûment différentiable si, et seulement si, l'application  $x \mapsto df(x)(1) = f'(x)$  est continue

On retiendra que dans les conditions de la proposition, on a :

$$f'(a) = df(a)(1). \quad \square$$

### 2.3 Applications à valeurs réelles

Supposons  $F = \mathbb{R}$

L'application  $f$  est donc une application de  $U$  vers  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$ , sa différentielle  $df(a)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$  dual de  $E$ .

Notons  $\mathcal{B}^* = (u_1^*, \dots, u_m^*)$  la base duale de la base  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m)$  de  $E$ .

**Proposition 12**

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , on a :

$$df(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) u_j^*.$$

**Démonstration** Nous avons vu en effet que pour tout  $h = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j$ , on a :

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

□

Dans ces conditions, le développement limité de  $f$  en  $a$  est :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \lambda_j + o(\|h\|)$$

et la matrice jacobienne  $\text{Jac } f(a)$  la ligne :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$$

qui représente la forme linéaire  $df(a)$  dans  $\mathcal{B}^*$ .

On réécrit classiquement la relation de la proposition précédente de la façon suivante.

- On note  $x_j$  l'application linéaire coordonnée  $u_j^*$ . On a donc  $dx_j = u_j^*$ .
- Dans la base duale  $(dx_1, \dots, dx_m)$ , la différentielle  $df(a)$  s'écrit sous la forme :

$$df(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.$$

On appelle cette écriture, l'écriture différentielle de  $df(a)$ . Nous l'utiliserons systématiquement. Lorsque  $x \mapsto f(x)$  est une fonction d'une variable réelle on retrouve la formule  $df(a) = f'(a)dx$ .

**Remarque** Si  $f$  est continûment différentiable, on obtient :

$$df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

comme application continue de  $U$  vers  $E^*$  (ce que l'on appelle une forme différentielle).

Supposons maintenant que  $E$  soit un espace euclidien et  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m)$  orthonormée.

### Définition 8

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , on appelle *gradient* de  $f$  en  $a$ , et on note  $\overrightarrow{\text{grad}}f(a)$ , l'unique vecteur tel que l'on ait  $(\overrightarrow{\text{grad}}f(a) | h) = df(a)(h)$  pour tout  $h \in E$ . Il vient donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)u_j.$$

**Remarque** Si  $f$  est continûment différentiable,  $\overrightarrow{\text{grad}}f$  est une application continue de  $U$  vers  $E$  (ce que l'on appelle un champ de vecteurs).

## 3. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$

Les théorèmes et propositions de ce paragraphe sont énoncés pour des applications de classe  $\mathcal{C}^1$ . On remarquera que la première partie de leur démonstration prouve ces assertions pour des applications différentiables en un point.

### 3.1 Composition

Soient  $G$  un espace vectoriel normé réel de dimension finie non nulle et  $g$  une application d'un ouvert  $V$  de  $F$  vers  $G$ . On suppose  $f(U) \subset V$ , ce qui permet de considérer  $g \circ f$ .

### Différentielle d'une application composée

#### Théorème 13

Si  $f$  et  $g$  sont continûment différentiables alors  $g \circ f$  est continûment différentiable et :

$$\forall x \in U, \quad d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

#### Démonstration

- Si  $f$  est différentiable en  $a \in U$  et  $g$  différentiable en  $b = f(a)$ , on a pour tous  $h \in U - a$  et  $\ell \in V - b$  :

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)$$

où  $\varepsilon_1$  tend vers 0 en 0 et :

$$g(b + \ell) = g(b) + dg(b)(\ell) + \|\ell\| \varepsilon_2(\ell)$$

où  $\varepsilon_2$  tend vers 0 en 0. Notons  $\ell(h) = f(a+h) - f(a)$ . Par hypothèse, pour tout  $h \in U - a$ , on a  $\ell(h) \in V - b$  et  $(g \circ f)(a + h) = g(b + \ell(h))$ . Cela donne :

$$(g \circ f)(a + h) = (g \circ f)(a) + (dg(b) \circ df(a))(h) + r(h)$$

où :

$$r(h) = \|h\| dg(b)(\varepsilon_1(h)) + \|\ell(h)\| \varepsilon_2(\ell(h)).$$

Les majorations  $\|\ell(h)\| \leq \|df(a)\| \|h\| + \|\varepsilon_1(h)\| \|h\|$  et :

$$\|r(h)\| \leq \|h\| (\|dg(b)\| \|\varepsilon_1(h)\| + \|df(a)\| \|\varepsilon_2(\ell(h))\| + \|\varepsilon_1(h)\| \|\varepsilon_2(\ell(h))\|)$$

montrent que  $r(h) = o(\|h\|)$  et que  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  de différentielle :

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a).$$

- Si  $f$  et  $g$  sont continûment différentiables, les applications  $f, x \mapsto df(x)$  et  $y \mapsto dg(y)$  sont continues. Par composition et produit, l'application  $x \mapsto dg(f(x)) \circ df(x)$  est continue. Ainsi  $g \circ f$  est continûment différentiable. □

**Exemple** Soit  $A : t \mapsto A(t)$  une application continûment différentiable d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  vers  $GL_n(\mathbb{C})$ . L'application

$$A^{-1} : t \mapsto A(t)^{-1}$$

est la composée de  $A$  et de l'inversion  $I : M \mapsto M^{-1}$ . Elle est donc continûment différentiable et vérifie :

$$d(A^{-1})(t) = dI(A(t)) \circ dA(t).$$

En prenant la valeur en 1 de cette application de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$  et utilisant :

$$dI(A(t))(H) = -A^{-1}(t)HA^{-1}(t),$$

on obtient :

$$\frac{d(A^{-1})}{dt}(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

### Matrice jacobienne et dérivées partielles d'une application composée

Soit  $\mathcal{D} = (w_1, \dots, w_p)$  une base de  $G$ .

On note  $(f_i)$ ,  $(g_i)$  et  $((g \circ f)_i)$  les coordonnées des applications  $f$ ,  $g$  et  $g \circ f$  dans respectivement  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ . On a  $(g \circ f)_i = g_i \circ f$  pour tout  $i$ .

#### Proposition 14

Dans les conditions du théorème précédent,

- la matrice jacobienne de  $g \circ f$  est donnée par :

$$\text{Jac}(g \circ f)(x) = (\text{Jac } g)(f(x)) \cdot \text{Jac } f(x),$$

- les dérivées partielles de  $g \circ f$  sont données par :

$$D_k(g_i \circ f)(x) = \sum_{j=1}^n D_j g_i(f(x)) D_k f_j(x) \quad (\text{r\`egle de la cha\^{\i}ne}).$$

#### Démonstration

- La matrice jacobienne est la matrice de la différentielle dans les bases considérées. Ce point est donc une conséquence immédiate du théorème précédent.
- Les dérivées partielles sont les coefficients des matrices jacobiniennes. La formule proposée n'est que l'écriture développée du produit matriciel du point précédent.  $\square$

Lorsque  $(x_1, \dots, x_m)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$  et  $(z_1, \dots, z_p)$  désignent les coordonnées des points génériques  $x$ ,  $y$  et  $z$  de  $E$ ,  $F$  et  $G$  ou lorsque l'on est dans le cadre des espaces  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$ , on obtient l'écriture classique :

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x).$$

**Exemple** Le but de cet exemple est de montrer ce que nous avons annoncé dans l'exemple 2. de la page 833 à savoir que toute application holomorphe est analytique.

Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  d'un disque ouvert  $D = B(0, R)$  de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{C}$  vérifiant l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}.$$



- L'application  $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  de  $]0, R[ \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par le théorème de composition. On obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta = e^{i\theta} \frac{\partial f}{\partial x}$$

et :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + r \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta = ir e^{i\theta} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Cela donne :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = ir \frac{\partial F}{\partial r}.$$

- Soit  $r \in ]0, R[$  L'application  $\theta \mapsto F(r, \theta)$  est  $2\pi$ -périodique de classe  $\mathcal{C}^1$  Sa série de Fourier est donc normalement convergente et l'on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad F(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(r) e^{in\theta} \quad (*)$$

avec :

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

- Le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme montre que  $a_n(r)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, R[$  et que sa dérivée est donnée par :

$$c'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

On obtient alors en utilisant le premier point :

$$c'_n(r) = \frac{1}{2i\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

puis, par intégration par parties :

$$ir c'_n(r) = \frac{1}{2\pi} [F(r, \theta) e^{-in\theta}]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) (-in) e^{-in\theta} d\theta = inc_n(r)$$

pour tout  $r$  de  $]0, R[$ . Les solutions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, R[$  de l'équation différentielle :

$$ry'(r) - ny(r) = 0$$

sont de la forme  $cr^n$  avec  $c \in \mathbb{R}$  pour tout  $n$ . Les applications  $c_n$  étant  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, R[$ , on a  $c_n(r) = \alpha_n r^n$  avec  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  lorsque  $n$  est positif ou nul et  $c_n = 0$  lorsque  $n$  est strictement négatif.

- Le développement (\*) permet alors d'écrire pour tout  $z$  de  $D$ , en utilisant  $z = x + iy = re^{i\theta}$  :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n.$$

La fonction  $f$  est donc égale sur  $D$  à la somme de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$  de rayon de convergence supérieur ou égal à  $R$ .

**Invariance de la différentielle**

Dans les mêmes conditions, la relation donnant la différentielle d'une application composée prend une forme remarquable lorsque  $g$  est une fonction à valeurs réelles ( $p = 1$ ) et que l'on utilise la notation différentielle. Elle est en effet équivalente à :

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x) &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \right) dx_k \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) dx_k \right) \end{aligned}$$

soit, en utilisant  $df_j(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) dx_k$ , à :

$$d(g \circ f)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) df_j(x).$$

Elle peut donc s'exprimer par l'analogie suivante :

- l'application  $g \circ f$  est obtenue par les substitutions  $y_j = f_j$  dans  $g$ .
- la différentielle  $d(g \circ f)$  est obtenue les substitutions  $y_j = f_j$  et  $dy_j = df_j$  dans :

$$dg = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j} dy_j.$$

On appelle cette dernière propriété l'invariance de la différentielle. Son caractère mnémotechnique la rend très utile dans la pratique.

**Composition avec une fonction d’une variable réelle et interprétation géométrique**

Soient  $\varphi$  une application d un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $E$  et  $f$  une application de  $U$  vers  $F$  vérifiant  $\varphi(I) \subset U$

**Proposition 15**

Si  $\varphi$  est continûment dérivable et  $f$  continûment différentiable,  $f \circ \varphi$  est continûment dérivable et :

$$\forall \alpha \in I, \quad (f \circ \varphi)'(\alpha) = df(\varphi(\alpha))(\varphi'(\alpha)).$$

**Démonstration** L’application  $\varphi$  étant continûment différentiable, l’application  $f \circ \varphi$  est continûment différentiable et en tout  $\alpha$  de  $I$ , il vient :

$$d(f \circ \varphi)(\alpha) = df(\varphi(\alpha)) \circ d\varphi(\alpha).$$

En évaluant cette relation en  $1 \in \mathbb{R}$ , on obtient :

$$(f \circ \varphi)'(\alpha) = d(f \circ \varphi)(\alpha)(1) = (df(\varphi(\alpha)) \circ d\varphi(\alpha))(1) = df(\varphi(\alpha))(d\varphi(\alpha)(1)). \quad \square$$

Géométriquement,  $\varphi$  est un arc paramétré de  $U$  passant en  $\alpha \in I$  par le point  $a \in U$  et  $f \circ \varphi$  l’arc paramétré image par  $f$ .

- L’application linéaire différentielle  $df(a)$  transforme donc le vecteur dérivé de l’arc  $\varphi$  en  $\alpha$  en le vecteur dérivé de l’arc image en ce même point.
- Si  $\varphi$  et  $f \circ \varphi$  sont des arcs réguliers en  $\alpha$ , les vecteurs dérivés  $\varphi'(\alpha)$  et  $(f \circ \varphi)'(\alpha)$  (non nuls par hypothèse) sont tangents aux arcs considérés. L’application  $df(a)$  transforme donc la tangente à  $\varphi$  en  $a$  en celle à  $f \circ \varphi$  en  $\varphi(a)$  (à la translation de vecteur  $\overrightarrow{af(a)}$  près). C’est évidemment pour cela que  $df(a)$  est appelée l’application linéaire tangente à  $f$  en  $a$ .

**Exemple** On appelle inversion de pôle  $O$  du plan euclidien  $P$  l’application  $I$  qui associe à tout point  $m$  de  $P \setminus \{O\}$  le point  $M$  de la droite  $Om$  tel que  $\overline{Om} \cdot \overline{OM} = 1$ . Dans le repère orthonormé  $(O, e_1, e_2)$  de  $P$ , l’expression analytique de  $I$  est :

$$\varphi_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On en déduit immédiatement que la matrice jacobienne de  $I$  en  $m$  de coordonnées  $(x, y)$  vaut :

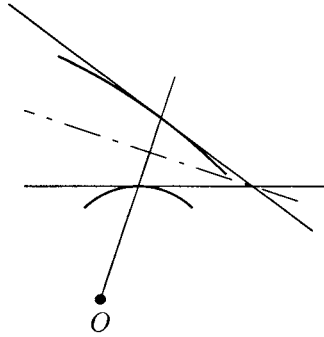
$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

est que  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

En coordonnées polaires ( $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ) cette matrice s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

L'application  $dI(m)$  est donc la similitude indirecte composée de l'homothétie de rapport  $\frac{1}{r^2}$  et de la symétrie par rapport à la droite orthogonale à  $Om$ . Ainsi la tangente en  $I(m)$  à l'image  $I \circ \varphi$  d'un arc  $\varphi$  passant par  $m$  est la droite symétrique de la tangente à  $\varphi$  en  $m$  par rapport à la médiatrice de  $mI(m)$ . En particulier, si on appelle angle de deux arcs passant par  $m$  l'angle de leurs tangentes en ce point, on voit que les images de deux arcs faisant un angle  $\alpha$  en  $m$  sont deux arcs d'angles  $-\alpha$  en  $I(m)$ . On exprime cette propriété en disant que  $I$  est une application conforme indirecte.



### 3.2 Propriétés algébriques

#### Propriétés linéaires

Soient  $f$  et  $g$  des applications d'un ouvert  $U$  de  $E$  vers  $F$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

#### Proposition 16

Si  $f$  et  $g$  sont continûment différentiables, alors  $\alpha f + \beta g$  est continûment différentiable et :

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg.$$

#### Démonstration

- Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a$ , on obtient par combinaison linéaire des développements limités de  $f$  et  $g$  :

$$(\alpha f + \beta g)(a + h) = (\alpha f + \beta g)(a) + (\alpha df(a) + \beta dg(a))(h) + o(\|h\|)$$

Ainsi  $\alpha f + \beta g$  est différentiable de différentielle  $\alpha df(a) + \beta dg(a)$  en  $a$ .

- Si  $f$  et  $g$  sont continûment différentiables en  $a$ , l'application  $\alpha df + \beta dg$  est continue. Ainsi  $\alpha f + \beta g$  est continûment différentiable □

**Corollaire 17**

L'ensemble  $\mathcal{C}^1(U, F)$  des applications continûment différentiables de  $U$  vers  $F$  est un espace vectoriel réel

Soit  $v \in \mathcal{L}(F, F')$  une application linéaire entre espaces vectoriels réels de dimension finie.

**Proposition 18**

Si  $f$  est continûment différentiable,  $v \circ f$  est continûment différentiable et :

$$d(v \circ f)(a) = v \circ df(a).$$

**Démonstration** L'application  $v$  est continûment différentiable et  $dv = v$ . L'application  $v \circ f$  est donc continûment différentiable et  $d(v \circ f) = v \circ df$ . □

**Remarque** Supposons que  $F$  soit un espace vectoriel complexe. Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . En considérant l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $v \mapsto \alpha v$  de  $F$  vers  $F$ , la proposition précédente montre que pour tout  $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ , l'application  $\alpha f$  est aussi continûment différentiable et que l'on a  $d(\alpha f) = \alpha df$ . Ainsi,  $\mathcal{C}^1(U, F)$  est naturellement un espace vectoriel complexe.

La proposition précédente permet de redémontrer aisément qu'une application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si, et seulement si, ses composantes  $f_i = v_i^* \circ f$  dans la base  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $F$  le sont. En effet :

- si l'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , l'application  $f_i$ , égale à  $v_i^* \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $d(v_i^* \circ f) = v_i^* \circ df$  ;
- si les applications  $f_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , les applications  $f_i v_i$ , composées de  $f_i$  et de l'application linéaire  $t \mapsto t v_i$  de  $\mathbb{R}$  vers  $F$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$  et, ainsi,

$$f = \sum_{i=1}^n f_i v_i.$$

**Propriétés bilinéaires**

Soient  $B \in \mathcal{BL}(F_1 \times F_2, G)$  une application bilinéaire entre espaces vectoriels réels de dimension finie ainsi que  $f_1 : U \rightarrow F_1$  et  $f_2 : U \rightarrow F_2$  deux applications.

On note  $B(f_1, f_2)$  l'application  $x \mapsto B(f_1(x), f_2(x))$  de  $U$  dans  $G$ .

**Proposition 19**

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont continûment différentiables, l'application  $B(f_1, f_2)$  est continûment différentiable et pour tout  $x \in U$  on a :

$$\forall h \in E, \quad d(B(f_1, f_2))(x)(h) = B(df_1(x)(h), f_2(x)) + B(f_1(x), df_2(x)(h)).$$

**Démonstration** L'application  $(f_1, f_2) : x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$  de  $U$  vers  $F_1 \times F_2$  est clairement continûment différentiable de différentielle en  $x$  :

$$h \mapsto (df_1(x)(h), df_2(x)(h)).$$

L'application  $B(f_1, f_2)$  est la composée de  $B$  et de  $(f_1, f_2)$ . Elle est donc continûment différentiable et pour tout  $x$  et  $h$  on a :

$$\begin{aligned} d(B(f_1, f_2))(x)(h) &= dB(f_1(x), f_2(x))(df_1(x)(h), df_2(x)(h)) \\ &= B(df_1(x)(h), f_2(x)) + B(f_1(x), df_2(x)(h)). \quad \square \end{aligned}$$

La proposition précédente s'applique évidemment au produit d'une algèbre.

*Exemples* Soit  $E$  un espace euclidien.

1. Le produit scalaire  $(x, y) \mapsto (x | y)$  est continûment différentiable de différentielle en  $(x, y)$  l'application linéaire  $(h, \ell) \mapsto (h | y) + (x | \ell)$ .
2. La forme quadratique  $Q : x \mapsto (x | x)$  est continûment différentiable et  $dQ(x)(h) = 2(x | h)$ . Son gradient en  $x$  est donc le vecteur  $2x$ .
3. La norme  $N : x \mapsto \|x\| = \sqrt{Q(x)}$  est continûment différentiable sur  $E \setminus \{0\}$  et  $dN(x)(h) = \frac{(x | h)}{\|x\|}$ . Son gradient en  $x$  est donc le vecteur  $\frac{x}{\|x\|}$ .

**Algèbres des fonctions numériques de classe  $\mathcal{C}^1$** **Corollaire 20**

Soit  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'ensemble  $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{K})$  est une algèbre sur  $\mathbf{K}$  dont les éléments inversibles sont les applications ne s'annulant pas.

**Démonstration** Seul le point concernant les éléments inversibles nécessite une démonstration. Supposons que  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{K})$  ne s'annule pas. Si  $\mathbf{K}$  vaut  $\mathbb{R}$ , l'inverse de  $f$  est la composée de  $f$  et de l'application continûment différentiable  $x \mapsto x^{-1}$  de  $\mathbb{R}^*$  vers lui-même. Elle est donc continûment différentiable. Si  $\mathbf{K}$  est égal à  $\mathbb{C}$ , on se ramène au cas réel en écrivant  $\frac{1}{f} = \frac{1}{|f|^2} \bar{f}$ .  $\square$

**Exemple** L'algèbre  $C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$ , qui contient les projections  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$ , contient toutes les applications polynomiales de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$  et, pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ , l'algèbre  $C^1(U, \mathbb{K})$  contient toutes les applications rationnelles :

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto r(x_1, \dots, x_m) = \frac{p(x_1, \dots, x_m)}{q(x_1, \dots, x_m)}$$

où  $p$  et  $q$  sont des applications polynomiales telles que  $q$  ne s'annule pas sur  $U$ .

### Méthode pratique

- Les théorèmes et propositions précédentes montrent que l'ensemble des applications de classe  $C^1$  est stable par les opérations de somme, produit ou composition et qu'une application vectorielle est de classe  $C^1$  si, et seulement si, ses composantes dans une base le sont.
- On montrera en général qu'une application est de classe  $C^1$  et on calculera sa différentielle en utilisant ces propriétés.

**Exemple** Considérons l'application  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} e^{xy}.$$

- Les applications polynomiales  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  et  $(x, y) \mapsto xy$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Par composition  $(x, y) \mapsto e^{xy}$  l'est aussi. L'application  $f$  est donc de classe  $C^1$  sur le domaine  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  où son dénominateur ne s'annule pas.
- On calcule alors sa différentielle en utilisant la propriété d'invariance. On écrit  $f = \frac{1}{u} e^v$  avec  $u = x^2 + y^2$  et  $v = xy$ . Il vient alors :

$$df = -\frac{du}{u^2} e^v + \frac{1}{u} e^v dv$$

avec  $du = 2x dx + 2y dy$  et  $dv = y dx + x dy$ . Par substitution, on obtient :

$$\begin{aligned} df &= -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} e^{xy} (2x dx + 2y dy) \\ &\quad + \frac{1}{x^2 + y^2} e^{xy} (y dx + x dy) \\ &= \left( -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) e^{xy} dx \\ &\quad + \left( -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) e^{xy} dy \end{aligned}$$

Cela donne alors, par exemple, la dérivée partielle  $f'_x$  comme coefficient de  $dx$  dans l'expression ci-dessus. On peut évidemment la calculer directement

## 4. Théorème des accroissements finis

Soient  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f$  une application continûment différentiable de  $U$  vers  $F$ .

### 4.1 Formules des accroissements finis

Rappelons que l'on appelle segment entre  $a$  et  $b$  de  $E$ , l'ensemble :

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

et que l'on dit que la partie  $A \subset E$  est convexe si  $[x, y] \subset A$  quels que soit  $(x, y) \in A^2$ .

#### Proposition 21

Lorsque  $[a, b] \subset U$ , on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a + t(b - a))(b - a) dt.$$

**Démonstration** On a  $a + t(b - a) \in U$  quel que soit  $t \in [0, 1]$ . L'application composée  $t \mapsto f(a + t(b - a))$  est continûment dérivable de dérivée :

$$df(a + t(b - a))(b - a).$$

On obtient alors la relation désirée par intégration sur  $[0, 1]$ . □

#### Corollaire 22

Dans les conditions précédentes, lorsque  $E$  est un espace euclidien et  $f$  à valeurs réelles, l'égalité précédente peut s'écrire :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 (\overrightarrow{\text{grad}} f(a + t(b - a)) \mid b - a) dt.$$

Lorsque  $U$  est convexe, les résultats précédents s'appliquent pour tout  $(a, b) \in U^2$ .

**Remarque** Dans les conditions précédentes, lorsque  $f$  est à valeurs réelles l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction  $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$  montre qu'il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ . Il existe donc un élément  $c \in [a, b]$



différent de  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(b) - f(a) = df(c)(b - a).$$

On peut écrire cette dernière relation sous la forme :

$$f(b) - f(a) = (\overrightarrow{\text{grad}}f(c) | b - a)$$

lorsque  $E$  est euclidien.

### Inégalité des accroissements finis

On munit l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  de la norme  $\| \cdot \|$  subordonnée des applications linéaires associée à celles de  $E$  et  $F$ . L'application continue  $\|df\| : x \mapsto \|df(x)\|$  est bornée et atteint sa borne sur  $[a, b]$  puisqu'un segment d'un espace vectoriel normé est compact.

#### Théorème 23

Lorsque  $[a, b] \subset U$ , on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|.$$

**Démonstration** On a en effet :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_0^1 \|df(a + t(b - a))(b - a)\| dt$$

et pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$\|df(a + t(b - a))(b - a)\| \leq \|df(a + t(b - a))\| \|b - a\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|. \square$$

#### Corollaire 24

Dans ces conditions, lorsque  $E$  est un espace euclidien et  $f$  à valeurs réelles, l'inégalité précédente peut s'écrire :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|\overrightarrow{\text{grad}}f(x)\|.$$

**Démonstration** On reprend la démonstration précédente en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| (\overrightarrow{\text{grad}}f(x) | b - a) \right| \leq \|b - a\| \|\overrightarrow{\text{grad}}f(x)\|. \quad \square$$

**Corollaire 25**

Supposons que  $U$  soit convexe. Si  $df$  est bornée par  $K$  sur  $U$ , alors  $f$  est  $K$ -lipschitzienne.

**4.2 Caractérisation des applications constantes****Proposition 26**

Si  $U$  est convexe,  $f$  est constante si, et seulement si,  $df$  est nulle.

**Démonstration** Une application constante est évidemment continûment différentiable de différentielle nulle. Si la différentielle de  $f$  est nulle,  $f$  est 0-lipschitzienne donc constante.  $\square$

La proposition précédente est fautive sur un ouvert quelconque ; ainsi, lorsque  $U$  est la réunion de deux ouverts disjoints,  $V$  et  $W$ , l'application non constante valant 0 sur  $V$  et 1 sur  $W$  est de classe  $C^1$  de différentielle nulle.

**Théorème 27**

Lorsque  $U$  est un ouvert connexe par arcs de  $E$ , l'application  $f$  est constante si, et seulement si, sa différentielle est nulle.

**Démonstration** L'implication directe est triviale.

Pour montrer la réciproque, supposons que  $df$  soit nulle. Pour tout point  $x$  de  $U$ , il existe une boule ouverte  $B(x, r)$  contenue dans  $U$ . Cette boule étant convexe, la proposition précédente montre que  $f|_{B(x, r)}$  est constante. L'application  $f$  est donc localement constante sur  $U$ . Puisque cet ouvert est connexe par arcs, elle est constante.  $\square$

**Exemple** Lorsque  $U$  est connexe par arcs, une application  $f$  de  $C^1(U, F)$  est la restriction d'une application affine si, et seulement si, sa différentielle est constante. Nous avons vu que la condition est nécessaire. Si, réciproquement,  $f$  est de différentielle constante  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , l'application  $g = f - u$  est continûment différentiable de différentielle nulle. Elle est donc constante et  $f$  est affine.

**4.3 Point critique d'une application numérique**

On suppose que  $f$  est à valeurs réelles.

**Définition 9**

On dit qu'un point  $x$  de  $U$  est un point *critique* de  $f$  si sa différentielle en  $x$  est nulle.

Le point  $x$  est donc un point critique de  $f$  si, et seulement si, on a  $df(x) = 0$  c'est-à-dire  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$  pour tout  $j$ .

**Proposition 28**

Tout extremum local de  $f$  est un point critique

**Démonstration** Si  $a$  est un minimum local de  $f$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset U$  et :

$$\forall x \in B(a, r), \quad f(a) \leq f(x).$$

Pour tout  $u \in E$ , le point 0 est un minimum local de l'application  $t \mapsto f(a + tu)$ . Ainsi  $D_u f(a)$  est nulle. □

**Attention** La proposition précédente n'est vraie que dans la mesure où l'on se place sur un ouvert. Elle est fausse dans le cas contraire comme le montre l'exemple de l'application  $t \mapsto t$  de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ .

Lorsque l'on sera amené à rechercher les extremums locaux d'une application définie sur une partie  $F$  non ouverte, on distinguera soigneusement ce qui se passe sur l'intérieur  $\overset{\circ}{F}$  et sur la frontière  $\text{Fr } F$  de  $F$ .

**Exemple** On désigne par  $(a, b, c)$  les longueurs des côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  d'un triangle  $ABC$  de demi-périmètre  $p > 0$ . L'aire de  $ABC$  est donnée par la formule de Héron :

$$S = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

- Les inégalités triangulaires montrent que le couple  $(a, b)$  détermine un unique triangle  $ABC$  de demi-périmètre  $p > 0$  à isométrie près si, et seulement si, il appartient au domaine  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^2$  défini par :

$$0 \leq a \leq p, \quad 0 \leq b \leq p, \quad p \leq a + b.$$

Pour déterminer les triangles d'aire maximale, on considère la fonction :

$$f(a, b) = (p - a)(p - b)(a + b - p).$$

- Le domaine  $\mathbb{T}$  étant compact et  $f$  étant nulle sur la frontière de  $\mathbb{T}$ , la fonction  $f$  est majorée et atteint son maximum en un point intérieur à  $\mathbb{T}$  qui vérifie les équations critiques :

$$f'_a = (p - b)(2p - 2a - b) = 0 \quad f'_b = (p - a)(2p - a - 2b) = 0$$

On obtient  $a = b = 2p/3$ .

- Le triangle équilatéral est donc le triangle d'aire maximum parmi les triangles de périmètre donné et c'est le seul.

Ainsi que le montrent les exemples suivants, la réciproque à la proposition précédente est fautive en dimension supérieure ou égale à 2 comme elle l'était, d'ailleurs, en dimension 1.

**Exemples**

1. Le point  $0 = (0, \dots, 0)$  est un point critique de l'application numérique continûment différentiable :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Ce n'est pas un extremum de cette application car il existe dans tout voisinage de 0 un élément de  $(t, 0, \dots, 0)$  où elle prend une valeur strictement positive et un point de la forme  $(0, t, \dots, 0)$  où elle prend une valeur strictement négative.

2. L'application continûment différentiable  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 4x^2)$$

montre un comportement plus étonnant.

Le point  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$  mais n'est pas un extremum local puisque les relations :

$$f(x, 0) = 4x^4 \quad \text{et} \quad f(x, 2x^2) = -2x^4$$

montrent que  $f$  prend dans tout voisinage de  $(0, 0)$  des valeurs strictement positives ou négatives. Néanmoins, le point 0 est un minimum local strict de l'application partielle :

$$t \mapsto f(t(a, b)) = b^2t^2 - 5a^2bt^3 + a^4t^4$$

pour tout vecteur  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous verrons dans le paragraphe suivant des conditions du deuxième ordre assurant qu'un point critique est un extremum local.

## 5. Applications de classe $C^k$

Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

### 5.1 Applications de classe $C^k$

Soit  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f$  une application de  $U$  vers  $F$ .

**Définition**

**Définition 10**

On dit qu'une fonction est de classe  $C^0$  si elle est continue.

On dit que  $f$  est  $k$  fois continûment différentiable, ou de classe  $C^k$ , pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  si elle est différentiable et si pour tout  $h$ , l'application  $D_h f$  est de classe  $C^{k-1}$

On dit que  $f$  est indéfiniment différentiable ou de classe  $C^\infty$  si elle est de classe  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Pour  $k = 1$  on retrouve bien sûr la notion d'application continûment différentiable.

On montre les propriétés des applications de classe  $C^k$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  par récurrence sur  $k$ . Le cas des applications  $C^\infty$  en est une conséquence formelle.

**Propriétés linéaires**

**Proposition 29**

L'ensemble  $C^k(U, F)$  des applications de classe  $C^k$  de  $U$  vers  $F$  est un espace vectoriel.

Pour tout  $h$  de  $E$ , l'application  $D_h : f \rightarrow D_h f$  est une application linéaire de  $C^k(U, F)$  vers  $C^{k-1}(U, F)$ .

**Démonstration**

- ▶ Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ), l'application  $\alpha f + \beta g$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) est de classe  $C^1$  et  $D_h(\alpha f + \beta g) = \alpha D_h f + \beta D_h g$  est de classe  $C^{k-1}$  pour tout  $h$  par récurrence. L'application  $\alpha f + \beta g$  est donc de classe  $C^k$ .
- ▶ Nous avons déjà vu que l'application  $D_h$  est linéaire sur  $C^1(U, F)$ . □

**Proposition 30**

Une application est de classe  $C^k$  si, et seulement si, ses composantes sont de classe  $C^k$ .

**Démonstration** Si  $f$  est de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ), elle est de classe  $C^1$  et les applications  $D_h f_i$ , composantes de  $D_h f$ , sont de classe  $C^{k-1}$  pour tout  $h$  par hypothèse de récurrence. Les applications  $f_i$  sont donc de classe  $C^k$ . La réciproque est analogue. □

### Propriétés bilinéaires

Soient  $B \in \mathcal{BL}(F_1 \times F_2, G)$  une application bilinéaire entre espaces vectoriels réels de dimension finie et,  $f_1 : U \rightarrow F_1$  et  $f_2 : U \rightarrow F_2$  deux applications.

On note  $B(f_1, f_2)$ , rappelons-le, l'application  $x \mapsto B(f_1(x), f_2(x))$  de  $U$  vers  $G$ .

#### Proposition 31

Pour tout couple  $(f_1, f_2) \in C^k(U, F_1) \times C^k(U, F_2)$ , l'application  $B(f_1, f_2)$  est de classe  $C^k$ .

**Démonstration** Si  $f_1$  et  $f_2$  sont de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ), l'application  $B(f_1, f_2)$  est de classe  $C^1$  et :

$$D_h(B(f_1, f_2)) = B(D_h f_1, f_2) + B(f_1, D_h f_2)$$

est de classe  $C^{k-1}$  pour tout  $h$  par récurrence. L'application  $B(f_1, f_2)$  est donc de classe  $C^k$ .  $\square$

**Exemple** L'application  $I : u \mapsto u^{-1}$  de  $\mathcal{GL}(E)$  vers  $\mathcal{L}(E)$  est de classe  $C^\infty$ .

- Nous avons vu en effet que  $I$  est  $C^1$ .
- Supposons qu'elle soit  $C^{k-1}$  avec  $k \geq 2$ . Pour tout  $h \in \mathcal{L}(E)$ , on a

$$D_h I(u) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

Si  $B$  est l'application bilinéaire  $(v, w) \mapsto -v \circ h \circ w$  de  $\mathcal{L}(E)^2$  vers  $\mathcal{L}(E)$ , l'hypothèse de récurrence montre que :

$$u \mapsto D_h I(u) = B(I(u), I(u))$$

est de classe  $C^{k-1}$ . Cela montre que  $I$  est de classe  $C^k$ .

- Par récurrence,  $I$  est de classe  $C^\infty$ .

#### Proposition 32

Soit  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'ensemble  $C^k(U, \mathbf{K})$  est une algèbre sur  $\mathbf{K}$  dont les éléments inversibles sont les applications qui ne s'annulent pas

**Démonstration** Ici aussi, seul le point concernant les éléments inversibles nécessite une démonstration. Supposons que  $f \in C^k(U, \mathbf{K})$  ( $k \geq 2$ ) ne s'annule pas. L'inverse de  $f$  est de classe  $C^1$  et sa dérivée suivant  $h$ , données par :

$$-\frac{1}{f^2} D_h f,$$

est de classe  $C^{k-1}$  par récurrence pour tout  $h$ . Cela montre ce que l'on voulait  $\square$

**Exemple** L'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$  contient toutes les applications polynomiales de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$  et, pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{K})$  contient toutes les applications rationnelles  $r = \frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont des applications polynomiales telles que  $q$  ne s'annule pas sur  $U$ .

**Définitions équivalentes**

**Proposition 33**

Pour tout  $k \geq 1$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$
- (ii)  $f$  est différentiable et  $D_j f : U \rightarrow F$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  pour tout  $j$ .
- (iii)  $f$  est différentiable et  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

**Démonstration** Il est évident que (i) implique (ii). On obtient la réciproque en remarquant que pour tout  $h$ , l'application  $D_h f$  est combinaison linéaire des  $D_j f$ . L'équivalence entre (ii) et (iii) vient de ce que la matrice de  $df$  dans les bases considérées est  $(D_j f_i)$ . □

**Composition**

Soient  $G$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $g$  une application d'un ouvert  $V$  de  $F$  vers  $G$ . On suppose  $f(U) \subset V$ , ce qui permet de considérer  $g \circ f$ .

**Proposition 34**

La composée de deux applications de classe  $\mathcal{C}^k$  est une application de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Démonstration** Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 2$ ), elles sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Les applications  $df$  et  $dg \circ f$  sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  par hypothèse de récurrence. En notant  $B$  l'application bilinéaire  $(u, v) \mapsto v \circ u$  de  $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$  vers  $\mathcal{L}(E, G)$ , on voit que l'application :

$$x \mapsto dg(f(x)) \circ df(x) = B(df(x), (dg \circ f)(x))$$

est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . L'application  $g \circ f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^k$ . □

**Méthode pratique** Comme dans le cas des applications de classe  $C^1$ , on montre en général qu'une application est de classe  $C^k$  en utilisant les propriétés algébriques et la propriété de composition précédentes.

**Exemple** Pour montrer que l'application :

$$(x, y) \mapsto \frac{e^{\sin(x+y)}}{x^2 + y^2}$$

est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , on procédera ainsi : l'application  $(x, y) \mapsto e^{\sin(x+y)}$  est de classe  $C^\infty$  comme composée de  $(x, y) \mapsto x + y$  et de  $x \mapsto e^{\sin x}$ . L'application  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  est de classe  $C^\infty$  comme polynôme. L'application  $f$  est donc de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  comme quotient.

### Caractérisation des applications de classe $C^k$ par leurs dérivées partielles

On définit évidemment par itération les dérivées partielles d'ordre  $p$  de  $f$  :

$$(D_{j_1} \circ \dots \circ D_{j_p}) f = D_{j_1} \left( (D_{j_2} \circ \dots \circ D_{j_p}) f \right).$$

### Théorème 35

L'application  $f$  est de classe  $C^k$  si, et seulement si, elle possède des dérivées partielles continues de tout ordre inférieur ou égal à  $k$ .

**Démonstration** L'implication directe est évidente. Supposons réciproquement que  $f$  possède des dérivées partielles continues de tout ordre inférieur ou égal à  $k$  avec  $k \geq 1$ . Par le théorème de caractérisation des applications de classe  $C^1$ ,  $f$  qui possède des dérivées partielles continues est continûment différentiable. Ses dérivées partielles sont alors de classe  $C^{k-1}$  par récurrence. Cela prouve ce que l'on voulait.  $\square$

## 5.2 Théorème de Schwarz

### Opérateurs différentiels linéaires

Dans ce qui suit, on notera :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}$$

l'application linéaire de dérivation partielle  $D_j$  de  $C^k(U, F) \rightarrow C^{k-1}(U, F)$  ( $1 \leq k$ ) et :

$$\frac{\partial^p}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}$$



l'application linéaire composée  $D_{j_1} \circ \dots \circ D_{j_p}$  de  $\mathcal{C}^k(U, F) \rightarrow \mathcal{C}^{k-p}(U, F)$  ( $p \leq k$ ) avec  $(j_1, \dots, j_p) \in \llbracket 1, m \rrbracket^p$ .

- On appelle *opérateur différentiel linéaire* d'ordre inférieur à  $q$  toute application linéaire :

$$\sum_{p \leq q} \sum_{(j_1, \dots, j_p) \in \llbracket 1, m \rrbracket^p} \alpha_{(j_1, \dots, j_p)}(x) \frac{\partial^p}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}$$

de  $\mathcal{C}^k(U, F) \rightarrow \mathcal{C}^0(U, F)$  ( $q \leq k$ ) avec  $\alpha_{(j_1, \dots, j_p)} \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$  pour tout  $(j_1, \dots, j_p)$ .

- On dit qu'un opérateur différentiel linéaire est d'ordre  $q$  s'il est d'ordre inférieur ou égal à  $q$  mais pas d'ordre inférieur ou égal à  $q - 1$ .
- On dit qu'il est à coefficients constants si les applications  $\alpha_{(j_1, \dots, j_p)}$  sont des constantes.

**Remarque** Dans ce qui suit, on supposera que les opérateurs différentiels ont des coefficients de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et s'appliquent aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Il est immédiat de voir ce qui s'applique à la situation plus générale décrite ci-dessus.

### Théorème de Schwarz

#### Théorème 36

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{C}^2(U, F)$ , on a pour tout  $(h, k) \in E^2$  :

$$D_h(D_k f) = D_k(D_h f).$$

**Démonstration** Soient  $a \in U$ ,  $R > 0$  tel que  $D(a, 2R) \subset U$  et  $r > 0$  tel que  $\|rh\| < R$  ainsi que  $\|rk\| < R$ . On note pour  $\lambda \in ]0, r[$

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} (f(a + \lambda h + \lambda k) - f(a + \lambda h) - f(a + \lambda k) + f(a)).$$

- L'application  $\varphi(t) = f(a + th + \lambda k) - f(a + th)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, \lambda]$  et de dérivée  $\varphi'(t) = D_h f(a + th + \lambda k) - D_h f(a + th)$ . On a alors :

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \int_0^\lambda (D_h f(a + th + \lambda k) - D_h f(a + th)) dt.$$

En utilisant :

$$D_h f(a + th + \lambda k) - D_h f(a + th) = \int_0^\lambda (D_k(D_h f))(a + th + sk) ds,$$

on obtient :

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \int_0^\lambda \left( \int_0^1 (D_k(D_h f))(a + th + sk) ds \right) dt.$$

Par un simple changement de variables, cela donne :

$$\Delta(\lambda) = \int_0^1 \left( \int_0^1 (D_k(D_h f))(a + t\lambda h + s\lambda k) ds \right) dt$$

► Écrivons alors  $\Delta(\lambda) = (D_k(D_h f))(a) + r(\lambda)$  avec :

$$r(\lambda) = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( (D_k(D_h f))(a + t\lambda h + s\lambda k) - (D_k(D_h f))(a) \right) ds \right) dt.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on dispose par la continuité de  $D_k(D_h f)$  de  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $\lambda \in ]0, \alpha]$  on ait :

$$\forall (t, s) \in [0, 1]^2, \quad \left\| (D_k(D_h f))(a + t\lambda h + s\lambda k) - (D_k(D_h f))(a) \right\| \leq \varepsilon.$$

Cela implique  $\|r(\lambda)\| \leq \varepsilon$  sous les mêmes conditions. Ainsi  $\Delta(\lambda)$  tend vers  $(D_k(D_h f))(a)$  en 0.

► L'expression  $\Delta(\lambda)$  étant symétrique en  $h$  et  $k$ , on en déduit que  $\Delta(\lambda)$  tend aussi vers  $(D_h(D_k f))(a)$  en 0. Cela achève la démonstration.  $\square$

### Corollaire 37

Si  $f$  appartient à  $C^2(U, F)$ , on a pour tout  $(i, j) \in [1, m]^2$  :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Lorsque  $F$  est égal à  $\mathbb{R}$ , l'application :

$$(h, \ell) \mapsto (D_h \circ D_\ell) f(a)$$

est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  appelée hessienne de  $f$  en  $a$ . Sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est la matrice symétrique :

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right).$$

**Exemple** Une application  $f$  de classe  $C^2$  d'un ouvert connexe par arcs  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^n$  est la restriction d'une isométrie si, et seulement si, la différentielle  $df(x)$  est un endomorphisme orthogonal de  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $x$ .

Si, en effet,  $f$  est la restriction de l'isométrie  $x \mapsto u(x) + a$  avec  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f$  est de classe  $C^2$  et, pour tout  $x$ ,  $df(x) = u$  appartient à  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ .

Supposons réciproquement que  $f$  soit de classe  $C^2$  et que  $df(x)$  appartienne à  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $x$ . Pour tout  $x$ , la famille des vecteurs  $(D_1f(x), \dots, D_n f(x))$  est orthonormée. On a donc :

$$\forall (i, j), \quad (D_i f(x) \mid D_j f(x)) = \delta_{i,j}.$$

Par différentiation par rapport à  $x_k$ , on obtient :

$$\forall (i, j, k), \quad ((D_k \circ D_i) f(x) \mid D_j f(x)) + (D_i f(x) \mid (D_k \circ D_j) f(x)) = 0,$$

soit :

$$((D_k \circ D_i) f(x) \mid D_j f(x)) = - (D_i f(x) \mid (D_k \circ D_j) f(x)).$$

Notons alors  $\langle i, j, k \rangle$  la quantité  $((D_i \circ D_j) f(x) \mid D_k f(x))$ . On a  $\langle i, j, k \rangle = \langle j, i, k \rangle$  par le théorème de Schwarz et  $\langle i, j, k \rangle = -\langle i, k, j \rangle$  par le point précédent. On obtient alors :

$$\langle i, j, k \rangle = \langle j, i, k \rangle = -\langle j, k, i \rangle = -\langle k, j, i \rangle = \langle k, i, j \rangle = \langle i, k, j \rangle = -\langle i, j, k \rangle.$$

Ainsi  $((D_i \circ D_j) f(x) \mid D_k f(x))$  est nul pour tout  $k$ . La famille  $(D_k f(x))$  étant une base, il vient :

$$D_i(D_j f(x)) = 0.$$

Les dérivées partielles de  $f$  étant constantes, la différentielle  $df$  est une application constante dont la valeur est un endomorphisme orthogonal  $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ . L'application  $f$  est donc la restriction à  $U$  d'une isométrie de  $\mathbb{R}^n$  de partie linéaire  $u$ .

### Écriture des opérateurs différentiels linéaires

Par commutativité, tout produit  $D_{j_1} \circ \dots \circ D_{j_p}$  peut s'écrire  $D_1^{p_1} \circ \dots \circ D_m^{p_m}$  où  $p_j$  désigne le nombre de dérivations partielles  $D_j$  présentes dans la suite  $(D_{j_1}, \dots, D_{j_p})$ . On écrit usuellement cet opérateur :

$$\frac{\partial^p}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}}$$

(avec  $p = p_1 + \dots + p_m$ ).

### Proposition 38

Tout opérateur différentiel d'ordre inférieur ou égal à  $q$  s'écrit sous la forme unique :

$$D = \sum_{\substack{(p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{N}^m \\ p_1 + \dots + p_m \leq q}} \alpha_{(p_1, \dots, p_m)}(x) \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_m}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}}.$$

### Démonstration

► Il est clair que tout opérateur différentiel linéaire peut s'écrire par regroupement sous la forme indiquée.

► Pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , notons  $\varphi$  la forme linéaire définie par :

$$\varphi(x) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m.$$

Un simple calcul montre que l'on a :

$$D(e^\varphi)(x) = e^{\varphi(x)} \sum_{(p_1, \dots, p_m) \in S} \alpha_{(p_1, \dots, p_m)}(x) \lambda_1^{p_1} \dots \lambda_m^{p_m}$$

(formule du symbole). L'unicité du système des fonctions  $\alpha_{(p_1, \dots, p_m)}(x)$  provient de l'unicité de l'écriture des fonctions polynomiales en  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ . □

**Exemples**

1. Si  $h = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j$ , l'opérateur de dérivée suivant  $h$  s'écrit :

$$D_h = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On calcule alors dans l'algèbre  $\mathcal{L}(C^\infty(U, F))$  la puissance  $D_h^p$  par le développement multinomial de :

$$\left( \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^p$$

Dans le cas de la dimension deux ( $m = 2$ ), on obtient :

$$D_h^p = \sum_{r=0}^p C_p^r \lambda_1^r \lambda_2^{p-r} \frac{\partial^p}{\partial x_1^r \partial x_2^{p-r}}.$$

2. On appelle *opérateur d'Euler* l'opérateur différentiel linéaire (à coefficients non constants) d'ordre 1 :

$$E = \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Cet opérateur intervient dans l'étude du comportement d'une application de classe  $C^1(U, F)$  ( $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) sur les droites  $\mathbb{R}x$ . Si  $f$  est une telle application, la dérivée de l'application  $g_x : t \mapsto f(tx)$  sur l'ouvert  $U_x = \{t \in \mathbb{R} \mid tx \in U\}$  est donnée par :

$$g'_x(t) = \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) = (Ef)(tx).$$

Par exemple, on dit qu'une application  $f$  d'un ouvert conique (stable par les homothéties de rapport strictement positif)  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $F$  est  $\alpha$ -positivement homogène si on a :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times U, \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

- Si  $f$  est  $\alpha$ -positivement homogène, on a, en reprenant les notations précédentes,  $g_x(t) = t^\alpha g_x(1)$ . Après dérivation et évaluation en  $t = 1$ , on voit que  $f$  vérifie la relation d'Euler :

$$Ef = \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \alpha f.$$

- Réciproquement, si  $f$  vérifie cette relation, on obtient :

$$\sum_{j=1}^m tx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) = \alpha f(tx)$$

en se plaçant au point  $tx$ . On en déduit alors que pour tout  $x$ , la fonction  $g_x$  satisfait l'équation différentielle

$$tg'_x(t) = \alpha g_x(t)$$

sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La solution générale de cette équation étant  $g_x(t) = Kt^\alpha$ , on obtient  $g_x(t) = t^\alpha f(x)$ , ce qui prouve que  $f$  est  $\alpha$ -positivement homogène.

De nombreux opérateurs différentiels linéaires sont classiques en physique mathématique.

1. *Opérateur de Riemann* sur  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  :

$$R = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Une fonction  $f(x, y)$  de  $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant  $Rf = 0$  est dite analytique. Nous avons vu que sur un disque  $B(0, r)$  une fonction est analytique si, et seulement si, elle est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à  $r$ . Elle est en particulier  $\mathcal{C}^\infty$ .

2. *Laplacien* sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^2(U)$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $\Delta f = 0$  est dite harmonique.

3. *d'Alembertien* sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

avec  $c \in \mathbb{R}_+^*$ . L'équation  $\square f = 0$  où  $f(t, x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$  s'appelle l'équation des ondes.

4. *Opérateur de la chaleur, ou opérateur de diffusion, sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  :*

$$F = \frac{\partial}{\partial t} - k \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . L'équation  $Ff = 0$  où  $f(t, x) \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$  s'appelle l'équation de la chaleur.

*Exemple* Soit  $f$  une application réelle de classe  $C^2$  harmonique sur le disque ouvert  $D = B(0, r)$  de  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ .

- L'application  $h(x, y) = f'_x(x, y) - if'_y(x, y)$  est de classe  $C^1$ . Elle vérifie :

$$\frac{\partial h}{\partial x} + i \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + i \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0.$$

La relation précédente n'est que la factorisation :

$$\Delta = \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

dans l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires.

- Nous avons vu dans l'exemple de la page 840 qu'il existe alors une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à  $r$  telle que l'on ait :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Considérons alors la fonction définie par la série entière primitive de  $h$  et valant  $f(0, 0)$  en  $(0, 0)$ , soit :

$$H(z) = f(0, 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1}.$$

On a  $H'_x = \frac{1}{i} H'_y = h$ . La partie réelle de  $H$  vérifie donc :

$$(\operatorname{Re} H)'_x = \operatorname{Re} h = f'_x \quad \text{et} \quad (\operatorname{Re} H)'_y = \operatorname{Re}(ih) = f'_y.$$

Il vient alors :

$$f(x, y) = \operatorname{Re} H(z).$$

- Soit alors  $L(z)$  une autre fonction somme de série entière sur  $D$  telle que :

$$f(x, y) = \operatorname{Re} L(z).$$

La fonction  $K = L - H$  de partie réelle nulle est la somme d'une série entière sur  $D$ . Les relations de Cauchy-Riemann  $K'_x + iK'_y = 0$  montrent en remarquant que  $K'_x$  et  $K'_y$  sont à valeurs imaginaires, que l'on a :

$$K'_x = K'_y = 0.$$

La fonction  $K$  est donc une constante imaginaire.

Ainsi, toute fonction réelle harmonique sur  $D$  est la partie réelle d'une fonction somme de série entière, unique à une constante imaginaire près. En particulier,  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

### 5.3 Développement de Taylor

#### Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $k$

Soit  $f \in C^{k+1}(U, F)$  avec  $1 \leq k$ .

#### Théorème 39

Si  $[a, a + h]$  est inclus dans  $U$ , on a :

$$f(a + h) = \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} D_h^p f(a) + \int_0^1 D_h^{k+1} f(a + sh) \frac{(1-s)^k}{k!} ds.$$

**Démonstration** Notons  $\varphi(s) = f(a + sh)$ . On a  $\varphi'(s) = D_h f(a + sh)$  et par itération  $\varphi^{(\ell)}(s) = D_h^\ell f(a + sh)$ . La formule de Taylor avec reste intégral de  $\varphi$  entre 0 et 1 donne le resultat recherché.  $\square$

On calcule les termes  $D_h^p f(a)$  par calcul symbolique comme il a été dit dans le point précédent.

*Exemple* Une application  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $p$  si, et seulement si, ses dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à  $p + 1$  sont nulles.

#### Formule de Taylor-Young

#### Théorème 40

Toute application  $f \in C^2(U, F)$  admet le developpement limité d'ordre 2 :

$$f(a + h) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + o(\|h\|^2)$$

**Démonstration** Soit  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset U$ . La formule avec reste intégral à l'ordre 1 permet d'écrire :

$$f(a + h) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \int_0^1 (D_h^2 f(a + sh) - D_h^2 f(a)) (1-s) ds$$

1. On a :

$$D_h^2 f(a + sh) - D_h^2 f(a) = \sum_{j,\ell=1}^m \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}(a + sh) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}(a) \right) h_j h_\ell.$$

2. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la continuité des dérivées partielles secondes nous fournit  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $h$  vérifiant  $\|h\| \leq \alpha$ , on ait

$$\forall s \in [0, 1], \quad \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}(a + sh) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}(a) \right\| \leq \varepsilon.$$

On obtient alors :

$$\left\| \int_0^1 (D_h^2 f(a + sh) - D_h^2 f(a)) (1-s) ds \right\| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{j,\ell=1}^m |h_j| |h_\ell| \leq \frac{m^2}{2} \varepsilon \|h\|_\infty$$

où  $\|h\|_\infty = \max |h_j|$ .

3. Il vient donc :

$$f(a + h) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + o(\|h\|^2).$$

□

### Corollaire 41

Si  $h = \sum_{j=1}^m h_j u_j$  le développement ci-dessus s'écrit :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) h_j h_k + o(\|h\|^2).$$

## 5.4 Condition suffisante d'extremum local

Soit  $f$  une application de classe  $C^2$  d'un ouvert  $U$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$

Nous avons vu qu'un extremum local de  $f$  est un point critique de cette application, mais que la réciproque est fautive en général.

Le théorème suivant montre qu'elle est vraie lorsque  $f$  vérifie de plus une condition du second ordre.



**Théorème 42**

Soit  $a \in U$  un point critique de  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ . Si l'application bilinéaire symétrique :

$$(h, k) \mapsto (D_h \circ D_k) f(a)$$

de  $f$  en  $a$ , appelée *hessienne*, est définie positive, alors  $a$  est un minimum local strict de  $f$ .

**Démonstration** Soit  $r > 0$  tel que  $\overline{B}(a, r) \subset U$ . On a pour tout  $h \in \overline{B}(0, r)$  :

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

où  $\varepsilon(h)$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

- Par hypothèse, la forme quadratique  $h \mapsto D_h^2 f(a)$  provient d'un produit scalaire sur  $E$ . Par équivalence des normes il existe des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}_+^*$  telles que :

$$\alpha \|h\|^2 \leq D_h^2 f(a) \leq \beta \|h\|^2.$$

- Soit  $s \in ]0, r[$  tel que  $|\varepsilon(h)| \leq \frac{\alpha}{4} \|h\|^2$ . On obtient :

$$\forall h \in \overline{B}(a, s), \quad f(a + h) \geq f(a) + \frac{\alpha}{4} \|h\|^2.$$

Cela achève la démonstration. □

**Remarques**

- Lorsque la hessienne de  $f$  en  $a$  est définie négative, le point  $a$  est évidemment un maximum local strict.
- Lorsque la hessienne de  $f$  en  $a$  est de signature  $(p, q)$  avec  $p > 0$  et  $q > 0$ , le point  $a$  n'est pas un extremum de  $f$  ; il existe dans tout voisinage  $V$  de  $a$  des éléments  $x$  et  $y$  tels que  $f(x) < f(a) < f(y)$ .

Soit en effet  $h \in E$  tel que  $D_h^2 f(a) < 0$  : le developpement limité :

$$f(a + \lambda h) = f(a) + D_h^2 f(a) \lambda^2 + o(\lambda^2)$$

montre qu'il existe dans  $V$  un élément  $x$  de la forme  $a + \lambda h$  tel que  $f(x) < f(a)$ . On procède de même avec  $\ell$  tel que  $D_\ell^2 f(a) > 0$  pour trouver  $y$ .

- Lorsque la hessienne de  $f$  en  $a$  est dégénérée mais ne relève pas du point précédent, on ne peut rien affirmer. Les fonctions :

$$f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 \quad \text{et} \quad g : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$$

ont des hessiennes nulles en 0. Ce point est un minimum local (en réalité global) strict de  $f$  mais n'est pas un extremum de  $g$ .

Considérons le cas particulier  $E = \mathbb{R}^2$  et  $(a, b) \in U$ . On utilise habituellement les notations de Monge :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

et :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

- Le point  $(a, b)$  est un point critique de  $f$  si, et seulement si,  $p = q = 0$ .
- La hessienne de  $f$  en  $(a, b)$  est la forme bilinéaire symétrique de matrice :

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Elle est définie positive (respectivement définie négative) si, et seulement si,  $r > 0$  et  $rt - s^2 > 0$  (respectivement  $r < 0$  et  $rt - s^2 > 0$ )

On obtient alors le corollaire suivant :

### Corollaire 43

Le point critique  $(a, b)$  est un minimum local strict de  $f$  si  $r > 0$  et  $rt - s^2 > 0$ .

*Exemple* On vérifie aisément que  $(-1, -1)$  est l'unique point critique de la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto xe^y + ye^x.$$

La hessienne de  $f$  en ce point est :

$$\begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}.$$

La relation  $(e^{-2} - 4e^{-2}) < 0$  montre que  $(-1, -1)$  n'est pas un extremum de  $f$ .

## EXERCICES

### Différentiabilité

1. Existe-t-il sur  $\mathbb{R}^n$  une norme  $N$  différentiable ?
2. Montrer que la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  nulle en  $(0, 0)$  et telle que, pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(x, y) = \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}$ , est de classe  $C^1$ .
3. On suppose que  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$ , qui admet sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continues. Enfin on suppose que ces dérivées partielles ont une limite en  $(0, 0)$  (précisément, lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$  en restant différent de  $(0, 0)$ ). Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$ .
4. Soit  $f$  une fonction continue sur  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et *positivement homogène de degré*  $\alpha > 0$ , i.e. pour tout  $x \in U$  et tout  $t > 0$ ,  $f(tx) = t^\alpha f(x)$ .

1. Montrer que  $f$  admet un prolongement continu en  $(0, 0)$  par  $f(0, 0) = 0$ . Nous noterons désormais  $f$  ce prolongement continu à  $\mathbb{R}^2$ .
2. On suppose que  $\alpha \in ]0, 1[$ . Montrer que  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  si, et seulement si,  $f$  est nulle.
3. On suppose que  $\alpha = 1$ . Montrer que  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  si, et seulement si,  $f$  est affine.

*Application.* La fonction nulle en  $(0, 0)$ , et qui vaut  $\frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}$  ailleurs, est-elle de classe  $C^1$  ?

4. Montrer que si  $\alpha > 1$ ,  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ .
5. On suppose que  $\alpha > 1$  et que la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est de classe  $C^1$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$ .

*Application.* Montrer que, pour  $\alpha > 2$ , la fonction  $f(x, y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^\alpha$  est de classe  $C^1$ .

- 5 La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0$$

est-elle continue ?

Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ . Est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

6. Soit  $H$  une fonction  $(x, y, t) \mapsto H(x, y, t)$  définie sur  $U \times [a, b]$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $H$  est continue, et admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  fonction continue de  $(x, y, t)$ . Alors la fonction  $(x, y) \mapsto F(x, y) = \int_a^b H(x, y, t) dt$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  continue, et :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_a^b \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, t) dt.$$

7. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point et  $f$  dérivable de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $(x, y) \in I^2$ , on pose :

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} & \text{si } y \neq x, \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

1. Montrer que  $F$  est continue si, et seulement si,  $f$  est de classe  $C^1$ .
  2. Montrer que si  $f$  est de classe  $C^2$ , alors  $F$  est de classe  $C^1$ .
8. 1. Montrer que l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$(x, y) \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad \text{et } (0, 0) \mapsto 0,$$

est de classe  $C^\infty$ .

2. Même question pour la fonction  $g$  :

$$g(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1 - (x^2 + y^2)}\right) & \text{si } x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

9. Soit  $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$  une fonction de classe  $C^1$  de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Montrer que l'application  $\Phi : P \mapsto \int_0^1 f(t, P(t)) dt$  est de classe  $C^1$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et déterminer sa différentielle.

- 10 Montrer que la somme de la série de terme général :

$$U_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \exp(-n(x^2 + y^2))$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

11. 1. Soit  $f$  une application de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même dont la différentielle en tout point soit une isométrie. Montrer que  $f$  est affine.
  2. Soit  $f$  une application de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même dont la différentielle en tout point soit une similitude (la composée d'une isométrie et d'une homothétie). Dans le cas où  $n = 2$ , montrer que les fonctions composantes de  $f$  ont un Laplacien nul.
  3. Est-ce le cas si  $n \geq 3$  ?
12. Soit  $f$  l'application  $X \mapsto {}^tXX$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Déterminer le rang de  $df_A$ , selon  $A$ .

### Équations aux dérivées partielles

13. Soit  $f$  une fonction réelle de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  supposé connexe par arcs.
1. Trouver un exemple d'une telle fonction  $f$  telle que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  mais que  $f$  ne dépende pas seulement de  $y$ , autrement dit telle qu'il n'existe pas de fonction  $h$  à une seule variable sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  vérifiant, pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $f(x, y) = h(y)$ .
  2. Donner une condition suffisante simple sur  $U$  pour que toute fonction  $f$  vérifiant  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  dépende seulement de  $y$ .
14. Résoudre dans  $U = \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$  l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2 + \sqrt{x^4 + y^4}.$$

15. Par un changement de variable affine, résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'équation aux dérivées partielles :

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

où l'un au moins des deux nombres  $a$  et  $b$  est non nul.

16. Soit  $\alpha$  une constante réelle différente de  $-1$ . Résoudre dans  $U = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$  l'équation aux dérivées partielles  $\alpha y \frac{\partial f}{\partial y} - x \frac{\partial f}{\partial x} = f(x, y)$  avec le changement de variables  $x = u/v$ ,  $y = uv^\alpha$ .

### 17. Équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1

On se donne quatre fonctions  $a, b, c, d$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et l'on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles :

$$a(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = c(x, y) f(x, y) + d(x, y). \quad (1)$$

1. Supposons connu un changement de variables ( $C^1$ -difféomorphisme de  $V$

$$\text{sur } U) : (u, v) \mapsto (x, y) \text{ tel que } ((*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = a(x, y) \\ \frac{\partial y}{\partial v} = b(x, y) \end{array} \right. .$$

Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $g(u, v) = f(x, y)$  est une "équation différentielle linéaire par rapport à la variable  $u$ " (expression que l'équation aux dérivées partielles trouvée en  $g$  rendra claire). Cela permet de ramener les équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1 à des équations différentielles.

2. Résoudre justement de cette manière l'équation aux dérivées partielles :

$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2) f$ , en trouvant un changement de variable *naturel*. Indication : On commencera par résoudre le système différentiel  $((*)$ ), et on pourra choisir comme seconde variable  $v$  une constante d'intégration du système différentiel autonome  $((*)$ ) (de variable  $u$ ) ici facile à résoudre.

18. 1. Avec le changement de variables  $u = xy, v = x + y$ , déterminer  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha(x - y) f = 0. \quad (*)$$

2. Retrouver le résultat avec la méthode de l'exercice 17.

19. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $b^2 - 4ac > 0$ , et  $a \neq 0$ . Trouver les fonctions  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

par un changement de variables linéaire.

20 Pour toute fonction  $f$  de classe  $C^2$ , on note :

$$U(f) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

1. Montrer que si  $f$  est homogène de degré  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $U(f) = n(n-1)f$ .
2. Réciproque ?

- 21** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ . Trouver les fonctions  $f$  de  $E$  vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2. \tag{1}$$

Pour cela, on considèrera la composée  $S \circ T$  d'opérateurs différentiels  $T : f \mapsto ax \frac{\partial f}{\partial x} + by \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda f$  et  $S : f \mapsto cx \frac{\partial f}{\partial x} + dy \frac{\partial f}{\partial y} - \mu f$  pour des constantes  $a, b, c, d, \lambda, \mu$  convenables. Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles  $T(f) = g, g$  donnée, on pourra utiliser la méthode de l'exercice 17.

- 22** Trouver les fonctions  $f$  de classe  $C^2$  sur  $] -1, 1[$  telles que la fonction  $g$  définie sur  $]0, \pi[ \times \mathbb{R}$  par :

$$g(x, y) = f \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} \right)$$

ait un Laplacien nul.





## Chapitre 22

# Géométrie différentielle

Dans ce chapitre,  $E$  et  $F$  désignent deux espaces vectoriels normés réels de dimension finie et  $k$  un élément de  $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$

### 1. Difféomorphismes

Dans cette section,  $f$  désigne une application de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) d'un ouvert  $U$  de  $E$  vers  $F$ .

#### 1.1 Difféomorphismes et applications étales

##### Définition 1

On dit que l'application  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , injective, d'image un ouvert  $V$  de  $F$  et si l'application réciproque  $f^{-1} : V \rightarrow E$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

On dit alors que  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ .

Dans les conditions précédentes, on voit en différentiant les relations :

$$f^{-1} \circ f = Id_U \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = Id_V$$

que l'on a pour tout  $x \in U$  :

$$d(f^{-1})(f(x)) \circ df(x) = Id_E \quad \text{et} \quad df(x) \circ d(f^{-1})(f(x)) = Id_F.$$

Ainsi :

- $df(x)$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  d'inverse  $d(f^{-1})(f(x))$  pour tout  $x$
- $\dim E = \dim F$ .

On supposera donc dans la suite de ce paragraphe que  $E$  et  $F$  sont deux espaces de même dimension  $n$ .

### Définition 2

On dit que  $f$  est *étale* en  $x \in U$  si  $df(x)$  est un isomorphisme.

### Remarques

- Les difféomorphismes d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ont été étudiés dans le cours de première année.
- Un difféomorphisme est étale en tous les points de son domaine de définition. Nous verrons des réciproques partielles à cette assertion dans les sections suivantes. La réciproque stricte est fautive en dimension supérieure ou égale à 2, contrairement à ce qui se passe en dimension 1, comme le montre l'exemple de l'application :

$$(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même.

- L'ensemble des  $x$  où  $f$  est étale est un ouvert, peut-être vide, de  $U$  comme image réciproque de l'ouvert  $\mathcal{GL}(E)$  par l'application  $x \mapsto df(x)$  de  $U$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .
- Lorsque  $F = E$ , on appelle jacobien de  $f$  en  $x$ , et on note  $\text{jac } f(x)$ , le déterminant de  $df(x)$ . Une application est étale en  $x$  si  $\text{jac } f(x) \neq 0$ .

## 1.2 Théorème d'inversion locale

Le théorème d'inversion locale est l'un des théorèmes importants, et difficiles, de la théorie des applications continûment différentiables.

Ce théorème peut être omis en première lecture.

### Théorème 1 (d'inversion locale)

Si  $f$  est étale en  $a \in U$  il existe boule non vide  $B(a, s) \subset U$  telle que la restriction de  $f$  à  $B(a, s)$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme.

**Démonstration** Soit  $b = f(a)$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $df(a)^{-1} \circ f$ , on peut supposer que  $df(a) = Id_E$ .

Choisissons  $r > 0$  tel que  $D(a, r) \subset U$  et  $\|df(x) - Id_E\| \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $x \in D(a, r)$ . On sait que cela implique que  $df(x)$  est inversible pour tout  $x \in D(a, r)$ . De plus, l'inégalité des accroissements finis prouve :

$$\forall (u, v) \in D(a, r)^2, \quad \|f(v) - f(u) - (v - u)\| \leq \frac{1}{2} \|v - u\|.$$

Cela montre que  $f$  est injective sur  $D(a, r)$  : si  $(u, v) \in D(a, r)^2$  vérifie  $f(u) = f(v)$ , on obtient  $\|v - u\| \leq \frac{1}{2} \|v - u\|$ , soit  $u = v$ .

Prouvons maintenant l'inclusion  $B(b, \frac{r}{2}) \subset f(D(a, r))$ . On utilisera la méthode des approximations successives de Picard. Soit  $y \in B(b, \frac{r}{2})$ .

► Construisons tout d'abord par récurrence une suite  $(x_k) \in D(a, r)^{\mathbf{N}}$  telle que  $x_0 = a$  et :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad x_k = x_{k-1} + y - f(x_{k-1}) \quad \text{et} \quad \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{1}{2^k} \|x_1 - x_0\|.$$

À l'ordre 1, on a bien  $\|x_1 - x_0\| = \|y - f(x_0)\| \leq \frac{r}{2}$  et  $x_1 \in D(a, r)$ . Supposons obtenue  $(x_k)_{k=0, \dots, p} \in \overline{B}(a, r)^{\mathbf{N}^p}$  vérifiant la relation précédente pour  $k = 1, \dots, p$ . On pose alors  $x_{p+1} = x_p + y - f(x_p)$ . Les inégalités :

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|f(x_k) - f(x_{k-1}) - (x_k - x_{k-1})\| \leq \frac{1}{2} \|x_k - x_{k-1}\|$$

et donc :

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i} \|x_1 - x_0\| \leq r$$

montrent que  $x_{p+1}$  appartient à  $D(a, r)$ . On obtient ainsi  $(x_k) \in D(a, r)^{\mathbf{N}}$ .

► La majoration :

$$\|x_q - x_p\| \leq \sum_{i=p}^{q-1} \frac{1}{2^i} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1}{2^{p-1}} r$$

montre que  $(x_k)$  est une suite de Cauchy. Elle converge vers un élément  $x \in D(a, r)$  vérifiant  $x = x + y - f(x)$ , soit  $y = f(x)$ . Ainsi  $B(b, \frac{r}{2}) \subset f(D(a, r))$ .

Soit  $V$  l'ouvert  $f^{-1}(B(b, \frac{r}{2}))$ . L'application  $f|_V$  est continûment différentiable et bijective de  $V$  sur  $W = B(b, \frac{r}{2})$ .

► Considérons  $y \in W$ ,  $\ell \in F$ ,  $x = g(y)$  et  $g(y + \ell) = g(y) + h(\ell)$  avec  $h(\ell) = g(y + \ell) - g(y)$ . Il vient :

$$f(x + h(\ell)) = f(x) + df(x)(h(\ell)) + \|h(\ell)\| \varepsilon(h(\ell))$$

où  $\varepsilon(h)$  tend vers 0 avec  $h$  et, donc,  $\ell = df(x)(h(\ell)) + \|h(\ell)\| \varepsilon(h(\ell))$ . L'inégalité :

$$\|h(\ell) - \ell\| = \|f(x + h(\ell)) - f(x) - (x + h(\ell) - x)\| \leq \frac{1}{2} \|h(\ell)\|$$

montre  $\frac{1}{2} \|h(\ell)\| \leq \|\ell\| \leq \|h(\ell)\|$ . Lorsque  $x$  appartient à  $D(a, r)$ , on sait que  $df(x)$  est inversible. On obtient :

$$g(y + \ell) - g(y) = h(\ell) = (df(x))^{-1}(\ell) + \|h(\ell)\| (df(x))^{-1}(\varepsilon(h(\ell))).$$

Lorsque  $\ell$  tend vers 0,  $h(\ell)$  tend vers 0 et la majoration :

$$\left\| \left\| h(\ell) \right\| \left\| (df(x))^{-1}(\varepsilon(h(\ell))) \right\| \right\| \leq 2 \|\ell\| \left( \left\| (df(x))^{-1} \right\| \left\| \varepsilon(h(\ell)) \right\| \right)$$

montre que  $g(y + \ell) - g(y) - (df(x))^{-1}(\ell) = o(\|\ell\|)$ . Ainsi  $g$  est différentiable en  $y = f(x)$  de différentielle  $df(x)^{-1}$

► L'application  $g$  est donc continue et,  $dg(y)$  valant  $df(g(y))^{-1}$ , continûment différentiable

La restriction de  $f$  à une boule  $B(a, s)$  incluse dans  $V$  est alors un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $B(a, s)$  sur l'ouvert :

$$f(B(a, s)) = g^{-1}(B(a, s))$$

de  $E$ .

Pour montrer que  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme, on supposera, par hypothèse de récurrence, que le résultat est acquis pour  $k - 1 \geq 1$ . L'application  $f^{-1}$  est donc de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . La relation :

$$d(f^{-1})(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}$$

montre par composition que  $d(f^{-1})$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Cela achève la démonstration du théorème. □

**Exemples**

1. L'ensemble des polynômes unitaires de degré  $n > 0$  est le sous-espace affine  $X^n + \mathbb{R}_{n-1}[X]$  de  $\mathbb{R}[X]$ . Pour tout  $y = (y_i)$ , on notera  $P_y$  le polynôme :

$$X^n + \sum_{i=1}^n y_i X^{n-i}.$$

On identifiera ainsi  $\mathbb{R}^n$  et  $X^n + \mathbb{R}_{n-1}[X]$  par l'application  $(y_i) \mapsto P_y$ .

- L'application :

$$\varphi : x \mapsto \prod_{i=1}^n (X - x_i) - X^n$$

est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (ses coordonnées dans les bases canoniques sont polynomiales). Sa différentielle en  $x$  envoie les vecteurs de la base canonique sur les polynômes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = - \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n (X - x_i), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = - \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n (X - x_i).$$

Ces polynômes sont indépendants si, et seulement si, les  $(x_i)$  sont distincts deux à deux ; dans ce cas, ce sont au signe près, les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à  $(x_i)$ . L'application  $\varphi$  est donc étale en  $(x_i)$  si, et seulement si  $(x_i)$  est formé de nombres deux à deux distincts.

- Soient  $(a_i) \in \mathbb{R}^n$  formé de nombres deux à deux distincts et  $(c_i) \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$\prod_{i=1}^n (X - a_i) = X^n + \sum_{i=1}^n c_i X^{n-i}.$$

Le théorème d'inversion locale montre que  $\varphi$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme d'un voisinage  $V$  de  $a$  sur un voisinage  $V$  de  $P_c - X^n$  dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . En utilisant l'identification précisée au début, le difféomorphisme réciproque de  $\varphi$  fournit un voisinage  $U$  de  $(c_i)$  et alors  $n$  applications de classe  $C^\infty$

$$\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$$

tels que pour tout  $(y_i) \in U$  le polynôme  $P_y$  soit simple et ait la famille  $(\varphi_i(y))$  comme liste de racine.

Ainsi, au voisinage d'un polynôme réel scindé simple, les racines peuvent s'exprimer comme des fonctions de classe  $C^\infty$  des coefficients. On sait qu'en général (pour  $n \geq 5$ ) ces fonctions ne peuvent s'exprimer comme des expressions algébriques utilisant des radicaux (Abel 1824).

2. Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'application  $\exp$  de  $\mathcal{L}(E)$  dans lui-même est de classe  $C^1$  et que sa différentielle en 0 est l'identité de  $\mathcal{L}(E)$ . Le théorème d'inversion locale montre alors qu'il existe des voisinages ouverts  $U$  et  $V$  de 0 et  $\text{Id}_E$  tels que  $\exp|_U$  soit un difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ . Nous allons préciser cet inverse.

Puisque la série entière  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$  est de rayon de convergence 1, la série

$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{v^n}{n}$  converge normalement sur les boules fermées  $D(0, r)$  avec  $r < 1$  de  $\mathcal{L}(E)$ . On appelle alors logarithme, l'application continue :

$$\ln u = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{(u - \text{Id}_E)^m}{m}$$

de  $B(\text{Id}_E, 1)$  vers  $\mathcal{L}(E)$ .

Soient  $u \in B(\text{Id}_E, 1)$  et  $v = u - \text{Id}_E$ . Posons :

$$c_{n,m} = (-1)^{m-n} \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \\ m_1 + \dots + m_n = m}} \frac{1}{m_1 \cdots m_n}$$

pour tout  $(n, m)$  de  $(\mathbb{N}^*)^2$ ,  $c_{0,0} = 1$  ainsi que  $c_{0,m} = c_{m,0} = 0$  pour tout  $m > 0$ . Puisque  $\|v\| < 1$ , on a, pour tout  $n$  :

$$\left( \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{v^m}{m} \right)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{n,m} v^m$$

par produit de Cauchy et :

$$\exp \ln u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{v^m}{m} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} c_{n,m} v^m \right)$$

Puisque la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \|c_{n,m} v^m\| \right)$  est de somme finie inférieure ou égale à  $\exp(-\ln(1-\|v\|))$ , la permutation des sommations donne :

$$\exp \ln u = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,m} v^m \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,m} \right) v^m.$$

La relation  $\exp \ln t = t$  pour tout  $t$  réel montre que l'on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,1} = 1$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,m} = 0$  pour tout  $m > 1$ . On en déduit  $\exp \ln u = u$  pour tout  $u$  de  $B(\text{Id}_E, 1)$ .

Si les voisinages  $U$  et  $V$  du début vérifient  $U \subset B(0, 1)$  et  $V \subset B(\text{Id}_E, 1)$ , alors l'inverse de  $\exp|_U$  est l'application  $\ln|_V$ .

### 1.3 Caractérisation globale des difféomorphismes

Pour montrer qu'une application est un difféomorphisme, on utilise pratiquement le théorème de caractérisation global suivant :

#### Théorème 2 (d'inversion globale)

Une application injective et étale  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme (en particulier son image est un ouvert de  $F$ ).

**Démonstration** Le théorème d'inversion local montre que, pour tout  $x \in U$ , il existe  $s_x > 0$  tel que  $B(x, s_x)$  soit contenu dans  $U$  et  $f|_{B(x, s_x)}$  un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de classe.

- L'image de  $f$  est la réunion des images  $f(B(x, s_x))$ . Ces ensembles étant ouverts  $f(U)$  est ouvert.
- La restriction de  $f^{-1}$  à  $f(B(x, s_x))$  est l'inverse de  $f|_{B(x, s_x)}$ . Elle est donc de classe  $\mathcal{C}^k$ . Cela montre que  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  □

#### Remarques

- Le fait que  $f(U)$  soit ouvert est l'un des résultat important du théorème précédent. Il est fréquent dans les cas concrets que l'on puisse le vérifier directement.

- Il est fréquent, lorsque l'on utilise les théorèmes d'inversion local ou global, que  $f^{-1}$  ne soit pas explicitement calculable. On détermine alors ses dérivées partielles d'ordre 1 par la relation matricielle :

$$\left( \frac{\partial f^{-1}}{\partial y_i}(y) \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{-1}$$

où  $y = f(x)$  et ses dérivées d'ordre supérieur en utilisant le théorème de composition.

**Exemple** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'axe horizontal de  $\mathbb{R}^2$ . On considère l'application :

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : M = (x, y) \mapsto (AM, BM) = (u, v)$$

de  $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}^2$  ( $AM$  désigne la distance de  $A$  à  $M$ ).

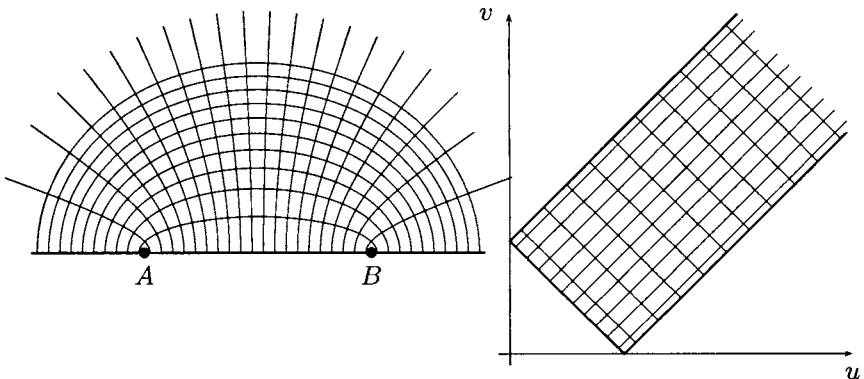
- L'application  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$ . Sa différentielle est donnée par :

$$d\varphi(M)(\vec{V}) = \left( \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{V}}{AM}, \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \vec{V}}{BM} \right).$$

Elle est donc bijective puisque  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{BM}$  sont indépendants pour tout  $M$  de  $\mathbb{H}$ . Les théorèmes classiques sur les triangles montrent que  $\varphi$  est injective sur  $\mathbb{H}$  et que son image est :

$$\mathbb{T} = \{ (u, v) \mid |v - u| < AB < u + v \}.$$

L'application  $\varphi$  est donc un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{H}$  sur  $\mathbb{T}$ . Elle transforme les traces sur  $\mathbb{H}$  des ellipses ou des hyperboles de foyer  $A$  et  $B$  en les droites d'équations  $u \pm v = C^{te}$  :



- Supposons  $A = (-1, 0)$  et  $B = (1, 0)$ . La matrice jacobienne de  $\varphi$  est :

$$\text{Jac } \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \\ \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \end{pmatrix}.$$

- Notons  $\psi = (\psi_1, \psi_2) = \varphi^{-1}$ . La matrice jacobienne de  $\psi$  en  $(u, v) = \varphi(x, y)$  est, par inversion de la matrice précédente, la matrice :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} & -\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ -\frac{x-1}{y} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} & \frac{x+1}{y} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad (*)$$

où  $x = \psi_1(u, v)$  et  $y = \psi_2(u, v)$ . On a donc par exemple :

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial u} = -\frac{x-1}{2y} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = -\frac{\psi_1 - 1}{2\psi_2} u.$$

- La dérivée partielle seconde croisée est alors donnée par :

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{2\psi_2} u \frac{\partial \psi_1}{\partial v} + \frac{\psi_1 - 1}{2\psi_2^2} u \frac{\partial \psi_2}{\partial v}.$$

On l'exprime en fonction de  $(x, y)$  (c'est plus clair) en utilisant les dérivées partielles d'ordre 1 donnée par (\*). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{4y} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ &\quad + \frac{x^2 - 1}{4y^3} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial u \partial v} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{4y^3} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

## 1.4 Transformation des opérateurs différentiels linéaires par difféomorphisme

On identifie  $E$  et  $F$  respectivement à  $\mathbb{R}^n$  d'élément générique  $(x_j)$  et  $\mathbb{R}^n$  d'élément générique  $(y_i)$ .

Soit alors :

$$\varphi : x \mapsto y = (\varphi_i(x))$$

un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme d'un ouvert  $U$  de  $E$  sur l'ouvert  $V$  de  $F$



L'application  $\varphi$  induit l'isomorphisme linéaire de composition :

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

dont l'isomorphisme réciproque est  $(\varphi^{-1})^*$ .

Si  $L$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ , l'application  $(\varphi^{-1})^* \circ L \circ \varphi^*$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto L(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

est un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  que l'on note  $\varphi_*(L)$ . On vérifie aisément que  $\varphi_*$  est un morphisme d'algèbres.

- Si  $m$  est l'opérateur différentiel linéaire de multiplication par la fonction  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ , l'endomorphisme  $\varphi_*(m)$  est la multiplication par  $\alpha \circ \varphi^{-1}$ .
- Soit  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  l'opérateur de dérivation partielle par rapport à  $x_j$ . Si  $f(y)$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ , la règle de la chaîne donne :

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)$$

et :

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(y)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(y)). \tag{1}$$

On obtient alors :

$$\varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{2}$$

L'opérateur  $\varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$  est donc un opérateur différentiel sur  $V$ .

- Par composition, on voit alors que l'image  $\varphi_*(L)$  de tout opérateur différentiel linéaire  $L$  sur  $U$  est un opérateur différentiel linéaire sur  $V$  de même ordre. On l'appelle l'opérateur différentiel transformé par  $\varphi$ .

Le calcul de l'opérateur transformé  $\varphi_*$  est en général délicat et nécessite des écritures abrégées.

On utilisera les simplifications suivantes :

- On notera avec la majuscule correspondante la fonction de  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  image par  $\varphi^*$  d'une fonction de  $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$  : si  $f$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ , on désigne

donc par  $F$  la fonction  $f \circ \varphi$  de  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ . L'égalité :

$$F(x) = f(y)$$

où  $y = \varphi(x)$  permet de considérer, comme on le fait systématiquement en physique, que  $f$  et  $F$  sont les expressions de la même quantité dans deux systèmes différents de variables (on note en général en physique ces fonctions par la même lettre sans utiliser de majuscule).

- La relation de la chaîne (1) s'écrit en notant :

$$\alpha_{i,j}(y) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\varphi^{-1}(y))$$

sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)$$

où les fonctions situées à gauche du signe égal sont exprimées en fonction de  $x$  et celles situées à droite en fonction de  $y$  (les fonctions  $\alpha_{i,j}(y)$  ne sont connues qu'à travers  $\varphi^{-1}$ ). Avec cette convention, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad \text{et même} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Tout cela n'est en fait qu'une façon d'écrire l'expression de  $\varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$  donnée par (2).

- Si l'on note :

$$g(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y),$$

la relation du point précédent s'écrit ( $G = g \circ \varphi$ ) :

$$G(x) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x).$$

On peut donc recommencer de la même façon et écrire par exemple :

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k}(y) \frac{\partial g}{\partial y_i}(y).$$

Cela exprime bien sûr que  $\varphi_*$  est un morphisme pour la composition. On calcule alors par itération l'image de tout opérateur différentiel linéaire.

On utilise fréquemment la transformation des opérateurs différentiels linéaires pour résoudre des équations aux dérivées partielles de la forme  $Lf = 0$ . L'exemple suivant est dû à d'Alembert (1747)

*Exemple* Considérons l'équation des ondes en dimension 1 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

( $v \in \mathbb{R}_+^*$ ) d'inconnue la fonction  $f(x, t)$  de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Elle est associée au d'Alembertien :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Soit  $\varphi$  le difféomorphisme de  $\mathbb{R}_{(x,t)}^2$  vers  $\mathbb{R}_{(r,s)}^2$  (on indique en indice les coordonnées de l'élément générique) défini par :

$$\begin{aligned} r &= x - vt \\ s &= x + vt \end{aligned}$$

Si  $g$  appartient à  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{(r,s)}^2, \mathbb{R})$ , la fonction  $G = g \circ \varphi$  de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{(x,t)}^2, \mathbb{R})$  est donnée par  $G(x, t) = g(x - vt, x + vt)$ .

1. On obtient par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial s} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}$$

et, de même :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -v \frac{\partial g}{\partial r} + v \frac{\partial g}{\partial s} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial s}.$$

2. Il vient alors en explicitant complètement les calculs :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial s} \right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}.$$

On obtient de même en écriture abrégée :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right) \\
 &= \left( -v \frac{\partial}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial s} \right) \left( -v \frac{\partial g}{\partial r} + v \frac{\partial g}{\partial s} \right) \\
 &= -v \frac{\partial}{\partial r} \left( -v \frac{\partial g}{\partial r} + v \frac{\partial g}{\partial s} \right) + v \frac{\partial}{\partial s} \left( -v \frac{\partial g}{\partial r} + v \frac{\partial g}{\partial s} \right) \\
 &= -v \left( -v \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + v \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s} \right) + v \left( -v \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s} + v \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} \right) \\
 &= v^2 \left( \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} \right).
 \end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$\square G = 4 \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s}.$$

Cela peut s'écrire  $\varphi_*(\square) = 4 \frac{\partial^2}{\partial r \partial s}$ .

Si  $f = g \circ \varphi$ , l'équation  $\square f = 0$  est donc équivalente à  $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s} = 0$ . On résout cette équation de la façon suivante. Pour tout  $s$ , la fonction  $r \mapsto \frac{\partial g}{\partial s}(r, s)$  est de dérivée nulle. On a donc :

$$\frac{\partial g}{\partial s}(r, s) = \ell(s)$$

où  $\ell(s) = \frac{\partial g}{\partial s}(0, s)$  est de classe  $C^1$ . Par intégration suivant  $s$ , on obtient :

$$g(r, s) = \int_0^s \ell(\sigma) d\sigma + g(r, 0),$$

ce qui prouve que l'on peut écrire  $g(r, s)$  comme somme  $f_+(r) + f_-(s)$  où  $f_+$  et  $f_-$  appartiennent à  $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On obtient finalement :

$$f(x, t) = f_+(x - vt) + f_-(x + vt).$$

Il est simple de vérifier que toute application de cette forme vérifie l'équation des ondes.

### Coordonnées polaires

Soit  $(O, e_1, e_2)$  un repère orthonormé direct du plan euclidien orienté  $P$  ainsi identifié avec  $\mathbb{R}^2$ . On note  $(x, y)$  les coordonnées cartésiennes du point générique.

- On appelle repère polaire d'angle  $\theta$  le repère  $(u(\theta), v(\theta))$  où :

$$u(\theta) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \quad \text{et} \quad v(\theta) = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2.$$

- On dit que le couple  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$  est un système de coordonnées polaires de  $m = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  si :

$$\overrightarrow{Om} = ru(\theta).$$

L'application polaire :

$$\mathcal{P} : (r, \theta) \mapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$

de  $\mathbb{R}^2$  vers lui-même est de classe  $C^\infty$  et sa matrice jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Son jacobien est donc  $r$ .

L'application  $\mathcal{P}$  réalise ainsi, plus précisément sa restriction réalise un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$  pour tout ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  ne contenant aucun point de la forme  $(0, \theta)$  et sur lequel  $\mathcal{P}$  est injective.

*Exemple* Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'application  $\mathcal{P}$  réalise un  $C^\infty$ -difféomorphisme de l'ouvert  $]\alpha, \alpha + 2\pi[ \times ]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}^2$  privé de la demi-droite  $\mathbb{R}^+u(\alpha)$ .

L'application polaire principale  $\mathcal{P}_p$  (obtenue pour  $\alpha = -\pi$ ) est le  $C^\infty$ -difféomorphisme :

$$]-\pi, \pi[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-.$$

Le difféomorphisme réciproque  $\mathcal{P}_p^{-1}$  est de la forme :

$$(x, y) \mapsto (r = \varphi_1(x, y), \theta = \varphi_2(x, y)).$$

- La fonction  $\varphi_1$  est évidemment donnée par  $r = \varphi_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- Si l'on a bien sûr  $\theta = \varphi_2(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  lorsque  $x > 0$ , il n'est pas immédiat qu'il existe une expression analytique donnant  $\varphi_2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^-$ . Nous avons vu dans le cours de première année que l'on a :

$$\varphi_2(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

On calculera alors la matrice jacobienne de  $\mathcal{P}_p^{-1}$  de deux façons différentes.

- En utilisant les expressions analytiques ci-dessus, il vient :

$$\text{Jac } \mathcal{P}_p^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

- Comme inverse de la matrice jacobienne de  $\mathcal{P}$ , on obtient :

$$\text{Jac } \mathcal{P}_p^{-1}(\mathcal{P}(r, \theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

### Proposition 3

Soient  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel l'application polaire est un  $C^\infty$ -difféomorphisme d'image ouvert  $U$ . Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continûment différentiable et si  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  est l'application définie par :

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) u(\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) v(\theta).$$

**Démonstration** On a  $F = f \circ \mathcal{P}$  donc  $dF = df \circ d\mathcal{P}$ . Il vient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et, après inversion :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Il obtient alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left( \frac{\partial F}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \right) e_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \right) e_2$$

ce qui donne le résultat. □

**Exemple** Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Considérons alors un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}_{(r,\theta)}^2$  (ici aussi, on indique en indice le nom des coordonnées de l'élément générique) sur lequel l'application polaire :

$$\mathcal{P} : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'image l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ . Si  $f(x, y)$  est une fonction de  $C^2(U, \mathbb{R})$  de fonction transformée  $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Par inversion, on obtient les formules :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{aligned}$$

correspondant au difféomorphisme inverse  $\mathcal{P}^{-1}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \\ &\quad + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}$$

ce que l'on peut écrire :

$$(\mathcal{P}^{-1})_*(\Delta) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

## 2. Théorème des fonctions implicites

### 2.1 Théorème des fonctions implicites

Dans toute cette section,  $f$  désigne une application de classe  $\mathcal{C}^k$  d'un ouvert  $U$  de  $E \times F$  dans un espace vectoriel réel normé de dimension finie  $G$  et  $(a, b)$  un élément de  $U$ .

**Théorème 4 (des fonctions implicites)**

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $U$  vers  $G$ , avec  $k \geq 1$ .

Si  $f(a, b) = 0$  et si la restriction  $df(a, b)|_{\{0\} \times F}$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $G$ , alors il existe  $(r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que  $B(a, r) \times B(b, s) \subset U$  et une application de classe  $\mathcal{C}^k$  :

$$\varphi : B(a, r) \rightarrow F$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1. pour tout  $(x, y) \in B(a, r) \times B(b, s)$ , la restriction  $df(x, y)|_{\{0\} \times F}$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $G$ ,
2. pour tout  $x \in B(a, r)$ , le vecteur  $\varphi(x)$  est l'unique élément de  $B(b, s)$  vérifiant :

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

(en particulier  $\varphi(a) = b$ ).

**Démonstration** On munit les espaces produit des normes produit cartésien :

$$\| (x, y) \| = \max (\|x\|, \|y\|).$$

L'application  $g = (g_1, g_2) : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$  de  $U$  vers  $E \times F$  est continûment différentiable et sa différentielle en  $(a, b)$  donnée par :

$$dg(a, b)(h, \ell) = (h, df(a, b)(h, \ell)).$$

- Si  $(h, \ell)$  appartient au noyau de  $dg(a, b)$ , on obtient  $h = 0$  puis  $df(a, b)(0, \ell) = 0$ . L'injectivité de  $df(a, b)|_{\{0\} \times F}$  implique alors  $\ell = 0$ . Comme  $\dim F = \dim G$ , l'application injective  $dg(a, b)$  réalise un isomorphisme de  $E \times F$  sur  $E \times G$ .
- Le théorème d'inversion locale nous fournit  $s > 0$  tel que  $g$  soit un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de la boule  $V = B((a, b), s)$  sur un ouvert  $W$  de  $E \times G$ .
- Notons  $h = (h_1, h_2)$  le  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme réciproque  $(g|_V)^{-1}$ . Pour tout  $(u, v) \in W$ , on a :

$$(h_1(u, v), f(h_1(u, v), h_2(u, v))) = (u, v)$$

soit :

$$h_1(u, v) = u \quad \text{et} \quad f(h_1(u, v), h_2(u, v)) = v.$$

Soit  $r > 0$  tel que  $B((a, 0), r) \subset W$  et  $\varphi$  l'application  $u \mapsto h_2(u, 0)$  de  $B(a, r)$  vers  $F$ .

- L'application  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  comme composée de  $u \mapsto (0, u)$  et de  $h_2$ . Pour tout  $u \in B(a, r)$ , on a  $(u, 0) \in B((a, 0), r)$  ce qui entraîne  $h(u, 0) \in B((a, b), s)$  et  $\varphi(u) \in B(b, s)$ . De plus :

$$f(u, \varphi(u)) = 0.$$



- Soit  $u \in B(a, r)$ . La relation  $(u, 0) \in B((a, 0), r)$  montre que  $h(u, 0)$  appartient à  $B((a, b), s)$ , ce qui implique  $u \in B(a, s)$  et  $\varphi(u) \in B(b, s)$ . Cela étant vrai pour tout  $u$  de  $B(a, r)$ , on a  $r \leq s$ . Pour tout  $(u, v)$  de  $B(a, r) \times B(b, s)$ , on a  $(u, v) \in V$  donc  $dg(u, v)$  est un isomorphisme et  $df(x, y)|_{\{0\} \times F}$  un isomorphisme de  $F$  sur  $G$ .
- Si, de plus,  $v \in B(b, s)$  vérifie  $f(u, v) = 0$ , on a  $(u, v) \in B((a, b), s)$  et :

$$g(u, v) = (u, 0) \in B((a, 0), r).$$

On obtient  $(u, v) = h(u, 0)$ , soit  $v = \varphi(u)$ . □

L'application  $\varphi$  s'appelle l'application implicite définie par  $f(x, y) = 0$ . Elle est de classe  $C^k$  et on calcule ses dérivées partielles en utilisant la proposition suivante :

**Proposition 5**

Dans les conditions du théorème précédent, la différentielle de  $\varphi$  est donnée pour tout  $x$  de  $B(a, r)$  par :

$$d\varphi(x) = \left( df(x, \varphi(x))|_{\{0\} \times F} \right)^{-1} \circ \left( df(x, \varphi(x))|_{E \times \{0\}} \right).$$

**Démonstration** En différentiant  $f(x, \varphi(x)) = 0$ , on obtient pour tout  $h \in E$  :

$$df(x, \varphi(x))(h, d\varphi(x)(h)) = df(x, \varphi(x))(h, 0) + df(x, \varphi(x))(0, d\varphi(x)(h)) = 0.$$

On obtient alors :

$$d\varphi(h) = - \left( df(x, \varphi(x))|_{\{0\} \times F} \right)^{-1} \circ df(x, \varphi(x))(h, 0). \quad \square$$

**Exemple** Soient  $P_0$  et  $Q_0$  deux polynômes réels unitaires de degrés respectifs  $n$  et  $m$  strictement positif. On notera  $P_0 = X^n + R_0$  et  $Q_0 = X^m + S_0$ .

On suppose que  $P_0$  et  $Q_0$  sont premiers entre eux et que  $U_0$  et  $V_0$  sont des polynômes de degrés respectifs inférieurs ou égaux à  $m - 1$  et  $n - 1$  tels que :

$$U_0 P_0 + V_0 Q_0 = 1.$$

Notons  $E = \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{m-1}[X]$ ,  $F = \mathbb{R}_{m-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $G = \mathbb{R}_{n+m-1}[X]$ .

L'application :

$$\begin{aligned} \varphi \quad E \times F &\rightarrow G \\ (R, S, U, V) &\mapsto U(X^n + R) + V(X^m + S) - 1 \end{aligned}$$

est de classe  $C^\infty$  puisque ses composantes sont polynomiales Sa différentielle est donnée par :

$$d\varphi(R, S, U, V)(A, B, C, D) = UA + VB + C(X^n + R) + D(X^m + S)$$

où  $(A, B, C, D)$  appartient à  $E \times F$ .

La restriction de la différentielle  $d\varphi(R_0, S_0, U_0, V_0)$  à  $\{0\} \times F$  est l'application linéaire :

$$(C, D) \mapsto C(X^n + R_0) + D(X^m + S_0) = CP_0 + DQ_0.$$

Si  $CP_0 + DQ_0 = 0$ , le lemme de Gauss montre que  $C$  est multiple de  $Q_0$ . Pour des raisons de degré, on obtient  $C = D = 0$ . La restriction considérée est donc injective. Comme  $\dim F = \dim G$ , les conditions du théorèmes des fonctions implicites sont vérifiées.

Il existe donc une boule ouverte  $\mathcal{U}$  de centre  $(R_0, S_0)$  dans  $E$ , une boule ouverte  $\mathcal{V}$  de centre  $(U_0, V_0)$  dans  $F$  et une application de classe  $C^\infty$  :

$$\mathcal{B} : (R, S) \mapsto (U_{(R,S)}, V_{(R,S)})$$

de  $\mathcal{U}$  vers  $\mathcal{V}$  tels que pour tout  $(R, S) \in \mathcal{U}$  :

1. les polynômes  $P = X^n + R$  et  $Q = X^m + S$  sont premiers entre eux,
2. le couple  $(U_{(R,S)}, V_{(R,S)}) \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$  vérifie :

$$U_{(R,S)}P + V_{(R,S)}Q = 1$$

(on sait par ailleurs que ce couple est unique).

### Cas des espaces numériques

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ,  $(a, b) \in U$  et :

$$(f_i) : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \mapsto (f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p))$$

une application de classe  $C^k$ .

On considère le système de  $p$  équations à  $p$  inconnues  $(y_i)$  en les paramètres  $(x_i)$  :

$$\forall i, \quad f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0 \qquad \text{(Syst. impl.)}$$

**Proposition 6**

Si  $(a, b)$  vérifie le système (Syst. impl.) et si la matrice  $p \times p$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \end{pmatrix}$$

est inversible, il existe  $(r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 > 0$  tel que  $B(a, r) \times B(b, s) \subset U$  et une application de classe  $C^k$  :

$$(\varphi_i) : B(a, r) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. pour tout  $(x, y) \in B(a, r) \times B(b, s)$ , la matrice  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \end{pmatrix}$  est inversible,
2. pour tout  $x \in B(a, r)$ , le vecteur  $(\varphi_i(x))$  est l'unique élément de  $B(b, s)$  vérifiant :

$$\forall i, \quad f_i(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) = 0 \quad (\text{Syst. impl})$$

(en particulier  $(\varphi_i(a)) = b$ ).

**Démonstration** Notons  $f = (f_i)$ . La matrice de  $df$  dans les bases canoniques est la matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a, b) & \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \end{pmatrix}.$$

La sous-matrice  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \end{pmatrix}$  est donc la matrice dans les bases canoniques de la restriction de  $df(a, b)$  au sous-espace  $\{0\} \times \mathbb{R}^p$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème des fonctions implicites abstrait. □

**Corollaire 7**

Dans les conditions du théorème précédent, la matrice jacobienne de  $(\varphi_i)$  est donnée pour tout  $x$  de  $B(a, r)$  par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \varphi(x)) \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \varphi(x)) \end{pmatrix}.$$

**Démonstration** En dérivant partiellement par rapport à  $x_j$  la relation  $f_i(x, \varphi(x)) = 0$ , on obtient :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) = 0.$$

Cela donne la relation matricielle recherchée. Cette relation n'est en fait que l'expression matricielle de la formule donnant la différentielle d'une fonction implicite. □

**Méthode pratique** On calcule en général les dérivées partielles d'une fonction implicite en utilisant la notation différentielle

- Considérons la fonction implicite  $y = \varphi(x)$  définie par l'équation  $f(x, y) = 0$  au voisinage d'un point  $(a, b)$  tel que  $f'_y(a, b) \neq 0$ .

Par dérivation de l'identité  $f(x, \varphi(x)) = 0$  pour tout  $x$ , on obtient :

$$f'_x(x, \varphi(x)) + f'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}.$$

Il est pratique d'utiliser la notation différentielle. Les relations  $f(x, y) = 0$  et  $y = \varphi(x)$  fournissent, en effet :

$$f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = 0 \quad \text{et} \quad dy = \varphi'(x)dx.$$

On retrouve alors :

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}.$$

- Considérons la fonction implicite  $z = \varphi(x, y)$  définie par l'équation  $f(x, y, z) = 0$  au voisinage d'un point  $(a, b, c)$  tel que  $f'_z(a, b, c) \neq 0$ .

Par dérivation partielle par rapport à  $x$  et  $y$  de l'identité  $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ , on obtient :

$$f'_x(x, y, \varphi(x, y)) + f'_z(x, y, \varphi(x, y))\varphi'_x(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_x(x, y) = -\frac{f'_x(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))}$$

ainsi que :

$$f'_y(x, y, \varphi(x, y)) + f'_z(x, y, \varphi(x, y))\varphi'_y(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_y(x, y) = -\frac{f'_y(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))}$$

En différenciant les relations  $f(x, y, z) = 0$  et  $z = \varphi(x, y)$ , il vient :

$$f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz = 0 \quad \text{et} \quad dz = \varphi'_x(x, y)dx + \varphi'_y(x, y)dy$$

Par substitution de  $dz$ , on obtient  $(f'_x + f'_z\varphi'_x)dx + (f'_y + f'_z\varphi'_y)dy = 0$ . Cela

donne  $f'_x + f'_z\varphi'_x = f'_y + f'_z\varphi'_y = 0$  et, ainsi,  $\varphi'_x$  et  $\varphi'_y$ .

Calculons par exemple la dérivée partielle  $\varphi''_{xy}$ . De la relation :

$$\varphi'_x = -\frac{f'_x(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))},$$

on obtient :

$$\varphi''_{xy} = -\frac{f''_{xy} + f''_{yz}\varphi'_y}{f'_z} + \frac{f'_x(f''_{zy} + f''_{zz}\varphi'_y)}{f'^2_z}.$$

En remplaçant  $\varphi'_y$  par sa valeur, il vient :

$$\varphi''_{xy} = \frac{-f'^2_z f''_{xy} - f'_y f'_z f''_{xz} - f'_x f'_z f''_{yz} + f'_x f'_y f''_{zz}}{f'^3_z}.$$

## 2.2 Courbes planes

On appelle *arc paramétré de classe  $C^k$*  toute application de classe  $C^k$  :

$$\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) \in E$$

où  $I$  est intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\gamma$  est :

- *régulier* en  $t_0$  si  $\gamma'(t_0)$  est non nul,
- *régulier* si elle l'est en tout point.

La *tangente* à  $\gamma$  en un point régulier  $t_0$ , ou par abus de langage en  $m_0 = \gamma(t_0)$ , est la droite :

$$m_0 + \mathbb{R}\gamma'(t_0).$$

### Courbes planes définies par une équation

Soient  $f$  une application de classe  $C^k$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  et  $\Gamma$  l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $U$  vérifiant  $f(x, y) = 0$ .

On dit que  $\Gamma$  est la *courbe* définie par l'équation  $f(x, y) = 0$  et on écrit :

$$\Gamma : f(x, y) = 0.$$

#### Définition 3

On dit qu'un point  $m_0 = (x_0, y_0)$  de  $\Gamma$  est *régulier* si  $df(m_0)$ , ou  $\text{grad } f(m_0)$ , est non nul.

Le point  $m_0$  est régulier si, et seulement si, la matrice jacobienne :

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \end{array} \right)$$

est non nulle.

On supposera alors, quitte à permuter  $x$  et  $y$ , que l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \neq 0$$

dans la suite de ce développement.

Le théorème des fonctions implicites fournit un couple  $(r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et une application  $\varphi : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  telle que :

$$\Gamma \cap (B(x_0, r) \times B(y_0, s)) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in B(x_0, r)\}.$$

L'intersection de  $\Gamma$  et du voisinage  $B(x_0, r) \times B(y_0, s)$  de  $m_0$  peut donc être décrite :

1. soit comme le graphe de l'application  $\varphi : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,
2. soit comme l'image de l'arc régulier  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  de  $B(x_0, r)$  vers  $\mathbb{R}^2$ .

### Tangente à une courbe plane en un point régulier

On appelle évidemment *tangente* à  $\Gamma$  en  $m_0$ , la tangente au graphe de  $\varphi$  en  $x_0$ . Par ce qui précède, la pente de cette droite est :

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Il en est si  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ . On obtient ainsi la proposition suivante.

#### Proposition 8

Une équation cartésienne de la tangente à  $\Gamma$  en le point régulier  $m_0$  est :

$$(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

La tangente à  $\Gamma$  en  $m_0$  est donc la droite passant par  $m_0$  et orthogonale au vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}f}(m_0)$ . La normale en ce point est donc la droite passant par  $m_0$  et dirigée par le gradient de  $f$ .

*Exemple* La tangente en un point  $(x_0, y_0)$  d'une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a pour équation :

$$\frac{x_0 X}{a^2} + \frac{y_0 Y}{b^2} = 1.$$

L'ellipse a, en effet, pour équation  $f(x, y) = 0$  avec  $f(x, y) = a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 - 1$ . On en déduit que celle de la tangente est :

$$2a^{-2}x_0(X - x_0) + 2b^{-2}y_0(Y - y_0) = 0.$$

On obtient l'équation annoncée en utilisant  $a^{-2}x_0^2 + b^{-2}y_0^2 = 1$ .

## 2.3 Courbes et surfaces de l'espace

### Nappes paramétrées régulières

On appelle *nappe paramétrée de classe  $C^k$*  toute application :

$$\mu : (r, s) \in U \mapsto \mu(r, s) \in \mathbb{R}^3$$

de classe  $C^k$  où  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $\mu$  est :

- régulière en  $(r_0, s_0)$  si  $d\mu(r_0, s_0)$  est injective
- régulière si elle est régulière en tout point.

Le point  $(r_0, s_0)$  est régulier si, si et seulement si, la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial r}(r_0, s_0) & \frac{\partial \mu_1}{\partial s}(r_0, s_0) \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial r}(r_0, s_0) & \frac{\partial \mu_2}{\partial s}(r_0, s_0) \\ \frac{\partial \mu_3}{\partial r}(r_0, s_0) & \frac{\partial \mu_3}{\partial s}(r_0, s_0) \end{pmatrix},$$

avec  $\mu = (\mu_i)$ , est de rang 2, c'est-à-dire si, si et seulement si, les vecteurs  $\frac{\partial \mu}{\partial r}(r_0, s_0)$  et  $\frac{\partial \mu}{\partial s}(r_0, s_0)$  sont indépendants.

### Plan tangent à une nappe régulière

#### Définition 4

On appelle *plan tangent* à la nappe paramétrée  $\mu$  en le point régulier  $(r_0, s_0)$ , ou par abus en  $m_0 = \mu(r_0, s_0)$ , le plan :

$$m_0 + \text{Vect} \left( \frac{\partial \mu}{\partial r}(r_0, s_0), \frac{\partial \mu}{\partial s}(r_0, s_0) \right).$$

**Remarque** On peut motiver (!) la définition précédente des deux façons suivantes.

- La tangente à l'arc paramétré  $\gamma$  au point régulier  $t_0$  est la droite image de l'application affine  $h \mapsto \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0)$ , tangente à  $\gamma$  en  $t_0$ . Le plan tangent à la nappe paramétrée  $\mu$  en le point régulier  $(r_0, s_0)$  est l'image de l'application affine :

$$(h, \ell) \mapsto \mu(r_0, s_0) + d\mu(r_0, s_0)(h, \ell)$$

tangente à  $\mu$  en  $(r_0, s_0)$ .

- On appelle *arc paramétré tracé sur la nappe paramétrée*  $\mu$ , tout arc :

$$t \in I \mapsto \gamma(t) = \mu(r(t), s(t))$$

où  $(r, s)$  est une application de classe  $C^k$  d'un intervalle  $I$  dans  $U$ . Si  $\gamma$  passe en  $\mu(r_0, s_0)$  en  $t_0$ , c'est-à-dire si  $(r(t), s(t))$  est égal à  $(r_0, s_0)$ , la règle de la

chaîne montre que l'on a :

$$\gamma'(t_0) = \frac{\partial \mu}{\partial r}(r_0, s_0) r'(t_0) + \frac{\partial \mu}{\partial s}(r_0, s_0) s'(t_0).$$

On en déduit que le plan tangent à  $\mu$  en  $(r_0, s_0)$  est la réunion des tangentes des arcs tracés sur  $(\Sigma)$  passant par  $\mu(r_0, s_0)$  en ce point.

### Nappe cartésienne

Soit  $f$  une application de classe  $C^k$  d'un ouvert non vide  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$

On appelle *nappe cartésienne associée à  $f$* , la nappe paramétrée :

$$(x, y) \in U \mapsto (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3.$$

La matrice jacobienne de cette application étant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix},$$

la nappe cartésienne associée à  $f$  est régulière. Son image est bien sûr le graphe de  $f$ .

Soient alors  $(x_0, y_0) \in U$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$  et  $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$  le point de la nappe cartésienne au dessus de  $(x_0, y_0)$ .

Le plan tangent à la nappe cartésienne en  $m_0$  est le plan :

$$(x_0, y_0, z_0) + \text{Vect} \left( \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right), \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \right).$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

### Proposition 9

L'équation du plan tangent à la nappe cartésienne associée à  $f$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  est :

$$Z - z_0 = (X - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (Y - y_0)f'_y(x_0, y_0).$$

**Démonstration** Un point  $(X, Y, Z)$  appartient au plan tangent si, et seulement si, le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & X - x_0 \\ 0 & 1 & Y - y_0 \\ f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) & Z - z_0 \end{vmatrix}.$$

On obtient l'équation annoncée par développement du déterminant suivant la dernière colonne  $\square$



**Proposition 10**

Si la matrice hessienne :

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  est définie positive (respectivement négative) alors la nappe cartésienne associée à  $f$  est localement strictement au dessus (respectivement en dessous) de son plan tangent.

**Démonstration** Pour tout  $(x, y)$  de  $U$ , la quantité :

$$g(x, y) = f(x, y) - f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - z_0$$

est la composante sur  $Oz$  du vecteur  $\overrightarrow{nm}$  où  $n$  et  $m$  sont les points du plan tangent et de la nappe cartésienne situés au dessus de  $(x, y)$ .

On vérifie immédiatement par un simple calcul de dérivées partielles que la différentielle de  $g$  en  $(x_0, y_0)$  est nulle et que sa matrice hessienne en  $(x_0, y_0)$  est la matrice hessienne :

$$H_0 = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

de  $f$  en ce point.

Si  $H_0$  est définie positive,  $(x_0, y_0)$  est un minimum local strict de  $g$  et la nappe cartésienne est localement strictement au dessus de son plan tangent. Si  $H_0$  est définie négative, la nappe cartésienne est localement strictement en dessous de son plan tangent.  $\square$

**Remarque** On utilise traditionnellement les notations de Monge :

$$p_0 = f'_x(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad q_0 = f'_y(x_0, y_0)$$

ainsi que :

$$r_0 = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad s_0 = f''_{xy}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad t_0 = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

- L'équation de la tangente est alors :

$$Z - z_0 = p_0(X - x_0) + q_0(Y - y_0).$$

- La nappe cartésienne est localement strictement au dessus (respectivement en dessous) de son plan tangent si l'on a  $r_0 > 0$  et  $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$  (respectivement  $r_0 < 0$  et  $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ ).

**Surfaces définies par une equation**

Soient  $f$  une application de classe  $C^k$  d'un ouvert non vide  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}$  et  $\Sigma$  l'ensemble des points  $(x, y, z)$  de  $U$  vérifiant  $f(x, y, z) = 0$ .

On dit que  $\Sigma$  est la *surface* définie par l'équation  $f(x, y, z) = 0$  et l'on écrit :

$$\Sigma : f(x, y, z) = 0.$$

**Définition 5**

On dit qu'un point  $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $\Sigma$  est *régulier* si  $df(m_0)$ , ou  $\overrightarrow{\text{grad}}f(m_0)$ , est non nul.

Le point  $m_0$  est régulier si, si et seulement si, la matrice jacobienne :

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(m_0) \end{array} \right)$$

est non nulle.

On supposera alors, quitte à permuter  $x, y$  et  $z$ , que l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(m_0) \neq 0$$

dans la suite de ce développement.

Le théorème des fonctions implicites fournit alors un couple  $(r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et une application  $\varphi$  d'une boule  $B((x_0, y_0), r)$  de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  de classe  $C^k$  telle que :

$$\Sigma \cap (B((x_0, y_0), r) \times B(z_0, s)) = \{ (x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in B((x_0, y_0), r) \}.$$

L'intersection de  $\Sigma$  et de l'ouvert  $B((x_0, y_0), r) \times B(z_0, s)$  est donc l'image de la nappe cartésienne de classe  $C^k$  associée à  $\varphi$

On appelle alors *plan tangent* à  $\Sigma$  en  $m_0$ , le plan tangent à la nappe cartésienne associée à  $\varphi$  en  $(x_0, y_0)$ .

L'équation de ce plan est :

$$Z - z_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) (X - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) (Y - y_0).$$

En utilisant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

cela donne :

$$(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (Z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Il en de même dans les autres cas. On obtient ainsi la proposition suivante :

**Proposition 11**

Le plan tangent à  $\Sigma$  en le point régulier  $m_0$  a pour équation :

$$(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (Z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Il s'agit donc du plan passant par  $m_0$  et orthogonal à  $\overrightarrow{\text{grad}f}(m_0)$ . La normale à  $\Sigma$  en ce point est donc la droite passant par  $m_0$  est dirigée par le gradient.

**Courbes de l'espace définies par deux équations**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^k$  d'un ouvert non vide  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}$  et  $\Gamma$  l'ensemble des points  $(x, y, z)$  de  $U$  vérifiant  $f(x, y, z) = 0$  et  $g(x, y, z) = 0$ .

On dit que  $\Gamma$  est la courbe définie par les équations  $f(x, y, z) = 0$  et  $g(x, y, z) = 0$  et l'on écrit :

$$\Gamma : f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = 0$$

**Définition 6**

On dit qu'un point  $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $\Gamma$  est *régulier* si la différentielle de l'application  $(f, g)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  en  $m_0$ , est injective.

Le point  $m_0$  est régulier si, et seulement si, la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(m_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(m_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(m_0) & \frac{\partial g}{\partial z}(m_0) \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

On supposera alors, quitte à permuter  $x$ ,  $y$  et  $z$ , que la sous-matrice formée des deux dernières lignes de matrice précédente est inversible dans la suite de développement.

Le théorème des fonctions implicites fournit alors un couple  $(r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et une application  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de la boule  $B(x_0, r)$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^k$  telle que :

$$\Gamma \cap (B(x_0, r) \times B((y_0, z_0), s)) = \{(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \mid x \in B(x_0, r)\}.$$

L'intersection de  $\Sigma$  et de l'ouvert  $B(x_0, r) \times B((y_0, z_0), s)$  est donc l'image de l'arc paramétré de classe  $C^k$  :

$$x \longmapsto (1, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$$

de  $B(x_0, r)$  vers  $\mathbb{R}^3$ . La tangente à  $\Gamma$  en  $m_0$  est donc la droite

$$m_0 + \mathbb{R}(1, \varphi'_1(x_0), \varphi'_2(x_0)).$$

Le point  $m_0$  est aussi un point régulier des surfaces  $\Sigma_f$  et  $\Sigma_g$  d'équations  $f = 0$  et  $g = 0$ . Les plans tangents  $\mathcal{P}_f$  et  $\mathcal{P}_g$  à ces surfaces en  $m_0$  ont pour équations respectives :

$$(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) + (Z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(m_0) = 0$$

$$(X - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(m_0) + (Y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(m_0) + (Z - z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(m_0) = 0$$

La condition  $\text{rg Jac}(f, g)(m) = 2$  signifie que ces plans ne sont pas parallèles.

**Proposition 12**

La tangente à  $\Gamma$  en  $m$  est l'intersection des plans tangents aux surfaces  $\Sigma_f$  et  $\Sigma_g$  d'équations  $f = 0$  et  $g = 0$  en  $m_0$ .

**Démonstration** En dérivant les relations :

$$\forall x \in B(x_0, r), \quad f(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = 0 \quad \text{et} \quad g(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = 0,$$

on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0)\varphi'_1(x_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(m_0)\varphi'_2(x_0) = 0$$

et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(m_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(m_0)\varphi'_1(x_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(m_0)\varphi'_2(x_0) = 0.$$

Ainsi, le vecteur  $(1, \varphi'_1(x_0), \varphi'_2(x_0))$  est parallèle aux plans tangents aux surfaces  $\Sigma_f$  et  $\Sigma_g$  en  $m_0$ . Comme ces plans non parallèles contiennent  $m_0$  la tangente à  $\Gamma$  en  $m_0$  est égale à l'intersection des plans tangents à  $\Sigma_f$  et  $\Sigma_g$  en  $m_0$ . □

Cette tangente est donc la droite passant par  $m$  et orthogonale au vecteurs  $\overrightarrow{\text{grad}}f(m)$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}g(m)$ .

### 3. Formes différentielles et champs de vecteurs

Dans cette section,  $U$  désigne un ouvert de  $E$  et  $\ell$  un élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

#### 3.1 Définitions

##### Champs de vecteurs

###### Définition 7

On appelle *champ de vecteurs* de classe  $\mathcal{C}^\ell$  sur  $U$  toute application de classe  $\mathcal{C}^\ell$  de  $U$  vers  $E$ .

Un champ de vecteur  $V$  associe donc à tout point  $x$  de  $U$ , un vecteur  $V(x)$  appelé, évidemment, valeur du champ en  $x$ .

L'ensemble des champs de vecteurs sur  $U$  est l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^\ell(U, E)$ .

Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , les composantes  $V_i$  de  $V$  dans  $\mathcal{B}$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^\ell$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$ . On a alors :

$$V = V_1 e_1 + \dots + V_n e_n$$

(cela signifie évidemment  $V(x) = V_1(x)e_1 + \dots + V_n(x)e_n$  pour tout  $x$  de  $U$ ).

##### Formes différentielles

###### Définition 8

On appelle *forme différentielle* de classe  $\mathcal{C}^\ell$  sur  $U$  toute application de classe  $\mathcal{C}^\ell$  de  $U$  vers le dual  $E^*$  de  $E$ .

Une forme différentielle  $\omega$  n'est qu'un champ de formes linéaires sur  $U$ . Elle associe à tout  $x$  de  $U$ , une forme linéaire  $\omega(x)$  dont la valeur en un élément  $h$  de  $E$  est  $\omega(x)(h)$ .

L'ensemble des formes différentielles sur  $U$  est l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^\ell(U, E^*)$ .

*Exemple* Si  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^{\ell+1}$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$ , la différentielle  $df$  de  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^\ell$  de  $U$  vers  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ . Il s'agit donc d'une forme différentielle de classe  $\mathcal{C}^\ell$  sur  $U$ .

Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , les composantes  $\omega_i$  de  $\omega$  dans la base duale  $\mathcal{B}^*$  de  $\mathcal{B}$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^\ell$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$ . On a alors :

$$\omega = \omega_1 e_1^* + \dots + \omega_n e_n^*$$

(cela signifie évidemment  $\omega(x) = \omega_1(x)e_1^* + \dots + \omega_n(x)e_n^*$  pour tout  $x$  de  $U$ ).

Comme nous l'avons dit dans le chapitre consacré au calcul différentiel, il est usuel de noter  $x_i$  l'application  $e_i^*$  qui associe à tout point  $x$  de  $E$  sa  $i^{\text{ième}}$  coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . Cette application est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et sa différentielle est l'application constante qui associe à tout  $x$  de  $U$ , la forme linéaire  $e_i^*$ .

On a donc  $dx_i(x) = e_i^*$  pour tout  $x$ . Cela conduit à l'écriture :

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$$

(cela signifie évidemment  $\omega(x) = \omega_1(x)dx_1(x) + \dots + \omega_n(x)dx_n(x)$  pour tout  $x$  de  $U$ ).

Si  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^{\ell+1}$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$ , la différentielle  $df$  s'écrit ainsi :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

**Forme différentielle d'un espace euclidien**

Supposons que  $E$  soit un espace vectoriel euclidien et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

Nous avons vu que l'application  $\Phi : E \rightarrow E^*$  qui associe à tout vecteur la forme linéaire  $\varphi_x : h \mapsto (x | h)$  est un isomorphisme.

**Définition 9**

Si  $V$  est un champ de vecteurs de  $\mathcal{C}^\ell(U, E)$ , on appelle *cogradient* de  $V$  la forme différentielle  $\Phi \circ V$  de  $\mathcal{C}^\ell(U, E^*)$ .

Si le champ de vecteurs  $V$  s'écrit  $V_1 e_1 + \dots + V_n e_n$  dans la base  $\mathcal{B}$ , la forme différentielle  $\omega$  cogradiente de  $V$  est donnée par :

$$\omega = V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n.$$

On la note en général  $(V | dx)$ .

Si  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^{\ell+1}$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$ , on appelle *gradient* de  $f$ , et on note  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ , l'unique champ de vecteurs sur  $U$  tel que  $(\overrightarrow{\text{grad}} f | dx) = df$ .

On a donc dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n.$$

### 3.2 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Dans cette sous-section, on appelle *arc paramétré* toute application de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un segment de longueur non nulle de  $\mathbb{R}$  vers  $E$  et *arc orienté* toute classe d'équivalence d'arcs paramétrés à changement de paramètres positifs.

**Définition**

Soient  $\omega$  une forme différentielle continue sur  $U$  et  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$ .

L'application  $\gamma'$  est une application continue de  $[\alpha, \beta]$  vers  $E$ . Puisque l'application bilinéaire  $(\varphi, h) \mapsto \varphi(h)$  de  $E^* \times E$  vers  $\mathbb{R}$  est continue, l'application :

$$t \mapsto \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

est continue de  $[\alpha, \beta]$  vers  $\mathbb{R}$ . Cela conduit à la définition suivante :

**Définition 10**

On appelle *intégrale curviligne* de  $\omega$  sur l'arc paramétré  $\gamma$ , et l'on note  $\int_{\gamma} \omega$ , l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

Si les  $\gamma_i$  sont les composantes de  $\gamma$  et les  $\omega_i$  celles de  $\omega$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on a :

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \quad \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \omega_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + \omega_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)$$

On a donc :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha}^{\beta} (\omega_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + \omega_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)) dt.$$

**Changement de paramètre**

**Proposition 13**

Si  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  est un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $U$  et  $\varphi$  un difféomorphisme de  $[\mu, \nu]$  sur  $[\alpha, \beta]$ , on a alors :

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma \circ \varphi} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

suivant que  $\varphi$  est croissant ou décroissant.

**Démonstration** Notons  $\delta$  l'arc  $\gamma \circ \varphi : [\mu, \nu] \rightarrow U$ . On a bien sûr  $\delta'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)$  et :

$$\omega(\delta(s))(\delta'(s)) = \omega(\gamma(\varphi(s)))(\gamma'(\varphi(s)))\varphi'(s)$$

pour tout  $s$ .

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{\nu} \omega(\delta(s))(\delta'(s)) ds &= \int_{\mu}^{\nu} \omega(\gamma(\varphi(s)))(\gamma'(\varphi(s)))\varphi'(s) ds \\ &= \int_{\varphi(\mu)}^{\varphi(\nu)} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \end{aligned}$$

par le changement de variable  $t = \varphi(s)$ . Si  $\varphi$  est croissant, on a  $\varphi(\mu) = \alpha$  et  $\varphi(\nu) = \beta$  et  $\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega$ . Si  $\varphi$  est décroissant, on a  $\varphi(\mu) = \beta$  et  $\varphi(\nu) = \alpha$  et  $\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = - \int_{\gamma} \omega$   $\square$

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'un arc paramétré est invariante par changement de paramètre positif. Elle ne dépend que de l'arc géométrique orienté défini par  $\gamma$ .

### Propriétés

L'intégrale curviligne est linéaire par rapport à la forme différentielle.

#### Proposition 14

Si  $\omega$  et  $\pi$  sont deux formes différentielles continues sur  $U$  et  $\gamma$  un arc paramétré de  $U$ , on a alors pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\int_{\gamma} (\alpha\omega + \beta\pi) = \alpha \int_{\gamma} \omega + \beta \int_{\gamma} \pi$$

L'intégrale curviligne vérifie la relation de Chasles.

#### Proposition 15

Si  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  est un arc paramétré de classe  $C^1$  de  $U$ ,  $\zeta$  un élément de  $[\alpha, \beta]$  et  $\omega$  une forme différentielle continue sur  $U$ , on a alors :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[\alpha, \zeta]}} \omega + \int_{\gamma|_{[\zeta, \beta]}} \omega.$$



La relation de Chasles permet d'étendre immédiatement la notion d'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur un arc paramétré au cas des arcs paramétrés continus et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Si  $\gamma$  est un tel arc et  $(\alpha_i)_{i \in [0,p]}$  une subdivision adaptée, on posera :

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^p \int_{\gamma_i} \omega$$

où  $\gamma_i$  est la restriction de  $\gamma$  à  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$  pour tout  $i$  de  $[[1, p]]$  (on vérifie que cette somme est indépendante de la subdivision adaptée par simple routine).

**Proposition 16**

Si  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  et  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  on a alors :

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)).$$

**Démonstration** L'application  $g = f \circ \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  est, en effet, de classe  $\mathcal{C}^1$  et de dérivée :

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \quad g'(t) = df(\gamma(t))\gamma'(t).$$

On en déduit .

$$\int_{\gamma} df = \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g'(t) dt = g(\beta) - g(\alpha). \quad \square$$

On munit évidemment l'espace  $E^*$  des formes linéaires sur  $E$  de la norme subordonnée :

$$\|\varphi\| = \sup_{h \in D(0,1)} |\varphi(h)|.$$

On en déduit la formule de la moyenne suivante :

**Proposition 17**

Si  $\omega$  est une forme différentielle de  $\mathcal{C}^0(U, E^*)$  et  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$ , on a alors :

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq \sup_{x \in \text{Im } \gamma} \|\omega(x)\| \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Démonstration** On en effet :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma} \omega \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \right| \\
 &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |\omega(\gamma(t))(\gamma'(t))| dt \\
 &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \|\omega(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt \\
 &\leq \sup_{x \in \text{Im } \gamma} \|\omega(x)\| \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(t)\| dt. \quad \square
 \end{aligned}$$

Si  $E$  est un espace vectoriel euclidien muni de la norme euclidienne, l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(t)\| dt$$

est la longueur de l'arc  $\gamma$ .

**Circulation d'un champ de vecteurs**

Supposons que  $E$  soit un espace vectoriel euclidien et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

Soient  $V$  est un champ de vecteurs continue sur  $U$  et  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  est un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$ .

Si  $(V \mid dx)$  désigne la forme différentielle cogradiente de  $V$ , on a :

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \quad (V \mid dx)(\gamma(t))(\gamma'(t)) = (V(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)).$$

L'intégrale curviligne de  $(V \mid dx)$  le long de  $\gamma$  est donc égale à :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (V(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)) dt.$$

**Définition 11**

On appelle *circulation* du champ de vecteur  $V$  le long de  $\gamma$ , et l'on note

$\int_{\gamma} (V \mid dx)$ , l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (V(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)) dt.$$

Si les  $\gamma_i$  sont les composantes de  $\gamma$  et les  $V_i$  celles de  $V$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on a :

$$(V(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)) = V_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + V_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)$$

pour tout  $t$  et donc :

$$\int_{\gamma} (V \mid dx) = \int_{\alpha}^{\beta} \left( V_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + V_n(\gamma(t))\gamma'_n(t) \right) dt.$$

La circulation des champs de vecteurs possède évidemment les mêmes propriétés que l'intégrale curviligne des formes différentielles

**Proposition 18**

Si  $f$  est une application de classe  $C^1$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  et  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  un arc paramétré de classe  $C^1$  de  $U$ , on a alors :

$$\int_{\gamma} (\overrightarrow{\text{grad}} f \mid dx) = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)).$$

**Démonstration** On a, en effet, par définition

$$(\overrightarrow{\text{grad}} f \mid dx) = df. \quad \square$$

### 3.3 Formes exactes et fermées

#### Formes exactes

**Définition 12**

On dit qu'une forme différentielle  $\omega$  sur  $U$  est *exacte* s'il existe une application  $f$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $\omega = df$ . Une telle application s'appelle une *primitive* de  $\omega$ .

On note  $B^{\ell}(U)$  l'ensemble des formes différentielles exactes de classe  $C^{\ell}$  de  $U$ . C'est le sous-espace vectoriel image de l'application  $d : C^{\ell+1}(U, \mathbb{R}) \rightarrow C^{\ell}(U, E^*)$ .

Si  $f$  et  $g$  sont deux primitives de  $\omega$ , on a  $df = dg$  et, donc,  $d(g - f) = 0$ . En particulier, si  $U$  est connexe par arcs, deux primitives de  $\omega$  ne diffèrent que par une constante.

**Proposition 19**

Si  $f$  est une primitive de  $\omega$  et  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  un arc paramétré de  $U$ , on a :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)).$$

L'intégrale de  $\omega$  sur  $\gamma$  ne dépend donc que des extrémités  $\gamma(\alpha)$  et  $\gamma(\beta)$  de  $\gamma$ . Elle est en particulier nulle lorsque  $\gamma$  est un arc fermé (de mêmes extrémités).

Lorsque  $U$  est connexe par arcs, on retrouve alors la valeur de  $f$  en tout point  $x$  en fonction de sa valeur en un point fixé  $x_0$  de  $U$  par la relation :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{\gamma} \omega$$

où  $\gamma$  est un arc quelconque de  $U$  allant de  $x_0$  à  $x$ .

Si la forme différentielle  $\omega$  s'écrit  $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$  dans la base  $\mathcal{B}$ , une application  $f$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est une primitive de  $\omega$  si l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$$

ou :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \omega_i.$$

*Exemple* Considérons la forme différentielle  $\omega = e^y dx + (xe^y - 2y) dy$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Une application  $f(x, y)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur cet espace est une primitive de  $\omega$  si l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - 2y.$$

La première relation entraîne par intégration :

$$f(x, y) - f(0, y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dt = \int_0^x e^y dt = xe^y.$$

Cela permet d'écrire  $f(x, y) = xe^y + g(y)$  où  $g(y) = f(0, y)$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit par dérivation suivant  $y$  :

$$g'(y) + xe^y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y - 2y.$$

Il vient alors  $g'(y) = -2y$  et  $g(y) = -y^2 + \alpha$ . La forme différentielle  $\omega$  est donc exacte et ses primitives sont de la forme :

$$f(x, y) = xe^y - y^2 + \alpha$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Lorsque l'espace est euclidien, on dit qu'un champ de vecteur  $V$  de  $\mathcal{C}(U, E)$  *dérive d'un potentiel* s'il existe une application  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $\overrightarrow{\text{grad}} f = V$ . Toute application  $f$  vérifiant la relation  $\text{grad } f = V$  s'appelle alors un *potentiel* de  $V$ . Cela équivaut à dire c'est-à-dire que la forme différentielle  $(V \mid dx)$  est exacte et que  $f$  en est une primitive.

**Formes fermées**

Dans ce qui suit,  $\mathcal{B}$  désigne une base de  $E$ .

**Définition 13**

On dit que la forme différentielle  $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est *fermée* si elle vérifie :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}.$$

On vérifie simplement par calcul que ces conditions ne dépendent pas de la base  $\mathcal{B}$ .

On note  $Z^k(U)$  l'ensemble des formes différentielles fermées de classe  $\mathcal{C}^k$ . Il s'agit évidemment d'un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^k(U, E^*)$ .

**Proposition 20**

Toute forme différentielle exacte de  $\mathcal{C}^1(U, E^*)$  est fermée.

**Démonstration** Si  $\omega$  de  $\mathcal{C}^1(U, E^*)$  est exacte, il existe une application  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  telle que l'on ait  $df = \omega$ . On en déduit pour tout  $(i, j)$  :

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

La proposition provient donc du théorème de Schwarz □

Ainsi  $B^k(U)$  est un sous-espace de  $Z^k(U)$  pour tout  $U$ .

La réciproque à la proposition précédente est fautive en général.

**Exemple** La forme différentielle « angle » :

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est fermée puisque l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Elle n'est pas exacte sur cet ouvert puisque son intégrale sur le cercle :

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

égale à :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t \cos' t + \cos t \sin' t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi,$$

n'est pas nulle.

**Théorème de Poincaré**

L'un des phénomènes les plus profonds de la géométrie différentielle est que la réciproque de la proposition précédente dépend, en fait, des propriétés topologiques de l'ouvert  $U$ .

**Définition 14**

On dit que l'ouvert  $U$  est étoilé par rapport au point  $x_0$  de  $U$  si le segment  $[x_0, x]$  est contenu dans  $U$  pour tout  $x$  de  $U$ .

Un ouvert étoilé est évidemment connexe par arcs. La réciproque est fautive comme le montre l'exemple de l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Un ouvert convexe est étoilé par rapport à tout ses points.

**Théorème 21 (Poincaré)**

Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé est exacte.

**Démonstration** Soit  $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$  un forme différentielle fermée sur l'ouvert  $U$  étoilé par rapport à  $a$ .

Pour tout  $x$  de  $U$ , l'arc  $\gamma_x : t \in [0, 1] \mapsto a + t(x - a)$  a son image contenue dans  $U$ . On pose alors :

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \omega(a + t(x - a))(x - a) dt.$$

Puisque l'application :

$$g(x, t) = \omega(a + t(x - a))(x - a) = \sum_{j=1}^n \omega_j(a + t(x - a))(x_j - a_j)$$

de  $U \times [0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  est de classe  $C^1$ , la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$  est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, t) dt.$$

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x, t) = \sum_{j=1}^n t \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(a + t(x - a))(x_j - a_j) + \omega_i(a + t(x - a)).$$

De la même façon, la dérivée de l'application  $h_i(t) = t\omega_i(a + t(x - a))$  est donnée par :

$$h'_i(t) = \sum_{j=1}^n t \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} (a + t(x - a))(x_j - a_j) + \omega_i(a + t(x - a)).$$

Puisque  $\omega$  est fermée, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} (x, t) = h'_i(t)$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} (x) = \int_0^1 h'_i(t) dt = h_i(1) - h_i(0) = \omega_i(x).$$

Puisque les dérivées partielles de  $f$  sont égales aux applications continues  $\omega_i$ , l'application  $f$  est de classe  $C^1$  et est une primitive de  $\omega$ . □

**Exemple** Nous avons vu que la forme différentielle « angle » :

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

est fermée mais non exacte sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Elle est exacte sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$  étoilé par rapport à  $(1, 0)$  et sa primitive nulle en  $(1, 0)$  sur cet ouvert est :

$$\theta(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

comme on l'a vu à propos des coordonnées polaires.

### Applications à l'analyse complexe

On appelle formes différentielles à valeurs complexes de classe  $C^\ell$  sur un ouvert  $U$  de  $E$  tout élément de  $C^\ell(U, E_{\mathbb{C}}^*)$  où  $E_{\mathbb{C}}^* = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{C})$  est le dual complexe de  $E$ . Une forme différentielle  $\omega$  de  $C^\ell(U, E_{\mathbb{C}}^*)$  s'écrit évidemment dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  de façon unique sous la forme :

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$$

avec  $\omega_i \in C^\ell(U, \mathbb{C})$ . Tout ce que nous venons de faire se transpose alors immédiatement à ce cas.

Nous supposons dans ce qui suit que  $E$  est égal à  $\mathbb{C}$  et nous noterons  $dz$  l'application linéaire  $h \mapsto h$  de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ . Si  $f$  est une application continue d'un ouvert  $U$  vers  $\mathbb{C}$ , la forme différentielle complexe  $f(z)dz$  associée à tout point  $z$  de  $U$  la forme linéaire :

$$\forall h \in \mathbb{C}, \quad h \longmapsto f(z)h.$$

Elle s'écrit en coordonnées réelles :

$$f(z)dz = f dx + i f dy.$$

Si  $\gamma$  est un arc paramétré, on appelle intégrale de  $f$  sur  $\gamma$  l'intégrale curviligne :

$$\int_{\gamma} f(z)dz.$$

On obtient alors les points suivants :

- Une application  $f$  de classe  $C^1$  d'un ouvert de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  est alors holomorphe si, et seulement si, la forme différentielle  $f(z)dz$  est fermée.  
En effet, la forme différentielle  $f(z)dx + i f(z)dy$  est fermée si, et seulement si, elle vérifie :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(if)}{\partial x},$$

c'est-à-dire si  $f$  vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

- Si  $f$  est une application holomorphe sur un ouvert étoilé de  $\mathbb{C}$ , alors l'intégrale :

$$\int_{\gamma} f(z)dz$$

ne dépend que des extrémités de  $\gamma$ .

Le théorème de Poincaré montre, en effet, que  $f(z)dz$  possède une primitive  $F$ . On a alors :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(b) - F(a)$$

où  $a$  est l'origine et  $b$  l'extrémité de  $\gamma$ .

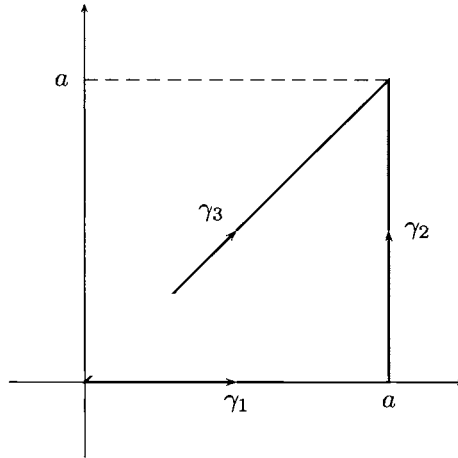
On utilise fréquemment ces propriétés pour calculer des intégrales.

**Exemple** L'application  $f : z \mapsto e^{-z^2}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  puisque l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2ze^{-z^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -2ize^{-z^2}.$$

Considérons alors  $a < 0$  et les arcs  $\gamma_1 : t \in [0, a] \mapsto (t, 0)$ ,  $\gamma_2 : t \in [0, a] \mapsto (a, t)$  et  $\gamma_3 : t \in [0, a] \mapsto (t, t)$  de  $\mathbb{C}$ .





Puisque  $f(z)dz$  est exacte sur  $\mathbb{C}$ , on a :

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

- L'intégrale  $\int_{\gamma_1} f(z)dz$  est égale à  $\int_0^a e^{-t^2} dt$ . Elle converge en l'infini vers :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

- L'intégrale  $\int_{\gamma_2} f(z)dz$  est égale à  $\int_0^a e^{-(a+it)^2} dt$ . La majoration :

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq \int_0^a e^{t^2-a^2} dt \leq \left( a - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) e^{(a-\frac{1}{\sqrt{a}})^2} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$

obtenue en coupant l'intégrale suivant le point  $a - \frac{1}{\sqrt{a}}$  montre qu'elle converge vers 0 en l'infini.

- L'intégrale  $\int_{\gamma_3} f(z)dz$  est égale à  $\int_0^a e^{-(1+i)^2 t^2} (1+i) dt$ , soit à :

$$\int_0^a e^{-2it^2} (1+i) dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{a\sqrt{2}} e^{-it^2} dt.$$

Finalement, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt$  est improprement convergente et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1-i).$$

On en déduit les valeurs des intégrales improprement convergentes de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**Théorème 22 (d'Alembert)**

Tout polynôme à coefficients complexes de degré supérieur ou égal à 1 possède une racine.

**Démonstration** Si  $P(X)$  polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n$  supérieur ou égal à 1 sans racine dans  $\mathbb{C}$ , l'application  $f : z \mapsto \frac{P'(z)}{P(z)}$  est une application holomorphe de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  puisque l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{PP'' - (P')^2}{P^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{PP'' - (P')^2}{P^2}.$$

Considérons pour tout  $r$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , le cercle  $C_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$ . D'après ce qui précède, pour tout  $r > 0$ , on a :

$$\int_{C_r} f(z) dz = 0.$$

D'un autre côté, puisque  $zf(z)$  tend vers  $n$  en l'infini, il existe  $R_0 > 0$  tel que l'on ait :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \geq R_0 \implies \left| f(z) - \frac{n}{z} \right| \leq \frac{1}{2z}.$$

Cela entraîne :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{R_0}} f(z) dz - \int_{C_{R_0}} \frac{n}{z} dz \right| &= \left| \int_{C_{R_0}} \left( f(z) - \frac{n}{z} \right) dz \right| \\ &\leq 2\pi R_0 \sup_{z \in C_{R_0}} \left\| f(z) - \frac{n}{z} \right\| \\ &\leq 2\pi R_0 \frac{1}{2R_0} \\ &\leq \pi. \end{aligned}$$

En utilisant  $\int_{C_{R_0}} \frac{n}{z} dz = 2i\pi n$ , on obtient la relation absurde :

$$n \leq \frac{1}{2}.$$

□

## EXERCICES

### Difféomorphismes

1. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même définie par :

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (2x^2 + y + z, x^2 - y + z, x^2 - y - z).$$

Trouver des ouverts maximaux (pour l'inclusion)  $U$  tels que  $f$  soit un difféomorphisme de  $U$  sur son image.

2. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (X, Y)$  telle que :

$$X + iY = n(x + iy) - (x + iy)^n.$$

Montrer que  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme du disque :

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$$

sur son image.

3. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$f(x, y) = (u, v) = \left( x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}, (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) \right).$$

1. Étudier la différentiabilité de  $f$ . Calculer le jacobien de  $f$  en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
2. L'application  $f$  est-elle inversible ? Déterminer et construire  $f(\mathbb{R}^2)$ .

### 4. Applications propres

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^m$  dans lui-même. On dit que  $f$  est *propre* si  $f$  est continue et si l'image réciproque d'un compact est compacte.

1. Montrer que cela équivaut à dire que :

$$\forall \beta > 0, \exists \alpha \text{ tel que, } \forall x \in \mathbb{R}^m, \|x\| \geq \alpha \implies \|f(x)\| > \beta.$$

(On dit parfois  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = +\infty$ .)

2. Montrer que si  $f$  est une application (continue) propre dont l'image  $f(\mathbb{R}^m)$  est un ouvert  $V$ , alors  $V = \mathbb{R}^m$ , autrement dit  $f$  est surjective.
3. Montrer qu'une bijection propre de  $\mathbb{R}^m$  sur lui-même est un homéomorphisme.

5. 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels  $a$  et  $b$  pour que  $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x + a \sin y, y + b \sin x)$  soit un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur son image.
2. Dans ce cas, montrer à l'aide de l'exercice 4 que  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier.
6. On utilisera les notations et les résultats de l'exercice 4.
1. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^m$  dans lui-même telle que  $f - \text{Id}$  soit contractante. Montrer que  $f$  est propre et injective.
2. En déduire que si  $f$  est une application de  $\mathbb{R}^m$  dans lui-même telle que pour tout  $p \in \mathbb{R}^m$  et tout  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|d(f - \text{Id})_{p,x}\| \leq k\|x\|$ , pour une constante  $k \in [0, 1[$  (indépendante de  $x$  et  $p$ ), alors  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphe de  $\mathbb{R}^m$  sur lui-même (en particulier surjectif).
3. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \lambda < 1$ . Montrer que l'application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $(x, y) \mapsto (x + f(y), y + f(x))$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## Extrema

### 7. Lemme de Rolle

Soit  $A$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  d'intérieur non vide, et  $f$  une application de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  continue sur  $A$  différentiable sur l'intérieur de  $A$  noté  $\overset{\circ}{A}$ , et constante sur la frontière de  $A$ . Montrer qu'il existe  $x \in \overset{\circ}{A}$  tel que  $df_x = 0$ .

8. 1. Extrema de  $f(x, y) = (x - y)^3 - 6xy$  dans le domaine  $T$  défini par  $-1 \leq x \leq y \leq 1$ .
2. Extrema locaux et globaux de  $g(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
9. Trouver les extrema de la fonction  $(x, y) \mapsto f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$ .
10. Soit  $f$  l'application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2y^3(x + 2y - 2)$ .
1. Donner les extrema de  $f$ .
2. Soit  $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2y^3 = 1 \text{ et } x \geq 0\}$ . La fonction  $f$  est-elle bornée sur  $\mathcal{E}$ ? Admet-elle des extrema sur  $\mathcal{E}$ ?

11. Etudier les extrema de :

1.  $f(x, y) = e^{x+y} + e^{3-x} + e^{3-y}$  sur  $\mathbb{R}^2$ ;
2.  $g(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$  sur  $\mathbb{R}^2$  ;
3.  $h(x, y, z) = x^2/2 - xyz + x - z$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

12. Soit  $f(x, y) = \frac{x^2(1-y^2)^3}{(x^2+1-2xy)^2}$ . Déterminer l'ensemble de définition de  $f$   
 Montrer que la restriction de  $f$  à  $U = \mathbb{R} \times ]-1, 1[$  admet un prolongement continu  $\bar{f}$  à  $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$  Déterminer  $\sup_{(x,y) \in U} f(x, y)$ .

13. On considère l'ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  et les points  $A(-a, 0)$  et  $B(a, 0)$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux points de l'ellipse d'ordonnée positive; trouver  $P$  et  $Q$  pour que l'aire du quadrilatère  $(A, B, P, Q)$  soit maximum.

14. Déterminer le maximum de  $|\cos(z)|$  lorsque  $z$  décrit dans  $\mathbb{C}$  le disque unité de centre 0.

15. Trouver les extrema locaux et globaux de la fonction trace sur le groupe orthogonal (réel). *Indication : Réduire les matrices . . .*

16. Déterminer la borne inférieure des aires des triangles circonscrits à une ellipse donnée.

17. 1. Si  $f$  est convexe de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ , tout minimum local de  $f$  est un minimum global. *Indication : On utilisera l'application  $t \mapsto f(p + t(q - p))$ .*  
 2. On suppose  $f$  strictement convexe. Montrer que si  $f$  admet un minimum local, il est unique. Montrer que, dans ce cas  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .

18. Soit  $ABC$  un triangle dont les trois angles sont aigus. Soit  $X \in [A, B]$ ,  $Y \in [B, C]$ ,  $Z \in [C, A]$ . Montrer qu'il existe une configuration telle que le périmètre du triangle  $XYZ$  soit minimal, et la caractériser.

19. Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des réels strictement positifs avec

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

1. Montrer que  $\prod_{i=1}^n (x_i)^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ . Quand a-t-on égalité ?

2. Quelles doivent être les dimensions d'une boîte en forme de parallépipède d'aire latérale fixée pour que le volume soit maximum ?

20. Déterminer la borne inférieure des valeurs prises sur  $U = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$  par la fonction  $f(x, y) = x^y + y^x$ . *Indication : Pour  $0 < x < 1$  et  $0 < y < 1$  examiner le minimum de  $f$  sur la courbe  $\Gamma_\lambda : x^y = e^\lambda$ , montrer qu'il est atteint pour  $\ln(x) \ln(y) = 1$ . Puis montrer que sur la courbe  $\ln x \ln y = 1$ ,  $f$  prend des valeurs supérieures à 1, en paramétrant cette courbe par  $u = -\ln x$ .*

21. Montrer que la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y^2(2 - y^2) = x^2(x - 2)(x - 1)$  est bornée. Comment calculer la distance maximale de  $(0, 0)$  à un point de cette courbe ?

22. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$ . Trouver  $\sup_E f$  où :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

23. 1. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  polynomiale dont tous les monômes sont de degré au moins égal à 3, et admettant au moins un monôme de degré 3 exactement. Montrer que  $(0, 0)$  n'est pas extremum local de  $f$ .

2. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  polynomiale, de la forme :

$$f(x, y) = x^2 + R(x, y),$$

où tous les monômes de  $R(x, y)$  sont de degré au moins égal à 3. Ainsi,  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$ . Le fait que  $(0, 0)$  soit un extremum local dépend-il seulement de la partie homogène de plus bas degré de  $R(x, y)$  ?

24. Soit  $ABC$  un triangle. Déterminer le maximum du produit  $f(M)$  des distances d'un point  $M$  aux côtés du triangle, lorsque  $M$  est dans l'enveloppe convexe du triangle (i.e. décrit le triangle plein).

25. Déterminer le minimum de  $f(M) = AM + BM - OM$ , où  $O$  est milieu du segment  $[A, B]$ , et  $M$  est dans un plan contenant  $A$  et  $B$ . On supposera que  $AB = 2$ .

## Formes différentielles

### 26. Formes différentielles non exactes sur $\mathbb{R}^2 \setminus O$

Soit  $F$  l'espace vectoriel des formes différentielles de classe  $C^1$  fermées sur  $W = \mathbb{R}^2 \setminus O$  (où  $O = (0, 0)$ ), et  $E$  son sous-espace des formes exactes, i.e. des formes  $\omega$  qui sont la différentielle d'une fonction de classe  $C^1$  sur  $W$ . On se propose de montrer que  $E$  est de codimension 1 dans  $F$ . Il s'agit donc de prouver qu'il existe une forme différentielle  $\omega_0$  fermée sur  $W$  telle que, pour toute forme différentielle fermée  $\omega$  sur  $W$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\omega - \lambda\omega_0$  soit la différentielle d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $W$ .

Posons d'emblée  $\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ . Soit  $U = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ , et  $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ , dont la réunion est  $W$ . Soit  $\omega \in F$ .

1. Montrer qu'il existe  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $df = \omega|_U$ , et il existe  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $dg = \omega|_V$ . Montrer que  $f|_{U \cap V} - g|_{U \cap V}$  est constante sur chacun des deux demi-plans ouverts dont  $U \cap V$  est la réunion disjointe.

En déduire que, lorsque  $(a, b)$  décrit  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$  le nombre

$$f(a, b) - g(a, b) - f(a, -b) + g(a, -b)$$

ne dépend pas du choix de  $f, g, a$  et  $b$ , mais seulement de  $\omega$ . On le notera  $\oint \omega$ .

2. Montrer que  $\omega \mapsto \oint \omega$  est linéaire sur  $F$  et que son noyau est  $E$ .
3. Calculer  $\oint \omega_0$  et conclure.

### 27 Montrer en suivant la démarche de l'exercice précédent que toute forme différentielle fermée sur $\mathbb{R}^3$ privé d'un point est exacte. On pourra considérer les ouverts $U = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\} \times \{0\})$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \{0\})$





## Chapitre 23

# Équations différentielles : cas linéaire

Dans ce chapitre,  $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé réel ou complexe de dimension finie non nulle  $n$  et  $I$  un intervalle ayant au moins deux éléments de  $\mathbb{R}$ .

L'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  est évidemment munie de la norme subordonnée  $\|\cdot\|$ . Si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  et  $x$  un vecteur de  $E$ , on notera fréquemment :

$$u \cdot x,$$

au lieu de  $u(x)$ , la valeur de  $u$  en  $x$ . Par conséquent, si  $a$  est une application de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $\varphi$  une application de  $I$  dans  $E$ , on notera :

$$a \cdot \varphi,$$

l'application  $t \mapsto a(t) \cdot \varphi(t)$  de  $I$  vers  $E$  ; on évite aussi l'expression peu esthétique  $a(t)(\varphi(t))$ . Nous avons vu dans le chapitre consacré aux applications à valeurs vectorielles que  $a \cdot \varphi$  est dérivable, respectivement de classe  $\mathcal{C}^k$ , lorsque  $a$  et  $\varphi$  le sont et que l'on a alors :

$$(a \cdot \varphi)' = a' \cdot \varphi + a \cdot \varphi'.$$

► **Attention** Tous les intervalles considérés dans ce chapitre ont au moins deux éléments.

# 1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

## 1.1 Définitions et propriétés élémentaires

### Définitions

#### Définition 1

Si  $a$  une application continue de l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{L}(E)$  et  $b$  une application continue de  $I$  vers  $E$ , on appelle *solution* de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$x' = a \cdot x + b \quad (\text{E})$$

toute application dérivable  $\varphi$  de  $I$  vers  $E$  vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t).$$

On notera  $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$  l'équation (E) si l'on veut préciser le nom de la variable libre.

Les applications  $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$  et  $b \in \mathcal{C}(I, E)$  s'appellent respectivement le *coefficient* et le *second membre* de (E).

On dit que l'équation (E) est à *coefficient constant* si  $a$  est une application constante et qu'elle est *homogène* ou sans second membre si  $b = 0$ .

On appelle *équation homogène* associée à (E), l'équation :

$$x' = a \cdot x. \quad (\text{Eh})$$

L'équation (E) s'appelle alors l'équation *complète*.

On fera attention à ce qu'une solution de l'équation (E) est définie sur  $I$  tout entier. Une application d'un sous-intervalle  $J \subset I$  vérifiant l'équation précédente sur  $J$  sera appelée, en insistant, une solution définie sur  $J$ .

### Régularité des solutions

#### Proposition 1

Toute solution de (E) est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  lorsque  $a$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Démonstration** La relation  $\varphi' = a \cdot \varphi + b$  montre que  $\varphi'$  est continue et  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Le deuxième point s'obtient par une récurrence immédiate.  $\square$

## Condition de Cauchy

### Définition 2

On dit qu'une solution  $\varphi$  de (E) vérifie la *condition de Cauchy* (ou la *condition initiale*)  $(t_0, x_0) \in I \times E$  si on a :

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

On appelle *problème de Cauchy* en  $(t_0, x_0)$  l'étude des solutions de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ .

### Propriétés linéaires

L'application : 
$$L : \mathcal{C}^1(I, E) \rightarrow \mathcal{C}^0(I, E)$$
  

$$\varphi \mapsto \varphi' - a \cdot \varphi$$

est une application linéaire. L'équation (E) sur  $I$  est équivalente à l'équation linéaire :

$$L(x) = b$$

et l'équation (Eh) équivalente à l'équation homogène :

$$L(x) = 0.$$

Les propriétés générales des équations linéaires entraînent les deux corollaires suivants :

### Corollaire 2

- L'ensemble  $\mathcal{S}_0(I)$  des solutions sur  $I$  de l'équation homogène (Eh) est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, E)$ .
- L'ensemble  $\mathcal{S}(I)$  des solutions sur  $I$  de l'équation de (E) est soit vide soit un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, E)$  de direction  $\mathcal{S}_0(I)$ .

**Remarque** on verra que  $\mathcal{S}(I)$  n'est jamais vide.

Si  $\psi_p$  est une solution de (E), on a donc :

$$\mathcal{S}(I) = \psi_p + \mathcal{S}_0(I).$$

On dit que la solution générale de l'équation complète (E) est la somme de la solution particulière  $\psi_p$  et de la solution générale de l'équation homogène (Eh).

### Corollaire 3 (Principe de superposition)

Soient  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{K}^2$  et  $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^0(I, E)^2$  tels que  $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ . Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des solutions des équations :

$$x' = a \cdot x + b_1 \quad \text{et} \quad x' = a \cdot x + b_2,$$

la fonction  $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$  est une solution de (E).

**Système différentiel linéaire du premier ordre**

On appelle *système différentiel linéaire du premier ordre* toute équation différentielle linéaire du premier ordre sur un espace numérique  $\mathbb{K}^n$ .

Un tel système est de la forme :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad (\text{Sys})$$

où les  $a_{i,j}$ , appelées *coefficients*, et les  $b_i$ , appelées *seconds membres*, sont des applications continues d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{K}$ .

En considérant que  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$  et  $B = (b_i)_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket}$  sont des applications continues de  $I$  vers, respectivement,  $M_n(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{K}^n$ , on peut évidemment écrire ce système sous la forme d'une équation différentielle matricielle :

$$X' = AX + B.$$

En fait, un système différentiel linéaire du premier ordre n'est que l'expression analytique d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dans une base de  $E$ . On utilisera pratiquement cette remarque lorsque l'on étudie une équation différentielle linéaire en recherchant une base dans laquelle l'équation s'écrit sous la forme du système le plus simple.

*Exemple* Supposons que  $E$  soit un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et considérons l'équation différentielle :

$$x'(t) = v \wedge x(t) + 2tv \quad (\text{E})$$

où  $v$  un vecteur non nul de  $E$ .

L'expression analytique de (E) dans une base orthonormée quelconque de  $E$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2pt \\ 2qt \\ 2rt \end{pmatrix}$$

si  $v = pe_1 + qe_2 + re_3$ . Dans ce qui suit, nous choisirons une base adaptée géométriquement à (E) et fournissant le système plus simple possible.

- Dans la base orthonormée  $(i, j, k)$  telle que  $v = \omega k$  avec  $\omega = \|v\|$ , l'expression analytique de (E) est le système différentiel sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega t \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- On étudie le système (\*) sur  $\mathbb{C}$  en posant  $y_1 = x_1 + ix_2$ ,  $y_2 = x_1 - ix_2$  et  $y_3 = x_3$ . On obtient alors le système :

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega t \end{pmatrix}$$

dont les solutions sont  $y_1(t) = \lambda e^{i\omega t}$ ,  $y_2(t) = \mu e^{-i\omega t}$  et  $y_3(t) = \omega t^2 + \nu$  avec  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ . Par changement de variables, on voit alors que les solutions complexes de (\*) sont données par :

$$x_1(t) = \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t, \quad x_2(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t, \quad x_3(t) = \omega t^2 + \gamma$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ .

- Il est alors immédiat que les solutions réelles de (\*) sont les applications de composantes :

$$x_1(t) = \alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t, \quad x_2(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t, \quad x_3(t) = \omega t^2 + \gamma \quad (\text{Sol})$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ . On peut d'ailleurs retrouver ce résultat en remarquant que  $x_1$  et  $x_2$ , vérifiant  $x_1' = -\omega x_2$  et  $x_2' = \omega x_1$ , sont solutions de l'équation du second ordre à coefficients constants :

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

- La solution de composantes (Sol) ci-dessus est la seule solution valant  $(\alpha, \beta, \gamma)$  en 0. On en déduit que l'unique solution de (E) valant  $x_0 = \alpha i + \beta j + \gamma k$  en 0 est l'application :

$$t \mapsto x(t) = (\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t) i + (\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t) j + (\omega t^2 + \gamma) k.$$

Géométriquement, il s'agit de l'application :

$$t \mapsto x(t) = \mathcal{V}(\omega t, \omega t^2, k, )x_0,$$

où  $\mathcal{V}(\omega t, \omega t^2, k, )$  est le vissage d'angle  $\omega t$  et de déplacement  $\omega t^2 k$ .

## 1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette sous-section,  $a$  et  $b$  désignent des applications continues d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{L}(E)$  et  $E$  et :

$$x' = a \cdot x + b \tag{E}$$

l'équation différentielle linéaire du premier ordre associée.

L'objectif est de prouver le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité des solutions de (E) vérifiant une condition initiale donnée.

Ce théorème a été démontré dans le cours de première année pour les équations différentielles linéaires scalaires ( $E = \mathbf{K}$ ) du premier ordre en utilisant la forme explicite des solutions.

Il n'est pas possible de procéder de cette façon ici puisque l'on ne sait pas en général calculer par *quadratures* (c'est-à-dire en termes de primitives de fonctions élémentaires) les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre générale.

La démonstration qui suit repose sur la méthode des approximations successives de Picard.

Soit  $(t_0, x_0) \in I \times E$ .

### Équation intégrale

#### Proposition 4

Une application  $\varphi \in \mathcal{C}(I, E)$  est une solution de (E) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$  si, et seulement si, elle satisfait l'équation intégrale :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s) ds + \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi(s) ds.$$

**Démonstration** Si  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$  vérifie  $\varphi' = a \cdot \varphi + b$  et  $\varphi(t_0) = x_0$ , on obtient par intégration :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)) ds$$

La réciproque est immédiate. □

### Série perturbative

Notons  $\varphi_0$  l'application de  $\mathcal{C}(I, E)$  définie par :

$$\forall t \in I, \quad \varphi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s) ds.$$

Soit  $\psi$  une solution de (E) telle que  $\psi(t_0) = x_0$ .

Nous avons vu que  $\psi$  satisfait la relation intégrale :

$$\forall t \in I, \quad \psi(t) = \varphi_0(t) + \int_{t_0}^t a(s) \cdot \psi(s) ds.$$

Par substitution elle vérifie les développements perturbatifs d'ordre 1 :

$$\forall t \in I, \quad \psi(t) = \varphi_0(t) + \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi_0(s) ds + \int_{t_0}^t a(s) \cdot \psi(s) ds$$

et d'ordre  $n$  :

$$\forall t \in I, \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^n \varphi_n(t) + \rho_{n+1}(t)$$

avec :

$$\varphi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s) ds \quad \text{et} \quad \varphi_n(t) = \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi_{n-1}(s) ds \quad (P)$$

ainsi que :

$$\rho_1(t) = \int_{t_0}^t a(s) \cdot \psi(s) ds \quad \text{et} \quad \rho_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t a(s) \cdot \rho_n(s) ds \quad (R)$$

pour tout  $t \in I$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 5**

La série  $\sum_n \varphi_n$  où la suite  $(\varphi_n)$  est définie par les relations (P) converge normalement sur les segment de  $I$  et sa somme  $\varphi$  est une solution de (E) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$ .

**Démonstration** Si  $S$  est un segment de  $I$ , nous noterons  $\|f\|_S$  la norme de la convergence uniforme d'une application continue  $f$  de  $S$  vers un espace vectoriel normé. En particulier, nous noterons  $\|a\|_S$  la norme de la convergence uniforme de la restriction à  $S$  de l'application  $a$  de  $I$  vers l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$  muni de la norme subordonnée.

Soit  $S$  un segment de  $I$  de longueur  $\ell(S)$  contenant  $t_0$ . Montrons tout d'abord par récurrence que l'on a pour tout  $n$  :

$$\forall t \in S, \quad \|\varphi_n(t)\| \leq \frac{1}{n!} |t - t_0|^n \|a\|_S^n \|\varphi_0\|_S.$$

C'est évident pour  $n = 0$ . Si l'inégalité est vérifiée à l'ordre  $n - 1$ , il vient pour tout  $t \in S$  :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|a(s) \cdot \varphi_{n-1}(s)\| ds \right| \\ &\leq \|a\|_S^n \|\varphi_0\|_S \cdot \left| \int_{t_0}^t \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n - 1)!} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} |t - t_0|^n \|a\|_S^n \|\varphi_0\|_S \end{aligned}$$

L'inégalité :

$$\|\varphi_n\|_S \leq \frac{1}{n!} \ell(S)^n \|a\|_S^n \|\varphi_0\|_S$$

et la convergence de la série exponentielle montre alors que la série  $\sum_n \varphi_n$  converge normalement sur  $S$ .

Puisque la série  $\sum_n \varphi_n$  converge normalement sur tous les segments  $S$  de  $I$  (la condition  $t_0 \in S$  n'est pas une restriction), elle converge absolument en tout point de  $I$  et sa somme  $\varphi$  est une application continue de  $I$  vers  $E$ . Par intégration termes à termes sur le segment  $[t_0, t]$ , on a :

$$\varphi_0(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi_n(s) ds \right) = \varphi_0(t) + \int_{t_0}^t a(s) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(s) \right) ds$$

pour tout  $t \in I$ . L'application  $\varphi \in \mathcal{C}(I, E)$  vérifie l'équation intégrale :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s) ds + \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi(s) ds$$

et est, par conséquent, une solution de (E) telle que  $\varphi(t_0) = x_0$ . □

**Proposition 6**

L'application  $\varphi = \sum_n \varphi_n$  de la proposition précédente est la seule solution de (E) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$ .

**Démonstration** Si  $\psi$  est une autre solution de (E) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$ , on a :

$$\psi = \sum_{k=0}^n \varphi_k + \rho_{n+1}$$

où la suite  $(\rho_n)$  est définie par les relations (R). On montre alors par récurrence comme dans la démonstration précédente que pour tout segment  $S$  de  $I$  contenant  $t_0$ , on a :

$$\forall t \in S, \quad \|\rho_n(t)\| \leq \frac{1}{n!} |t - t_0|^n \|a\|_S^n \|\psi\|_S$$

pour tout  $n$ .

La suite  $(\rho_n)$  converge donc normalement vers 0 sur tout segment de  $I$  et  $\psi = \varphi$ . □



### Théorème de Cauchy-Lipschitz

Les deux propositions précédentes conduisent au théorème fondamental suivant :

#### Théorème 7 (Cauchy-Lipschitz)

Pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times E$ , il existe une et une seule solution  $\varphi$  de l'équation (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ .

#### Corollaire 8

Soit  $J$  un sous-intervalle de  $I$ . Toute solution de (E) définie sur  $J$  est la restriction d'une unique solution définie sur  $I$ .

**Démonstration** Soient  $\varphi$  une solution de (E) définie sur  $J$  et  $t_0 \in J$ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'il existe une solution  $\psi$  de (E) définie sur  $I$  et vérifiant  $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ . Il prouve aussi que les applications  $\varphi$  et  $\psi|_J$ , solutions de (E) sur  $J$  vérifiant la même condition de Cauchy, sont égales. Ainsi  $\varphi$  est la restriction à  $J$  de la solution  $\psi$ .

Si  $\chi$  est une autre solution de (E) vérifiant  $\chi|_J = \varphi$ , on a  $\chi(t_0) = \psi(t_0)$  et  $\chi = \psi$  par Cauchy-Lipschitz. □

Cette proposition justifie le fait que l'on n'ait considéré *a priori* que des solutions de (E) définies sur  $I$ . Nous verrons que cela n'est pas possible en général pour les équations différentielles non linéaires.

#### Exemples

1. La seule solution de l'équation homogène (Eh) nulle en  $t_0$  est la solution nulle puisque par unicité on a  $\varphi = 0$  si, et seulement si,  $\varphi(t_0) = 0$ .
2. Soient  $X' = AX + B$  un système réel c'est-à-dire avec  $A = (a_{i,j})$  appartenant à  $\mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{R}))$  et  $B = (b_i)$  à  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ , et  $t_0 \in I$ . Une solution  $\varphi$  est réelle si, et seulement si,  $\varphi(t_0)$  est réel puisque l'on a  $\varphi = \overline{\varphi}$  si, et seulement si,  $\varphi(t_0) = \overline{\varphi(t_0)}$ .

#### Comparaison de solutions

On peut préciser le théorème d'unicité en fournissant une majoration explicite de l'écart de deux solutions vérifiant des conditions initiales données.

**Lemme**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in I$ . Si les applications continues  $f$  et  $g$  de  $I$  vers  $\mathbb{R}_+$  vérifient :

$$\forall t \in I, \quad f(t) \leq k + \left| \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds \right|$$

où  $k \in \mathbb{R}_+$ , alors on a :

$$\forall t \in I, \quad f(t) \leq k \exp \left| \int_{t_0}^t g(s)ds \right|.$$

**Démonstration** L'application positive définie par :

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[, \quad \ell(t) = \left( k + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds \right) \exp \left( - \int_{t_0}^t g(s)ds \right)$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie :

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[, \quad \ell'(t) = g(t) \left( f(t) \exp \left( - \int_{t_0}^t g(s)ds \right) - \ell(t) \right) \leq 0.$$

On en déduit  $\ell(t) \leq \ell(t_0) = k$  et par conséquent :

$$f(t) \leq \left( k + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds \right) = \ell(t) \exp \left( \int_{t_0}^t g(s)ds \right) \leq k \exp \int_{t_0}^t g(s)ds$$

pour tout  $t \in [t_0, +\infty[$ .

On en déduit le cas  $t \in I \cap ]-\infty, t_0]$  par le changement de variable  $\tau = -t$  □

**Proposition 9**

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont les solutions de (E) vérifiant les conditions de Cauchy  $(t_0, x_0)$  et  $(t_0, y_0)$ , on a :

$$\forall t \in I, \quad \|\psi(t) - \varphi(t)\| \leq \|y_0 - x_0\| \exp \left| \int_{t_0}^t \|a(s)\| ds \right|.$$

**Démonstration** On a la relation intégrale :

$$\forall t \in I, \quad \psi(t) - \varphi(t) = (y_0 - x_0) + \int_{t_0}^t a(s) \cdot (\psi(s) - \varphi(s))ds$$

et par conséquent :

$$\forall t \in I, \quad \|\psi(t) - \varphi(t)\| \leq \|y_0 - x_0\| + \left| \int_{t_0}^t \|a(s)\| \|\psi(s) - \varphi(s)\| ds \right|.$$

On en déduit :

$$\forall t \in I, \quad \|\psi(t) - \varphi(t)\| \leq \|y_0 - x_0\| \exp \left| \int_{t_0}^t \|a(s)\| ds \right|. \quad \square$$

On retrouve bien sûr l'unicité de la solution vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$  en faisant  $y_0 = x_0$  dans la majoration précédente

### 1.3 Espace des solutions de l'équation homogène

Continuons l'étude de l'équation :

$$x' = a \cdot x + b. \quad (E)$$

On note  $S_0(I)$  l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène :

$$x' = a \cdot x \quad (Eh)$$

associée à (E).

#### Proposition 10

Soit  $t_0 \in I$ . L'application :

$$\begin{aligned} \delta_{t_0} : S_0(I) &\rightarrow E \\ \varphi &\mapsto \varphi(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Démonstration** L'application  $\delta_{t_0}$  est linéaire comme toute évaluation. Elle est bijective puisque pour tout  $x_0 \in E$  il existe par le théorème de Cauchy-Lipschitz, un et un seul élément  $\varphi \in S_0(I)$  tel que  $\varphi(t_0) = x_0$ .  $\square$

#### Corollaire 11

L'espace  $S_0(I)$  est de dimension finie égale à celle de  $E$ .

### Système fondamental de solutions

#### Définition 3

On appelle *système fondamental de solutions* de (Eh) toute base :  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $S_0(I)$ .

**Proposition 12**

Soit  $t_0 \in I$ . Une famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S_0(I)^n$  est un système fondamental de solutions de (Eh) si, et seulement si, la famille :

$$(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$$

est une base de  $E$ .

**Démonstration** L'application  $\delta_{t_0}$  étant un isomorphisme d'espaces vectoriels  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $S_0(I)$  si, et seulement si :

$$(\delta_{t_0}(\varphi_1), \dots, \delta_{t_0}(\varphi_n))$$

est une base de  $E$ . □

**Wronskien**

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

**Définition 4**

On appelle *wronskien* dans  $\mathcal{B}$  de la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S_0(I)^n$  en  $t$ , le déterminant :

$$W(t) = \det_{\mathcal{B}} (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

**Proposition 13**

On a équivalence entre les assertions suivantes :

- (i)  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un système fondamental de solutions ;
- (ii)  $\exists t \in I : W(t) \neq 0$  ;
- (iii)  $\forall t \in I, W(t) \neq 0$ .

**Démonstration** L'implication (iii)  $\Rightarrow$  (ii) est évidente. Les implications (ii)  $\Rightarrow$  (i) et (i)  $\Rightarrow$  (iii) proviennent de la proposition précédente. □

► **Attention** Les propriétés précédentes ne sont vraies que si les applications  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

Ainsi le wronskien est, soit l'application nulle, soit une application qui ne prend jamais la valeur 0. Nous allons retrouver cette propriété dans la proposition suivante. Montrons tout d'abord un lemme d'algèbre linéaire.

**Proposition 14 (Lemme d'Abel)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a pour tout  $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$  :

$$\sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, u \cdot v_i, \dots, v_n) = \text{tr } u \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

**Démonstration** On vérifie aisément que l'application :

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, u \cdot v_i, \dots, v_n)$$

est une forme  $n$ -linéaire. Pour montrer qu'elle est alternée, considérons une famille  $(v_1, \dots, v_n)$  contenant deux vecteurs égaux, disons  $v_k = v_\ell$  pour  $k < \ell$ . Comme :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, u \cdot v_i, \dots, v_n) = 0$$

lorsque  $i \notin \{k, \ell\}$  et :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, u \cdot v_k, \dots, v_\ell, \dots, v_n) = -\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_k, \dots, u \cdot v_\ell, \dots, v_n),$$

on a :

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, \dots, v_n) &= \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, u \cdot v_k, \dots, v_\ell, \dots, v_n) \\ &\quad + \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_k, \dots, u \cdot v_\ell, \dots, v_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il existe donc un scalaire  $\alpha \in \mathbf{K}$  tel que  $\varphi = \alpha \det_{\mathcal{B}}$ . On calcule  $\alpha$  en évaluant  $\varphi$  sur  $\mathcal{B}$ . En notant  $U = (u_{i,j})$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ , il vient :

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} 1 & \dots & u_{1,i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & u_{i,i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & u_{n,i} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n u_{i,i} = \text{tr } u.$$

□

**Proposition 15**

Soit  $t_0 \in I$ . Le wronskien est donné par :

$$\forall t \in I, \quad W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{tr } a(s) \, ds \right).$$

**Démonstration** Les applications  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  étant continûment dérivables l'application  $W$  est continûment dérivable et vérifie :

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}} (\varphi_1(t), \dots, \varphi'_i(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}} (\varphi_1(t), \dots, a(t) \cdot \varphi_i(t), \dots, \varphi_n(t)). \end{aligned}$$

Par le lemme précédent, on obtient alors l'équation différentielle scalaire :

$$\forall t \in I, \quad W'(t) = \text{tr } a(t) W(t)$$

dont l'unique solution valant  $W(t_0)$  en  $t_0$  est :

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{tr } a(s) ds \right). \quad \square$$

**Remarque** Lorsque  $X' = AX$  est un système homogène réel, on peut considérer l'espace vectoriel réel  $S_0(I, \mathbb{R}^n)$  de ses solutions réelles aussi bien que l'espace vectoriel complexe  $S_0(I, \mathbb{C}^n)$  de ses solutions complexes.

1. L'espace  $S_0(I, \mathbb{C}^n)$  est évidemment stable par conjugaison et  $S_0(I, \mathbb{R}^n)$  est le sous-espace réel des applications de  $S_0(I, \mathbb{C}^n)$  égales à leur conjuguée. Nous avons vu qu'une solution est réelle si, et seulement si, sa valeur en  $t_0$  est réelle.
2. Une famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S_0(I, \mathbb{R}^n)^n$  est un système fondamental de l'espace  $S_0(I, \mathbb{R}^n)$  si, et seulement si, c'est un système fondamental de  $S_0(I, \mathbb{C})$  puisque son wronskien en  $t_0$  est indépendant du corps considéré.

**Solution de l'équation homogène vérifiant une condition de Cauchy**

Si  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un système fondamental de solutions de (Eh) on détermine l'unique solution :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad \text{où } (\alpha_i) \in \mathbb{K}^n$$

de (Eh) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$  en résolvant le système en  $(\alpha_i)$  :

$$\varphi_1(t_0) \alpha_1 + \dots + \varphi_n(t_0) \alpha_n = x_0.$$

**1.4 Espace des solutions de l'équation complète**

Continuons l'étude de l'équation :

$$x' = a \cdot x + b. \tag{E}$$

On note  $S_0(I)$  l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène :

$$x' = a \cdot x \quad (\text{Eh})$$

et  $S(I)$  l'ensemble des solutions de (E)

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que l'ensemble  $S(I)$  n'est pas vide puisqu'il contient les solutions de (E) vérifiant les conditions initiales  $(t_0, x_0) \in I \times E$ . On obtient donc la proposition suivante :

**Proposition 16**

L'ensemble  $S(I)$  est un sous-espace affine de  $C^1(I, E)$  de direction  $S_0(I)$ .

Si on connaît un système fondamental  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de solutions de (Eh), la résolution de (E) se ramène donc à la détermination d'une solution, dite solution particulière, de (E).

Il peut arriver qu'il faille utiliser le principe de superposition, que l'on trouve une solution évidente de (E). Sinon, on utilisera la méthode décrite dans le point suivant.

Dans tous les cas, si  $\psi_p$  est une solution particulière de (E), toute solution de  $\psi$  de (E) s'écrit de façon unique sous la forme :

$$\psi = \psi_p + \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi \in S_0(I)$$

ou :

$$\psi = \psi_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad \text{avec} \quad (\alpha_i) \in \mathbf{K}^n.$$

On obtient alors l'unique solution vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$  en déterminant l'unique solution  $\varphi \in S_0(I)$ , ou le  $n$ -uplet  $(\alpha_i)$  correspondant, telle que :

$$\varphi(t_0) = x_0 - \psi_p(t_0).$$

**Méthode de la variation des constantes**

Cet oxymore célèbre désigne une méthode due à Lagrange permettant de déterminer par intégrations les solutions de (E) à partir d'un système fondamental de solutions de (Eh).

Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  un système fondamental de solutions de (Eh)

Commençons par un lemme.

**Lemme**

Quelle que soit l'application  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$ , il existe une et une seule famille  $(\lambda_i) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})^n$  telle que :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i.$$

**Démonstration** Quel que soit  $t \in I$ , on peut écrire le vecteur  $\varphi(t)$  dans la base  $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  de  $E$ . Cela fournit une unique famille d'applications  $(\lambda_i) \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$  telle que :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \varphi_i(t).$$

De plus, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , les applications  $\lambda_i$  sont données par les formules de Cramer :

$$\forall t \in I, \quad \lambda_i(t) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi(t), \dots, \varphi_n(t))}{\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t), \dots, \varphi_n(t))}.$$

(où  $\varphi(t)$  est à la  $i^{\text{ième}}$  place) pour tout  $i$ .

On sait que les applications  $\varphi_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , les formules ci-dessus montrent que les applications  $\lambda_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  pour tout  $i$ .  $\square$

**Théorème 17 (Méthode de variation des constantes)**

Si le second membre de l'équation (E) est écrit  $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ , une application  $\psi = \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi_i$  est une solution de (E) si, et seulement si on a :  $\mu'_i = \alpha_i$  pour tout  $i$ .

**Démonstration** On obtient en dérivant :

$$\begin{aligned} \psi' &= \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi'_i + \sum_{i=1}^n \mu'_i \varphi_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i a \cdot \varphi_i + \sum_{i=1}^n \mu'_i \varphi_i \\ &= a \cdot \psi + \sum_{i=1}^n \mu'_i \varphi_i \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées, l'application  $\psi$  est une solution de (E) si, et seulement si,  $\mu'_i = \alpha_i$  pour tout  $i$ .  $\square$



La solution générale de (E) est donc donnée par

$$\forall t \in I, \quad \psi(t) = \sum_{i=1}^n \left( \mu_i^0 + \int_{t_0}^t \alpha_i(s) \, ds \right) \varphi_i(t)$$

où  $(\mu_i^0) \in \mathbb{K}^n$ .

## 2. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Dans cette section, on considérera l'équation à coefficient constant :

$$x' = u \cdot x + b \tag{E}$$

associée à  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $b \in \mathcal{C}(I, E)$  ainsi que l'équation homogène :

$$x' = u \cdot x. \tag{Eh}$$

► **Attention** Le coefficient  $u$  est une *constante*, mais le second membre  $b$  est une application *quelconque* de  $I$  vers  $E$ .

### 2.1 Espace des solutions de l'équation homogène

Rappelons la définition de l'exponentielle d'un endomorphisme.

#### Définition 5

On appelle *exponentielle* de  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et l'on note  $\exp(u)$  ou  $e^u$ , la somme de la série absolument convergente :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

La série  $\sum_k \frac{u^k}{k!}$  étant normalement convergente sur les parties bornées de  $\mathcal{L}(E)$ , l'application  $\exp$  est continue et possède pour tout  $n$  le développement limité :

$$\exp(u) = \text{Id}_E + \frac{u}{1!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n).$$

#### Exemples

1. La suite des applications :

$$f_n : u \mapsto \left( \text{Id}_E + \frac{u}{n} \right)^n$$

de  $\mathcal{L}(E)$  dans lui-même converge uniformément vers  $\exp$  sur les boules fermées. Par conséquent, pour toute suite  $(u_n)$  convergeant vers  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \text{Id}_E + \frac{u_n}{n} \right)^n = \exp u.$$

Soit, en effet,  $R > 0$ . Les inégalités :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \leq 1$$

fournissent, pour tout  $u$  de la boule fermée  $D(0, R)$ , la majoration :

$$\begin{aligned} \|\exp u - f_n(u)\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \right) u^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \right) \|u\|^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|u\|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \right) R^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} R^k \\ &\leq \exp R - \left( 1 + \frac{R}{n} \right)^n \end{aligned}$$

Puisque  $\left( 1 + \frac{R}{n} \right)^n$  converge vers  $e^R$ , la suite  $f(n)$  converge uniformément vers  $e^u$  sur  $D(0, R)$ .

Si la suite  $(u_n)$  de  $D(0, R)$  converge vers  $u$ , l'inégalité :

$$\begin{aligned} \|\exp u - f_n(u_n)\| &\leq \|\exp u - \exp u_n\| + \|\exp u_n - f_n(u_n)\| \\ &\leq \|\exp u - \exp u_n\| + \|\exp - f_n\|_{\infty, D(0, R)} \end{aligned}$$

prouve alors que  $(f_n(u_n))$  converge vers  $\exp u$ .

2. Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes de  $E$ , on a les formules de Lie :

$$\lim \left( \exp \frac{u}{n} \exp \frac{v}{n} \right)^n = \exp (u + v)$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \exp \frac{u}{n} \exp \frac{v}{n} \exp \left( -\frac{u}{n} \right) \exp \left( -\frac{v}{n} \right) \right)^{n^2} = \exp (u \circ v - v \circ u)$$

Écrivons, en effet, :

$$\exp \frac{u}{n} \exp \frac{v}{n} = \text{Id}_E + \frac{h_n}{n}$$

et :

$$\exp \frac{u}{n} \exp \frac{v}{n} \exp \left( -\frac{u}{n} \right) \exp \left( -\frac{v}{n} \right) = \text{Id}_E + \frac{\ell_n}{n^2}.$$

Le développement de l'exponentielle montre l'on a :

$$\begin{aligned} \text{Id}_E + \frac{h_n}{n} &= \left( \text{Id}_E + \frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left( \text{Id}_E + \frac{v}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \text{Id}_E + \frac{u+v}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \text{Id}_E + \frac{\ell_n}{n} &= \left( \text{Id}_E + \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( \text{Id}_E + \frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\quad \left( \text{Id}_E - \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( \text{Id}_E - \frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \text{Id}_E + \frac{u \circ v - v \circ u}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Puisque les suites  $(h_n)$  et  $(\ell_n)$  convergent vers  $u + v$  et  $u \circ v - v \circ u$  il vient :

$$\lim_n \left( \text{Id}_E + \frac{h_n}{n} \right)^n = \exp(u + v)$$

et :

$$\lim_n \left( \text{Id}_E + \frac{\ell_n}{n^2} \right)^{n^2} = \exp(u \circ v - v \circ u).$$

### Propriétés de l'exponentielle

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

#### Proposition 18

L'application  $t \mapsto \exp(tu)$  est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$x' = u \circ x \tag{R}$$

sur  $\mathcal{L}(E)$  vérifiant la condition initiale  $(0, \text{Id}_E)$ .

**Démonstration** L'équation (R) est l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène associée à l'endomorphisme  $L_u : v \mapsto u \circ v$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

Nous avons vu dans la proposition 5 de la page 927 que son unique solution valant  $\text{Id}_E$  en 0 est la somme sur  $\mathbb{R}$  de la série normalement convergente sur les segments  $\sum_n \varphi_n$  où la suite

$(\varphi_n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, E)^{\mathbb{N}}$  est définie par  $\varphi_0 = \text{Id}_E$  et .

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t L_u \cdot \varphi_n(s) \, ds$$

pour tout  $n$ . On montre immédiatement par récurrence que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) = \frac{t^k}{k!} u^k \cdot x_0$$

pour tout  $n$ . Il vient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} u^k = \exp(tu). \quad \square$$

### Proposition 19

L'application  $t \mapsto \exp(tu)$  est de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{L}(E)$  et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tu)' = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u.$$

**Démonstration** L'application  $t \mapsto \exp(tu)$  est de classe  $C^\infty$  et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tu)' = u \circ \exp(tu)$$

comme solution de l'équation  $x' = u \circ x$ . On obtient la deuxième relation en remarquant que  $u$  et  $\exp(tu)$  commutent pour tout  $t$ .  $\square$

### Proposition 20

On a  $\exp 0 = \text{Id}_E$  et :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp((t+s)u) = \exp(tu) \circ \exp(su).$$

L'endomorphisme  $\exp(tu)$  est inversible quel que soit  $t$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(-tu) = \exp(tu)^{-1}.$$

**Démonstration** La relation  $\exp(0) = \text{Id}_E$  est évidente.

Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Les applications  $t \mapsto \exp((t+s)u)$  et  $t \mapsto \exp(tu) \circ \exp(su)$  sont des solutions de l'équation différentielle :

$$x' = u \circ x$$

vérifiant la condition de Cauchy  $(0, \exp(su))$ . On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp((t+s)u) = \exp(tu) \circ \exp(su)$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tu) \circ \exp(-tu) = \exp(-tu) \circ \exp(tu) = \exp(0) = \text{Id}_E.$$

Cela montre que  $\exp(tu)$  est inversible, d'inverse  $\exp(-tu)$  pour tout  $t$ .  $\square$

*Exemples*

1. Les morphismes de groupes continus de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $\mathcal{GL}(E)$  sont les applications  $t \mapsto \exp(tu)$  pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

La proposition précédente montre, en effet, que les application  $t \mapsto \exp(tu)$  sont des morphismes de classe  $C^\infty$  de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $\mathcal{GL}(E)$ .

Considérons réciproquement un morphisme continu  $\varphi$  de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $\mathcal{GL}(E)$ . Si  $\Phi$  désigne la primitive de  $\varphi$  nulle en 0, la relation :

$$\varphi(t + s) = \varphi(t) \circ \varphi(s) \tag{m}$$

fournit la relation :

$$\Phi(t + s) - \Phi(t) = \int_0^s \varphi(t + u) du = \varphi(t) \circ \int_0^s \varphi(u) du = \varphi(t) \circ \Phi(s).$$

Puisque  $\frac{1}{s}\Phi(s)$  admet  $\varphi(0) = \text{Id}_E$  comme limite lorsque  $s$  de  $\mathbb{R}^*$  tend vers 0, il existe  $s_0 \in \mathbb{R}^*$  tel que  $s_0^{-1}\Phi(s_0)$ , et par conséquent  $\Phi(s_0)$ , soit inversible. La relation :

$$\varphi(t) = (\Phi(t + s_0) - \Phi(t)) \circ \Phi(s_0)^{-1}$$

montre alors que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  comme  $\Phi$ . La dérivée par rapport à  $t$  de la relation (m) prise en 0 montre que l'on a :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(s) = u \circ \varphi(s).$$

L'application  $\varphi$  est donc égale à l'unique solution  $t \mapsto \exp(tu)$  de l'équation  $x' = u \circ x$  vérifiant la condition de Cauchy  $(0, \text{Id}_E)$ .

2. Si les endomorphismes  $u$  et  $v$  de  $E$  commutent, on a :

$$\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v).$$

On a, en effet, :

$$\begin{aligned} (\exp(tu) \circ \exp(tv))' &= u \circ \exp(tu) \circ \exp(tv) + \exp(tu) \circ v \circ \exp(tv) \\ &= (u + v) \circ \exp(tu) \circ \exp(tv) \end{aligned}$$

pour tout  $t$  puisque  $v$  et  $\exp(tu)$  commutent. L'application  $t \mapsto \exp(tu) \circ \exp(tv)$  est donc égale à l'unique solution  $t \mapsto \exp(t(u + v))$  de l'équation :

$$x' = (u + v) \circ x$$

vérifiant la condition de Cauchy  $(0, \text{Id}_E)$ .

## Expression des solutions de l'équation homogène

### Théorème 21

Soit  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ . L'unique solution  $\varphi$  de (Eh) vérifiant  $\varphi(t_0) = x_0$  est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \exp((t - t_0)u) \cdot x_0.$$

**Démonstration** L'application  $\varphi : t \mapsto \exp((t - t_0)u) \cdot x_0$  vaut  $x_0$  en  $t_0$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = u \circ \exp((t - t_0)u) \cdot x_0 = u \cdot \varphi(t).$$

C'est donc l'unique solution de (Eh) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$ . □

### Équation linéaire à coefficients commutants

La proposition précédente montre que l'on peut exprimer explicitement la solution générale des équations à coefficients constants. Nous avons vu dans le cours de première année qu'il en est de même pour les équations scalaires à coefficients quelconques.

Ces deux cas relèvent en fait de la situation générale d'une équation linéaire homogène :

$$x' = a \cdot x \tag{Eh}$$

dont l'application coefficient  $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$  vérifie la condition de commutation :

$$\forall (s, t) \in I^2, \quad a(t) \circ a(s) = a(s) \circ a(t).$$

### Proposition 22

La solution  $\varphi$  de l'équation (Eh) ci-dessus vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$  est l'application :

$$t \in I \longmapsto \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \cdot x_0.$$

**Démonstration** Notons  $A$  la primitive de  $a$  nulle en  $t_0$ . Les propriétés de l'intégrale montre que l'on a :

$$a(s) \circ A(t) = a(s) \circ \left(\int_{t_0}^t a(u) du\right) = \left(\int_{t_0}^t a(u) du\right) \circ a(s) = A(t) \circ a(s)$$

pour tout  $(s, t)$  de  $I^2$ . On en déduit que l'application  $A^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie :

$$(A^n)' = \sum_{k=1}^n A^{k-1} \circ a \circ A^{n-k} = nA^{n-1}a$$

Comme précédemment, la solution  $\varphi$  est la somme sur  $I$  de la série normalement convergente sur les segments  $\sum_n \varphi_n$  où la suite  $(\varphi_n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, E)^{\mathbb{N}}$  est définie par  $\varphi_0 = x_0$  et :

$$\forall t \in I, \quad \varphi_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi_n(s) \, ds$$

pour tout  $n$ . Montrons par récurrence que l'on a :

$$\forall t \in I, \quad \varphi_n(t) = \frac{1}{n!} A(t)^n \cdot x_0$$

pour tout  $n$ . C'est évident pour  $n = 0$ . Si le résultat est acquis pour  $n - 1$ , il vient :

$$\forall t \in I, \quad \varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \left( \int_{t_0}^t a(s) \circ A(s)^{n-1} \, ds \right) \cdot x_0 = \frac{1}{n!} A(t)^n \cdot x_0$$

puisque  $A^n$  est la primitive nulle en  $t_0$  de  $nA^{n-1}a$ .

On obtient finalement :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A(t)^n \right) \cdot x_0 = \exp(A(t)) \cdot x_0. \quad \square$$

### Système fondamental de solutions et wronskien

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Toute famille de solutions de (Eh) est de la forme :

$$(\exp(tu) \cdot x_1, \dots, \exp(tu) \cdot x_n).$$

#### Proposition 23

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ .

La famille  $(\exp(tu) \cdot x_1, \dots, \exp(tu) \cdot x_n)$  est un système fondamental de solutions de (Eh) si, et seulement si,  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$ .

Le wronskien de la famille  $(\exp(tu) \cdot x_1, \dots, \exp(tu) \cdot x_n)$  dans  $\mathcal{B}$  est donné par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad W(t) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) e^{t \operatorname{tr} u}.$$

**Démonstration**

- La famille  $(\exp(tu) \cdot x_1, \dots, \exp(tu) \cdot x_n)$  est un système fondamental de solutions de (E) si, et seulement si, la famille de ses valeurs en 0 est une base de  $E$
- On a en effet :

$$W(t) = W(0) e^{t \operatorname{tr} u}$$

et  $W(0) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ . □

**Corollaire 24**

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \det \exp(tu) = e^{t \operatorname{tr} u}.$$

**Démonstration** Le déterminant de  $\exp(tu)$  est, en effet, le déterminant dans  $\mathcal{B}$  de :

$$(\exp(tu) \cdot e_1, \dots, \exp(tu) \cdot e_n).$$

□

**2.2 Espace des solutions de l'équation complète**

La méthode de variation des constantes prend dans le cas qui nous intéresse la forme particulière suivante.

Toute application  $\psi \in C^1(I, E)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\psi(t) = \exp(tu) \cdot \lambda(t)$$

où  $\lambda : t \mapsto \exp(-tu) \cdot \psi(t)$  est de classe  $C^1$  de  $I$  vers  $E$ . On a alors :

$$\psi'(t) = (u \circ \exp(tu)) \cdot \lambda(t) + \exp(tu) \cdot \lambda'(t).$$

Ainsi  $\psi$  est alors solution de (E) si, et seulement si, l'application  $\lambda$  vérifie :

$$\lambda'(t) = \exp(-tu) \cdot b(t).$$

**Proposition 25**

Soit  $(t_0, x_0) \in I \times E$ . La solution  $\psi \in C^1(I, E)$  de (E) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$  est donnée par :

$$\forall t \in I, \quad \psi(t) = \exp((t - t_0)u) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)u) \cdot b(s) \, ds$$



**Démonstration** Avec les notations précédentes, on a  $\lambda(t_0) = \exp(-t_0u) \cdot \psi(t_0)$  et par intégration :

$$\lambda(t) = \exp(-t_0u) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t \exp(-su) \cdot b(s) \, ds.$$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \exp(tu) \circ \exp(-t_0u) \cdot x_0 + \exp(tu) \left( \int_{t_0}^t \exp(-su) \cdot b(s) \, ds \right) \\ &= \exp((t - t_0)u) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)u) \cdot b(s) \, ds. \end{aligned} \quad \square$$

**Remarque** On a aussi :

$$\psi(t) = \exp((t - t_0)u) \cdot \left( x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t_0 - s)u) \cdot b(s) \, ds \right).$$

### 2.3 Méthodes pratiques de résolution

Ce qui précède montre que la résolution de l'équation homogène (Eh) se ramène au calcul de l'exponentielle de  $u$  et, par suite, à la réduction de cet endomorphisme.

#### Cas $u$ diagonalisable

Lorsque  $u$  est diagonalisable, on se place évidemment dans une base de diagonalisation.

#### Proposition 26

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

- L'équation (E) s'écrit dans la base  $\mathcal{B}$  sous la forme du système d'équations scalaires :

$$\forall i, \quad x'_i = \alpha_i x_i + b_i$$

- Les solutions de (E) sont données par :

$$\forall t \in I, \quad x_i(t) = \lambda_i e^{\alpha_i t} + e^{\alpha_i t} \int_0^t e^{-\alpha_i s} b_i(s) \, ds$$

pour tout  $i$ .

**Exemple** Considérons le système :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t} \end{cases} \quad (\text{Sys})$$

soit  $X' = UX + B$ . La matrice  $U = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable de spectre  $(2, 3)$ . Dans la base de diagonalisation  $C$  dont la matrice dans la base canonique est  $P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ , le système considéré s'écrit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) = 3y_2(t) + e^{3t} \end{cases}$$

soit  $Y' = BY + C$  avec  $Y = P^{-1}X$  et  $C = P^{-1}B$ . On obtient alors :

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \\ y_2(t) = \beta e^{3t} + te^{3t} \end{cases}$$

et par suite :

$$\begin{cases} x_1(t) = -3\alpha e^{2t} + 4\beta e^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} \\ x_2(t) = 4\alpha e^{2t} - 4\beta e^{3t} - \frac{3t}{2} - 1 - 4te^{3t} \end{cases}$$

avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

Cette méthode s'applique aussi lorsque l'on considère un système réel diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

**Exemple** Considérons le système :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t) + 2x_2(t) + t \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t) \end{cases} \quad (\text{Sys})$$

soit  $X' = UX + B$ . La matrice  $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable de spectre  $(-1 + 2i, -1 - 2i)$ .

- Plaçons nous sur  $\mathbb{C}$ . Dans la base de diagonalisation  $C$  dont la matrice dans la base canonique est  $P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & -2i \end{pmatrix}$ , le système considéré s'écrit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = (-1 + 2i)y_1(t) + \frac{1}{2}t \\ y_2'(t) = (-1 - 2i)y_2(t) + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

soit  $Y' = BY + C$  avec  $Y = P^{-1}X$  et  $C = P^{-1}B$ . Ses solutions complexes sont alors :

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-t} \cos 2t + ic_1 e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{10}t + \frac{3}{50} + \frac{1}{5}it - \frac{2}{25}i \\ y_2(t) = c_2 e^{-t} \cos 2t - ic_2 e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{10}t + \frac{3}{50} - \frac{1}{5}it + \frac{2}{25}i \end{cases}$$

avec  $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ .

- Les solutions complexes de (Sys) sont donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = ((c_1 + c_2) - i(c_1 - c_2)) e^{-t} \cos 2t \\ \qquad \qquad \qquad + (i(c_1 - c_2) + (c_1 + c_2)) e^{-t} \sin 2t & + \frac{3}{5}t - \frac{1}{25} \\ x_2(t) = 2i(c_1 - c_2) e^{-t} \cos 2t \\ \qquad \qquad \qquad - 2(c_1 + c_2) e^{-t} \sin 2t & - \frac{4}{5}t + \frac{8}{25} \end{cases}$$

avec  $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ , ce que l'on peut réécrire :

$$\begin{cases} x_1(t) = (\alpha - \beta) e^{-t} \cos 2t + (\alpha + \beta) e^{-t} \sin 2t + \frac{3}{5}t - \frac{1}{25} \\ x_2(t) = 2\beta e^{-t} \cos 2t - 2\alpha e^{-t} \sin 2t - \frac{4}{5}t + \frac{8}{25} \end{cases}$$

avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ .

- Les solutions réelles de (Sys) sont les solutions précédentes avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

**Cas général**

Supposons que  $u$  soit scindé sur  $\mathbb{K}$ , ce qui est loisible quitte à représenter (E) par un système et à se placer sur  $\mathbb{C}$ .

- Si  $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$  est le polynôme caractéristique de  $u$ , le théorème des noyaux nous fournit la décomposition spectrale :

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

où  $F_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}$ . L'endomorphisme  $u_i$  induit par  $u$  sur  $F_i$  est la somme de  $\lambda_i \text{Id}_{E_i}$  et d'un endomorphisme nilpotent  $n_i$  dont l'indice de nilpotence  $r_i$  est inférieur ou égal à  $m_i$  (cet indice est en fait la multiplicité de  $\lambda_i$  dans le polynôme minimal de  $u$ ).

- L'équation (E) devient alors le système d'équations :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad x'_i = u_i \cdot x_i + b_i \tag{E_i}$$

où  $x_i$  et  $b_i$  désignent les composantes de  $x$  et  $b$  dans la somme directe spectrale.

- Solutions de (Eh).

1. Pour tout  $i$ , l'exponentielle de  $tu_i$  vaut :

$$e^{tu_i} = e^{t\lambda_i} \exp(tn_i) = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{t^k}{k!} n_i^k$$

La solution de l'équation homogène (Eh<sub>i</sub>) associée à (E<sub>i</sub>) valant  $x_{0,i}$  en 0 est donc donnée par :

$$\varphi_i(t) = e^{t\lambda_i} \left( \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{t^k}{k!} n_i^k \right) \cdot x_{0,i}.$$

Elle est de la forme  $\varphi(t) = e^{t\lambda_i} P_i(t)$  où  $P_i(t)$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $r_i$  à coefficients dans  $F_i$ . On utilise parfois cette remarque pour déterminer les solutions de  $(Eh_i)$  par la méthode des coefficients indéterminés.

- 2. L'exponentielle de  $tu$  est alors  $e^{tu} = e^{tu_1} \oplus \dots \oplus e^{tu_p}$  et la solution de  $(Eh)$  valant  $x_0$  en 0 la fonction :

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(t)$$

où  $\varphi_i$  est la solution de l'équation  $(Eh_i)$  valant  $x_{0,i}$  en 0.

- Solution de  $(E)$ .
  1. On détermine la solution générale de  $(E_i)$  à partir de celles de  $(E_i)$  directement ou par la méthode de la variation des constantes.
  2. La solution générale de  $(E)$  est la somme des solutions générales des  $(E_i)$ .

Dans chaque sous-espace  $F_i$ , on est conduit à calculer l'exponentielle d'une matrice nilpotente.

*Exemple* Considérons le système :

$$\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + 0 + x_3(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x'_3(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de sa matrice de coefficients  $U$  est  $(X - 1)^3$  On peut donc écrire :

$$U = I_3 + N$$

où  $N$  est nilpotente. Il vient alors :

$$\exp(tU) = \exp(tI_3 + tN) = \exp(tI_3) \exp(tN) = e^t \left( I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right)$$

soit :

$$\exp(tU) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

pour tout  $t$ .

L'unique solution  $(\varphi_i)$  valant le vecteur  $X_0$  de coordonnées  $(\alpha, \beta, \gamma)$  en 0 est l'application  $t \mapsto \exp(tU)X_0$ . Elle est donnée explicitement par :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \alpha(t+1)e^t + \beta t^2 e^t + \gamma(t^2+t)e^t \\ \varphi_2(t) = \alpha t e^t + \beta(t^2-2t+1)e^t + \gamma(t^2-t)e^t \\ \varphi_3(t) = -\alpha t e^t + \beta(-t^2+2t)e^t + \gamma(-t^2+t+1)e^t \end{cases}$$

Lorsque l'on a affaire à un système triangulaire, ce que l'on peut toujours supposer dans le cas scindé, on peut aussi procéder par substitutions successives.

*Exemple* Considérons le système :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t \\ y'(t) = y(t) + z(t) + t \\ z'(t) = z(t) + t \end{cases}$$

La dernière équation donne  $z(t) = \gamma e^t - t - 1$ . En reportant dans la deuxième équation, on obtient :

$$y'(t) = y(t) + \gamma e^t - 1$$

dont les solutions sont  $y(t) = \beta e^t + \gamma t e^t + 1$ . Il vient alors :

$$x'(t) = x(t) + \beta e^t + \gamma (t + 1) e^t$$

soit  $x(t) = \alpha e^t + \beta t e^t + \gamma (t^2/2 + t) e^t$  avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ .

On peut aussi utiliser la décomposition en sous-espaces spectraux

*Exemple* Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel complexe vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tu) = 0$$

si, et seulement si, ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives

En reprenant les notations précédentes, on a  $e^{tu} = e^{tu_1} \oplus \dots \oplus e^{tu_p}$  avec :

$$\forall i, \quad \exp(tu_i) = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{t^k}{k!} n_i^k.$$

Si  $\text{Re } \lambda_i$  est strictement inférieur à 0, il vient  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^k e^{t\lambda_i}) = 0$  pour tout  $k$  et par conséquent  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tu_i) = 0$  pour tout  $i$ . On en déduit  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tu) = 0$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  et  $x$  un vecteur propre associé, on a  $\exp(tu) \cdot x = e^{t\lambda} x$ . Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tu) = 0$ , il vient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tu) \cdot x = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\lambda} \right) x = 0.$$

On en déduit  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\lambda}$  et, par conséquent,  $\text{Re } \lambda < 0$ .

### 3. Équations différentielles linéaires scalaires

#### 3.1 Définitions

##### Définition 6

Si  $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  une famille de  $n + 1$  applications continues d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbf{K}$  et  $b$  une application continue de  $I$  vers  $\mathbf{K}$ , on appelle *solution* de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$  :

$$a_n x^{(n)} + \cdots + a_0 x = b \quad (\text{E})$$

toute application  $n$  fois dérivable de  $I$  vers  $\mathbf{K}$  vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad a_n(t)\varphi^{(n)}(t) + \cdots + a_0(t)\varphi(t) = b(t).$$

On notera  $a_n(t)x^{(n)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = b(t)$  l'équation (E) si l'on veut préciser le nom de la variable libre.

Les applications  $a_k \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$  et  $b \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$  s'appellent respectivement les *coefficients* et le *second membre* de (E).

On dit que l'équation (E) est à *coefficients constants* si les  $a_k$  sont constantes et qu'elle est *homogène* ou sans second membre si  $b = 0$ .

On appelle *équation homogène* associée à (E), l'équation :

$$a_n x^{(n)} + \cdots + a_0 x = 0 \quad (\text{Eh})$$

L'équation (E) s'appelle alors l'équation *complète*.

On fera attention à ce qu'une solution de (E) est, comme dans le cas des équations du premier ordre, définie sur  $I$  tout entier.

##### ► Attention

- On dit que l'équation différentielle (E) est *régulière* lorsque  $a_n$  ne s'annule pas sur  $I$ . Dans tout ce qui suit nous ne considérerons, sauf mention expresse du contraire, que des équations régulières.
- On dit que (E) est *singulière* si  $a_n$  s'annule sur  $I$ . On appelle alors *singularité* de (E) tout zéro de  $a_n$ . Nous n'étudierons pas les équations singulières. Nous verrons seulement sur quelques exemples que leur comportement est très différent de celui des équations régulières.

**Régularité des solutions**

**Proposition 27**

Toute solution de l'équation (E) est de classe  $C^n$ . Elle est de classe  $C^{n+p}$  si les applications  $(a_k)$  et  $b$  sont de classe  $C^p$ .

**Démonstration** Soit  $\varphi$  une solution de (E). La relation

$$\varphi^{(n)} = -\frac{1}{a_n} \left( b - a_{n-1}\varphi^{(n-1)} - \dots - a_0\varphi \right)$$

montre que  $\varphi$  est de classe  $C^n$  et par récurrence de classe  $C^{n+p}$  lorsque les applications  $(a_k)$  et  $b$  sont de classe  $C^p$ . □

**Condition de Cauchy**

**Définition 7**

On dit qu'une solution  $\varphi$  de (E) vérifie la *condition de Cauchy*, ou la *condition initiale*,  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1}) \in I \times \mathbf{K}^n$  si on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad \varphi^{(k)}(t_0) = x_k.$$

Rappelons pour terminer que les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre ont été étudiées dans le cours de premier année.

**Propriétés linéaires**

L'application :

$$\begin{aligned} L & : C^n(I, \mathbf{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbf{K}) \\ \varphi & \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \varphi^{(k)} \end{aligned}$$

est une application linéaire. L'équation (E) est équivalente à l'équation linéaire :

$$L(x) = b$$

et l'équation différentielle (Eh) à l'équation homogène associée :

$$L(x) = 0.$$

On retrouve donc les deux corollaires suivants :

**Corollaire 28**

- L'ensemble  $\mathcal{S}_0(I)$  des solutions de l'équation homogène (Eh) est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ .
- L'ensemble  $\mathcal{S}(I)$  des solutions de l'équation de (E) est soit vide soit un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  de direction  $\mathcal{S}_0(I)$ .

**Remarque** On verra que  $\mathcal{S}(I)$  est toujours non vide (si  $\forall t, a_n(t) \neq 0$ ).

**Corollaire 29 (Principe de superposition)**

Soient  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$  et  $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$  tels que  $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ . Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des solutions des équations :

$$L(\varphi_1) = b_1 \quad \text{et} \quad L(\varphi_2) = b_2,$$

la fonction  $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$  est une solution de (E).

**3.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz**

Dans cette sous-section,  $a_k$  et  $b$  désignent des applications continues d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et :

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = b \tag{E}$$

l'équation différentielle associée.

**Réduction au cas d'une équation linéaire vectorielle d'ordre 1**

On appelle :

- *espace des phases* de (E), l'espace  $\mathcal{E} = \mathbb{K}^n$ ,
- *applications des phases*, les applications  $A : t \mapsto A(t)$  de  $I$  vers  $M_n(\mathbb{K})$  définies par :

$$\forall t \in I, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_n(t)} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}$$



et  $B : t \mapsto B(t)$  de  $I$  vers  $\mathbb{K}^n$  définie par :

$$\forall t \in I, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}$$

- *équation des phases*, l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$X' = AX + B. \tag{P}$$

**Remarque** Pour tout  $t$ , la matrice  $A(t)$  est la transposée de la matrice compagnon du polynôme :

$$a_n(t)X^n + \dots + a_0(t).$$

La proposition suivante montre que l'équation (E) est équivalente à son équation des phases (P).

**Proposition 30**

Soit  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1}) \in I \times E^n$ . Une application  $\Phi$  est une solution du système des phases (P) vérifiant la condition de Cauchy :

$$\Phi(t_0) = (x_0, \dots, x_{n-1})$$

si, et seulement si, elle est de la forme :

$$\Phi : t \longmapsto (\varphi(t), \varphi'(t) \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

où  $\varphi$  est une solution de l'équation (E) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$ .

**Démonstration** Une application  $p$  fois dérivable  $\Phi$  de  $I$  vers  $\mathcal{E}$  peut s'écrire :

$$\Phi : t \mapsto (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)).$$

Si  $\Phi$  est solution de (P) vérifiant  $\Phi(t_0) = (t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ , on a alors  $\varphi'_i = \varphi_{i+1}$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, n-2 \rrbracket$  et :

$$\varphi'_{n-1} = -\frac{a_0}{a_n}\varphi_0 - \frac{a_1}{a_n}\varphi_1 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}\varphi_{n-1} + \frac{b}{a_n}$$

ainsi que  $\varphi_i(t_0) = x_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . On en déduit que  $\varphi = \varphi_0$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  avec  $\varphi^{(i)} = \varphi_i$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et que l'on a :

$$\varphi^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n}\varphi - \frac{a_1}{a_n}\varphi' - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}\varphi^{(n-1)} + \frac{b}{a_n}$$

ainsi que  $\varphi^{(i)}(t_0) = x_i$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .

Si, réciproquement,  $\varphi$  est une solution de (E) définie sur  $I$  vérifiant la condition de Cauchy l'application :

$$\Phi : t \mapsto \left( \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t) \right)$$

définie sur  $I$  est une solution de (P) vérifiant la condition de Cauchy  $t_0 \in I$  et :

$$\Phi(t_0) = (t_0, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}). \quad \square$$

La proposition précédente ramène ainsi l'étude des équations différentielles scalaires d'ordre  $n$  à celle des équations différentielles vectorielles du premier ordre. Les théorèmes et propositions qui suivent ne sont que les traductions de ce que nous avons vu dans la première section. Nous ne donnerons pas les démonstrations immédiates.

### Théorème de Cauchy-Lipschitz

#### Théorème 31 (Cauchy-Lipschitz)

Pour tout  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$ , il existe une et une seule solution de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$ .

**Démonstration** Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'il existe une solution  $\Phi$  au système (P) vérifiant la condition initiale  $(t_0, (x_0, \dots, x_{n-1}))$ . L'application  $\Phi$  est de la forme :

$$\Phi : t \mapsto \left( \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t) \right)$$

où  $\varphi$  est une solution de (E) vérifiant  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$ .

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux solutions de (E) vérifiant la même condition initiale, les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  associées vérifient (P) et la même condition initiale. On a donc  $\Phi = \Psi$  et  $\varphi = \psi$ . □

#### Corollaire 32

Soit  $J$  un sous-intervalle non réduit à un point de  $I$ . Toute solution de (E) définie sur  $J$  est la restriction d'une unique solution définie sur  $I$

### 3.3 Espace des solutions de l'équation homogène

On continue l'étude de l'équation différentielle :

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = b \tag{E}$$

où  $a_n$  ne s'annule pas sur  $I$ .

On note  $S_0(I)$ , rappelons-le, l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène :

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = 0. \tag{Eh}$$

**Proposition 33**

Soit  $t_0 \in I$ . L'application :

$$\begin{aligned} \delta_{t_0} : S_0(I) &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ \varphi &\mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire.

**Corollaire 34**

L'espace  $S_0(I)$  est de dimension  $n$ .

**Système fondamental de solutions**

**Définition 8**

On appelle *système fondamental* de solutions de (Eh) toute base :  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $S_0(I)$ .

**Proposition 35**

Soit  $t_0 \in I$ . Un  $n$ -uplet  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S_0(I)^n$  est un système fondamental de solutions si, et seulement si, la famille :

$$\left( \begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \varphi_n(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \right)$$

est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

**Définition 9**

On appelle *wronskien* en  $t$  de la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S_0(I)^n$ , le déterminant :

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

**Proposition 36**

On a équivalence entre :

- (i)  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S_0(I)^n$  est un système fondamental de solutions .
- (ii)  $\exists t \in I : W(t) \neq 0 ;$
- (iii)  $\forall t \in I, W(t) \neq 0.$

**Proposition 37**

Le wronskien est donné par :

$$\forall t \in I, W(t) = W(t_0) \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds \right).$$

**Démonstration** Reprenons les notations du paragraphe consacré au théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le wronskien de  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est le wronskien de la famille  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  correspondante de solutions du système du premier ordre (Sys). La proposition provient donc de :

$$\text{tr } A = -\frac{a_{n-1}}{a_n}. \quad \square$$

**Exemples**

1. Soit  $\varphi$  une solution non nulle de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0 \quad (\text{Eh2})$$

définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Tout zéro  $t$  de  $\varphi$  possède un voisinage ouvert  $V$  sur lequel  $\varphi$  ne s'annule qu'en  $t$ .
- Pour tout segment  $S$  de  $I$ , l'ensemble des zéros de  $\varphi$  appartenant à  $S$  est fini.

Considérons, en effet,  $t \in I$  tel que  $\varphi(t) = 0$ . Puisque  $\varphi$  est non nulle, le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que  $\varphi'(t)$  est différent de 0. On en déduit le développement limité :

$$\varphi(s) = (s - t)\varphi'(t) + o(s - t)$$

et l'existence d'un réel  $r > 0$  tel que  $\varphi$  ne s'annule sur  $D(t, r) \cap I$  qu'au point  $t$ . Considérons maintenant un segment  $S$  de  $I$  et l'ensemble  $Z$  des zéros de  $\varphi$  dans  $S$ . Par continuité de  $\varphi$ , l'ensemble  $Z$  est fermé et, par conséquent, compact. S'il est infini il existe une suite injective  $(z_n)$  d'éléments de  $Z$ . Par compacité nous

disposons alors d'une sous-suite  $(z_{\sigma(r)})$  convergeant vers un élément  $z$  de  $Z$ . On en déduit évidemment que, pour tout  $r > 0$ , l'ensemble :

$$Z \cap D(z, r)$$

possède une infinité d'éléments, en contradiction avec ce qui précède.

2. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux solutions indépendantes de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0 \tag{Eh2}$$

définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Les applications  $\varphi$  et  $\psi$  n'ont pas de zéros communs.
- Si l'équation (Eh2) et les applications sont réelles, alors  $\psi$  possède un et un seul zéro dans tout intervalle  $]t_0, t_1[$  limité par deux zéros consécutifs de  $\varphi$  (s'il en existe).

Si  $t$  est un zéro de  $\varphi$ , le wronskien  $W(t)$  de  $(\varphi, \psi)$  en  $t$  est, en effet, égal à  $-\varphi'(t)\psi(t)$ . Puisqu'il est non nul, il vient  $\psi(t) \neq 0$ .

Supposons maintenant que l'équation (Eh2) et les applications soient réelles. Si  $t_0$  et  $t_1$  sont deux zéros consécutifs de  $\varphi$ , l'application  $\varphi$  est de signe constant sur  $]t_0, t_1[$ . Puisque les dérivées de  $\varphi$  en ces points sont non nulles, il vient  $\varphi'(t_0)\varphi'(t_1) < 0$ . Puisque le wronskien ne s'annule pas, les nombres réels non nuls :

$$W(t_0) = -\varphi'(t_0)\psi(t_0) \quad \text{et} \quad W(t_1) = -\varphi'(t_1)\psi(t_1)$$

sont de même signe. Les valeurs non nulles  $\psi(t_0)$  et  $\psi(t_1)$  sont donc de signes opposés et  $\psi$  s'annule dans l'intervalle  $]t_0, t_1[$ . Si l'ensemble  $Z$  des zéros de  $\psi$  dans  $[t_0, t_1]$ , fini par l'exemple précédent, possédait plus de deux éléments, alors  $\varphi$  aurait un zéro entre deux éléments consécutifs de  $Z$ . Cela contredit évidemment nos hypothèses. Ce résultat est faux si l'une des solutions est complexe comme le montre l'exemple de l'équation  $x'' + x = 0$  et du système fondamental  $(\sin t, e^{it})$ .

**Solution de l'équation homogène vérifiant une condition de Cauchy**

Si  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un système fondamental de solutions de (Eh), on détermine l'unique solution :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad \text{où} \quad (\alpha_i) \in \mathbb{K}^n$$

de (Eh) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$  en résolvant le système de Cramer en  $(\alpha_i)$  :

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0)\alpha_1 + \dots + \varphi_n(t_0)\alpha_n & = & x_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0)\alpha_1 + \dots + \varphi_n^{(n-1)}(t_0)\alpha_n & = & x_{n-1} \end{cases}$$

### Détermination pratique d'un système fondamental de solutions

Hormis le cas des équations à coefficients constants que nous examinerons plus loin, il n'existe pas de méthode générale permettant de calculer les solutions de (Eh) lorsque  $n$  est supérieur ou égal à 2 (le cas où  $A(t)$  commute avec  $A(s)$  pour tout  $(t, s)$  se réduit malheureusement à celui des équations à coefficients constants). Nous limiterons dans ce qui suit à l'étude d'équations du deuxième ordre :

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0. \quad (\text{Eh})$$

Pratiquement, on recherche en premier lieu si (Eh) possède une ou plusieurs solutions simples, par exemple polynomiales ou développables en série entière au voisinage d'un point bien choisi.

#### Exemples

1. Considérons l'équation réelle :

$$(t^2 + 2t - 1) x''(t) + (t^2 - 3) x'(t) - (2t + 2) x(t) = 0. \quad (\text{Eh})$$

- Il est dit que (Eh) possède une solution polynomiale  $P$ . Pour déterminer  $P$  par la méthode des coefficients indéterminés, on recherche tout d'abord son degré. Si  $P$  vaut :

$$\alpha_n t^n + \dots + \alpha_0$$

avec  $\alpha_n \neq 0$ , le polynôme :

$$Q(t) = (t^2 + 2t - 1) P'' + (t^2 - 3) P' - (2t + 2) P$$

s'écrit :

$$Q(t) = (n - 2) \alpha_n t^{n+1} + \dots - (2\alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_0).$$

Comme  $Q$  est nul, on obtient  $n = 2$  en considérant le coefficient de  $t^{n+1}$ . En reportant  $P(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$  dans (Eh), on trouve finalement :

$$P(t) = \alpha_2 (t^2 - 1).$$

- On vérifie aussi que  $e^{-t}$  est aussi solution de (Eh).

La famille  $((t^2 - 1), e^{-t})$  étant libre, les solutions de l'équation proposée sont les applications :

$$\lambda (t^2 - 1) + \mu e^{-t}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

2. Considérons l'équation réelle :

$$4(1 - t^2)x''(t) - 4tx'(t) + x(t) = 0 \tag{Eh}$$

sur  $I = ]-1, 1[$ .

Soit  $\varphi(t)$  la fonction somme d'une série entière  $\Phi = \sum_n a_n t^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

• La fonction :

$$\psi = 4(1 - t^2)\varphi''(t) - 4t\varphi'(t) + \varphi(t)$$

est la somme sur  $]-R, R[$  de la série entière :

$$\Psi = 4(1 - t^2)\Phi''(t) - 4t\Phi'(t) + \Phi(t)$$

de rayon de convergence  $S \geq R$ . Par calcul, on obtient :

$$\Psi = 4(1 - t^2) \sum_n n(n-1)a_n t^{n-2} - 4t \sum_n n a_n t^{n-1} + \sum_n a_n t^n$$

soit :

$$\Psi = \sum_n (4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (4n^2 - 1)a_n) t^n.$$

• La fonction  $\varphi$  est une solution de (Eh) au voisinage de 0 si, et seulement si, la somme de la série entière  $\Psi$  est nulle au voisinage de 0. Comme  $\Psi$  est de rayon de convergence non nul, c'est le cas si, et seulement si, on a :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = \left(\frac{1}{2} - n\right) \left(\frac{1}{2} - n - 1\right) a_n$$

pour tout  $n$  et par suite :

$$a_{2p} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 2p + 2\right) \left(\frac{1}{2} - 2p + 1\right)}{(2p)!} a_0$$

soit  $a_{2p} = \binom{1/2}{2p} a_0$  et, de même,  $a_{2p+1} = \binom{1/2}{2p+1} a_1$  pour tout  $p$ .

Les fonctions :

$$\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} t^n$$

et :

$$\sqrt{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} t^n,$$

sommes des séries entières de rayon de convergence 1 sont donc des solutions de (Eh) sur  $I$ . La famille libre :

$$(\sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$$

est un système fondamental de solutions de (Eh).

La recherche de solutions développables en série entière peut être aussi utilisée pour étudier des équations singulières.

*Exemple* Considérons l'équation réelle :

$$4tx''(t) + 2x'(t) - x(t) = 0. \tag{Eh}$$

L'équation (E) a une singularité en 0. Elle est régulière sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

- Soit  $\varphi(t)$  la fonction somme d'une série entière  $\Phi = \sum_n a_n t^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

1. La fonction :

$$\psi = 4t\varphi''(t) + 2\varphi'(t) - \varphi(t)$$

est la somme sur  $] -R, R[$  de la série entière :

$$\Psi = 4t\Phi''(t) + 2\Phi'(t) - \Phi(t)$$

de rayon de convergence  $S \geq R$ . Par calcul, on obtient :

$$\Psi = 4t \sum_n n(n-1)a_n t^{n-2} + 2 \sum_n na_n t^{n-1} - \sum_n a_n t^n$$

soit :

$$\Psi = \sum_n ((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n) t^n.$$

- 2. La fonction  $\varphi$  est une solution de (Eh) au voisinage de 0 si et seulement si la somme de la série entière  $\Psi$  est nulle au voisinage de 0. Comme  $\Psi$  est de rayon de convergence non nul, c'est le cas si, et seulement si, on a :

$$(2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0$$

par suite :

$$a_n = \frac{1}{(2n)!} a_0$$

pour tout  $n$ .

- 3. La fonction :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^n,$$

somme d'une série entière de rayon de convergence infini, est donc une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

- Considérons (Eh) sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Il est facile de remarquer que la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{R}_+^*$  est la fonction  $\text{ch } \sqrt{t}$ . Cela suggère d'étudier  $\text{sh } \sqrt{t}$ . On vérifie immédiatement que cette fonction est aussi solution de (E). La famille libre :

$$(\text{ch } \sqrt{t}, \text{sh } \sqrt{t}),$$



est donc un système fondamental de solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  et la solution générale de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  est de la forme :

$$\psi_+(t) = \alpha_+ \operatorname{ch} \sqrt{t} + \beta_+ \operatorname{sh} \sqrt{t}$$

avec  $(\alpha_+, \beta_+) \in \mathbb{R}^2$ .

- Considérons (Eh) sur  $\mathbb{R}_-^*$ . En tenant compte du signe, on remarque de même que la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{R}_-^*$  est la fonction  $\cos \sqrt{|t|}$ . On obtient alors comme dans le point précédent que la famille :

$$\left( \cos \sqrt{|t|}, \sin \sqrt{|t|} \right)$$

est un système fondamental de solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$  et que la solution générale de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$  est :

$$\psi_-(t) = \alpha_- \cos \sqrt{|t|} + \beta_- \sin \sqrt{|t|}$$

où  $(\alpha_-, \beta_-) \in \mathbb{R}^2$ .

- On peut alors résoudre l'équation singulière (Eh) sur  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $\chi$  de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  deux fois dérivable vérifiant (E) sera de la forme  $\psi_+(t)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\psi_-(t)$  sur  $\mathbb{R}_-^*$ . En particulier, la dérivée  $\chi'$  étant continue, la fonction :

$$\psi'_+(t) = \alpha_+ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{t}}{2\sqrt{t}} + \beta_+ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$$

admet  $\chi'(0)$  comme limite en 0. Cela impose  $\beta_+ = 0$ . On obtient de la même façon  $\beta_- = 0$ . Par continuité de  $\chi$  en 0, on trouve alors  $\alpha_+ = \alpha_-$ . Les solutions de (E) définies sur  $\mathbb{R}$  sont donc les applications de la forme :

$$\chi(t) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^n.$$

L'espace des solutions de (Eh) définies sur  $\mathbb{R}$  est donc un espace vectoriel de dimension 1.

Lorsque l'on connaît une solution  $\varphi_1$  de (Eh) ne s'annulant pas sur  $I$ , on peut obtenir une solution  $\varphi_2$  de cette équation indépendante de  $\varphi_1$  de l'une des façons suivantes.

- *Méthode de variation de la constante.* On écrit  $\varphi_2 = \lambda \varphi_1$ . En exprimant que  $\varphi_2$  est solution de (Eh), on obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre en  $\lambda'$  :

$$a_2 \varphi_1 (\lambda')' + (2a_2 \varphi_1' + a_1 \varphi_1) \lambda' = 0.$$

On résout alors cette équation en calculant  $\lambda'$  puis  $\lambda$ .

- *Méthode du wronskien* On peut aussi rechercher  $\varphi_2$  en utilisant le wronskien  $W$  de  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Il existe en effet  $\alpha \in \mathbf{K}$  tel que l'on ait :

$$W(t) = \alpha \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds \right).$$

La relation :

$$\left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)' = \frac{\varphi_2' \varphi_1 - \varphi_2 \varphi_1'}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}$$

permet alors d'obtenir  $\varphi_2/\varphi_1$  par primitivation et par suite  $\varphi_2$ .

**Exemple** Considérons l'équation réelle :

$$x''(t) - \tan t x'(t) + 2x(t) = 0 \tag{Eh}$$

sur  $I = ]-\pi/2, \pi/2[$ .

On vérifie aisément que la fonction  $\varphi_1(t) = \sin t$  est une solution de (Eh). Cette solution s'annule sur  $I$ . On se placera donc sur l'un des sous-intervalles  $]-\pi/2, 0[$  et  $]0, \pi/2[$ .

- *Méthode de variation de la constante.* Cherchons une solution indépendante de la forme  $\varphi_2 = \lambda \varphi_1$  sur l'un des sous-intervalles précisés. On obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre en  $\lambda'$  :

$$\lambda'' \sin t + \left( 2 \cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t} \right) \lambda' = 0$$

et par suite :

$$\lambda' = \exp \left( \int \left( -2 \frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos t} \right) dt \right) = \alpha \frac{1}{\sin^2 t \cos t}$$

où  $\alpha$  appartient à  $\mathbb{R}^*$  et l'intégrale indéfinie  $\int f(t) dt$  désigne une primitive quelconque de la fonction  $f(t)$ . En écrivant :

$$\lambda' = \alpha \left( \frac{1}{\cos t} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right),$$

il vient :

$$\lambda = \alpha \left( \ln \left| \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{\sin t} \right) + \beta$$

et :

$$\varphi_2 = \alpha \left( \sin t \ln \left| \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - 1 \right) + \beta \sin t.$$

Ces fonctions étant de classe  $C^\infty$  sur  $I$ , la famille :

$$\left( \sin t, \sin t \ln \left| \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - 1 \right)$$

est un système fondamental de solutions, non seulement sur  $]-\pi/2, 0[$  et  $]0, \pi/2[$ , mais aussi sur  $]-\pi/2, \pi/2[$ .

- *Méthode du wronskien* Le wronskien  $W$  de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est donné par :

$$W(t) = \exp \left( \int \tan t \, dt \right) = \alpha \frac{1}{\cos t}$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . On a alors :

$$\left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)' = \alpha \frac{1}{\sin^2 t \cos t}$$

ce qui conduit aux mêmes conclusions que dans le point précédent :

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \alpha \left( \ln \left| \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{\sin t} \right) + \beta$$

et :

$$\varphi_2 = \alpha \left( \sin t \ln \left| \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - 1 \right) + \beta \sin t.$$

Comme on le remarque, les deux méthodes ne sont pas très éloignées. Elles conduisent néanmoins dans certains cas à des calculs assez différents.

### 3.4 Espace des solutions de l'équation complète

On continue l'étude de l'équation différentielle :

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = b. \tag{E}$$

On note  $S_0(I)$  l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène :

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = 0 \tag{Eh}$$

et  $S(I)$  l'ensemble des solutions de (E).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montrant que l'ensemble  $S(I)$  n'est pas vide on a la proposition suivante :

**Proposition 38**

L'ensemble  $S(I)$  est un sous-espace affine de direction  $S_0(I)$  de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ .

Comme dans le cas des équations vectorielles d'ordre 1, lorsque l'on connaît un système fondamental  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de solutions de (Eh), la résolution de (E) se ramène à la détermination d'une solution, dite solution particulière, de (E).

Si  $\psi_p$  est une telle solution de (E), toute solution de  $\psi$  de (E) s'écrit alors sous la forme unique :

$$\psi = \psi_p + \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi \in S_0(I)$$

ou :

$$\psi = \psi_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad \text{avec} \quad (\alpha_i) \in \mathbf{K}^n.$$

On obtient alors l'unique solution vérifiant la condition  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$  en déterminant l'unique solution  $\varphi \in S_0(I)$ , ou la famille  $(\alpha_i)$  correspondante, telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad \varphi^{(k)}(t_0) = x_k - \psi_p^{(k)}(t_0).$$

Il peut arriver que l'on trouve directement une solution de (E). Si ce n'est pas le cas, on appliquera la méthode de variation des constantes à l'équation différentielle vectorielle d'ordre 1 associée.

Nous nous limiterons dans ce qui suit au cas  $n = 2$ .

- *Méthode de la variation des constantes.* On utilisera cette méthode lorsque l'on connaît un système fondamental  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de solutions de (Eh).

- Quel que soit  $\psi \in \mathcal{C}^2(I)$ , il existe deux applications  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^1(I)^2$  telles que :

$$\begin{cases} \psi &= \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \\ \psi' &= \lambda_1 \varphi_1' + \lambda_2 \varphi_2' \end{cases}.$$

En dérivant la première relation, on voit que l'on a nécessairement :

$$\lambda_1' \varphi_1 + \lambda_2' \varphi_2 = 0.$$

- La fonction  $\psi$  est alors solution de (E) si, et seulement si :

$$\lambda_1' \varphi_1' + \lambda_2' \varphi_2' = \frac{b}{a_2}.$$

Le système :

$$\begin{cases} \lambda_1' \varphi_1 + \lambda_2' \varphi_2 &= 0 \\ \lambda_1' \varphi_1' + \lambda_2' \varphi_2' &= \frac{b}{a_2} \end{cases}$$

en  $(\lambda_1', \lambda_2')$  est un système de Cramer puisque son déterminant est le wronskien de  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . On calculera donc  $(\lambda_1', \lambda_2')$  et ensuite  $(\lambda_1, \lambda_2)$  par quadratures.

- On obtiendra alors une solution particulière de (E) par :

$$\psi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2.$$

- *Méthode de la variation de la constante.* On utilisera cette méthode lorsque l'on connaît une solution  $\varphi_1$  de (Eh) ne s'annulant pas sur  $I$ .

On cherche une solution  $\psi$  de (E) en posant  $\psi = \lambda\varphi_1$ . En exprimant que  $\psi$  est solution de (E), on obtient en effet une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $\lambda'$  :

$$a_2\varphi_1(\lambda')' + (2a_2\varphi_1' + a_1\varphi_1)\lambda' = b$$

que l'on résoudra en calculant  $\lambda'$  puis  $\lambda$ .

*Exemple* Considérons l'équation :

$$4(1 - t^2)x''(t) - 4tx'(t) + x(t) = \frac{1}{1 - t} \tag{E}$$

sur  $I = ]-1, 1[$ .

Nous avons vu dans l'exemple de la page 959 que la famille :

$$(\sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$$

est un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée à (E). La méthode de la variation des constantes consiste à rechercher les solutions  $\psi$  de (E) vérifiant :

$$\begin{cases} \psi &= \lambda_1\sqrt{1+t} + \lambda_2\sqrt{1-t} \\ \psi' &= \lambda_1\frac{1}{2\sqrt{1+t}} - \lambda_2\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \end{cases}$$

avec  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^1(I)^2$ . Nous avons vu que l'on a alors :

$$\begin{cases} \lambda_1'\sqrt{1+t} + \lambda_2'\sqrt{1-t} &= 0 \\ \lambda_1'\frac{1}{2\sqrt{1+t}} - \lambda_2'\frac{1}{2\sqrt{1-t}} &= \frac{1}{4(1-t^2)(1-t)} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \lambda_1' &= \frac{1}{4(1-t)\sqrt{1+t}} \\ \lambda_2' &= -\frac{1}{4(1-t)\sqrt{1-t}} \end{cases}$$

Cela donne :

$$\lambda_1 = \int \frac{1}{4(1-t)\sqrt{1+t}} dt = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+t}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+t}} + \alpha_1$$

et :

$$\lambda_2 = \int \frac{-1}{4(1-t)\sqrt{1-t}} dt = \frac{-1}{2\sqrt{1-t}} + \alpha_2.$$

La solution générale de (E) est donc :

$$\psi(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} \sqrt{1+t} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+t}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+t}} + \alpha_1\sqrt{1+t} + \alpha_2\sqrt{1-t}$$

L'expression générale de la solution d'une équation différentielle linéaire complète peut servir pour obtenir des propriétés d'applications de variables réelles.

### Exemples

1. Toute application  $f$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f' + f) = 0$$

tend vers 0 à l'infini.

On peut, en effet, considérer que  $f$  est solution de l'équation  $x' + x = b$  où  $b = f' + f$  tend vers 0 à l'infini. La résolution de l'équation différentielle fournit alors :

$$f(t) = \alpha e^{-t} + e^{-t} \int_0^t b(s) e^s ds$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour conclure, il nous suffira de prouver que  $e^{-t} \int_0^t b(s) e^s ds$  tend vers 0 à l'infini.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

• Il existe  $A$  tel que  $|b(t)| \leq \varepsilon/2$  pour tout  $t \geq A$ . On en déduit :

$$\forall t \geq A, \quad \left| e^{-t} \int_A^t b(s) e^s ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( e^{-t} \int_A^t e^s ds \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

• Puisque  $e^{-t} \int_0^A b(s) e^s ds$  tend vers 0 à l'infini, il existe  $B \geq A$  tel que :

$$\forall t \geq B, \quad \left| e^{-t} \int_0^A b(s) e^s ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, on a  $B$  tel que :

$$\forall t \geq B, \quad \left| e^{-t} \int_0^t b(s) e^s ds \right| \leq \varepsilon.$$

2. Toute application  $f$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f''(t) + m^2 f(t) \geq 0$$

avec  $m \in \mathbb{R}_+^*$  satisfait l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) + f\left(t + \frac{\pi}{m}\right) \geq 0.$$

On peut, ici aussi, considérer que  $f$  est solution de l'équation  $x'' + m^2 x = b$  où  $b = f'' + m^2 f$  est positive. La résolution de l'équation différentielle par variation

des constantes fournit alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha \cos mt + \beta \sin mt \\ &+ \cos mt \int_0^t b(s) \frac{-\sin ms}{m} ds + \sin mt \int_0^t b(s) \frac{\cos ms}{m} ds \\ &= \alpha \cos mt + \beta \sin mt - \int_0^t b(s) \frac{\sin m(s-t)}{m} ds \end{aligned}$$

avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} f(t) + f\left(t + \frac{\pi}{m}\right) &= - \int_0^t b(s) \frac{\sin m(s-t)}{m} ds + \int_0^{t+\frac{\pi}{m}} b(s) \frac{\sin m(s-t)}{m} ds \\ &= \int_t^{t+\frac{\pi}{m}} b(s) \frac{\sin m(s-t)}{m} ds \end{aligned}$$

et finalement  $f(t) + f\left(t + \frac{\pi}{m}\right) \geq 0$  pour tout  $t$  puisque  $b$  et  $\sin m(s-t)$  sont positifs pour tout  $s$  de  $\left[t, t + \frac{\pi}{m}\right]$ .

### 3.5 Équations à coefficients constants

On considère dans ce paragraphe une équation à coefficients constants :

$$u_n x^{(n)} + \dots + u_0 x = b \tag{E}$$

avec  $(u_k) \in \mathbb{K}^{n+1}$  ( $u_n \neq 0$ ) et  $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ .

► **Attention** Dans une telles équations, les coefficients  $(u_k)$  sont constants mais le second membre est une application de  $I$  vers  $\mathbb{K}$ .

**Solutions de l'équation homogène**

On appelle polynôme caractéristique de l'équation (E) (ou de (Eh)), le polynôme :

$$C(X) = u_n X^n + \dots + u_0.$$

**Remarque** Il s'agit à un scalaire près du polynôme caractéristique de la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\frac{u_0}{u_n} & -\frac{u_1}{u_n} & \dots & -\frac{u_{n-1}}{u_n} \end{pmatrix}$$

du système du premier ordre associé.

Notons  $F$  l'espace vectoriel  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  et  $D$  l'endomorphisme  $\varphi \mapsto \varphi'$  de  $F$ . L'endomorphisme  $C(D)$  est l'application linéaire :

$$L : \varphi \in F \mapsto u_n \varphi^{(n)} + \dots + u_0 \varphi \in F.$$

**Proposition 39**

Si le polynôme caractéristique de (Eh) se factorise sur  $\mathbb{K}$  sous la forme :

$$\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i},$$

alors la famille :

$$(t^a e^{\lambda_i t} \mid i \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ et } a \in \llbracket 1, m_i - 1 \rrbracket)$$

est un système fondamental de solutions de (Eh) sur  $\mathbb{K}$ .

**Démonstration** Le sous-espace  $S_0(\mathbb{R})$  des solutions de (Eh) est le noyau de l'endomorphisme  $C(D)$ .

Le lemme des noyaux fournit la décomposition :

$$\text{Ker } C(D) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker } (D - \lambda_i \text{Id}_F)^{m_i}.$$

Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On peut écrire tout élément  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  de façon unique sous la forme  $\varphi = e^{\lambda_i t} \psi$ . La règle de dérivation d'un produit montre que l'on a :

$$(D - \lambda_i \text{Id}_F)(\varphi) = e^{\lambda_i t} D(\psi)$$

et par récurrence :

$$(D - \lambda_i \text{Id}_F)^{m_i}(\varphi) = e^{\lambda_i t} D^{m_i}(\psi).$$



Ainsi la famille :

$$(t^a e^{\lambda_i t} \mid a \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket)$$

est une base du sous-espace noyau considéré.

La proposition s'en déduit immédiatement □

**Proposition 40**

Supposons  $(a_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Si le polynôme caractéristique de (Eh) se factorise sur  $\mathbb{C}$  sous la forme :

$$\prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{\ell_j} \prod_{k=1}^s (X - \mu_k)^{m_k} \prod_{k=1}^s (X - \overline{\mu_k})^{m_k}$$

avec  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  pour tout  $j$  et  $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  pour tout  $k$ , alors la famille :

$$(t^a e^{\lambda_j t}, t^b e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t, t^b e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t)$$

où  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $a \in \llbracket 0, \ell_j - 1 \rrbracket$  et  $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$ ,  $b \in \llbracket 0, m_k - 1 \rrbracket$  est un système fondamental de solutions réelles de (Eh).

**Démonstration** Il est immédiat par les formules d'Euler que la famille proposée est une base de l'espace des solutions complexes de (Eh).

Comme elle est formée de fonctions réelles, c'est aussi une base de l'espace des solutions réelles de cette équation. □

**Solutions de l'équation complète**

Les méthodes générales, comme celle de la variation des constantes, s'appliquent évidemment au cas des équations à coefficients constants. Il est néanmoins fréquent de rencontrer la situation où le second membre de (E) est de la forme d'une exponentielle polynôme :

$$b(t) = e^{\lambda t} P(t)$$

avec  $P(t) \in \mathbf{K}[t]$ .

**Proposition 41**

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  de multiplicité  $r$  (éventuellement nulle) dans le polynôme caractéristique  $C(X)$ .

- L'application :

$$u : Q(t) \longmapsto e^{-\lambda t} L(e^{\lambda t} Q(t))$$

est un endomorphisme de  $\mathbf{K}[t]$ .

- On a  $\deg u(Q) = \deg Q - r$  pour tout  $Q \in \mathbf{K}[t]$ . En particulier l'application  $u$  est surjective de noyau  $\mathbf{K}_{r-1}[t]$  avec  $\mathbf{K}_{-1}[t] = \{0\}$ .

**Démonstration** On vérifie aisément la relation Leibniz-Hörmander :

$$e^{-\lambda t} L (e^{\lambda t} Q(t)) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} C^{(k)}(\lambda) Q^{(k)}(t)$$

par bilinéarité sur  $(C(X), Q(X))$ .

L'application  $u$  définit donc un endomorphisme de  $\mathbb{K}[t]$ . Si  $Q$  est de degré  $q \neq -\infty$ , les relations :

$$u(Q) = \sum_{k=r}^n \frac{1}{k!} C^{(k)}(\lambda) Q^{(k)}(t)$$

et  $C^{(r)}(\lambda) \neq 0$  montrent que  $u(Q)$  est de degré  $q - r$ . On obtient l'image et le noyau de  $u$  en considérant la famille  $(u(t^k))_{k \geq r}$ , image de la base  $(t^k)$ . □

**Corollaire 42**

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  d'ordre de multiplicité  $r$  dans  $C(X)$ . Pour tout second membre de la forme  $b(t) = e^{\lambda t} P(t)$  où  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $p$ , il existe une solution particulière de (E) de la forme  $e^{\lambda t} Q(t)$  où  $Q$  est un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $p + r$  unique à la somme d'un élément de  $\mathbb{K}_{r-1}[X]$  près.

Tout cela n'est qu'une simple généralisation de ce qui a été vu en détail en première année dans le cas des équations linéaires à coefficients constants d'ordre 2.

## EXERCICES

On s'autorisera souvent l'abus de notation  $\int_{\alpha}^{\beta} f$  pour  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  lorsque la variable ne figure pas dans l'expression de  $f$  utilisée.

### Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. On considère l'équation différentielle  $y' + a(x)y = b(x)$ ,  $a$  et  $b$  continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de période 1. Déterminer les conditions sur  $a$  et  $b$  pour qu'il existe une unique solution de période 1.

**2. Lemme de Gronwall**

Soit  $c$  une constante réelle, et  $u$  et  $v$  deux applications continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ , la fonction  $v$  étant *positive* (l'autre ne l'est pas nécessairement) et vérifiant :

$$\forall x \geq 0, \quad u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)dt$$

Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad u(x) \leq c \exp\left(\int_0^x v(t)dt\right).$$

3. Considérons l'équation différentielle  $y' \sin^3 x = 2y \cos x$ . Dimension de l'espace des solutions sur  $[0, 4\pi]$ .

4. Trouver les solutions sur tout  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes :

1.  $xy' + 2y = \frac{x^2}{1+x^2}$  ;

2.  $xy' + y = e^x$ .

5. Trouver les solutions maximales réelles de l'équation différentielle  $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$ .

6. Soit  $(E_n) : y' - ny = -nf, n \in \mathbb{N}^*, f$  bornée et uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $\varphi_n$  une solution de  $(E_n)$  bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

1. Montrer que  $\varphi_n$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. Montrer que  $(\varphi_n)$  converge uniformément vers  $f$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

7. Soient  $f$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\alpha > 0$ . On considère l'équation différentielle  $(E) : xy' - \alpha y = f$ .
1. Soit  $y$  une solution de  $(E)$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ ; montrer que  $y$  se prolonge en une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
  2. On suppose  $\alpha > 1$ ; montrer que  $y$  prolongée en 0 est de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^+$ .
8. Soient  $\alpha > 0$  et  $f$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ ; on suppose que  $f + f'$  est équivalent à  $x^\alpha$  en  $+\infty$ . Montrer que  $f(x) \sim x^\alpha$  en  $+\infty$ .

## Systèmes différentiels linéaires

9. Résoudre le système différentiel  $X' = AX$ , avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Résoudre les systèmes différentiels :

1.  $\frac{dx}{dt} = y + z$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x + 2y + z$ ,  $\frac{dz}{dt} = x + z$ ;
2.  $x'' = 3x + y + e^{2t}$  et  $y'' = 2x + 2y + 3e^t$ ;
3.  $x'' + 3y' - 4x + 6y = y'' + x' - 2x + 4y = 0$ ;
4.  $\{x'' = (a^2 + b)x + by, \quad y'' = -bx + (a^2 - b)y\}$ , où  $a$  et  $b$  sont réels.

11. 1. Résoudre le système différentiel :

$$x' = tx + y, \quad y' = x + ty.$$

2. Montrer que, pour  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , le système différentiel  $X' = A(t)X$  n'admet pas de solution de la forme  $\exp\left(\int_0^t A(\tau) d\tau\right) \cdot X_0$ .

12. 1. Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre 3 complexe, de polynôme caractéristique  $\chi_A(\xi) = (\xi - \lambda)^3$ , telle que le noyau de  $A - \text{Id}$  soit de dimension 1. Rappelez brièvement pourquoi il existe trois vecteurs non nuls  $v_1, v_2, v_3$  tels que  $Av_1 = \lambda v_1$ ,  $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$  et  $Av_3 = v_2 + \lambda v_3$ .

Exprimer en fonction de ces trois vecteurs la solution générale du système différentiel :  $X' = AX$ .

2. Application. Résoudre sur  $\mathbb{R}^{*+}$  le système différentiel :

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{t} (x - 3y + 3z, -2x - 6y + 13z, -x - 4y + 8z).$$

13. Résoudre sur  $\mathbb{R}^{++}$  le système différentiel :

$$X' = Y - t^4 I_n, \quad t^2 Y' = 2tY - 2X + t^5 I_n,$$

où les  $X(t)$  et  $Y(t)$  cherchés sont des matrices carrées d'ordre  $n$  réelles.

14. Résoudre le système différentiel dont les inconnues sont des fonctions réelles :

$$X' = A(t)X, \quad \text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t & t \\ t & 0 & -t \\ -t & t & 0 \end{pmatrix}.$$

15. 1. Soit  $A$  une application de  $\mathbb{R}^+$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  continue. On suppose que la fonction  $t \mapsto A(t)$  est intégrable. Montrer que toute solution  $X$  de  $X'(t) = A(t)X(t)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  et admet une limite en  $+\infty$ . *Indication : On pourra utiliser le lemme de Gronwall de l'exercice 2*

2. *Application.* On considère l'équation différentielle scalaire :

$$y''(t) + \frac{1}{t^2}y'(t) + y(t) = 0.$$

Montrer que, pour toute solution  $y$  sur  $\mathbb{R}^{++}$ , il existe  $\alpha$  et  $\beta$  réels tels que  $y(t) - \alpha \cos t - \beta \sin t$  tende vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.

16. Soit  $t \mapsto X(t)$  une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $M_p(\mathbb{R})$ . Montrer que si, pour tout  $t$ ,  $X(t)$  est une matrice de rotation, alors il existe une application continue  $A$  de  $\mathbb{R}$  dans l'ensemble des matrices antisymétriques de taille  $p$  telle que, pour tout  $t$ ,  $X'(t) = X(t)A(t)$ . Réciproque ?

17. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice complexe. Montrer que les solutions du système différentiel  $X'(t) = AX(t)$  tendent toutes vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  si, et seulement si, les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négative.

18. Soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice carrée  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , et soient  $v_0, v_1, \dots, v_k$  des vecteurs de  $\mathbb{C}^n$ . On note  $G = A - \lambda \text{Id}$ .

1. Montrer que, si l'on pose :  $Q(t) = v_0 + tv_1 + t^2v_2 + \dots + t^{k-1}v_{k-1}$ , la fonction  $t \mapsto e^{t\lambda}Q(t)$  est solution de  $X' = AX$  si, et seulement si :

$$(**) \quad \begin{cases} v_1 = Gv_0 \\ 2v_2 = Gv_1 \\ \vdots \\ (k-1)v_{k-1} = Gv_{k-2} \\ 0 = Gv_{k-1} \end{cases}$$

2. Montrer que  $Q(t) = \exp(tG) \cdot v_0$ .
3. En déduire  $k$  solutions indépendantes de  $X' = AX$ .
4. Appliquer ce calcul à la résolution de  $X' = AX$ , où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

## Équations scalaires d'ordre supérieur ou égal à 2

19. Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  un polynôme à coefficients complexes dont les zéros ont tous une partie réelle strictement négative. Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction de classe  $C^n$  telle que :

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1f'(x) + a_0f(x)$$

tende vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f(x)$  tend vers 0 si  $x$  tend vers  $+\infty$ .

20. 1. Donner un exemple simple d'équation différentielle linéaire

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0,$$

à coefficients polynomiaux réels  $a, b, c$ , où  $a$  n'est pas identiquement nul, dont l'espace vectoriel des solutions sur tout intervalle centré en 0 soit de dimension nulle.

2. Cet espace peut-il être de dimension 4 ? On pourra considérer une équation d'Euler de solutions choisies *a priori*.
3. De dimension paire quelconque ? On pourra poser

$P(X) = X^3 \prod_{q=1}^{k-1} (X - q)^3$ ,  $Q(X) = XP(X)$ , et considérer l'équation différentielle :

$$(\mathcal{ED}) \quad \begin{vmatrix} y & P(x) & Q(x) \\ y' & P'(x) & Q'(x) \\ y'' & P''(x) & Q''(x) \end{vmatrix} = 0.$$

4. De dimension infinie ?
5. Soit  $R > 0$  fixé, et  $a, b, c$  des fonctions réelles développables en série entière sur  $I = ]-R, R[$ , la fonction  $a$  étant non identiquement nulle. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel  $E$  des solutions de l'équation différentielle  $ay'' + by' + cy = 0$  développables en série entière sur  $]-R, R[$  ne dépasse pas 2.

**21.** 1. Soient  $a, b, c$  des fonctions réelles continues sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , telles que ni  $a$  ni  $c$  ne s'annulent sur  $I$ . Trouver une condition *suffisante* simple (sous forme d'une équation différentielle vérifiée par  $a, b$ , et  $c$ ) pour qu'il existe un changement de variable  $t = f(x)$  (donc un  $C^1$ -difféomorphisme  $f$ ) transformant l'équation différentielle  $(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$  en une équation linéaire à coefficients constants.

2. Appliquer cette méthode à l'équation différentielle (sur  $\mathbb{R}^{**}$ ) :

$$y'' + \frac{2}{x+1}y' + \frac{y}{x^2(1+x)^2} = 0.$$

**22.** Résoudre les équations différentielles :

1.  $y'' + 4y = 2 \tan x$ ;

2.  $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

**23.** Résoudre les équations différentielles :

1.  $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$ ;

2.  $(x-1)y'' - xy' + y = e^{2x}(x-1)^2$ .

**24.** Trouver les solutions maximales des équations différentielles suivantes :

1.  $x^3y'' + xy' - y = -e^{1/x}$ ;

2.  $2(x-x^2)y'' + (x-2)y' - y = 0$ ;

3.  $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$ .

**25.** Résoudre les équations différentielles suivantes en commençant par chercher une solution développable en série entière :

1.  $(E_1) : x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$  ;

2.  $(E_2) : xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$ .

**26.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Chercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :  $(E) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ .

Existe-t-il des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles on puisse trouver des solutions (non nulles) développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  ?

27. Résoudre les équations différentielles :

1.  $x^2y'' + xy' - (x^2 + x + 1)y = 0$  ;

2.  $xy'' + 2y' + xy = 0$ .

28. Résoudre l'équation différentielle :

$$4x^2(x^2 - 1)y'' + 4x(2x^2 - 1)y' + y = 0.$$

## Étude qualitative des équations d'ordre 2

29. Soit  $p$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Montrer que toutes les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + p(x)y = 0$  s'annulent au moins une fois sauf si  $p = 0$ .

30. Soient  $a, b, c$  des fonctions continues,  $a$  ne s'annulant pas sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer que les zéros d'une solution non nulle de  $ay'' + by' + cy = 0$  n'ont pas de point d'accumulation dans  $I$ .

## 31. Théorie de Sturm

1. Soient  $q_1$  et  $q_2$  deux fonctions réelles continues sur  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha < \beta$ , telles que  $q_1 \leq q_2$  mais non identiques. Soit  $k$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$  telle que, pour tout  $x \in [\alpha, \beta]$ ,  $k(x) > 0$ . Soient enfin  $y_1$  et  $y_2$  des fonctions deux fois dérivables sur  $[\alpha, \beta]$  vérifiant  $(ky_1)' + q_1y_1 = 0$  et  $(ky_2)' + q_2y_2 = 0$ .

On suppose que  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux zéros consécutifs de  $y_1$  (voir l'exercice 30). Montrer que  $y_2$  s'annule sur  $] \alpha, \beta [$ . On pourra considérer le déterminant :

$$H(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

2. Soit  $y_2$  une solution non nulle de  $y'' + e^xy = 0$ . Montrer que la distance entre deux zéros positifs consécutifs de  $y_2$  est inférieure ou égale à  $\pi$ . Montrer que l'ensemble des zéros positifs de  $y_2$  peut être rangé en une suite  $(\alpha_n)$  croissante et tendant vers l'infini. Montrer que  $\alpha_{n+1} - \alpha_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3. Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $k$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et  $q$  une fonction continue sur  $I$ . On considère maintenant deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  linéairement indépendantes de la même équation différentielle  $(ky')' + qy = 0$ . Montrer que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux zéros consécutifs de  $y_1$  il existe un zéro de  $y_2$  dans l'intervalle ouvert  $] \alpha, \beta [$ .



- 32** Considérons l'équation différentielle  $y'' = g(x)y$ , où  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue positive ne s'annulant pas sur un intervalle non réduit à un point (autrement dit l'ensemble des  $x$  où  $g$  ne s'annule pas est dense).
1. Soit  $y$  une solution non identiquement nulle. Montrer que  $yy'$  s'annule au plus en un point.
  2. Soit  $y_a$  la solution définie par  $y_a(0) = 1$  et  $y'_a(0) = a$ . Montrer que si  $a \neq b$  les graphes de  $y_a$  et  $y_b$  ne se coupent qu'à l'origine.
- 33** Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . Montrer que l'équation différentielle  $y'' + f(t)y = 0$  admet des solutions *non* bornées en  $+\infty$ .
- Indication : On pourra établir que la dérivée d'une solution bornée a une limite en  $+\infty$ , voir laquelle, et, par l'absurde, considérer le Wronskien de deux solutions.*
- Montrer sur un exemple qu'il se peut qu'une solution bornée n'ait pas de limite en  $+\infty$ . *Indication : On prendra  $y$  de la forme  $y(t) = 2 + \sin(t^\alpha)$ .*
- 34.** Soit l'équation différentielle  $(E) : y'' - f(x)y = g(x)$  avec  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $a < b$ , et  $f \geq 0$ .
1. Montrer qu'il existe au plus une solution de  $(E)$  s'annulant en  $a$  et  $b$ .
  2. Montrer qu'il existe deux solutions  $u$  et  $v$  de  $y'' - f(x)y = 0$  vérifiant les conditions  $u(a) = 0, u'(a) = 1$  et  $v(b) = 0, v'(b) = 1$ . Montrer qu'elles forment un système fondamental de solutions.
  3. Montrer qu'il existe une unique solution de  $(E)$  s'annulant en  $a$  et  $b$  et l'exprimer à l'aide de  $u$  et  $v$ .
- 35** Soit  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante et bornée de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que les solutions de  $(E) : y'' + y = g$  sont bornées. Montrer qu'il existe une unique solution de  $(E)$  qui a une limite finie en  $+\infty$ .



## Chapitre 24

# Équations différentielles : cas général

Dans tout ce chapitre,  $(E, \| \cdot \|)$  désigne un espace vectoriel normé *réel* de dimension finie  $n$  et  $k$  un entier supérieur ou égal à 1.

Tous les intervalles considérés auront au moins deux éléments.

## 1. Équations différentielles autonomes du premier ordre

### 1.1 Solutions d'une équation différentielle

#### Définition 1

Si  $f$  est une application de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  d'un ouvert  $U$  de  $E$  vers  $E$ , on appelle *solution* de l'équation différentielle autonome du premier ordre :

$$x' = f \circ x \tag{E}$$

toute application dérivable  $\varphi$  d'un intervalle ayant au moins deux éléments  $I_\varphi$  de  $\mathbb{R}$  vers  $E$  vérifiant la relation :

$$\forall t \in I_\varphi, \quad \varphi(t) \in U \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = f(\varphi(t)).$$

On dit que l'équation (E) est définie sur  $U$  et qu'elle est associée à l'application  $f$ . Dans la pratique, on la notera  $x' = f(x)$  ou, même,  $x'(t) = f(x(t))$  pour préciser le nom de la variable libre

On appelle *système différentiel autonome du premier ordre* toute équation différentielle :

$$(x'_i) = (f_i(x_1, \dots, x_n)) \quad (S)$$

définie sur un ouvert  $U$  d'un espace numérique  $\mathbb{R}^n$ . Il est associé à l'application  $(f_i)$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}^n$ . Une solution de (S) est alors une application  $(\varphi_i)$  d'un intervalle  $I$  ayant au moins deux éléments vers  $\mathbb{R}^n$ .

En fait, un système différentiel autonome n'est que l'expression analytique dans une base de  $E$  d'une équation différentielle autonome. Nous étudierons particulièrement les cas de dimension 1 ou 2.

- Un système différentiel autonome unidimensionnel est simplement une équation différentielle scalaire de la forme :

$$x' = f(x)$$

où  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^p$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

- Un système différentiel autonome bidimensionnel est de la forme :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

où  $(f, g)$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}^2$

**Remarque** On dit que l'équation différentielle autonome (E) est *linéaire* lorsqu'elle est associée à une application affine de  $E$  dans lui-même. Elle est alors de la forme :

$$x' = u \cdot x + v$$

avec  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $v \in E$  où  $u \cdot x$  désigne  $u(x)$ .

On fera alors attention au changement de terminologie entre ce chapitre et celui consacré aux équations différentielles linéaires où, par définition, une solution est une application vérifiant (E) définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Dans ce qui suit, nous utiliserons la définition donnée ci-dessus et nous préciserons «solution définie sur  $\mathbb{R}$ » s'il le faut.

## Régularité des solutions

### Proposition 1

Toute solution  $\varphi$  de l'équation différentielle autonome (E) est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ .

**Démonstration** La relation :

$$\forall t \in I_\varphi, \quad \varphi'(t) = f(\varphi(t))$$

montre que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On montre qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  par récurrence □

## Condition de Cauchy

### Définition 2

On dit qu'une solution  $\varphi$  de (E) vérifie la *condition de Cauchy*  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ , si l'on a :

$$t_0 \in I_\varphi \quad \text{et} \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

On parle aussi de *condition initiale*. On appelle *problème de Cauchy* la recherche des solutions vérifiant une condition de Cauchy.

## Solutions maximales

Il est clair que lorsque  $\varphi$  est une solution de (E), alors la restriction  $\varphi|_J$  est aussi une solution pour tout sous-intervalle  $J$  de  $I_\varphi$  ayant au moins deux éléments. On est ainsi conduit à la définition suivante :

### Définition 3

On appelle *solution maximale* de (E) toute solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.

Toute solution définie sur  $\mathbb{R}$  est évidemment maximale. La réciproque est vraie lorsque (E) est linéaire puisque dans ce cas, toute solution est la restriction d'une solution définie sur  $\mathbb{R}$ .

## Théorème de Cauchy-Lipschitz

Le théorème de Cauchy-Lipschitz du chapitre précédent montre que les solutions d'une équation différentielle linéaire autonome vérifient les points suivants :

- les solutions maximales sont définies sur  $\mathbb{R}$ ,
- pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$  :
  1. il existe une et une seule solution maximale  $\varphi$  vérifiant la condition de Cauchy  $\varphi(t_0) = x_0$ ,
  2. toute solution vérifiant cette condition de Cauchy est une restriction de  $\varphi$ .

Il est remarquable que l'on retrouve l'essentiel de ces propriétés d'existence et d'unicité dans le cas des équations différentielles générales en remplaçant la notion de solution définie sur  $\mathbb{R}$  par celle de solution maximale.

**Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz)**

Soit l'équation différentielle :

$$x' = f \circ x \tag{E}$$

avec  $f$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) sur  $U$ .

Toute solution maximale de (E) est définie sur un intervalle ouvert et ne possède pas de limite dans  $U$  aux bornes finies de son intervalle de définition.

Pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ ,

1. il existe une et une seule solution maximale  $\varphi$  de (E) vérifiant la condition de Cauchy  $\varphi(t_0) = x_0$ ,
2. toute solution vérifiant cette condition de Cauchy est une restriction de  $\varphi$ .

Ainsi, l'étude des solutions d'une équation différentielle autonome se ramène donc à celle de ses solutions maximales. On ne peut évidemment pas en général les exprimer en utilisant les fonctions élémentaires. On utilise donc le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure leur existence et leur unicité et, précise, dans une certaine mesure, les propriétés de leur domaine de définition.

L'exemple suivant montre que ces domaines de définition ne sont pas en général égaux à  $\mathbb{R}$ , mais dépendent des conditions initiales et peuvent ne pas contenir d'intervalle commun non vide.

*Exemple* Considérons l'équation scalaire ( $E = \mathbb{R}$ ) :

$$x' = \frac{1}{2x} \tag{E}$$

sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Si  $\varphi$  est une solution de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ , on a  $\varphi(t) > 0$  et  $2\varphi'(t)\varphi(t) = 1$  quel que soit  $t$ . On obtient alors par primitivation  $\varphi(t)^2 = t - (t_0 - x_0^2)$ . Cela montre les deux points suivants :

$$I_\varphi \subset ]t_0 - x_0^2, +\infty[ \quad \text{et} \quad \forall t \in I_\varphi, \quad \varphi(t) = \sqrt{t - (t_0 - x_0^2)}.$$

- Il existe donc une et une seule solution maximale vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ , à savoir :

$$\varphi_{(t_0, x_0)} : t \in ]t_0 - x_0^2, +\infty[ \mapsto \sqrt{t - (t_0 - x_0^2)},$$

et, toute solution de (E) vérifiant la même condition est une restriction de  $\varphi_{(t_0, x_0)}$ . Nous retrouvons ainsi le théorème général.

**Attention** Les conclusions du théorème de Cauchy-Lipschitz ne sont pas en général vérifiées lorsque l'on considère une équation  $x' = f \circ x$  où  $f$  est seulement continue.

Par exemple, l'équation :

$$x' = 2\sqrt{|x|}$$

associée à l'application continue non dérivable  $x \mapsto 2\sqrt{|x|}$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  possède plusieurs solutions définies sur  $\mathbb{R}$  s'annulant en 0 : entre autres, les applications de classe  $\mathcal{C}^1$  :

$$\varphi_1 : t \mapsto 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto t|t|.$$

La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz est technique et difficile. Nous la donnons dans la sous-section suivante.

## 1.2 Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette sous-section,  $f$  désigne une application de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 1$  d'un ouvert  $U$  de  $E$  vers  $E$  et :

$$x' = f(x) \tag{E}$$

l'équation différentielle autonome associée.

La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz repose, comme dans le cas des équations linéaires sur la méthode des approximations successives, mais les restrictions imposées par la non-linéarité de  $f$  obligent de démontrer tout d'abord une version locale de ce théorème.

Soit  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ .

### Opérateur intégral

Pour toute application continue  $\varphi$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $U$ , l'application  $T(\varphi)$  de  $I$  vers  $E$  par :

$$\forall t \in I, \quad T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi(s)) ds$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  vers  $E$ . Cela conduit, comme dans le cas linéaire, à la caractérisation suivante :

### Proposition 3

L'application  $\varphi \in \mathcal{C}(I, U)$  est une solution de (E) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0)$  si, et seulement si, on a  $\varphi = T(\varphi)$ .

On en déduit la propriété de recollement :

**Proposition 4**

Si  $\varphi$  est une application continue dont les restrictions à  $I \cap ]-\infty, \alpha[$  et  $I \cap ]\alpha, +\infty[$  sont des solutions, alors  $\varphi$  est une solution sur  $I$ .

**Démonstration** En faisant tendre  $s$  vers  $\alpha$  dans la relation :

$$\forall (t, s) \in (I \cap ]-\infty, \alpha[)^2, \quad \varphi(t) = \varphi(s) + \int_s^t f(\varphi(u)) \, du,$$

on obtient :

$$\forall t \in I \cap ]-\infty, \alpha[, \quad \varphi(t) = \varphi(\alpha) + \int_\alpha^t f(\varphi(u)) \, du$$

On a la même relation pour  $t$  appartenant à  $I \cap ]\alpha, +\infty[$  et évidemment pour  $t = \alpha$ . Ainsi  $\varphi$  est une solution de (E). □

**Théorème de Cauchy-Lipschitz local**

**Proposition 5**

Soit  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ .

Il existe une solution de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$  définie sur un intervalle  $[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$  avec  $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+^*$ .

Si  $\varphi$  et  $\chi$  sont deux solutions de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ , il existe  $\beta_0 \in \mathbb{R}_+^*$  tel que l'on ait :

$$\forall t \in I_\varphi \cap I_\chi \cap [t_0 - \beta_0, t_0 + \beta_0], \quad \varphi(t) = \chi(t).$$

**Préliminaire**

► La continuité de  $f$  et de  $df$  sur  $U$  montre qu'il existe des réels  $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que l'on ait  $D(x_0, r_0) \subset U$  ainsi que :

$$\forall x \in D(x_0, r_0), \quad \|f(x)\| \leq M \quad \text{et} \quad \|df(x)\| \leq M,$$

$\|df(x)\|$  étant la norme subordonnée de l'élément  $df(x)$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

Par le théorème des accroissements finis, il vient :

$$\forall x \in D(x_0, r_0), \quad \|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|.$$

On pose alors  $\alpha_0 = \min \left( \frac{r_0}{M}, \frac{1}{2M} \right)$ .



- Soit alors  $S$  un segment de  $[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$  contenant  $t_0$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{E} = \mathcal{C}(S, E)$  muni de la norme uniforme est complet et le sous-ensemble :

$$\mathcal{F} = \{ \varphi \in \mathcal{E} \mid \varphi(S) \subset D(x_0, r_0) \}$$

est fermé. □

**Lemme**

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{F}$ , l'application  $T(\varphi)$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

L'application  $T|_{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  dans lui même est 1/2-lipschitzienne.

**Démonstration du lemme**

- Puisque  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{F}$ , l'application  $T(\varphi)$  est bien définie. Comme on a de plus  $\varphi(t) \in D(x_0, r_0)$  et, par conséquent,  $\|f(\varphi(t))\| \leq M$  pour tout  $t \in S$ , on obtient par l'inégalité de la moyenne :

$$\forall t \in S, \quad \|T(\varphi)(t) - x_0\| \leq \alpha_0 M \leq r_0.$$

- Soit  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{F}^2$ . On a pour tout  $t \in S$  :

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(t) - T(\psi)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(\varphi(s)) - f(\psi(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\varphi(s)) - f(\psi(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M \|\varphi(s) - \psi(s)\| ds \right| \\ &\leq \alpha_0 M \|\varphi - \psi\|_{\infty} \end{aligned}$$

puisque  $\varphi(s)$  et  $\psi(s)$  appartiennent à  $D(x_0, r_0)$  pour tout  $s \in S$ . Il vient finalement :

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_{\infty}. \quad \square$$

**Lemme**

L'application  $T|_{\mathcal{F}}$  possède un unique point fixe dans  $\mathcal{F}$ .

- Démonstration du Lemme** Soit  $\varphi_0 \in \mathcal{F}$ , par exemple la fonction constante  $x_0$ . On construit la suite récurrente  $(\varphi_n)$  par  $\varphi_0$  et  $\varphi_{n+1} = T(\varphi_n)$ . La majoration :

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{2^n} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{\infty}$$

montre que la série télescopique  $\varphi_0 + \sum_{n \geq 1} (\varphi_n - \varphi_{n-1})$  converge normalement dans  $\mathcal{E}$ . Sa somme  $\varphi$  est la limite des  $\varphi_n \in \mathcal{F}$ . Elle appartient donc à  $\mathcal{F}$  et vérifie  $T(\varphi) = \varphi$ .

Si  $\psi \in \mathcal{F}$  est un autre point fixe de  $T$ , l'inégalité :

$$\|\psi - \varphi\|_\infty = \|T(\psi) - T(\varphi)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\psi - \varphi\|_\infty$$

montre que l'on a  $\psi = \varphi$ . □

**Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz local**

- ▶ Le lemme précédent appliqué à  $S = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$  nous fournit une application continue  $\varphi$  de  $S$  vers  $D(x_0, r_0)$  vérifiant  $T(\varphi) = \varphi$ . Cette application est une solution de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$  définie sur  $[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$ .
- ▶ Soient  $\varphi$  et  $\chi$  deux solutions de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ . Par continuité de  $\varphi$  et  $\chi$ , il existe  $\beta_0 \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$S = I_\varphi \cap I_\chi \cap [t_0 - \beta_0, t_0 + \beta_0]$$

soit un segment de  $[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$  vérifiant :

$$\varphi(S) \subset D(x_0, r_0) \quad \text{et} \quad \chi(S) \subset D(x_0, r_0).$$

Les applications  $\varphi_S$  et  $\chi_S$  appartiennent alors à  $\mathcal{C}(S, D(x_0, r_0))$  et vérifient  $T(\varphi_S) = \varphi_S$  et  $T(\chi_S) = \chi_S$ . On a donc  $\varphi_S = \chi_S$ . □

**Théorème de Cauchy-Lipschitz global**

**Proposition 6**

Deux solutions de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$  sont égales sur l'intersection de leurs domaines de définition.

**Démonstration** Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux solutions de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$  inégales en  $t_1$  de  $I_\varphi \cap I_\psi$ . On supposera  $t_0 < t_1$  par exemple.

Le sous-ensemble :

$$D = \{t \in [t_0, t_1] \mid \varphi(t) = \psi(t)\}$$

est non vide, fermé et borné. Il contient donc sa borne supérieure notée  $t_2$ . On a alors  $\varphi(t_2) = \psi(t_2)$  et, par suite,  $t_2 \in [t_0, t_1[$ .

Soient  $x_2 = \varphi(t_2) = \psi(t_2)$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz local appliqué en  $(t_2, x_2)$  nous fournit un réel  $\beta_2 > 0$  tel que  $\varphi$  et  $\psi$  soient égales sur l'intersection :

$$S = I_\varphi \cap I_\psi \cap [t_2 - \beta_2, t_2 + \beta_2].$$

Le nombre  $t_3 = \min(t_2 + \beta_2, t_1)$  appartient alors à  $S$  et vérifie donc  $\varphi(t_3) = \psi(t_3)$ . Comme il appartient aussi à l'intervalle  $]t_2, t_1[$ , on obtient une contradiction avec la définition de  $t_2$ . □

**Proposition 7**

Il existe une et une seule solution maximale  $\varphi$  de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ .

Toute solution  $\psi$  de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$  est une restriction de  $\varphi$ .

**Démonstration**

► Soit  $\mathcal{X}$  l'ensemble des solutions de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ .

La réunion des domaines de définition des éléments  $\psi$  de  $\mathcal{X}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  comme réunion d'intervalles contenant  $t_0$ . Pour tout  $t \in I$ , le théorème précédent montre que l'on a  $\psi(t) = \chi(t)$  lorsque  $\psi$  et  $\chi$  sont deux éléments de  $\mathcal{X}$  dont les domaines de définition contiennent  $t$ . On construit alors une application  $\varphi$  de  $I$  vers  $E$  en notant  $\varphi(t)$  cette valeur commune.

On a bien sûr  $\varphi(t_0) = x_0$ . Soit  $t \in I$ . En considérant une solution dont le domaine de définition contient  $t$ , on obtient  $\varphi([t_0, t]) \subset U$  et :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi(s)) ds.$$

L'application  $\varphi$  est donc une solution de (E) vérifiant la condition initiale  $(t_0, x_0)$ .

Toute solution de  $\mathcal{X}$  est par construction même une restriction de  $\varphi$ . Si  $\varphi$  est la restriction d'une solution  $\zeta \in \mathcal{X}$ , comme  $\zeta$  est par construction une restriction de  $\varphi$ , on obtient  $\zeta = \varphi$ . Ainsi  $\varphi$  est une solution maximale. La même démonstration montre qu'elle est unique.

► Le deuxième point découle de ce qui précède. □

**Domaine de définition d'une solution maximale**

**Proposition 8**

Le domaine de définition  $I_\varphi$  d'une solution maximale  $\varphi$  de (E) est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Si une borne  $\gamma$  de  $I_\varphi$  est finie, alors  $\varphi$  ne possède pas de limite appartenant à  $U$  en  $\gamma$ .

**Démonstration** Si les points précédents ne sont pas vérifiés, il existe une borne finie  $\beta$  de  $I_\varphi$  telle que  $\varphi$  ait une limite  $\ell$  appartenant à  $U$  en  $\beta$  (si  $\beta$  appartient à  $I_\varphi$ , cette limite  $\ell$  est égale à  $\varphi(\beta)$ ). Nous supposons que  $\beta$  est la borne supérieure de  $I_\varphi$ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz local nous fournit alors un réel  $\gamma > \beta$  et une solution  $\chi$  de (E) définie sur  $[\beta, \gamma]$  et vérifiant  $\chi(\beta) = \ell$ . La fonction

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in I_\varphi \cap ]-\infty, \beta[ \\ \chi(t) & t \in [\beta, \beta + \gamma] \end{cases}$$

est continue et est une solution de (E) par la propriété de recollement de la page 984. Cela contredit que  $\varphi$  soit maximale et prouve ce que l'on voulait. □

### 1.3 Propriétés géométriques élémentaires des solutions

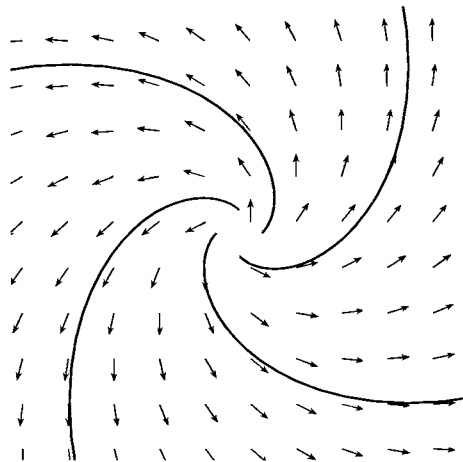
Dans cette sous-section  $f$  désigne une application de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  d'un ouvert  $U$  de  $E$  vers  $E$  et :

$$x' = f(x) \tag{E}$$

l'équation différentielle autonome associée.

On interprète géométriquement l'application  $f$  associée à l'équation (E) comme un *champ de vecteurs* sur  $U$  puisque  $f$  associe à chaque point  $x$  de  $U$  un vecteur  $f(x)$  de  $E$ .

Une solution  $\varphi$  est alors un arc paramétré de  $U$  dont la vitesse  $\varphi'(t)$  à chaque instant est égale à la valeur du champ  $f(\varphi(t))$ , au point  $\varphi(t)$ . On dit pour cela qu'une solution est une *ligne de champ*.



#### Invariance par translation

Si  $\varphi$  est une solution de (E), alors l'application translatée :

$$\tau_a \varphi : t \mapsto \varphi(t - a)$$

de l'ensemble  $I_\varphi + a = \{t \mid t - a \in I_\varphi\}$  vers  $E$  est une solution. Elle est maximale si, et seulement si,  $\varphi$  l'est.

On appelle alors *courbe intégrale* de (E), ou du champ de vecteurs  $f$ , toute solution maximale à changement de paramètre de la forme  $t \mapsto t + a$  près. On représentera la courbe intégrale passant par un point  $x_0$  par la solution maximale valant  $x_0$  en 0.

**Proposition 9**

Par tout point  $x_0$  de  $U$ , il passe une et une seule courbe intégrale.

**Démonstration** Soit  $x_0 \in U$ .

- ▶ Le théorème de Cauchy-Lipschitz global montre qu'il existe une solution maximale  $\varphi$  telle que  $\varphi(0) = x_0$ .
- ▶ Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux solutions maximales valant  $x_0$  en  $\alpha$  et  $\beta$ , alors les solutions maximales  $\psi$  et  $\tau_{\alpha-\beta}\varphi$  qui valent  $x_0$  en  $\alpha$  sont égales □

**Point stationnaire****Définition 4**

On dit qu'un point  $x_0$  de  $U$  est *stationnaire* si l'on a  $f(x_0) = 0$ .

**Proposition 10**

Un point  $x_0$  est stationnaire si, et seulement si la courbe intégrale passant par  $x_0$  est constante. Elle est alors définie sur  $\mathbb{R}$

Une courbe intégrale non constante est un arc régulier en particulier elle est localement injective.

**Courbe intégrale périodique****Proposition 11**

Une solution maximale non constante n'est pas injective si, et seulement si, elle est périodique. Elle est alors définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration** Si la solution maximale  $\varphi$  vaut  $x_0$  en  $t_0$  et  $t_1 = t_0 + T$  avec  $T > 0$ , alors les solutions maximales  $\tau_T\varphi$  et  $\varphi$  prennent la même valeur en  $t_0$ . On a donc  $I_\varphi + T = I_\varphi$  et  $\tau_T\varphi = \varphi$ . Cela montre que  $I_\varphi$  est égal à  $\mathbb{R}$  et que  $\varphi$  est  $T$ -périodique.

Le groupe des périodes de  $\varphi$  est alors un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$  différent de  $\{0\}$  et de  $\mathbb{R}$ . Il est donc de la forme  $T_0\mathbb{Z}$  avec  $T_0 > 0$ . □

Lorsque  $\varphi$  est périodique de plus petite période  $T_0 > 0$ , l'image de  $\varphi$  est une partie de  $E$  homéomorphe à un cercle.

**Exemple de l'équation scalaire**

Considérons l'équation scalaire :

$$x' = f(x) \quad (E)$$

où  $f$  est une application de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  d'un intervalle  $U$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Nous allons voir que l'on peut déterminer explicitement les solutions maximales de (E) et vérifier les propriétés précédentes.

Soient  $x_0 \in U$  et  $\varphi$  la solution maximale valant  $x_0$  en 0.

Si  $x_0$  est un point stationnaire, la fonction  $\varphi$  est définie sur  $\mathbb{R}$  est constante de valeur  $x_0$ .

Sinon, notons  $]x_1, x_2[$  le plus grand intervalle ouvert de  $U \setminus f^{-1}(\{0\})$  contenant  $x_0$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $x_1$  appartienne à  $U$  et vérifie  $f(x_1) = 0$ , que  $x_2$  n'appartienne pas à  $U$  et que  $f$  soit strictement positive sur  $]x_1, x_2[$ .

1. La primitive  $F(x) = \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$  est une application de classe  $C^{p+1}$  strictement croissante de  $]x_1, x_2[$  sur un intervalle  $]\alpha, \beta[$  de  $\mathbb{R}$ . Elle vérifie  $F(x_0) = 0$  et  $F'(x) = \frac{1}{f(x)}$  pour tout  $x$  de  $]x_1, x_2[$ . L'application réciproque  $\varphi_{x_0} = F^{-1}$  est une application de classe  $C^{p+1}$  strictement croissante de  $]\alpha, \beta[$  sur  $]x_1, x_2[$ . Les relations  $\varphi_{x_0}(0) = x_0$  et :

$$\forall t \in ]\alpha, \beta[, \quad \varphi'_{x_0}(t) = \frac{1}{F'(\varphi_{x_0}(t))} = f(\varphi_{x_0}(t))$$

montrent que c'est une solution de (E) vérifiant la condition de Cauchy  $\varphi_{x_0}(0) = x_0$ .

2. Supposons que  $\varphi$  soit une solution de (E) vérifiant  $\varphi(0) = x_0$  définie sur un intervalle  $J$ . Puisque l'image de  $\varphi$  ne contient pas de point stationnaire et est contenue dans  $U$ , la partie  $\varphi(J)$  est contenue dans  $]x_1, x_2[$ . La quantité  $f(\varphi(t))$  est donc non nulle pour tout  $t$  de  $J$  et l'équation différentielle peut s'écrire (séparation des variables) sous la forme  $\frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 1$  pour tout  $t$  de  $J$ . En tenant compte de la condition initiale, il vient :

$$t = \int_0^t \frac{\varphi'(s)}{f(\varphi(s))} ds = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{du}{f(u)},$$

soit  $(F \circ \varphi)(t) = t$  pour tout  $t \in J$ . L'intervalle  $J$  est donc contenu dans l'image  $]\alpha, \beta[$  de  $F$  et l'on a :

$$\forall t \in J, \quad \varphi(t) = \varphi_{x_0}(t).$$

3. La solution  $\varphi_{x_0}$  est donc la solution maximale de (E) vérifiant la condition initiale  $(0, x_0)$ . Elle est définie sur l'intervalle  $] \alpha, \beta[$  image de  $F$  avec, par conséquent :

$$\alpha = \int_{x_0}^{x_1} \frac{du}{f(u)} \quad \text{et} \quad \beta = \int_{x_0}^{x_2} \frac{du}{f(u)}.$$

Puisque la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ , on a  $f(x) = O(x - x_1)$  au voisinage de  $x_1$  et donc :

$$(x - x_1)^{-1} = O\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

en  $x_1$ . La fonction positive  $f$  n'est donc pas intégrable sur  $]x_1, x_0[$  et  $\alpha$  vaut  $+\infty$ .

On ne peut pas préciser la nature finie ou non de  $\beta$ , mais on a :

$$\lim_{\beta} \varphi_{x_0} = x_2 \notin U.$$

### 1.4 Propriétés topologiques des solutions

Continuons l'étude de l'équation différentielle :

$$x' = f(x). \tag{E}$$

La détermination des solutions maximales de (E), de leur domaine de définition ou de leurs propriétés géométriques, est en général difficile. Nous proposons dans ce qui suit quelques propriétés théoriques importantes.

#### Comportement limite des solutions maximales

Soit  $\varphi$  une solution maximale de (E) de domaine de définition  $I_\varphi = ] \alpha, \beta[$ .

#### Proposition 12

S'il existe un élément  $t_0 \in I_\varphi$  telle que  $\varphi([t_0, \beta[)$  soit contenu dans un compact  $K$  de  $U$ , alors  $\beta = +\infty$ .

**Démonstration** Notons  $M$  la constante  $\sup_{x \in K} \|f(x)\|$ . On a alors :

$$\forall t \in [t_0, \beta[, \quad \|f(\varphi(t))\| \leq M.$$

Si  $\beta$  est fini, la fonction  $f(\varphi(t))|_{[t_0, \beta[}$  est intégrable sur  $[t_0, \beta[$  et la fonction :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\varphi(u)) du$$

admet une limite en  $\beta$  dans  $K$  et donc dans  $U$ . Nous savons que c'est impossible. □

**Proposition 13**

Si  $\varphi$  admet une limite  $\ell \in U$  en  $\beta$ , alors  $\beta = +\infty$  et  $\ell$  est un point stationnaire de (E).

**démonstration** L'existence de la limite  $\ell \in U$  entraîne  $\beta = +\infty$ . Soit alors  $\gamma \in I_\varphi$  et  $v = f(\ell)$ . On a bien sûr  $\lim_{+\infty} \varphi = \ell$  et  $\lim_{+\infty} \varphi' = v$ .

Pour tout  $(A, t)$  vérifiant  $\gamma < A \leq t$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left\| \frac{1}{t-\gamma} \int_\gamma^t \varphi'(s) ds + \frac{1}{t-\gamma} \int_\gamma^t (v - \varphi'(s)) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{t-\gamma} \|\varphi(t) - \varphi(\gamma)\| + \frac{1}{t-\gamma} \int_\gamma^A \|\varphi'(s) - v\| ds + \\ &\quad + \frac{1}{t-\gamma} \int_A^t \|\varphi'(s) - v\| ds. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

1. La relation  $\lim_{+\infty} \varphi' = v$  montre qu'il existe  $A > \gamma$  tel que  $\|\varphi'(s) - v\| \leq 2^{-1}\varepsilon$  pour tout  $s \geq A$ . Cela entraîne :

$$\forall t \geq A, \quad \frac{1}{t-\gamma} \int_A^t \|\varphi'(s) - v\| ds \leq \frac{t-A}{t-\gamma} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Puisque  $\varphi$  est bornée, il existe  $B \geq A$  tel que :

$$\forall t \geq B, \quad \frac{1}{t-\gamma} \|\varphi(t) - \varphi(\gamma)\| + \frac{1}{t-\gamma} \int_\gamma^A \|\varphi'(s) - v\| ds \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. On en déduit  $\|v\| \leq \varepsilon$ .

Finalement  $v = 0$ . □

**Solutions contenues dans une courbe simple ou une courbe fermée simple**

Nous avons vu qu'une solution maximale non constante et non injective est périodique et que son image est une courbe homéomorphe à un cercle. Nous allons voir que ce résultat admet une réciproque.

**Proposition 14**

Soit  $\varphi$  une solution maximale de (E)

Si l'image de  $\varphi$  est contenue dans une partie  $X \subset U$  homéomorphe à un segment, alors  $\varphi$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , injective et converge en  $\pm \infty$  vers des points stationnaires de  $f$ .

Si l'image de  $\varphi$  est contenue dans une partie  $X \subset U$  homéomorphe à un cercle, alors :

1. soit  $\varphi$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , injective et converge en  $\pm \infty$  vers des points stationnaires de (E),
2. soit  $\varphi$  est périodique d'image  $X$



**Démonstration** Un segment ou un cercle étant compact, l'intervalle  $I$  est égal à  $\mathbb{R}$ .

- ▶ Soit  $h : X \rightarrow [0, 1]$  un homeomorphisme. L'application  $h \circ \varphi$  est continue et localement injective. Elle est donc strictement monotone et admet des limites en  $\pm \infty$ . Cela montre ce point.
- ▶ Soit  $h : X \rightarrow S^1$  un homéomorphisme de  $X$  sur le cercle des nombres complexes de module 1. Le théorème du relèvement pour les applications continues montre qu'il existe une application  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  tel que l'on ait :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(\varphi(t)) = e^{i\psi(t)}.$$

L'application  $\psi$  est une application continue et localement injective, donc strictement monotone de  $\mathbb{R}$  vers lui-même. Elle réalise donc un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$ .

1. Si  $J$  est un intervalle de longueur inférieure ou égale à  $2\pi$ , l'application  $\psi$  est injective et admet des limites en  $\pm \infty$ . Cela prouve le premier point.
2. Si  $J$  est un intervalle de longueur strictement supérieure à  $2\pi$ , alors  $\varphi$  n'est pas injective et son image vaut  $X$ . □

**Corollaire 15**

Si l'image de  $\varphi$  est contenue dans une partie  $X \subset U$  homéomorphe à un cercle ne contenant aucun point stationnaire, alors  $\varphi$  est périodique d'image  $X$ .

**Intégrales premières**

Lorsque  $E$  est de dimension 2, on montre en général qu'une solution est contenue dans une courbe homéomorphe à un segment ou à un cercle en utilisant la notion d'intégrale première.

**Définition 5**

On appelle *intégrale première* de  $(E)$  toute application de classe  $C^1$  :

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que  $x \mapsto dF(x)(f(x))$  soit nulle sur  $U$ .

Dans une base de  $E$ , la condition précédente s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

où les  $f_i$  sont les composantes du champ de vecteurs  $f$

Lorsque  $E$  est un espace euclidien, cette condition signifie que le gradient de  $F$  en  $x$  est orthogonal au vecteur  $f(x)$  en tout point  $x$

**Proposition 16**

Si  $F$  est une intégrale première, alors la fonction composée  $F \circ \varphi$  est constante pour toute solution  $\varphi$ .

**Démonstration** Il suffit de remarquer que l'on a :

$$(F \circ \varphi)'(t) = dF(\varphi(t))(\varphi'(t)) = dF(\varphi(t))(f(\varphi(t))) = 0. \quad \square$$

Lorsque  $E$  est un plan, l'existence d'une intégrale première  $F$  montre que les courbes intégrales sont contenues dans les lignes de niveau :

$$\mathcal{L}_a : F = a$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ . La détermination des courbes  $\mathcal{L}_a$  est alors un élément essentiel de l'étude de (E).

**Exemple du système de Volterra**

Le système de Volterra :

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy \\ y' &= cxy - dy \end{cases}$$

sur  $U = ]0, +\infty[^2$  où  $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$  modélise en écologie l'évolution des populations  $x$  et  $y$  de deux espèces animales, la première disposant de nourriture en abondance mais servant de proies à la seconde. L'exemple classique considère des lapins et des lynx au Canada.

Le système de Volterra est associé au champ de vecteur :

$$(x, y) \in ]0, +\infty[^2 \mapsto (ax - bxy, cxy - dy).$$

On en déduit que :

- le point  $(d/c, a/b)$  est l'unique point stationnaire et que :
- l'application :

$$F : (x, y) \in ]0, +\infty[^2 \mapsto cx + by - d \ln x - a \ln y$$

est une intégrale première puisque son gradient :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \left( c - \frac{d}{x}, b - \frac{a}{y} \right)$$

est orthogonal au champ  $(ax - bxy, cxy - dy)$  en tout point.

Pour étudier les lignes de niveau, on écrit  $F$  sous la forme  $F(x, y) = g(x) + h(y)$  avec :

$$g(x) = cx - d \ln x \quad \text{et} \quad h(y) = by - a \ln y$$

Il est immédiat de vérifier que leurs tableaux de variations sont :

$x$	$0$		$d/c$		$+\infty$
$g$	$+\infty$	$\searrow$	$g(d/c)$	$\nearrow$	$+\infty$

et :

$y$	$0$		$a/b$		$+\infty$
$h$	$+\infty$	$\searrow$	$h(a/b)$	$\nearrow$	$+\infty$

puisque l'on a  $g'(x) = c - \frac{d}{x}$  et  $h'(y) = b - \frac{a}{y}$ .

Les points  $d/c$  et  $a/b$  étant des minima stricts de  $g$  et  $h$ , la valeur  $F(x, y)$  est strictement supérieure à  $F(d/c, a/b)$  pour tout  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$  différent de  $(c/d, a/b)$ .

Considérons alors  $\lambda > F(d/c, a/b)$  et  $\mathcal{L}_\lambda$  la courbe de niveau :

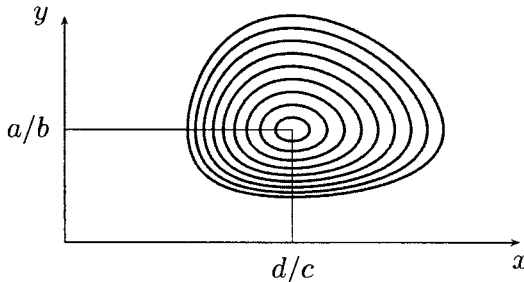
$$\mathcal{L}_\lambda : F(x, y) = \lambda$$

associée. Notons  $x_m, x_M, y_m$  et  $y_M$  les uniques éléments de  $]0, d/c[, ]d/c, +\infty[, ]0, a/b[$  et  $]a/b, +\infty[$  vérifiant

$$g(x_m) = \lambda - h(a/b) \quad \text{et} \quad g(x_M) = \lambda - h(a/b)$$

ainsi que :

$$h(y_m) = \lambda - g(d/c) \quad \text{et} \quad h(y_M) = \lambda - g(d/c).$$



Soit  $Q$  la partie  $[d/c, +\infty[ \times [a/b, +\infty[$  de  $]0, +\infty[^2$ . Un point  $(x, y)$  de  $Q$  appartient à  $\mathcal{L}_\lambda$  si, et seulement si  $h(y)$  est égal à  $\lambda - g(x)$ . On en déduit les points suivants :

- Si  $x$  est strictement supérieur à  $x_M$ , la quantité  $\lambda - g(x)$  est strictement inférieure à  $\lambda - g(x_M)$ , c'est-à-dire à  $h(a/b)$ . Il n'existe donc pas de  $y \in [a/b, +\infty[$  tel que  $h(y)$  soit égal à  $\lambda - g(x)$ .

- Si  $x$  appartient à  $[d/c, x_M]$ , la quantité  $\lambda - g(x)$  est strictement supérieure à  $\lambda - g(x_M)$ , c'est-à-dire à  $h(a/b)$ . Il existe donc un unique  $y$  de  $[a/b, +\infty[$  tel que  $h(y)$  soit égal à  $\lambda - g(x)$ . Comme on a aussi :

$$h(y) = \lambda - g(x) \leq \lambda - g(d/c) = h(y_m),$$

le point  $y$  appartient à  $[a/b, y_M]$ .

- L'intersection  $\mathcal{L}_\lambda \cap Q$  est donc le graphe de l'application  $\varphi$  de  $[d/c, x_M]$  vers  $[a/b, y_M]$  où  $\varphi(x)$  est l'unique  $y$  de  $[a/b, y_M]$  vérifiant la relation  $h(y) = \lambda - g(x)$  pour tout  $x$  de  $[d/c, x_M]$ . Les applications bijectives :

$$\psi : x \in [d/c, x_M] \mapsto \lambda - g(x) \in [h(a, b), h(y_M)]$$

et :

$$\chi : y \in [a/b, y_M] \mapsto h(y) \in [h(a, b), h(y_M)]$$

étant continues et strictement monotones, la composée  $\varphi = \chi^{-1} \circ \psi$  est aussi continue et strictement décroissante. L'intersection  $\mathcal{L}_\lambda \cap Q$  est donc une courbe homéomorphe à un segment reliant les points  $(x_M, a/b)$  et  $(d/c, y_M)$ .

Il en est évidemment de même des intersections de  $\mathcal{L}_\lambda$  avec les trois autres parties de  $]0, +\infty[^2$  limitées par les droites  $x = d/c$  et  $y = a/b$ . On en déduit immédiatement que  $\mathcal{L}_\lambda$  est une courbe homéomorphe à un cercle.

L'étude précédente permet alors de préciser les courbes intégrales du système de Volterra. Considérons  $(x_0, y_0)$  appartenant à  $]0, +\infty[^2$  et  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  la solution maximale vérifiant  $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ .

- Si  $(x_0, y_0) = (d/c, a/b)$ , alors  $\varphi$  est l'application constante définie sur  $\mathbb{R}$  de valeur le point stationnaire  $(d/c, a/b)$ .
- Si  $(x_0, y_0) \neq (d/c, a/b)$ , alors  $\varphi$  est contenue dans la courbe de niveau  $\mathcal{L}_\lambda$  avec  $\lambda = F(x_0, y_0)$ . Comme  $\lambda$  est strictement supérieur à  $F(d/c, a/b)$ , l'ensemble  $\mathcal{L}_\lambda$  est homéomorphe à un cercle et ne contient pas de point stationnaire. L'application  $\varphi$  est donc périodique définie sur  $\mathbb{R}$  et d'image égale à  $\mathcal{L}_\lambda$ .

On voit ainsi que dans la situation écologique indiquée, les populations concernées évoluent périodiquement suivant la même période et passent, au cours d'un cycle, par un minimum et un maximum stricts, les extrema de l'une se plaçant entre ceux de l'autre. La périodicité montre en particulier qu'il n'y a pas extinction de l'une ou l'autre espèce, contrairement à ce que l'on pourrait, peut-être, croire.

## 2. Équations différentielles générales

### 2.1 Solution d'une équation différentielle

**Definition 6**

Si  $f$  est une application de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times E^p$  vers  $E$ , on appelle *solution* de l'équation différentielle d'ordre  $p$  :

$$x^{(p)} = f(t, x, x', \dots, x^{(p-1)}) \tag{E}$$

toute application  $p$  fois dérivable  $\varphi$  allant d'un intervalle  $I_\varphi$  de  $\mathbb{R}$  vers  $E$  telle que :

$$\forall t \in I_\varphi, \quad (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t)) \in U$$

et :

$$\forall t \in I_\varphi, \quad \varphi^{(p)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t)).$$

Comme dans le cas des équations autonomes du premier ordre, on dit que (E) est définie sur  $U$  et qu'elle est associée à  $f$ . On la notera :

$$x^{(p)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(p-1)}(t))$$

si l'on veut préciser le nom de la variable libre.

On dit que (E) est *autonome* lorsque la fonction du second membre ne dépend pas explicitement de  $t$ . Une telle équation est donc de la forme :

$$x^{(p)} = g(x, x', \dots, x^{(p-1)})$$

où  $g$  est une application de classe  $C^k$  d'un ouvert  $V$  de  $E^p$  vers  $E$ . On dit alors que cette équation est définie sur  $V$  et qu'elle est associée à  $g$ . Lorsque  $p$  est égal à 1, on retrouve la notion d'équation différentielle autonome du premier ordre. On ramène théoriquement l'étude des équations autonomes à celle des équations générales en posant  $U = \mathbb{R} \times V$  et :

$$f : (t, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) \longmapsto g(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}).$$

On appelle *système différentiel d'ordre  $p$* , toute équation différentielle d'ordre  $p$  sur l'espace numérique  $\mathbb{R}^n$ . Un système différentiel n'est que l'expression analytique dans une base de  $E$  d'une équation différentielle.

#### Régularité des solutions

**Proposition 17**

Toute solution  $\varphi$  de l'équation (E) est de classe  $C^{p+k}$ .

**Démonstration** Puisque  $\varphi$  est  $p$  fois dérivable, la relation :

$$\varphi^{(p)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t)\right)$$

montre que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ . On montre qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^{p+k}$  par récurrence sur  $k$   $\square$

## Condition de Cauchy

### Définition 7

On dit qu'une solution  $\varphi$  de l'équation (E) vérifie la *condition de Cauchy*  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) \in U$  si l'on a :

$$(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(p-1)}(t_0)) = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1}).$$

## Solutions maximales

Il est clair que lorsque  $\varphi$  est une solution de (E), alors la restriction  $\varphi|_J$  est aussi une solution pour tout sous-intervalle de longueur non nulle  $J$  de  $I_\varphi$ . On est ainsi conduit à la définition suivante :

### Définition 8

On appelle *solution maximale* de (E) toute solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.

## 2.2 Théorème de Cauchy

Dans cette sous-section,  $f$  désigne une application de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times E^p$  vers  $E$  et :

$$x^{(p)} = f(t, x, x', \dots, x^{(p-1)}) \tag{E}$$

l'équation différentielle associée.

### Espace des phases

On appelle :

- *espace des phases* de (E), l'espace  $\mathcal{P} = \mathbb{R} \times E^p$ ,
- *application des phases*, l'application de classe  $\mathcal{C}^k$  :

$$F : (t, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) \mapsto (1, x_1, \dots, x_{p-1}, f(t, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}))$$

de  $U$  vers  $\mathbb{R} \times E^p$ ,

• *équation des phases*, l'équation différentielle autonome de premier ordre sur  $U$  :

$$X' = F \circ X. \tag{P}$$

La proposition suivante montre que l'équation (E) est équivalente à son équation des phases (P).

Soit  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) \in U$ .

**Proposition 18**

Une application  $\Phi$  est une solution maximale de l'équation des phases (P) vérifiant la condition de Cauchy :

$$\Phi(t_0) = (t_0, x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$$

si, et seulement si, elle est de la forme :

$$\Phi : t \mapsto (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t))$$

où  $\varphi$  est une solution maximale de l'équation (E) vérifiant la condition de Cauchy  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ .

**Démonstration** Une application  $p$  fois dérivable  $\Phi$  de  $I$  vers  $\mathcal{P}$  peut s'écrire :

$$\Phi : t \mapsto (\tau(t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{p-1}(t)).$$

Si  $\Phi$  est solution de (P) vérifiant  $t_0 \in I$  et  $\Phi(t_0) = (t_0, x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ , on a alors  $\tau'(t) = 1$ ,  $\varphi'_i = \varphi_{i+1}$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, p-2 \rrbracket$  et :

$$\forall t \in I_\Phi, \quad \varphi^{(p)}(t) = f(t, \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{p-1}(t))$$

ainsi que  $t_0 \in I$ ,  $\tau(t_0) = t_0$  et  $\varphi_i(t_0) = x_i$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ . On en déduit que  $\varphi = \varphi_0$  est  $p$  fois dérivable sur  $I$  avec  $\varphi^{(i)} = \varphi_i$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , que  $\tau(t) = t$  pour tout  $t$  et que l'on a :

$$\forall t \in I_\Phi, \quad \varphi^{(p)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t))$$

ainsi que  $t_0 \in I$  et  $\varphi^{(i)}(t_0) = x_i$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ .

Si, réciproquement,  $\varphi$  est une solution de (E) définie sur  $I$  vérifiant la condition de Cauchy, on a :

$$\forall t \in I, \quad \varphi^{(p)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t))$$

ainsi que  $t_0 \in I$  et  $\varphi^{(i)}(t_0) = x_i$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ . Il est alors immédiat que l'application :

$$\Phi : t \mapsto (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p-1)}(t))$$

définie sur  $I$  est une solution de (P) vérifiant la condition de Cauchy  $t_0 \in I$  et  $\Phi(t_0) = (t_0, x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ .

Comme les passages de  $\Phi$  à  $\varphi$  et de  $\Phi$  à  $\varphi$  commutent à la restriction à un intervalle contenant  $t_0$ , la solution  $\Phi$  est maximale si, et seulement si,  $\varphi$  est maximale. □

**Remarque** Dans le cas d'une équation différentielle autonome :

$$x^{(p)} = f(x, x', \dots, x^{(p-1)})$$

où  $f$  est une application de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  d'un ouvert  $V$  de  $E^p$  vers  $E$ , on considérera l'espace des phases réduit  $\mathcal{P} = E^p$ , l'application des phases réduite :

$$F : (x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{p-1}, f(t, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}))$$

de  $V$  vers  $E^p$  et l'équation des phases réduite  $X' = F \circ X$ . Le reste est analogue.

## Théorème de Cauchy-Lipschitz

### Théorème 19 (Cauchy-Lipschitz)

Soit l'équation différentielle :

$$x^{(p)} = f(t, x, x', \dots, x^{(p-1)}) \quad (\text{E})$$

avec  $f$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ).

- Toute solution maximale de (E) est définie sur un intervalle ouvert
- Pour tout  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) \in U$ ,
  1. il existe une et une seule solution maximale  $\varphi$  de (E) vérifiant la condition de Cauchy :

$$(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(p-1)}(t_0)) = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1}),$$

2. toute solution vérifiant cette condition de Cauchy est une restriction de  $\varphi$ .

**Démonstration** C'est immédiat par application du théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation des phases associée. □

L'espace des phases ne sert pas qu'à démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Par la réduction à l'équation des phases, c'est le cadre naturel de l'étude topologiques et géométrique des solutions de (E), en particulier, de la recherche d'intégrales premières.

## 2.3 Équations différentielles particulières

### Équation différentielle scalaire d'ordre 1

Considérons l'équation différentielle scalaire d'ordre 1 :

$$y' = f(x, y) \quad (\text{E})$$

où  $f$  est une application de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$



L'espace des phases est l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  des couple  $(x, y)$  et l'équation des phases, le système :

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = f(x, y) \end{cases} \quad (\text{EP})$$

associé au champ de vecteurs  $(x, y) \mapsto (1, f(x, y))$  sur  $U$ .

Si l'application  $\varphi$  est une solution maximale de (E) alors l'application  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  est une solution de (EP) et la tangente au graphe de  $\varphi$  en  $(x, y)$  avec  $y = \varphi(x)$  est la droite passant par ce point et de pente  $f(x, y)$ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que, pour tout  $(x_0, y_0)$ , il existe une et une seule solution  $\varphi$  de (E) vérifiant  $y_0 = \varphi(x_0)$ .

### Équation de Pfaff

Si  $\omega$  est une forme différentielle de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , on dit qu'une application  $\gamma$  de classe  $C^1$  d'un intervalle de longueur non nulle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $U$  est une *courbe intégrale* de l'équation de Pfaff :

$$\omega = 0 \quad (\text{EP})$$

si l'on a :

$$\forall t \in I, \quad \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0,$$

Si  $\omega$  s'écrit  $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$  dans la base canonique, l'application  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  est donc une courbe intégrale de  $\omega = 0$ , si l'on a :

$$\forall t \in I, \quad \omega_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + \omega_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) = 0.$$

### Proposition 20

Si  $\omega$  est exacte et  $f$  une primitive de  $\omega$  sur  $U$ , alors toute courbe intégrale de  $\omega = 0$  est contenu dans une courbe  $C_\lambda$  d'équation :

$$f(x, y) = \lambda.$$

**Démonstration** Si  $\gamma$  est une courbe de  $U$ , l'application  $g : t \mapsto f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  est de classe  $C^1$  de dérivée :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

La courbe  $\gamma$  est donc une courbe intégrale de (EP) si, et seulement si,  $g$  est constante. □

*Exemple* Soit l'équation de Pfaff :

$$(2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2y) dy = 0$$

sur  $\mathbb{R}^2$  La forme différentielle  $\omega$  associée est fermée puisque l'on a :

$$\frac{\partial (2y^3 - x^2y)}{\partial x} = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial (2x^3 - xy^2)}{\partial y} = 2xy.$$

On vérifie alors que la fonction  $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2y^2$  est une primitive de  $\omega$ . Les courbes intégrales de l'équation proposée sont donc contenues dans les courbes  $\mathcal{C}_\lambda$  d'équation :

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = \lambda.$$

Si  $g$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  ne s'annulant pas sur  $U$ , les équations de Pfaff  $\omega = 0$  et  $g\omega = 0$  sont bien sûr équivalents.

On appelle alors *facteur intégrant* de  $\omega$  toute application  $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^*)$  telle que  $g\omega$  soit exacte. Si  $F$  est une primitive de  $g\omega$ , les courbes intégrales de  $\omega = 0$  sont contenues dans les courbes d'équation :

$$F(x, y) = \lambda.$$

*Exemple* Étudions l'équation de Pfaff  $\omega = 0$  associé à la forme différentielle

$$\omega = (x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy$$

sur  $\mathbb{R}^2$  sachant qu'il possède un facteur intégrant de la forme  $g(x)$ .

On recherche donc une application  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$  tel que  $g\omega$  soit exacte. On sait que cela implique l'égalité des dérivées partielles croisées :

$$\frac{\partial}{\partial y} ((x^2 + y^2 + 2x)g(x)) = 2yg(x)$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial x} (2yg(x)) = 2yg'(x).$$

On en déduit que  $g$  vérifie  $2yg'(x) = 2yg(x)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et, par conséquent  $g(x) = \lambda e^x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^2$ . Il est alors immédiat de vérifier que l'application :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) e^x$$

est une primitive de  $e^x \omega$ .

Les courbes intégrales sont donc contenues dans les lignes de niveaux d'équation :

$$(x^2 + y^2) e^x = \lambda.$$

Pour toute application de classe  $C^1$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  ne s'annulant pas sur  $U$ , l'équation différentielle :

$$y' = f(x, y) \quad (\text{E})$$

est équivalente à l'équation de Pfaff :

$$g(x, y)f(x, y)dx - g(x, y)dy = 0 \quad (\text{EP})$$

avec  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^*)$  dans la mesure où une application  $x \mapsto \varphi(x)$  de classe  $C^1$  d'un intervalle ayant au moins deux éléments  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^2$  est une solution de (E) si, et seulement si, l'application  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  est une courbe intégrale de EP.

Si  $g$  est telle que  $g(x, y)(f(x, y)dx - dy)$  soit exacte de primitive  $F$  sur  $U$ , on obtiendra les solutions de (E) en étudiant les courbes  $C_\lambda$  d'équation  $F(x, y) = \lambda$  et en déterminant les applications  $\varphi$  telle  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  ont leur image contenue dans les courbes  $C_\lambda$ .

*Exemple* On dit que l'équation différentielle :

$$y' = f(x, y) \quad (\text{E})$$

sur un produit  $I \times J$  d'intervalles de  $\mathbb{R}$  est à *variables séparables* si l'on peut écrire  $f$  sous la forme :

$$f(x, y) = \frac{a(x)}{b(y)}$$

avec  $a \in C^1(I, \mathbb{R})$  et  $b \in C^1(J, \mathbb{R}^*)$ .

L'équation (E) est alors équivalente à l'équation de Pfaff

$$a(x)dx - b(y)dy = 0.$$

Si  $A$  et  $B$  désignent des primitives de  $a$  et  $b$ , l'application  $(x, y) \mapsto A(x) - B(y)$  est une primitive de  $a(x)dx - b(y)dy$ . Une application  $\varphi$  est donc une solution de (E) si, et seulement si, l'image de  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  est contenue dans une courbe  $C_\lambda$  d'équations :

$$A(x) - B(y) = \lambda.$$

On retrouve cette conclusion en remarquant que l'application  $(x, y) \mapsto A(x) - B(y)$  est une intégrale première de (E) puisque sa différentielle :

$$a(x)dx - b(y)dy$$

s'annule sur le vecteur  $(1, f(x, y))$  du champ en tout point de  $U$ .

### Équation différentielle scalaire autonome d'ordre 2

Considérons l'équation différentielle autonome scalaire d'ordre 2 :

$$x'' = f(x, x') \quad (\text{E2})$$

où  $f$  est une application de classe  $C^p$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$ .

L'espace des phases est l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  des couples  $(x, y)$  et l'équation des phases, le système autonome :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y) \end{cases}$$

Nous avons vu que toute courbe intégrale de l'équation des phases est une application de la forme  $t \mapsto (\varphi(t), \varphi'(t))$  où  $\varphi$  est une solution maximale de (E)

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre alors que pour tout point  $(x_0, y_0)$ , il existe une et une seule solution maximale de (E) telle que  $\varphi(0) = x_0$  et  $\varphi'(0) = y_0$ .

*Exemple* L'équation du pendule :

$$\theta'' = -\sin \theta$$

décrit le mouvement dans un plan vertical d'un point matériel rigidement attaché à un axe sous l'action de la gravité.

L'espace des phases est l'espace des couples  $(\theta, \omega)$  et l'équation des phases, le système autonome du premier ordre :

$$\begin{cases} \varphi' = \omega \\ \omega' = -\sin \theta \end{cases}$$

correspondant au champ de vecteurs  $f = (f_1, f_2) : (\theta, \omega) \mapsto (\omega, -\sin \theta)$ .

Soient alors  $(\theta_0, \omega_0) \in ]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$  et  $(\varphi_1, \varphi_2)$  l'unique solution maximale valant  $(\theta_0, \omega_0)$  en 0.

- La fonction énergie  $E(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - \cos \theta$  est une intégrale première de  $f$  puisque l'on a :

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} f_1 + \frac{\partial E}{\partial \omega} f_2 = (\sin \theta) \omega + \omega (-\sin \theta) = 0.$$

La solution maximale  $(\varphi_1, \varphi_2)$  dont l'énergie à l'instant 0 vaut  $E_0 = \frac{1}{2}\omega_0^2 - \cos \theta_0$  est donc contenue dans l'ensemble  $C_0$  d'équation :

$$\frac{1}{2}\omega^2 - \cos \theta = E_0.$$

- Si  $E_0$  est strictement supérieur à 1, alors  $C_0$  est la réunion des deux ensembles disjoints  $C_0^-$  et  $C_0^+$  d'équations :

$$\omega = \pm\sqrt{2(E_0 + \cos \theta)}$$

(voir la courbe  $\mathcal{L}_1$  de la figure). Comme  $\omega_0$  est strictement positif la courbe intégrale  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est contenue dans le graphe  $C_0^+$ . L'application  $\varphi_1$  est donc solution de l'équation différentielle :

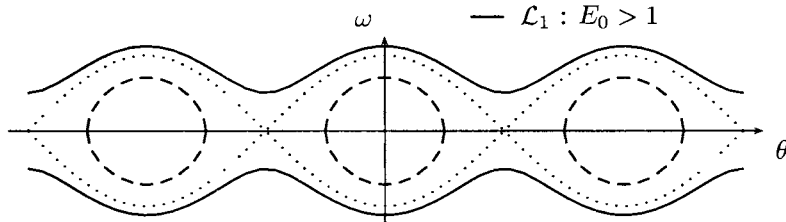
$$\theta' = \sqrt{2(E_0 + \cos \theta)}.$$

Toute solution de cette équation étant réciproquement une solution de l'équation du pendule, l'exemple de l'équation scalaire  $x' = f(x)$  montre que  $\varphi_1$  est l'application réciproque de l'application :

$$\theta \mapsto t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{\sqrt{2(E_0 + \cos u)}}$$

de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

- $\mathcal{L}_3 : E_0 < 1$
- ....  $\mathcal{L}_2 : E_0 = 1$
- $\mathcal{L}_1 : E_0 > 1$



La solution  $\varphi_1$  est donc une application strictement croissante de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Elle décrit le mouvement du pendule tournant indéfiniment autour de son axe.

Lorsque  $\theta_0$  est nul, on réécrit l'intégrale si dessus sous la forme :

$$\theta \mapsto t = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\theta/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{4}{\omega_0^2} \sin^2 u}}.$$

On en déduit alors  $\theta = 2 \operatorname{am} \left( \omega_0 \frac{t}{2} \right)$  où la fonction  $\operatorname{am}$ , appelée fonction amplitude de Jacobi de paramètre  $\frac{2}{|\omega_0|} < 1$ , est l'application inverse du difféomorphisme :

$$\theta \mapsto \int_0^{\theta} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{4}{\omega_0^2} \sin^2 u}}$$

de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  sur lui-même.

- Si  $E_0$  est égal à  $+1$ , alors la ligne de niveau  $C_0$  contient les points stationnaires  $(k\pi, 0)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . La courbe intégrale qui ne contient pas de tels points, est contenue dans l'ensemble  $C_0^+$  d'équation :

$$\omega = \sqrt{2(1 + \cos \theta)} \quad \text{et} \quad \theta \in ]-\pi, \pi[$$

(voir la courbe  $\mathcal{L}_2$  de la figure). Par ce qui précède, elle est définie sur  $\mathbb{R}$  et admet en  $\pm \infty$  les limites  $(\pm\pi, 0)$ .

La solution  $\varphi_1$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ , strictement croissante et admet en  $\pm \infty$  les limites  $-\pi$  et  $\pi$ . Elle décrit le mouvement du pendule entre les deux positions verticales d'équilibre instable.

De toute façon, la solution  $\varphi_1$  vérifie :

$$\theta' = \sqrt{2(1 + \cos \theta)}.$$

Lorsque  $\theta_0 = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} t &= \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{2(1 + \cos u)}} \\ &= \int_0^\theta \frac{du}{2 \cos u/2} \\ &= \ln \left| \tan \left( \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \end{aligned}$$

ce qui donne  $\varphi_1(t) = 4 \arctan e^t - \pi$

- Si  $E_0$  appartient à  $] -1, 1[$ , la ligne de niveau  $C_0$  est une réunion disjointe d'ovales (voir la courbe  $\mathcal{L}_3$  de la figure). La courbe intégrale qui nous intéresse est contenue dans celui contenant  $(\theta_0, \omega_0)$ . Comme celui-ci est homéomorphe au cercle, la courbe intégrale  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et périodique.

La solution  $\varphi_1$  est donc une fonction périodique dont les valeurs parcourent un segment inclus dans  $]-\pi, \pi[$ . Elle décrit le mouvement d'un pendule faisant périodiquement des oscillations d'amplitude strictement inférieure à  $\pi$  autour de sa position d'équilibre stable.

- Si  $E_0$  vaut  $-1$ , on a alors  $\theta_0 = 0$  et  $\omega_0 = 0$ . Le point  $(0, 0)$  étant un point stationnaire, la courbe intégrale est constante de valeur  $(0, 0)$ . La fonction  $\varphi_1$  est donc identiquement nulle
- Le cas  $E_0 < -1$  est impossible.

## EXERCICES

On pourra utiliser librement le principe suivant, conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz (global), et qui en est un des intérêts majeurs :

**Principe de partition (par des courbes intégrales).** Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . On se donne une famille  $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$  de solutions *maximales*  $y_\alpha : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  de  $(E) : y' = f(x, y)$  telles que, pour tout  $(x_0, y_0)$ , il existe un unique  $\alpha$  tel que  $y_\alpha(x_0) = y_0$ . Alors les  $y_\alpha$  sont *toutes* les solutions maximales de  $(E)$ .

1. Dans cet exercice, nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de vérifier que les  $y_\alpha$  soient maximales : lorsqu'elles sont définies sur des intervalles *ouverts*, c est automatique. Précisément, soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . On se donne une famille  $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$  de solutions  $y_\alpha : I_\alpha \rightarrow U$  de  $(E) : y' = f(x, y)$ , chacune définie sur un intervalle ouvert  $I_\alpha$ , dont les graphes forment une *partition* de  $U$ . Montrer que ce sont toutes des solutions *maximales* (il n'y en a pas d'autre, comme on l'a vu plus haut).

En pratique, la maximalité des solutions particulières trouvées est immédiate et l'on n'aura pas à avoir recours à cet exercice.

2. Résoudre l'équation différentielle  $y' = y^2$ .
3. Résoudre l'équation différentielle  $y' = \sqrt{|y|}$ .
4. Résoudre l'équation différentielle  $y' = \cos(x + y)$ .
5. Trouver les fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $y'' = |y|$ .
6. Montrer qu'une solution maximale de l'équation  $y' = \frac{1}{x^2 + y^2}$  définie en  $x = 0$  est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.
7. On considère l'équation différentielle :

$$y' = x^2 + y^2. \tag{*}$$

1. Montrer que la solution  $y$  telle que  $y(0) = 0$  est impaire
2. Montrer que le domaine de définition de toute solution de l'équation (\*) est borné.

8. On considère une solution maximale  $y$  sur un intervalle  $I$  (ouvert) de l'équation différentielle :

$$y' = y^2 - x. \quad (*)$$

Soit  $x_0$  un réel dans  $I$ . Pour  $\alpha$  réel, on note  $\Gamma_\alpha$  la parabole d'équation  $y^2 - x = \alpha$  (l'isocline de pente  $\alpha$  de l'équation (\*)),  $F_\alpha$  le convexe fermé bordé par  $\Gamma_\alpha$ ,  $U_\alpha$  son intérieur. Soit  $x_0$  un réel dans  $I$ . On se propose de décrire dans certains cas le comportement de  $y(x)$  pour  $x \geq x_0$ .

1. Montrer que si  $x_0 \in I$  et  $(x_0, y(x_0))$  est dans  $F_0$ , alors  $y$  est définie au moins sur  $[x_0, +\infty[$ , et, pour tout  $x \in ]x_0, +\infty[$ ,  $(x, y(x))$  reste confiné dans l'intérieur  $U_0$  de  $F_0$ .

Montrer que le graphe de  $y$  admet la branche inférieure de  $\Gamma_0$  pour *parabole asymptote*, c'est-à-dire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) + \sqrt{x}) = 0$ . (On pourra situer  $(x, y(x))$  par rapport à  $F_{-1}$ , et montrer qu'il existe  $x_1 > x_0$  tel que, pour  $x > x_1$ ,  $y(x) \leq \sqrt{x-1}$ ).

2. Montrer que si  $x_0 \geq 0$  et  $y(x_0) > \sqrt{x_0+1}$ , alors, pour tout  $x > x_0$  dans  $I$ ,  $y(x) > \sqrt{x+1}$ . Montrer que, dans ce cas,  $I$  est borné supérieurement, et le graphe de  $y$  a une asymptote verticale.
3. Décrire à droite de  $x_0 > 0$  les solutions  $y$  telles que  $y(x_0) < -\sqrt{x_0}$ .

9. Considérons l'équation différentielle  $y' = 1 + xy^2$  dont on note  $f$  la solution maximale nulle en 0.

1. Montrer que si elle admet un développement en série entière au voisinage de 0, il est de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{3n+1}, \quad \text{où } a_0 = 1, \quad \text{et } (3n+4)a_{n+1} = \sum_{q=0}^n a_q a_{n-q}.$$

2. Montrer que la suite  $(a_n)$  ci-dessus est décroissante.
3. Montrer l'existence de ce développement en série entière de  $f$  et minorer le rayon de convergence  $R$ .
4. Montrer que  $R \leq \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{5}{4} + 1$ .
5. Montrer que le domaine  $I$  de  $f$  n'est pas borné inférieurement.

- 10 Intégrer le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= -y + (1 - x^2 - y^2)x \\ y' &= x + (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}$$

et montrer qu'en général, ses courbes intégrales ont une courbe asymptote fermée (on dit *un cycle limite*). On pourra passer en coordonnées polaires.



**11** On voit immédiatement que si  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et si la solution  $y$  de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  ne s'annule pas, alors la fonction  $u = y'/y$  vérifie l'équation de RICCATI  $u' = -u^2 - au - b$ . Nous allons établir une réciproque.

1. Considérons l'équation de RICCATI  $(R) : f' = \alpha f^2 + \beta f + \gamma$ , où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des fonctions continues sur  $I$ , et  $\alpha$  ne s'annule pas. Déterminer et exprimer simplement en fonction de  $\alpha, \beta, \gamma$  des fonctions  $\varphi, a$  et  $b$  telles que  $f$  soit solution de  $(R)$  si et seulement  $u = f/\varphi$  est solution de l'équation de RICCATI  $(R') : u' = -u^2 - au - b$ . Montrer qu'il existe une fonction  $y$  de classe  $C^1$  ne s'annulant pas telle que  $y' = uy$ , et trouver une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre vérifiée par  $y$ .

2. Trouver de cette manière les solutions réelles de l'équation différentielle  $f' = f^2 + \frac{1}{x^2}$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$ .

**12. Équation de Bernoulli**

Soit  $\alpha$  un entier strictement supérieur à 1 (on le prend entier pour simplifier la question), et des fonctions  $A$  et  $B$  de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$ .

1. Ramener l'équation différentielle  $(B) : y' = A(x)y^\alpha + B(x)y$  à une équation différentielle linéaire.

2. *Application* : trouver les solutions maximales sur  $\mathbb{R}^{*+}$  de l'équation différentielle  $y' = y^3 - \frac{y}{x}$ .

**13.** 1. Montrer que si  $y_0$  est une solution particulière de l'équation de RICCATI  $(R) : y' = \alpha(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x)$ , alors pour toute solution  $y$  la fonction  $u = y - y_0$  vérifie une équation de BERNOULLI que l'on déterminera.

2. *Application*. Résoudre l'équation  $(R) : y' = y^2 - 2xy + x^2 - a^2 + 1$ ,  $a$  constante réelle strictement positive.

**14.** Donner les solutions maximales sur  $\mathbb{R}^{*+}$  de l'équation différentielle  $(E) : xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**15.** Résoudre les équations différentielles :

1.  $(E_1) : \ln(x - y') = y'$ ;

2.  $(E_2) : y' = e^x + e^{x+y}$ ;

3.  $(E_3) : xy' = y(a + \ln y - \ln x)$ ,  $a$  constante réelle.

- 16.** 1. Soit  $f$  une fonction dérivable définie sur  $[A, +\infty[$ ,  $\theta$  réel et  $\varepsilon > 0$  tels que, pour tout  $x \geq A$ ,  $f(x) \leq \theta \implies f'(x) \geq \varepsilon$ . Montrer qu'il existe  $x_1$  tel que, pour tout  $x \geq x_1$ ,  $f(x) > \theta$ .
2. Soit maintenant  $f$  une application :  $[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $\lim_{+\infty} (f' - f^2) = 0$ . Montrer que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .
- 17.** 1. Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , des constantes réelles telles que  $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$ . Montrer que les graphes des solutions de l'équation différentielle (E) :  $y' = \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}$  sont les arcs des trajectoires du système différentiel (S) :
- $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = \alpha X(t) + \beta Y(t), \\ \frac{dY}{dt} = \gamma X(t) + \delta Y(t) \end{array} \right\}$$
- sans tangente verticale, i.e. sur lesquels  $\frac{dX}{dt} = \alpha X(t) + \beta Y(t)$  ne s'annule pas.
2. Résoudre l'équation différentielle  $y' = \frac{x - y}{x + y}$ .
- 18.** Trouver les fonctions  $y$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $y'^2 + y^2 = 1$ .
- 19.** Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un convexe  $U$ , et l'on suppose que  $Q$  ne s'annule pas sur  $U$ .
1. Si  $\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$  ne dépend que de  $x$  montrer que  $Pdx + Qdy$  admet un facteur intégrant dépendant seulement de  $x$ .
2. Résoudre l'équation différentielle :  $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ .
- 20.** Résoudre  $x(x^3 + 3xy^2 + 2y^3)dx - y(3yx^2 + y^3 + 2x^3)dy = 0$  en cherchant un facteur intégrant de la forme  $\varphi(x^2 + y^2)$ .
- 21.** Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $y'' + y + y^3 = 0$  sont des fonctions périodiques.
- 22.** Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $y'' + (y^2 + 2y'^2 - 1)y' + y = 0$  sont toutes bornées sur  $\mathbb{R}^+$ . *Indication : On étudiera  $y^2 + y'^2$ .*

**23. Lentille de stigmatisme parfait**

Déterminer la surface séparant deux milieux isotropes pour que les rayons parallèles se focalisent en un point  $O$  dans celui d'indice de réfraction  $n$  le plus grand.

**24.** On se donne une famille, indexée par  $\lambda \in \mathbb{R}$ , de courbes régulières  $\Gamma_\lambda$  d'équation  $(G) : G(x, y, \lambda) = 0$ , où  $G$  est de classe  $C^1$ .

Dans les cas suivants, trouver une équation différentielle (dont aura disparu  $\lambda$ ) satisfaite par les fonctions  $x \mapsto y(x)$  dont le graphe soit un arc de courbe  $\Gamma_\lambda$  :

1. les hyperboles  $xy = \lambda$  ;
2. les courbes d'équation  $x^2 + y^2 = \lambda$  ;
3. les ellipses de foyers donnés  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  ;
4. les courbes  $y = a(x)\lambda + b(x)$ , où  $a$  et  $b$  sont des fonctions de classe  $C^1$  données sur l'intervalle  $I$  ;
5. les courbes  $(c(x)\lambda + d(x))y = a(x)\lambda + b(x)$ , où  $a, b, c, d$  sont de classe  $C^1$

**25.** On reprend les notations de l'exercice 24. Une trajectoire orthogonale de la famille des courbes  $\Gamma_\lambda$  est une courbe régulière  $C$  dont la tangente en un point de  $C \cap \Gamma_\lambda$  est orthogonale à celle de  $\Gamma_\lambda$  en ce point.

1. À l'aide de l'exercice précédent, trouver une équation différentielle vérifiée par les *graphes* (de fonction  $C^1$  dont la dérivée ne s'annule pas) trajectoires orthogonales des courbes intégrales de l'équation  $F(x, y, y') = 0$ .
2. Trouver les trajectoires orthogonales des familles de courbes 1., 2., 3. de l'exercice 24.

**26** Soit  $C$  une courbe  $C^1$  dans un repère orthonormé  $(O, i, j)$ . On note  $T$  l'intersection de la tangente à  $C$  en  $M$  et de l'axe  $(O, j)$ . Déterminer  $C$  telle que  $OT = kOM$ ,  $k$  constante donnée. Interpréter géométriquement le résultat obtenu dans le cas où  $k = 1$ .



# Chapitre 25

## Quadriques

### 1. Définition et équation réduite

Dans ce qui suit, on désigne par  $E$  un espace affine euclidien de dimension 3

#### 1.1 Définitions

##### Définition 1

On appelle *quadrique* de  $E$  toute surface  $\mathcal{Q}$  possédant dans un repère orthonormé une équation du type :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad (*)$$

où les nombres réels  $A, B, C, D, E, F$  ne sont pas tous nuls.

Le premier membre de l'équation (\*) de  $\mathcal{Q}$  dans le repère orthonormé  $(o, i, j, k)$  est un polynôme du second degré, somme d'une forme quadratique d'une forme linéaire et d'une constante.

On écrira vectoriellement cette équation sous la forme :

$$q(\overrightarrow{om}) + 2\ell(\overrightarrow{om}) + J = 0 \quad (**)$$

où  $q$  est la forme quadratique de matrice :

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

dans la base  $(i, j, k)$  et  $\ell$  la forme linéaire de matrice  $(G \ H \ I)$  dans la base  $(i, j, k)$ .

Dans un autre repère orthonormé  $(p, u, v, w)$ , la relation de Chasles montre que  $\mathcal{Q}$  possède l'équation vectorielle :

$$q(\overline{p\vec{m}}) + 2\ell'(\overline{p\vec{m}}) + J' = 0$$

et l'équation analytique :

$$A'\xi^2 + B'\nu^2 + C'\zeta^2 + 2D'\xi\nu + 2E'\xi\zeta + 2F'\nu\zeta + 2G'\xi + 2H'\nu + 2I'\zeta + J' = 0$$

où :

$$\begin{pmatrix} A' & D' & E' \\ D' & B' & F' \\ E' & F' & C' \end{pmatrix}$$

est la matrice de  $q$  dans la base  $(u, v, w)$ .

La forme quadratique  $q$  s'appelle la *forme quadratique principale* de  $\mathcal{Q}$  et son rang, le *rang* de  $\mathcal{Q}$ . On notera  $\varphi$  la forme bilinéaire symétrique polaire de  $q$ .

Les points précédents conduisent évidemment aux corollaires suivants :

### Corollaire 1

Une quadrique possède dans tout repère orthonormé une équation du type (\*).

## 1.2 Équation réduite et quadriques propres

Soit  $\mathcal{Q}$  une quadrique possédant l'équation vectorielle :

$$q(\overline{o\vec{m}}) + 2\ell(\overline{o\vec{m}}) + J = 0. \quad (**)$$

### Proposition 2

Il existe un repère orthonormé dans lequel  $\mathcal{Q}$  possède une équation sans termes croisés de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0. \quad (***)$$

**Démonstration** Le théorème spectral montre qu'il existe une base orthonormée  $(i, j, k)$  dans laquelle la matrice de la forme quadratique  $q$  est diagonale réelle de la forme  $\text{diag}(A, B, C)$ .

L'expression de l'équation (\*\*) dans le repère  $(o, i, j, k)$  est alors :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2GX + 2HY + 2IZ + J = 0. \quad \square$$

**Quadriques de rang trois**

Supposons que la quadrique  $\mathcal{Q}$  soit de rang trois. D'après la proposition 2 précédente,  $\mathcal{Q}$  possède dans un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (o, i, j, k)$  une équation de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad \text{avec} \quad ABC \neq 0.$$

Dans le repère  $\mathcal{R} = (o', i, j, k)$  où  $o'$  est le point de coordonnées :

$$\left( -\frac{G}{A}, -\frac{H}{B}, -\frac{I}{C} \right)$$

dans  $\mathcal{R}$ , elle possède l'équation :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{avec} \quad ABC \neq 0.$$

En considérant successivement le cas  $J \neq 0$  puis  $J = 0$  et tous les cas possibles de signes, on obtient la proposition suivante :

**Proposition 3**

Toute quadrique de rang trois possède dans un repère orthonormé une équation de l'un des types suivants :

$$\text{I} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{II} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{III} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$\text{IV} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

ou :

$$\text{V} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\text{VI} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

avec  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Une quadrique possédant une équation de type V est réduite à  $\{0\}$  et une quadrique possédant une équation de type VI est vide.

**Quadriques de rang deux** Supposons que la quadrique  $\mathcal{Q}$  soit de rang deux. D'après la proposition 2 page 1014,  $\mathcal{Q}$  possède dans un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (o, i, j, k)$  une équation de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad \text{avec} \quad AB \neq 0.$$

Dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}' = (o', i, j, k)$  où  $o'$  est le point de coordonnées  $\left(-\frac{G}{A}, -\frac{H}{B}, 0\right)$  dans  $\mathcal{R}$ , la quadrique  $\mathcal{Q}$  possède l'équation :

$$Ax^2 + By^2 + 2Iz + J = 0 \quad \text{avec} \quad AB \neq 0. \quad (1)$$

Si  $I$  est non nul, dans le repère  $\mathcal{R}' = (o'', i, j, k)$  où  $o''$  est le point de coordonnées  $\left(0, 0, -\frac{J}{2I}\right)$  dans  $\mathcal{R}'$ , la quadrique  $\mathcal{Q}$  possède l'équation :

$$Ax^2 + By^2 + 2Iz = 0 \quad \text{avec} \quad ABI \neq 0. \quad (2)$$

En considérant tous les cas possibles de signes dans les situations (1) ou (2) et quitte à changer  $z$  en  $-z$ , on obtient la proposition suivante :

#### Proposition 4

Un quadrique de rang deux possède dans un repère orthonormé une équation du type :

$$\text{VII} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

$$\text{VIII} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

$$\text{IX} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{X} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{XI} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ou :

$$\text{XII} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\text{XIII} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

avec  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Une quadrique possédant une équation de type XII est réduite à la droite  $o + \mathbb{R}k$  et une quadrique possédant une équation de type XIII est vide



**Quadriques de rang un** Supposons que la quadrique  $\mathcal{Q}$  soit de rang un. D'après la proposition 2 page 1014,  $\mathcal{Q}$  possède dans un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (o, i, j, k)$  une équation de la forme :

$$Ax^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad \text{avec } A \neq 0.$$

Dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}' = (o', i, j, k)$  où  $o'$  est le point de coordonnées  $\left(-\frac{G}{A}, 0, 0\right)$  dans  $\mathcal{R}$ , la quadrique  $\mathcal{Q}$  possède l'équation :

$$Ax^2 + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad \text{avec } A \neq 0.$$

Dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}'' = (o', i, u, v)$  avec :

$$u = \cos \theta j + \sin \theta k \quad \text{et} \quad v = -\sin \theta j + \cos \theta k$$

où  $\theta$  est choisi de telle sorte que  $H \sin \theta = I \cos \theta$ , la quadrique  $\mathcal{Q}$  possède l'équation :

$$Ax^2 + 2Hy + J = 0 \quad \text{avec } A \neq 0. \tag{1}$$

Si  $H$  est non nul, dans le repère  $\mathcal{R}''' = (o''', i, u, v)$  où  $o'''$  est le point de coordonnées  $\left(0, 0, -\frac{J}{2H}\right)$  dans  $\mathcal{R}''$ , la quadrique  $\mathcal{Q}$  possède l'équation :

$$Ax^2 + 2Hy = 0 \quad \text{avec } AH \neq 0. \tag{2}$$

En considérant tous les cas possibles de signes dans les situations (1) ou (2) et quitte à changer  $z$  en  $-z$ , on obtient la proposition suivante :

**Proposition 5**

Une quadrique de rang un possède dans un repère orthonormé une équation du type :

$$\text{XIV : } x^2 = 2py$$

$$\text{XV : } \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ou :

$$\text{XVI : } x^2 = 0$$

$$\text{XVII : } \frac{x^2}{a^2} = -1$$

avec  $a, p$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Une quadrique possédant une équation de type XVI est réduite au plan  $o + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$  et une quadrique possédant une équation de type XVII est vide.

## Quadriques propres

On est conduit à la définition suivante :

### Définition 2

On appelle *quadrique propre* toute quadrique possédant dans un repère orthonormé une équation de l'un des types I, II, III, VII ou VIII.

## 2. Quadriques propres à centres

On appelle *quadrique propre à centre* toute surface  $\mathcal{Q}$  possédant dans le repère orthonormé  $(o, i, j, k)$  une équation de l'un des types I, II, III :

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon'$$

avec  $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$  et  $(\varepsilon, \varepsilon') = (1, 1), (-1, 1)$  ou  $(-1, -1)$ .

On vérifie sans difficulté que ce sont les seules quadriques propres possédant un centre de symétrie.

La forme quadratique principale est de matrice :

$$\text{diag}(a^{-2}, b^{-2}, \varepsilon c^{-2})$$

dans la base  $(i, j, k)$ . La quadrique est alors l'ensemble des points  $m$  de  $E$  tels que :

$$q(\vec{om}) = \varepsilon'.$$

La forme quadratique principale  $q$  de  $\mathcal{Q}$  est canoniquement associée à l'endomorphisme symétrique  $u$  de matrice :

$$\text{diag}(a^{-2}, b^{-2}, \varepsilon c^{-2})$$

dans  $(i, j, k)$ . Cela permet d'exprimer  $q$  et sa forme polaire  $\varphi$  sous les formes :

$$q(h) = (h \mid u(h)) \quad \text{et} \quad \varphi(h, l) = (h \mid u(l)).$$

On appelle alors :

- *directions principales* de  $\mathcal{Q}$  toute droite passant par  $o$  et dirigée par un vecteur propre de  $u$
- *demi-axes* de  $\mathcal{Q}$  les nombres réels strictement positifs  $a, b, c$

La surface  $\mathcal{Q}$  est évidemment symétrique par rapport à l'origine et par rapport aux droites ou aux plans de coordonnées. On déterminera sa forme en considérant ses sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

Un simple calcul de dérivées partielles montre que les points de  $\mathcal{Q}$  sont réguliers. Le plan tangent  $\mathcal{P}_{m_0}$  en un point  $m_0 \in \mathcal{Q}$  possède l'équation :

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(x - y_0)}{b^2} + \varepsilon \frac{z_0(x - z_0)}{c^2} = 0$$

et, par conséquent :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \varepsilon \frac{zz_0}{c^2} = \varepsilon'.$$

Sa direction est le plan vectoriel  $\mathcal{V}_{m_0}$  orthogonal au vecteur :

$$u(\overrightarrow{om_0}) = \frac{x_0}{a^2}i + \frac{y_0}{b^2}j + \varepsilon \frac{z_0}{c^2}k.$$

L'ensemble des points  $m$  commun à  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}_{m_0}$  est défini par les équations vectorielles :

$$\varphi(\overrightarrow{om}, \overrightarrow{om}) = \varepsilon' \quad \text{et} \quad \varphi(\overrightarrow{om}, \overrightarrow{m_0m}) = 0.$$

En notant  $h_0 = \overrightarrow{om_0}$  et  $h = \overrightarrow{m_0m}$ , un calcul élémentaire conduit aux équations :

$$q(h) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(h, h_0) = 0.$$

On utilisera alors la proposition suivante :

**Proposition 6**

Il existe une base  $(v_1, v_2)$  de  $\mathcal{V}_{m_0}$  dans laquelle la restriction de  $q$  à  $\mathcal{V}_{m_0}$  a respectivement comme matrice :

$$\text{diag}(1, 1), \text{diag}(1, -1) \text{ et } \text{diag}(-1, -1)$$

lorsque  $\text{diag}(\varepsilon, \varepsilon')$  est égal à  $(1, 1), (-1, 1)$  et  $(-1, -1)$ .

**Démonstration** Il existe une base  $(v_1, v_2)$  de  $\mathcal{V}_{m_0}$  dans laquelle la restriction de  $q$  à  $\mathcal{V}_{m_0}$  a la matrice  $\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  avec  $\varepsilon_i = \pm 1$ . La matrice de  $q$  dans  $(h_0, v_1, v_2)$  est alors :

$$\text{diag}(\varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Le théorème d'inertie de Sylvester montre que  $(\varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est à l'ordre près égal à  $(1, 1, \varepsilon)$ . On obtient alors la proposition en considérant les trois cas  $(\varepsilon, \varepsilon') = (1, 1), (-1, 1)$  et  $(-1, -1)$ .  $\square$

**Ellipsoïde**

On appelle *ellipsoïde* toute quadrique à centre  $\mathcal{E}$  possédant une équation de type I :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$(\varepsilon = \varepsilon' = 1)$ .

L'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  possède la paramétrisation :

$$(a \cos \theta \cos \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, c \sin \varphi) \quad \text{avec} \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[ \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Il est donc connexe par arcs. On se le représentera en remarquant que :

- son intersection avec le plan  $y = 0$  est l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- ses intersections avec les plans d'équation  $z = z_0$  sont des ellipses homothétiques d'équations :

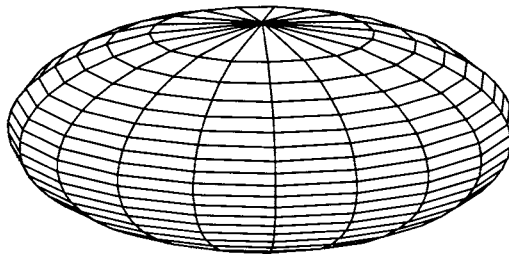
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 \quad \text{où} \quad k = \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}$$

rencontrant l'ellipse précédente en :

$$(ka, 0, z_0) \quad \text{et} \quad (-ka, 0, z_0)$$

lorsque  $z_0$  appartient à  $[-c, c]$ .

L'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  est une surface de révolution d'axe  $o + \mathbb{R}k$  lorsque  $a = b$ , c'est-à-dire lorsque l'endomorphisme symétrique principal  $u$  possède une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2. C'est une sphère lorsque  $a = b = c$ , c'est-à-dire lorsque  $u$  est une homothétie



La forme quadratique principale  $q$  est définie positive. Pour tout  $m_0$ , la restriction de  $q$  au sous-espace vectoriel  $\mathcal{V}_{m_0}$  est aussi définie positive. L'intersection de  $\mathcal{E}$  et de  $\mathcal{P}_{m_0}$  est donc réduite à  $\{m_0\}$ .

L'ellipsoïde est donc entièrement situé du côté de l'origine par rapport à son plan tangent en  $m_0$  et ne rencontre  $\mathcal{P}_{m_0}$  qu'en  $m_0$ .

**Hyperboloïde à une nappe**

On appelle *hyperboloïde à une nappe* toute quadrique  $\mathcal{H}_1$  à centre possédant une équation de type II :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

( $\varepsilon = -1$  et  $\varepsilon' = 1$ ).

L’hyperboloïde à une nappe  $\mathcal{H}_1$  possède la paramétrisation :

$$(a \cos \theta \operatorname{ch} \varphi, b \sin \theta \operatorname{ch} \varphi, c \operatorname{sh} \varphi) \quad \text{avec} \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}.$$

Ils est donc connexe par arcs. On se le représentera en remarquant que :

- son intersection avec le plan  $y = 0$  est l’hyperbole d’équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- ses intersections avec les plans d’équation  $z = z_0$  sont des ellipses homothétiques d’équations :

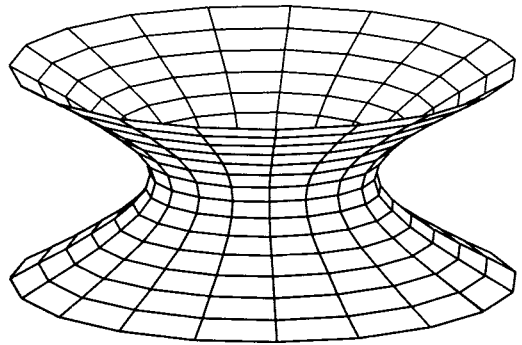
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 \quad \text{où} \quad k = \sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}$$

rencontrant l’hyperbole précédente en :

$$(ka, 0, z_0) \quad \text{et} \quad (-ka, 0, z_0)$$

lorsque  $z_0$  appartient à  $\mathbb{R}$ .

L’hyperboloïde à une nappe  $\mathcal{H}_1$  est une surface de révolution d’axe  $o + \mathbb{R}k$  lorsque  $a = b$ , c’est-à-dire lorsque l’endomorphisme symétrique principal  $u$  possède une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2.



**Exemple** La réunion  $\mathcal{S}$  des droites obtenues par rotation d’une droite  $D$  de représentation paramétrique :

$$(x, y, z) = (\nu, 0, 0) + t(0, \beta, \gamma) \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

où  $\nu > 0$ ,  $\beta \neq 0$  et  $\gamma \neq 0$  autour de  $o + \mathbb{R}k$  est un hyperboloïde à une nappe de révolution.

En effet, un point  $(x, y, z)$  appartient à  $\mathcal{S}$  si, et seulement si, le cercle du plan  $Z = z$  centré sur  $A$  et contenant  $(x, y, z)$  rencontre  $D$ . C'est la cas si, et seulement si il existe  $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^2$  et  $t \in \mathbb{R}$  tel que :

$$X = \nu, \quad Y = t\beta \quad \text{et} \quad Z = t\gamma$$

ainsi que :

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad Z = z.$$

On en déduit alors  $t = \gamma^{-1}z$ ,  $Y = \gamma^{-1}\beta z$ ,  $X = \nu$  et finalement :

$$x^2 + y^2 = \nu^2 + (\gamma^{-1}\beta z)^2$$

La réciproque étant évidente la surface  $\mathcal{S}$  possède donc l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avec :

$$a = \nu \quad \text{et} \quad c = |\nu\gamma\beta^{-1}|.$$

Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, la forme quadratique principale  $q$  est de matrice  $\text{diag}(1, 1, -1)$  dans  $(i, j, k)$ . Pour tout  $m_0$ , il existe une base  $(v_1, v_2)$  de  $\mathcal{V}_{m_0}$  dans laquelle la restriction de  $q$  possède la matrice  $\text{diag}(1, -1)$  et, par conséquent l'expression :

$$\xi_1^2 - \xi_2^2.$$

L'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{V}_{m_0}$  annulant la forme  $q$  est donc formé des deux droites distinctes  $\mathbb{R}v_1$  et  $\mathbb{R}v_2$ .

On en déduit la proposition suivante :

### Proposition 7

L'intersection de l'hyperboloïde à une nappe  $\mathcal{H}_1$  et de son plan tangent  $\mathcal{P}_{m_0}$  en un point  $m_0$  est la réunion de deux droites distinctes passant par  $m_0$ .

**Démonstratio** L'intersection de  $\mathcal{H}_1$  et de  $\mathcal{P}_{m_0}$  est, en effet, la réunion des droites :

$$m_0 + \mathbb{R}u_1 \quad \text{et} \quad m_0 + \mathbb{R}u_2. \quad \square$$

**Exemple** Dans le repère  $(m_0, v_1, v_2, v_3)$  où  $v_3 = \overrightarrow{om_0}$  de coordonnées  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , l'équation :

$$q(m_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3) = 1$$

devient en utilisant  $\varphi(m_0, m_0) = 1$ ,  $\varphi(m_0, v_1) = \varphi(m_0, v_2) = 0$  :

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + 2\xi_3 + \xi_3^2 = 0.$$

On en déduit :

$$\xi_3 = -1 \pm \sqrt{1 - \xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Au voisinage du point  $m_0$ , c'est-à-dire au voisinage de  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 0, 0)$ , l'hyperboloïde est donnée par :

$$\xi_3 = -1 + \sqrt{1 - \xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

La surface est donc strictement d'un côté ou de l'autre de  $\mathcal{P}_{m_0}$  suivant le signe de  $\xi_1^2 - \xi_2^2$ .

**Définition 3**

On appelle *génératrice* de  $\mathcal{H}_1$  toute droite contenue dans  $\mathcal{H}_1$ .

La proposition précédente montre les points suivants :

- par tout point  $m \in \mathcal{H}_1$  passent exactement deux génératrices dont la réunion est l'intersection de  $\mathcal{H}_1$  et de  $\mathcal{P}_m$ .
- toute génératrice  $D$  est contenue, pour tout  $m \in D$ , dans le plan tangent  $\mathcal{P}_m$ .

On dit que  $\mathcal{H}_1$  est une surface *réglée* puisqu'elle est la réunion de droites.

Pour préciser la structure de l'ensemble  $\mathcal{G}$  des génératrices nous aurons besoin de la proposition suivante

**Proposition 8**

L'application qui associe à tout point  $m$  d'une génératrice  $D$  le plan tangent en  $m$  est une bijection de  $D$  sur l'ensemble des plans contenant  $D$  et ne passant pas par  $O$ .

**Démonstration** Choisissons  $m_0 \in D$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  et  $h$  un vecteur directeur de  $D$  de coordonnées  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ . On notera  $h_0 = \overrightarrow{om_0}$ .

Le plan tangent  $\mathcal{P}_m$  au point courant  $m = m_0 + \lambda h$  de  $D$  est d'équation :

$$a^{-2}(x_0 + \lambda\alpha_0)X + b^{-2}(y_0 + \lambda\beta_0)Y - c^{-2}(z_0 + \lambda\gamma_0)Z = 1.$$

C'est l'unique plan contenant  $D$  et orthogonal au vecteur :

$$u(h_0) + \lambda u(h).$$

Un simple calcul montre que les vecteurs  $u(h_0) + \lambda u(h)$  et  $u(h)$  sont orthogonaux à  $h$ . Lorsque  $\lambda$  varie, on obtient tous les plans sauf évidemment le plan contenant  $D$  et orthogonal à  $u(h)$  dont une équation est :

$$a^{-2}\alpha_0 X + b^{-2}\beta_0 Y - c^{-2}\gamma_0 Z = 0. \quad \square$$

**Corollaire 9**

L'intersection d'un plan  $\mathcal{P}$  contenant une génératrice  $D$  avec  $\mathcal{H}_1$  est la réunion de  $D$  et d'une autre génératrice  $\Delta$  :

- si  $\Delta$  coupe  $D$  en un point  $m$ , alors  $\mathcal{P}$  est le plan tangent  $\mathcal{P}_m$ .
- si  $\Delta$  est parallèle à  $D$ , alors  $\mathcal{P}$  contient  $o$ .

**Démonstration**

- ▶ Si  $\mathcal{P}$  ne contient pas  $o$ , alors  $\mathcal{P}$  est le plan tangent  $\mathcal{P}_m$  en un unique point  $m \in D$  et l'intersection de  $\mathcal{P}$  est  $\mathcal{H}_1$  est la réunion des  $D$  et de l'autre génératrice  $\Delta$  passant par  $m$ .
- ▶ Si  $\mathcal{P}$  contient  $o$ , alors l'intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{H}_1$  est la réunion de  $D$  et de la génératrice  $\Delta$  symétrique de  $D$  par rapport à  $o$ . □

**Remarque** Dans les conditions précédentes, le plan  $\mathcal{P}$  coupe  $\mathcal{H}_1$  suivant une conique dégénérée formée de deux droites distinctes

**Proposition 10**

La relation définie sur l'ensemble  $\mathcal{G}$  des génératrices par :

$$D \sim D' \iff D \text{ et } D' \text{ sont égales ou non coplanaires}$$

est une relation d'équivalence.

Si  $m_0$  est un point de  $\mathcal{H}_1$  et,  $D_0$  et  $\Delta_0$  les génératrices passant par  $m_0$ , l'ensemble  $\mathcal{G}$  est la réunion des classes d'équivalence de  $D_0$  et  $\Delta_0$ .

**Démonstration**

- ▶ Cette relation est évidemment réflexive et symétrique. Pour montrer qu'elle est aussi transitive, considérons, après élimination des cas où des droites sont égales, deux génératrices distinctes  $D$  et  $D''$  non coplanaires avec une troisième génératrice  $D'$ .
  1. Si  $D$  et  $D''$  se coupent en un point  $m$ , le plan  $\mathcal{P}$  contenant  $D'$  et passant par  $m$  recoupe  $\mathcal{H}_1$  suivant une génératrice  $\Delta$  passant par  $m$ . On a donc  $\Delta = D$  ou  $\Delta = D''$ , ce qui est impossible.
  2. Supposons que  $D$  et  $D''$  soient parallèles. Pour tout  $m'$  de  $D'$ , les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}''$  contenant respectivement  $D$  et  $D''$  et passant par  $m'$  recoupent  $\mathcal{H}_1$  suivant la génératrice  $\Delta'_{m'}$  passant par  $m'$  autre que  $D'$ . La génératrice  $\Delta'_{m'}$  est donc parallèle à  $D$  et  $D''$ . Lorsque  $m'$  parcourt  $D'$ , le plan tangent  $\mathcal{P}_{m'}$ , affinement engendré par  $D'$  et la direction de  $\Delta'_{m'}$ , est donc constant, ce qui est impossible.
- ▶ Il est évident que les génératrices coplanaires  $D_0$  et  $\Delta_0$  ne sont pas équivalentes. Si  $D$  est une génératrice, le plan  $\mathcal{P}$  contenant  $D$  et passant par  $m_0$  coupe  $\mathcal{H}_1$  suivant la réunion de  $D$  et d'une génératrice  $D'$  passant par  $m_0$ . Si  $D'$  est égal à  $\Delta_0$ , on a  $D \sim D_0$ . Si  $D'$  est égal à  $D_0$ , on a  $D \sim \Delta_0$ . □



*Exemple* L'hyperboloïde à une nappe de révolution d'équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

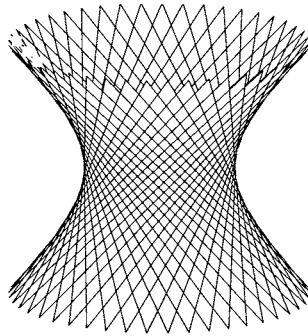
coupe son plan tangent en  $(1, 0, 0)$  suivant les deux droites :

$$D_0 : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta_0 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}$$

L'ensemble de ses génératrices est la réunion des familles de droites :

$$\mathcal{G}_l = \left\{ R_\theta(D_0) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_g = \left\{ R_\theta(\Delta_0) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

où  $R_\theta$  représente la rotation d'axe  $o + \mathbb{R}k$  et d'angle  $\theta$ .



### Hyperboloïde à deux nappes

On appelle *hyperboloïde à deux nappes* toute quadrique à centre  $\mathcal{H}_2$  possédant une équation de type III :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

L'hyperboloïde à deux nappes  $\mathcal{H}_2$  se décompose en deux parties :

$$\mathcal{H}_2^+ = \left\{ (x, y, z) \in \mathcal{H}_2 \mid z \geq c \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_2^- = \left\{ (x, y, z) \in \mathcal{H}_2 \mid z \leq -c \right\}$$

puisque la relation  $z^2 = c^2(a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 + 1)$  entraîne  $|z| \geq c$

La nappe  $\mathcal{H}_2^+$  possède la paramétrisation :

$$(a \cos \theta \operatorname{sh} \varphi, b \sin \theta \operatorname{sh} \varphi, c \operatorname{ch} \varphi) \quad \text{avec} \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}.$$

Elle est donc connexe par arcs. Il en est de même de la nappe  $\mathcal{H}_2^-$  symétrique de  $\mathcal{H}_2^+$  par rapport au plan  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$ .

On se représentera  $\mathcal{H}_2$  en remarquant que :

- son intersection avec le plan  $y = 0$  est l'hyperbole d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

- ses intersections avec les plans d'équation  $z = z_0$  sont des ellipses homothétiques d'équations :

$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 \quad \text{où} \quad k = \sqrt{\frac{z_0^2}{c^2} - 1}$$

rencontrant l'hyperbole précédente en :

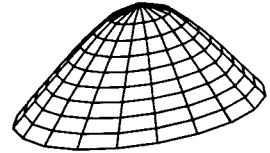
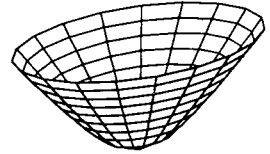
$$(ka, 0, z_0) \quad \text{et} \quad (-ha, 0, z_0)$$

lorsque  $z_0$  vérifie  $|z_0| \geq c$ .

L'hyperboloïde à deux nappes  $\mathcal{H}_2$  est une surface de révolution d'axe  $o + \mathbb{R}k$  lorsque,  $a = b$  c'est-à-dire si  $u$  possède une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2.

Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes, le couple  $(\varepsilon, \varepsilon')$  est égal à  $(-1, -1)$  et la forme quadratique  $q$  est de matrice  $\text{diag}(1, 1, -1)$  dans  $(i, j, k)$ . Pour tout  $m_0$ , il existe une base  $(v_1, v_2)$  de  $\mathcal{V}_{m_0}$  dans laquelle la restriction de  $q$  possède la matrice  $\text{diag}(-1, -1)$ . La restriction de  $q$  à  $\mathcal{V}_{m_0}$  est donc définie négative et, par conséquent, 0 est le seul élément  $h$  de  $\mathcal{V}_{m_0}$  vérifiant  $\varphi(h, h) = 0$ .

La nappe de l'hyperboloïde contenant  $m_0$  est donc entièrement située du côté de contenant pas  $o$  par rapport à son plan tangent et ne rencontre  $\mathcal{P}_{m_0}$  qu'en  $m_0$ .



## 2.1 Quadriques propres de rang deux

On appelle quadrique propre de rang deux toute quadrique  $\mathcal{Q}$  possédant dans le repère orthonormé  $(o, i, j, k)$  une équation de l'un des types VII ou VIII.

### Paraboloïde elliptique

On appelle *paraboloïde elliptique* toute quadrique  $\mathcal{PE}$  possédant une équation de type VII :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Le paraboloïde elliptique  $\mathcal{PE}$  est le graphe de l'application :

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Il est donc connexe par arcs. On se le représentera en remarquant que :

- son intersection avec le plan  $y = 0$  est la parabole d'équation :

$$x^2 = 2a^2z.$$

- ses intersections avec les plans d'équation  $z = z_0$  sont des ellipses homothétiques d'équations :

$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 \quad \text{où} \quad k = \sqrt{2z_0}$$

rencontrant la parabole précédente en :

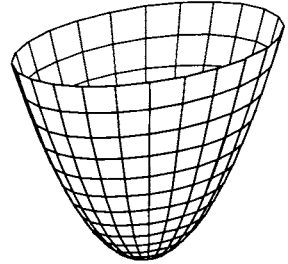
$$(ka, 0, z_0) \quad \text{et} \quad (-ka, 0, z_0)$$

lorsque  $z_0$  appartient à  $\mathbb{R}_+$ .

Le parabolôide elliptique  $\mathcal{PE}$  est une surface de révolution d'axe  $o + \mathbb{R}k$  si, et seulement si,  $a = b$ .

En un point  $m_0$  de  $\mathcal{PE}$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ , le plan tangent  $\mathcal{P}_{m_0}$  est d'équation :

$$Z - z_0 = \frac{x_0}{a^2}(X - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(Y - y_0).$$



Un simple calcul montre que la différence des ordonnées des point de  $\mathcal{PE}$  et  $\mathcal{P}_{m_0}$  situés au dessus de  $m_0$  est :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \right).$$

le parabolôide elliptique  $\mathcal{PE}$  est donc entièrement au dessus de son plan tangent  $\mathcal{P}_{m_0}$  et ne le rencontre qu'en  $\{m_0\}$ .

### Parabolôide hyperbolique

On appelle *parabolôide hyperbolique* toute quadrique  $\mathcal{PH}$  possédant une équation de type VIII :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Le parabolôide elliptique  $\mathcal{PH}$  est le graphe de l'application :

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Il est donc connexe par arcs. On se le représentera en remarquant que :

- son intersection avec le plan  $y = 0$  est la parabole d'équation :

$$x^2 = 2a^2z$$

et celle avec le plan  $x = 0$  est la parabole d'équation :

$$y^2 = -2b^2z$$

- ses intersections avec les plans d'équation  $z = z_0$  sont des hyperboles homothétiques d'équations :

$$\frac{x^2}{(ka)^2} - \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 \quad \text{où} \quad k = \sqrt{2z_0}$$

rencontrant la parabole d'équation  $x^2 = 2a^2z$  du plan  $y = 0$  en :

$$(ka, 0, z_0) \quad \text{et} \quad (-ka, 0, z_0)$$

lorsque  $z_0$  appartient à  $\mathbb{R}_+$  et des hyperboles homothétiques d'équations :

$$-\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 \quad \text{où} \quad k = \sqrt{2|z_0|}$$

rencontrant la parabole d'équation  $y^2 = -2b^2z$  du plan  $x = 0$  en :

$$(0, ka, z_0) \quad \text{et} \quad (0, -ka, z_0)$$

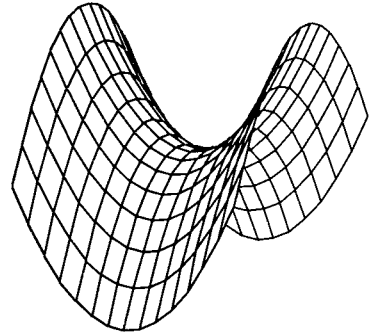
lorsque  $z_0$  appartient à  $\mathbb{R}_-$ .

En un point  $m_0$  de  $\mathcal{PH}$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ , le plan tangent  $\mathcal{P}_{m_0}$  est d'équation :

$$Z - z_0 = \frac{x_0}{a^2}(X - x_0) - \frac{y_0}{b^2}(Y - y_0)$$

passant par  $m_0$  et orthogonal au vecteur :

$$(a^{-2}x_0, -b^{-2}y_0, -1).$$



Un simple calcul montre que la différence des ordonnées des point de  $\mathcal{PE}$  et  $\mathcal{P}_{m_0}$  situés au dessus de  $m_0$  est :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \right).$$

L'intersection du paraboloidé elliptique  $\mathcal{PH}$  et de son plan tangent  $\mathcal{P}_{m_0}$  est donc la réunion de deux droites distinctes passant par  $m_0$  d'équations :

$$D_{m_0} : \begin{cases} a^{-2}x_0^2(x - x_0) - b^{-2}y_0(y - y_0) & = & (z - z_0) \\ a^{-1}(x - x_0) - b^{-1}(y - y_0) & = & 0 \end{cases}$$

et :

$$\Delta_{m_0} : \begin{cases} a^{-2}x_0^2(x - x_0) - b^{-2}y_0(y - y_0) & = (z - z_0) \\ a^{-1}(x - x_0) + b^{-1}(y - y_0) & = 0 \end{cases}$$

Les droites de types  $D_{m_0}$  se projettent sur le plan  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$  suivant des droites de pente  $\frac{b}{a}$ , celles de types  $\Delta_{m_0}$  suivant des droites de pente  $-\frac{b}{a}$ .

**Définition 4**

On appelle *génératrice* de  $\mathcal{PH}$  toute droite contenue dans  $\mathcal{PH}$ .

On montre aussi de façon analogue les points suivants :

- par tout point  $m \in \mathcal{PH}$  passent exactement deux génératrices, intersections de  $\mathcal{PH}$  et de  $\mathcal{P}_m$ .
- toute génératrice  $D$  appartient, pour tout  $m \in D$ , au plan tangent  $\mathcal{P}_m$ .

Le parabolôide elliptique est donc une surface réglée

L'ensemble  $\mathcal{G}$  des génératrices se décompose en deux sous-ensembles disjoints :  $\mathcal{G}_+$  formé des génératrices se projetant sur  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$  suivant une droite de pente  $\frac{b}{a}$  et  $\mathcal{G}_-$  formé des génératrices se projetant sur  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$  suivant une droite de pente  $-\frac{b}{a}$ .

**Proposition 11**

L'application qui associe à tout point  $m$  d'une génératrice  $D$  le plan tangent en  $m$  est une bijection de  $D$  sur l'ensemble des plans non verticaux contenant  $D$  (un plan est dit vertical si la droite  $o + \mathbb{R}k$  lui est parallèle).

**Démonstration** Choisissons  $m_0 \in D$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  et  $h$  un vecteur directeur de  $D$  de coordonnées  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ . On notera  $h_0 = \overrightarrow{om_0}$ .

Le plan tangent  $\mathcal{P}_m$  au point courant  $m = m_0 + \lambda h$  est l'unique plan contenant  $D$  orthogonal au vecteur :

$$(a^{-2}x_0, -b^{-2}y_0, -1) + \lambda (a^{-2}\alpha_0, -b^{-2}\beta_0, 0).$$

Lorsque  $\lambda$  varie, on obtient tous les plans sauf évidemment le plan contenant  $D$  et orthogonal à

$$(a^{-2}\alpha_0, -b^{-2}\beta_0, 0).$$

□

**Corollaire 12**

Soit  $D$  une génératrice de  $\mathcal{PH}$ .

- L'intersection d'un plan non vertical  $\mathcal{P}$  contenant  $D$  avec  $\mathcal{PH}$  est la réunion de  $D$  et d'une autre génératrice  $D'$ .
- L'intersection du plan vertical  $\mathcal{P}$  contenant  $D$  avec  $\mathcal{PH}$  est réduite à  $D$ .

**Démonstration**

- ▶ Si  $\mathcal{P}$  n'est pas vertical, alors  $\mathcal{P}$  est le plan tangent  $\mathcal{P}_m$  en un unique point  $m \in D$  et  $\mathcal{P}$  coupe  $\mathcal{H}_1$  suivant les deux génératrices  $D$  et  $\Delta$  passant par  $m$ .
- ▶ Si  $\mathcal{P}$  est vertical et passe par  $(x_0, y_0, z_0)$ , une équation est :

$$a^{-1}(x - x_0) + \varepsilon b^{-1}(y - y_0) = 0 \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1.$$

Un calcul élémentaire montre que son intersection avec  $\mathcal{PH}$  est la droite de paramétrisation :

$$(x_0 + at, y_0 + \varepsilon bt, z_0 + (a^{-1}x_0 - b^{-1}y_0)t).$$

□

**Proposition 13**

La relation définie sur l'ensemble  $\mathcal{G}$  des génératrices du parabolöide hyperbolique  $\mathcal{PH}$  par :

$$D \sim D' \iff D \text{ et } D' \text{ sont égales ou non coplanaires}$$

est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalences de  $\mathcal{G}$  pour cette relation sont les deux sous-ensembles :

$$\mathcal{G}_+ = \left\{ D \in \mathcal{G} \mid \text{la projection de } D \text{ sur } o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j \text{ est de pente } \frac{b}{a} \right\}$$

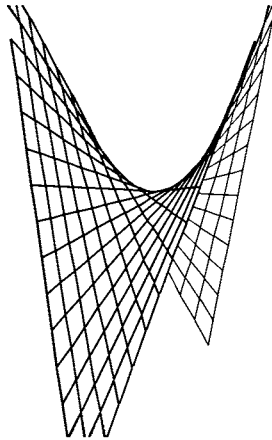
et :

$$\mathcal{G}_- = \left\{ D \in \mathcal{G} \mid \text{la projection de } D \text{ sur } o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j \text{ est de pente } -\frac{b}{a} \right\}.$$

**Démonstration** Nous avons vu ci-dessus que  $\mathcal{G}$  est la réunion des sous-ensembles disjoints  $\mathcal{G}_+$  et  $\mathcal{G}_-$ . On achève alors la démonstration en prouvant que la relation  $D \sim D'$  est la relation associée à la partition de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{G}_+$  et  $\mathcal{G}_-$ .

1. Si deux génératrices distinctes  $D$  et  $D'$  appartiennent au même sous-ensemble  $\mathcal{G}_+$  ou  $\mathcal{G}_-$ , elles se projettent sur le plan  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$  suivant deux droites parallèles distinctes  $d$  et  $d'$ . Si elles sont coplanaires,  $D$  et  $D'$  sont parallèles, ce qui n'est pas possible puisque qu'aucun plan ne coupe  $\mathcal{PH}$  suivant deux droites distinctes parallèles

2. Si deux génératrices distinctes  $D$  et  $D'$  n'appartiennent pas au même sous-ensemble  $\mathcal{G}_+$  ou  $\mathcal{G}_-$ , elles se projettent sur le plan  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$  suivant deux droites non parallèles  $d$  et  $d'$ . Elles se coupent alors au point du  $\mathcal{PH}$  situé au-dessus de l'intersection de  $d$  et  $d'$ . □



## 2.2 Quadriques impropres

### Cônes

On appelle *surface conique* ou *cône* de sommet  $o$ , toute surface  $\mathcal{S}$  réunion de droites passant par  $o$ . Une telle droite s'appelle une *génératrice* de  $\mathcal{S}$ .

- On décrit en général une surface conique  $\mathcal{S}$  en utilisant un *ensemble directeur*  $\mathcal{D}$  tel que  $\mathcal{S}$  soit la réunion des droites passant par  $o$  et un point  $m$  de  $\mathcal{D}$ . On recherche si possible un ensemble directeur situé dans un plan ne contenant pas  $o$ .
- Toute surface  $\mathcal{S}$  possédant dans un repère orthonormé une équation de la forme  $f(x, y, z) = 0$  où  $f(x, y, z)$  est une application homogène de degré  $k$  (vérifiant  $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x, y, z)$ ) est évidemment un cône de sommet  $o$  puisque  $f(x, y, z) = 0$  entraîne :

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x, y, z) = 0.$$

La quadrique d'équation de type IV :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

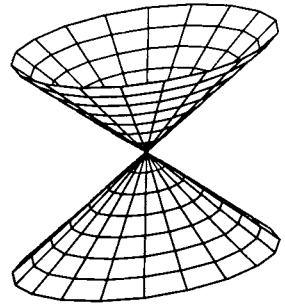
est un cône.

C'est évidemment l'ensemble des droites passant par  $o$  et les points de l'ellipse :

$$\frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{c^2 y^2}{b^2} = 1$$

du plan  $z = 1$ . Elle possède donc la paramétrisation :

$(at \cos \theta, bt \sin \theta, ct)$  avec  $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$   
et est connexe par arcs.



### Cylindre

On appelle *surface cylindrique* ou *cylindre* de direction de génératrices le vecteur non nul  $u$ , toute surface  $S$  réunion de droites parallèles à  $u$ . Une telle droite s'appelle une *génératrice* de  $S$ .

- On décrit en général une surface cylindrique  $S$  en utilisant un *ensemble directeur*  $\mathcal{D}$  tel que  $S$  soit la réunion des droites parallèles à  $u$  et passant par un point  $m$  de  $\mathcal{D}$ . On cherchera si possible un ensemble directeur situé dans un plan non parallèle à  $u$ .
- Toute surface  $S$  possédant dans un repère orthonormé une équation de la forme  $f(x, y) = 0$  est évidemment un cylindre de direction de génératrices  $k$ .

La quadrique possédant une équation de type IX est un *cylindre elliptique* de direction de génératrices  $k$  et d'ensemble directeur l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$ .

La quadrique possédant une équation de type X est un *cylindre hyperbolique* de direction de génératrices  $k$  et d'ensemble directeur l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$ .

La quadrique possédant une équation de type XIV est un *cylindre parabolique* de direction de génératrices  $k$  et d'ensemble directeur l'hyperbole :

$$x^2 = 2py$$

de  $o + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$ .

Les quadriques d'équations de type XI et XV sont des cylindres de direction de génératrices  $k$  et d'ensemble directeurs respectivement la réunion des droites

$$y = \pm \frac{b}{a}x \text{ et } x = \pm a.$$



## EXERCICES

1. Donner des représentations paramétriques simples des quadriques suivantes :

1. cône  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  ;

2. paraboloides elliptique  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$  ;

3. paraboloides hyperbolique  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$

2. La normale en un point  $m$  d'une quadrique d'équation  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  dans un repère orthonormé avec  $abc \neq 0$  coupe respectivement les plans d'équations  $x = 0, y = 0$  et  $z = 0$  en des points  $P, Q$  et  $R$ . Que peut-on dire des vecteurs  $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$  et  $\overrightarrow{MR}$  ?

3. Examiner, pour chacun des dix-sept types de quadriques mis en évidence par le cours, les valeurs des rangs  $r$  et  $\rho$  des matrices  $U$  et  $V$  définies par les égalités :

$$U = \begin{pmatrix} A & D & E & G \\ D & B & F & H \\ E & F & C & I \\ G & H & I & J \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

Donner une équation générale de chacune des quadriques pour lesquelles le couple  $(r, \rho)$  est connu. Que peut-on dire d'une quadrique telle que  $r = 4$  ?  $\rho = 3$  ?  $r = 3$  ?  $r \leq 2$  ?  $r - \rho = 2$  ?

4. Soit  $P$  le paraboloides hyperbolique d'équation  $2z = 4x^2 - y^2$  dans un repère orthonorme. Montrer qu'il contient deux droites  $D_\lambda$  et  $D_\mu$  respectivement situées dans les plans d'équations  $2x + y = \lambda$  et  $2x - y = 2\mu$ . Quel est le lieu de leur point d'intersection sachant que ces droites varient en restant orthogonales l'une à l'autre ?

5. Soit  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Reconnaitre la surface définie dans un repère orthonorme, par les équations paramétriques :

$$(x = a (t \cos u + \sin u), \quad y = b (\cos u - t \sin u), \quad z = \varepsilon ct)$$

où  $t$  décrit  $\mathbb{R}$  et  $u$  l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ .

6. 1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les quatre réels  $(u, v, w, h)$  pour que le plan d'équation  $ux + vy + wz = h$  soit tangent à la quadrique d'équation  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  avec  $abc \neq 0$ .
2. Même problème pour la quadrique d'équation  $2z = ax^2 + by^2$  avec  $ab \neq 0$ .
7. Un point  $P$  est le barycentre de deux sommets  $A$  et  $B$  d'un tétraèdre régulier  $ABCD$  respectivement affectés des poids  $t$  et  $1 - t$ . On lui associe le point  $Q$ , barycentre de  $C$  et  $D$  avec les mêmes poids. Que peut-on dire de la droite  $PQ$  lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$  ?
8. Déterminer les quadriques passant par le point de coordonnées  $(-1, -2, 3)$  et contenant les points de la droite d'équations  $(x = 0, y = z + 2)$  et ceux de la parabole d'équations  $(z = 0, y^2 = 4x)$ . Quelles sont leurs natures ?
9. 1. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équations  $(x = 1, y = z)$  est incluse dans l'hyperboloïde  $H$  de révolution à une nappe obtenu par rotation de l'hyperbole équilatère d'équations  $(x = 0, y^2 - z^2 = 1)$  par rapport à l'axe  $Oz$ .
2. Déterminer les points à coordonnées rationnelles situés sur l'hyperboloïde  $H$ .
3. Pour tout point  $A$  de  $\Delta$  de cote  $z \neq 0$ , on note  $B$  et  $C$  les points d'intersection du plan défini par  $A$  et l'axe  $Oz$  et du cercle d'équations  $(z = 0, x^2 + y^2 = 1)$ . Déterminer une équation de l'ensemble des points  $M$  appartenant à une droite de type  $AB$  ou de type  $AC$ .
10. Montrer que l'équation d'une quadrique peut s'interpréter comme l'annulation d'une forme quadratique  $\hat{q}$  définie sur l'espace  $\mathbb{R}^4$  et appliquée à un vecteur de la forme  $(x, y, z, 1)$ . Comment se modifie cette forme quadratique dans le cas d'un changement affine de coordonnées ?
11. 1. Que peut-on dire de l'image d'une quadrique par un automorphisme de l'espace affine euclidien où elle est définie ?
2. Montrer qu'une surface définie dans un repère d'un espace affine euclidien par une équation de la forme :
- $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$
- où les nombres réels  $A, B, C, D, E, F$  ne sont pas tous nuls, est une quadrique.

12. Déterminer le lieu des centres des coniques non vides sections planes de la quadrique d'équation  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  avec  $ab + bc + ca \neq 0$  par les plans d'équation  $x + y + z = \lambda$  lorsque  $\lambda$  varie dans  $\mathbb{R}$ .

13. 1. Que peut-on dire des quadriques contenant trois droites formant un véritable triangle d'un plan  $P$  ?  
 2. Déterminer les quadriques  $Q$  contenant la courbe  $\Gamma$  définie, dans un repère orthonorme, par les equations paramétriques :

$$x = \frac{3t}{t^3 - 1}, \quad y = \frac{1}{t - 1}, \quad z = \frac{t^2 + 2}{t^2 + t + 1}.$$

14. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel  $m$  la nature de la surface définie dans un repère affine par l'équation :

$$x^2 + 2y^2 + (m + 1)z^2 + 2xy - 2yz - 2x + 2y - 4z + m^2 + 4 = 0.$$

15. Déterminer un changement de repère orthonormé dans lequel la quadrique d'équation initiale :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - 3z - 1 = 0$$

est mise sous forme réduite. Quelle est sa nature ?

16. Les plans coupant deux sphères données non concentriques  $S$  et  $S'$  et de rayons distincts suivant deux cercles de mêmes rayons sont tangents à un parabolôide de révolution ne dépendant que de  $S$  et  $S'$ .

17. Calculer le volume compris entre le parabolôide elliptique d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$  et le plan d'équation  $ux + vy + wz = h$  dans un repère orthonormé.

# SOLUTIONS DES EXERCICES

## Chapitre 1

1. Puisque  $E$  est infini, il existe une injection  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $E$  ; on construit  $f$  par récurrence en choisissant  $f(0)$  dans  $E$  et, si  $f_{|[0,n]}$  est déterminée, en choisissant  $f(n+1)$  dans la partie non vide :

$$E \setminus \text{Im } f_{|[0,n]}.$$

Puisque  $D$  est dénombrable et  $\text{Im } f$  dénombrable infini,  $D \cup \text{Im } f$  est dénombrable infini et il existe une bijection  $g$  de  $D \cup \text{Im } f$  sur  $\mathbb{N}$ .

On construit alors une bijection  $\varphi$  de  $D \cup E$  sur  $E$  en posant :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(g(x)) & \text{si } x \in D \cup \text{Im } f \\ x & \text{si } x \in E \setminus \text{Im } f. \end{cases}$$

2. 1. Si  $f$  est une injection de  $E$  dans  $F$ , l'application :

$$x \in F \longmapsto g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{Im } f \\ e & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $e$  est un élément de  $E$  est une surjection de  $F$  sur  $E$ .

Si  $g$  est une surjection de  $F$  sur  $E$ , l'application  $f$  qui associe à tout élément  $x$  de  $E$  un élément de l'ensemble non vide  $g^{-1}(x)$  est une injection de  $E$  dans  $F$  (cette construction, qui nécessite un axiome particulier dans une théorie formelle des ensembles, ne pose pas de problème dans une théorie naïve).

2. L'application  $h$  est une injection de  $E$  dans lui-même.

- (a) La famille  $\mathcal{A}$  est non vide puisque  $G \cup h(E) \subset E$  montre que  $E \in \mathcal{A}$ . Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'éléments de  $\mathcal{A}$ , on a :

$$G \cup h \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) \subset \bigcap_{i \in I} (G \cup h(X_i)) \subset \bigcap_{i \in I} X_i.$$

Ainsi,  $\bigcap_{i \in I} X_i$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

- (b) Puisque  $\mathcal{A}$  est non vide, on peut considérer la partie :

$$A = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X.$$

La question précédente montre que l'on a  $A \in \mathcal{A}$ . Par définition,  $A$  est contenue dans tout élément  $X$  de  $\mathcal{A}$ .

On a donc  $G \cup h(A) \subset A$ . Il vient alors :

$$G \cup h(G \cup h(A)) \subset G \cup h(A).$$

Cela entraîne  $G \cup h(A) \in \mathcal{A}$  et  $A \subset G \cup h(A)$ . On a donc :

$$G \cup h(A) = A.$$

- (c) Si  $y$  appartient à  $A'$  et  $B'$  il existe  $x \in A$  tel que  $y = f(x)$  et  $g(y)$  appartient à  $B$ . On en déduit  $h(x) \in h(A)$  et  $h(x) \in B$ . La question précédente montre alors  $h(x) \in A \cap B$ , en contradiction avec  $B = E \setminus A$ . Soit  $y \in F \setminus B'$ . On a alors  $g(y) \in A$ . Comme  $g(y)$  n'appartient pas à  $G = E \setminus g(F)$ , la relation :

$$G \cup h(A) = A$$

montre qu'il existe  $x \in A$  tel que  $g(y) = h(x)$ . On en déduit  $y = f(x)$  par injectivité de  $g$ . Ainsi,  $y$  appartient à  $A'$ .

La relation  $f(A) = A'$  montre que l'application  $\varphi : x \in A \mapsto f(x) \in A'$  est bijective. L'égalité  $B' = g^{-1}(B)$  montre que l'application :

$$\psi : y \in B' \mapsto g(y) \in B$$

est injective. Si  $x \in B$ , alors  $x$  n'appartient pas à  $A$  ni à  $G$ . On a donc  $x \in g(F)$ . Il existe alors  $y$  de  $F$  tel que  $x = g(y)$  et, par définition,  $y \in B'$ . L'application  $\psi$  est donc une bijection de  $B'$  sur  $B$ .

Comme  $(A, B)$  et  $(A', B')$  sont des partitions de  $E$  et  $F$ , l'application :

$$x \in E \mapsto \chi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ \psi^{-1}(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

est une bijection de  $E$  sur  $F$ .

- 3** On utilise la notion de développement en base  $a$  d'un nombre réel exposé dans le chapitre consacré aux séries numériques.

Puisque les suites  $(c_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  ne sont pas stationnaires de valeur limite 2, l'application :

$$(c_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{3^{n+1}} \in [0, 1]$$

est injective. D'un autre côté, l'application :

$$(c_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} \in [0, 1]$$

est surjective.

L'exercice précédent montre alors qu'il existe une bijection de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sur  $[0, 1]$ . Puisque  $[0, 1]$  est la réunion disjointe de  $\{0, 1\}$  et de  $]0, 1[$ , il existe une bijection de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sur  $]0, 1[$ .

Par composition avec les bijections :

$$x \in ]0, 1[ \mapsto \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}$$

et :

$$(c_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \{n | c_n = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$

on obtient une bijection de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. 1. Supposons  $p = 1$ . Puisque  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable, il existe  $x \in E$  n'appartenant pas à  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . L'hyperplan  $\{x\}$  ne contient aucun élément de  $(x_n)$ .

Supposons le résultat acquis pour tout espace de dimension  $q < p$ . Notons  $\pi$  une projection sur un hyperplan affine  $H$  de  $E$  de noyau  $V$ . Puisque  $H$  de dimension strictement inférieur à  $p$ , il existe un hyperplan affine  $L$  de  $H$  ne contenant aucun point de  $(\pi(x_n))$ . L'hyperplan affine :

$$L \oplus V$$

ne contient aucun élément de  $(x_n)$ .

2. On peut supposer que la suite  $(H_n)$  est injective et on note  $H = H_0$ .

Lorsque  $p = 1$ , la suite  $(H_n)$  est simplement une suite de points d'une droite. Puisque  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable il existe  $x \in \mathbb{R}$  n'appartenant à aucun hyperplan de  $(H_n)$ .

Supposons le résultat acquis pour tout espace de dimension strictement inférieur à  $p$ . Puisque la suite  $(H_n)$  est injective, la suite  $(H \cap H_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'hyperplans affines de  $H$ . Puisque  $H$  est de dimension strictement inférieur à  $p$ , il existe un point  $y$  appartenant à  $H$  mais n'appartenant à aucun hyperplan de la famille  $(H \cap H_n)_{n \geq 1}$ .

Soit  $D$  la droite  $y + \mathbb{R}v$  où  $v$  est un vecteur non parallèle à  $H$ . La suite des intersections  $(D \cap H_n)_{n \geq 0}$  est une suite de points de  $D$ . Il existe donc un élément  $x$  de  $D$  n'appartenant à aucun hyperplan de  $(D \cap H_n)_{n \geq 0}$ .

3. On munit  $E$  d'un produit scalaire et l'on note  $H_n$  l'hyperplan vectoriel orthogonal à  $x_n$  pour tout  $n$ .

La question précédente montre qu'il existe un élément  $x$  n'appartenant à aucun des hyperplans  $H_n$ . Puisque  $x$  est non nul, notons  $H$  l'hyperplan vectoriel orthogonal à  $x$ . L'ensemble  $H$  ne contient alors aucun élément de  $(x_n)$ .

5. 1. Soit  $(I_i)_{i \in X}$  une famille d'intervalles ouverts non vides tels que pour tous  $i \neq j$ , on ait  $I_i \cap I_j = \emptyset$ .  
Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe, pour tout  $i \in I$ , un élément rationnel  $r_i$  dans  $I_i$ . L'application :

$$i \in I \longmapsto r_i \in \mathbb{Q}$$

est alors injective ; en effet,  $r_i = r_j$  entraîne  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$  et, par conséquent,  $i = j$ . L'ensemble des rationnels étant dénombrable,  $X$  est aussi dénombrable.

2. Soit  $D$  l'ensemble des points de discontinuité d'une application croissante  $f$  d'un intervalle  $I$  vers  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x$  de  $D$ , on pose :
- $I_x = ]f(x-), f(x+)[$  lorsque  $x$  est intérieur à  $I$ ,
  - $I_x = ]f(x), f(x+)[$  si  $x$  est le plus petit élément de  $I$ ,
  - $I_x = ]f(x-), f(x)[$  si  $x$  est le plus grand élément de  $I$

La famille  $(I_x)_{x \in D}$  vérifie la condition  $I_x \cap I_y = \emptyset$  pour  $x \neq y$ . L'ensemble  $D$  est donc dénombrable.

3. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans lui-même vérifiant  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . On sait que l'on a alors :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = rf(1).$$

La question précédente montre que l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  est dénombrable. Puisque  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable,  $f$  est continue en un point  $x_0$  de  $\mathbb{R}$ . Soit alors  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $(r_n)$  est une suite de rationnels convergeant vers  $x$ , la suite  $(r_n - x + x_0)$  converge vers  $x_0$  et, par continuité :

$$(f(r_n) - f(x) + f(x_0))$$

( $f$  est un morphisme de groupes additif) converge vers  $f(x_0)$ . Il vient alors :

$$f(x) = \lim_n f(r_n) = xf(1).$$

6. 1. L'ensemble

$$D = \{(r, s) \in \mathbb{Q}^2 \mid r < s\}$$

est denombrable comme partie de l'ensemble dénombrable  $\mathbb{Q}^2$ . Considérons alors la famille injective d'intervalles ouverts  $(I_{(r,s)})_{(r,s) \in D}$  où :

$$I_{(r,s)} = ]r, s[.$$

Soient  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $x$  un élément de  $I$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$ , il existe deux rationnels  $r$  et  $s$  tels que  $a < r < x < s$ . On a donc :

$$x \in I_{(r,s)} \subset I.$$

2. Soit  $(I_i)_{i \in D}$  une famille vérifiant les conditions de la question précédente. Si  $a$  est un point isolé de  $A$ , il existe un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $A \cap I = \{a\}$ . Il existe alors un indice  $i \in D$  tel que  $a \in I_i \subset I$ . On en déduit  $A \cap I_i = \{a\}$ .

On construit alors une application  $\varphi$  de l'ensemble  $A'$  des points isolés de  $A$  vers  $D$  en associant à  $a \in A'$  l'un des indices  $i \in D$  tels que  $A \cap I_i = \{a\}$ . Cette application est injective puisque  $\varphi(a) = \varphi(b)$  entraîne :

$$\{a\} = A \cap I_{\varphi(a)} = A \cap I_{\varphi(b)} = \{b\}.$$

On en déduit que  $A'$  est dénombrable.

3. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les conditions imposées. Si  $x$  et  $z$  sont deux éléments distincts de  $\mathbb{R}$ , il existe  $y$  tel que  $|y - x| < |z - x|$ . On en déduit :

$$|f(y) - f(x)| < |f(z) - f(x)|$$

et, par conséquent,  $f(x) \neq f(z)$ .

Soient  $D$  l'ensemble des points de discontinuité de  $f$ ,  $A$  l'image de  $f$  et  $A'$  l'ensemble des points isolés de  $A$ . Si  $f(x)$  n'est pas isolé dans  $A$ , alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un élément  $f(z) \neq f(x)$  tel que  $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$ . On a alors :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |y - x| < |z - x| \implies |f(y) - f(x)| < |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ainsi  $f$  est continue en  $x$ . On a donc  $f(x) \notin A' \implies x \notin D$  et, par conséquent,  $D \subset f^{-1}(A')$ . On sait par la question précédente que  $A'$  est dénombrable. puisque  $f$  est injective,  $D$  est aussi dénombrable.

Puisque l'ensemble somme  $D + \mathbb{Q} = \{d + r \mid (d, r) \in D \times \mathbb{Q}\}$  est dénombrable, il existe un nombre réel  $a$  n'appartenant pas à  $D + \mathbb{Q}$ . On en déduit que  $f$  est continue en tout point de  $a + \mathbb{Q}$ . Il est alors immédiat que l'application :

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{f(1+a) - f(a)} (f(x+a) - f(a))$$

vérifie la condition de la question,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$  et est continue en tout point de  $\mathbb{Q}$ .

Soient alors deux rationnels  $r$  et  $s$  vérifiant  $r < s$ , ainsi que  $u = \frac{1}{2}(r + s)$ . On a, pour tout  $n$  :

$$|r - (u - 2^{-n})| < |s - (u - 2^{-n})|$$

et donc :

$$|g(r) - g(u - 2^{-n})| < |g(s) - g(u - 2^{-n})|$$



À la limite, cela donne  $|g(r) - g(u)| \leq |g(s) - g(u)|$ . En utilisant la suite  $(u + 2^{-n})$ , on obtient  $|g(s) - g(u)| \leq |g(r) - g(u)|$ . Cela implique :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{Q}^2, \quad g\left(\frac{1}{2}(r + s)\right) = \frac{1}{2}(g(r) + g(s))$$

En utilisant  $g(0) = 0$ , il vient  $g\left(\frac{1}{2}r\right) = \frac{1}{2}g(r)$  et  $g(r + s) = g(r) + g(s)$

Ainsi, la restriction de  $g$  à  $\mathbb{Q}$  est linéaire et l'on a  $\forall r, g(r) = r$  puisque  $g(1) = 1$ .

Supposons qu'il existe un réel  $x$  tel que  $x \neq g(x)$ . Si  $x < g(x)$ , il existe deux nombres rationnels  $r$  et  $s$  tels que  $r < x < s < f(x)$  avec donc  $|x - r| < |s - r|$  et  $|f(x) - r| > |s - r|$ , ce qui contredit l'hypothèse. On obtient une contradiction analogue si  $g(x) < x$ .

Finalement,  $g$  est l'identité de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une application affine.

## Chapitre 2

1. Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{Q}^n$ . On a évidemment  $e_i \in \mathbb{Z}^n$  pour tout  $i$ .

Soit  $\varphi$  un morphisme injectif de  $(\mathbb{Z}^n, +)$  dans  $(\mathbb{Z}^m, +)$ . Il existe alors une unique application linéaire  $u$  de  $\mathbb{Q}^n$  dans  $\mathbb{Q}^m$  telle que  $u(e_i) = \varphi(e_i)$  pour tout  $i$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un élément de  $\text{Ker } u$ . Il existe évidemment un entier strictement positif  $d$  tel que :

$$d(x_1, \dots, x_n) = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

On obtient alors :

$$\varphi(r_1, \dots, r_n) = d \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = du(x) = 0.$$

Puisque  $u$  est injectif, il vient  $(r_1, \dots, r_n) = 0$  et, donc,  $x = 0$ . Finalement,  $u$  est une application linéaire injective de  $\mathbb{Q}^n$  dans  $\mathbb{Q}^m$  et  $n \leq m$ . Si  $n$  est inférieur ou égal à  $m$ , l'application :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

est évidemment un morphisme de  $(\mathbb{Z}^n, +)$  dans  $(\mathbb{Z}^m, +)$ .

Si  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{Z}^n, +)$  sur  $(\mathbb{Z}^m, +)$ , l'injectivité de  $\varphi$  et de  $\varphi^{-1}$  entraînent  $n \leq m$  et  $m \leq n$ . On a donc  $n = m$ . Si  $n = m$ , les groupes  $(\mathbb{Z}^n, +)$  dans  $(\mathbb{Z}^m, +)$  sont égaux.

2. Rappelons que l'hypothèse concernant  $\mathbf{K}$  signifie que  $-1$  est différent de  $1$  dans  $\mathbf{K}$ .

Un élément  $s$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  est involutif, c'est-à-dire vérifie  $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{K}^n}$ , si, et seulement si, il existe une unique décomposition en somme directe  $\mathbf{K}^n = F \oplus G$  telle que  $s$  soit la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

Considérons alors deux éléments involutifs de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  associés respectivement aux décompositions en somme directe  $K^n = F \oplus G$  et  $K^n = F' \oplus G'$ . Si  $s$  et  $s'$  sont conjuguées, c'est-à-dire s'il existe  $g$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  tel que  $s'$  soit égal à  $gs g^{-1}$ , on a évidemment  $F' = g(F)$  et  $G' = g(G)$  et, par conséquent,  $\dim F' = \dim F$ . Si, réciproquement, les sous-espaces  $F$  et  $F'$  ont même dimension, il en est de même de  $G$  et  $G'$  et il existe un élément  $g$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  tel que  $g(F) = F'$  et  $s(G) = G'$ . On en déduit  $s' = g s g^{-1}$ . Ainsi  $s$  et  $s'$  sont conjuguées si et seulement si, leurs sous-espaces de points fixes ont même dimension. Cette dimension appartient évidemment à l'ensemble  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Comme il existe des symétries dont l'espace des points fixes est de dimension  $k$  pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , le nombre de classes de conjugaison d'éléments involutifs de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  est  $n + 1$ .

Si  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  et  $\mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$  sont isomorphes, ils ont même nombre de classes de conjugaison d'éléments involutifs. Ainsi  $n + 1 = m + 1$ , et  $n = m$ . Si  $n = m$ , les groupes  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  et  $\mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$  sont égaux.

3. Pour les distinguer, on notera  $\bar{k}$  les éléments de  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  et  $\tilde{l}$  ceux de  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ .

Si  $\varphi$  est un morphisme de  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ , l'ordre  $w$  de  $\varphi(\bar{1})$  divise  $a$  puisque l'on a :

$$a\varphi(\bar{1}) = \varphi(\bar{0}) = \tilde{0}$$

et aussi  $b$  puisque  $\varphi(\bar{1}) \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ . L'entier  $w$  divise  $d$  et  $\varphi(\bar{1}) = \tilde{0}$  appartient au sous-groupe à  $b' = bd^{-1}$  éléments :

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \tilde{l} \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \mid d\tilde{l} = \tilde{0} \right\} \\ &= \left\{ \tilde{l}b' \mid l \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket \right\} \end{aligned}$$

de  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ .

Considérons alors l'application  $\Phi$  qui associe à tout morphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  l'élément  $\varphi(\bar{1})$  de  $G$ .

1. L'application  $\Phi$  est injective ; si, en effet, deux morphismes  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient  $\varphi(\bar{1}) = \psi(\bar{1})$ , on a :

$$\forall k, \quad \varphi(\bar{k}) = k\varphi(\bar{1}) = k\psi(\bar{1}) = \psi(\bar{k})$$

et, donc,  $\varphi = \psi$ .

2. L'application  $\Phi$  est surjective ; soit, en effet, un élément  $\alpha$  de  $G$  et  $\varphi$  le morphisme  $k \mapsto k\alpha$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ . Puisque  $d\alpha = \tilde{0}$ , le noyau  $N$  de  $\varphi$  contient  $d$  et, par conséquent,  $a\mathbb{Z}$ . Le théorème de factorisation fournit alors un morphisme :

$$\psi : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

tel que  $\psi(\bar{1}) = \varphi(1) = \alpha$ .

Il y a donc  $d$  morphismes de  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ .

4. 1. On a évidemment  $(ab)^{nm} = (a^n)^m (b^m)^n = e$ . Considérons réciproquement l'équation  $(ab)^k = e$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . En élevant à la puissance  $m$  l'équation précédente, on obtient :

$$a^{km} = a^{km} b^{km} = e.$$

On en déduit que l'ordre  $n$  de  $a$  divise  $km$ . Par le lemme de Gauss, il divise aussi  $k$ . On voit de la même façon que  $m$  divise  $k$ . Finalement, le produit  $nm$  divise  $k$  et l'ordre de  $ab$  est  $nm$ .

2. Considérons tout d'abord les cycles  $a = (1, 2)$  et  $b = (2, 3, 4)$  de  $S_3$ . Ces éléments sont respectivement d'ordre 2 et 3 et ne commutent pas. Leur produit :

$$(1, 2) \circ (2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$$

est d'ordre 4, différent du produit de 2 et 3. L'hypothèse  $ab = ba$  est donc indispensable.

Considérons, en deuxième lieu, les éléments  $a = (1, 2)$  et  $b = (1, 2)$  de  $S_2$ . Les éléments  $a$  et  $b$  sont d'ordre 2 et commutent. Leur produit, égal à l'identité, est d'ordre 1. L'hypothèse sur les ordres de  $a$  et  $b$  est aussi indispensable.

5. 1. Les ordres des éléments de  $G$  sont majorés par le cardinal de  $G$ . On peut donc considérer leur PPCM que l'on notera  $m$ . Considérons alors sa factorisation en produits de nombres premiers :

$$m = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}.$$

Par définition du PPCM, il existe pour tout  $i$  un élément  $g_i$  de  $G$  dont l'ordre  $m_i$  est diviseur de  $m$  de la forme  $m_i = p_i^{k_i} m'_i$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , l'élément  $a_i = g_i^{m'_i}$  est d'ordre  $p_i^{k_i}$  puisque l'équation  $a_i^l = e$  avec  $l \in \mathbb{Z}$  est équivalente à  $p_i^{k_i} m'_i \mid lm'_i$ , soit à  $p_i^{k_i} \mid l$ .

Comme  $G$  est abélien, l'exercice précédent montre que l'ordre du produit  $a_1 \cdots a_r$  est  $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ , c'est-à-dire  $m$ .

2. Si  $G$  est cyclique et possède  $n$  éléments le groupe  $G$  est isomorphe à un  $\mathbb{U}_n$ . Pour tout entier  $m$ , le sous-groupe  $\{g \in G \mid g^m = e\}$  est alors isomorphe à  $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$ . Il possède donc moins de  $m$  éléments.

Pour montrer la réciproque, considérons le PPCM  $m$  des ordres des éléments de  $G$ . Comme tous les éléments  $g$  de  $G$  vérifient  $g^m = e$ , l'ensemble  $G$ , égal à :

$$\{g \in G \mid g^m = e\},$$

possède moins de  $m$  éléments. Il contient aussi un élément  $a \in G$  d'ordre  $m$  par la première question. Le sous-groupe  $H$  engendré par  $a$  ayant  $m$  élément, on a  $H = G$ . Ainsi,  $G$  est cyclique.

3. Pour tout entier  $m$ , l'ensemble :

$$\{g \in G \mid g^m = 1\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines dans  $\mathbb{K}$  du polynôme  $X^m - 1$ . Il a donc moins de  $m$  éléments. La question précédente montre alors que  $G$  est cyclique.

6. Nous avons vu en exemple dans le cours que l'ensemble  $\mathcal{G}$  des sous-groupes de  $\mathbb{U}_n$  est l'ensemble des groupes  $\mathbb{U}_d$  lorsque  $d$  parcourt l'ensemble des diviseurs positifs de  $n$ .

Considérons alors l'application :

$$\Phi : z \in \mathbb{U}_n \longmapsto \langle z \rangle \in \mathcal{G}.$$

Pour tout sous-groupe  $\mathbb{U}_d$  de  $\mathcal{G}$ , l'ensemble des éléments  $z$  de  $\mathbb{U}_n$  qui vérifie  $\Phi(z) = \mathbb{U}_d$  est égal à l'ensemble des éléments  $z$  de  $\mathbb{C}^*$  d'ordre  $d$ . L'ensemble  $\Phi^{-1}(\mathbb{U}_d)$  a donc  $\varphi(d)$  éléments.

La famille  $(\Phi^{-1}(\mathbb{U}_d))_{d \in \mathbb{N}^*, d|n}$  étant une partition de  $\mathbb{U}_n$ , il vient :

$$n = \sum_{d \in \mathbb{N}^*, d|n} \Phi^{-1}(d) = \sum_{d \in \mathbb{N}^*, d|n} \varphi(d).$$

7. Pour tout  $x$  de  $G$ , la relation  $x^2 = e$  entraîne  $x^{-1} = x$ . On a alors pour tous  $x$  et  $y$  :

$$xy = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} = yx.$$

On note additivement le groupe  $G$ . On obtient le produit externe de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $G$  en posant :

$$\forall x \in G, \quad \bar{0}x = 0 \quad \text{et} \quad \bar{1}x = x.$$

Il s'agit alors de vérifier les axiomes d'espace vectoriel. Seul l'axiome :

$$\forall (\alpha, \beta, x) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

n'est pas immédiat. On le vérifie simplement lorsque  $\alpha$  ou  $\beta$  est nul. Pour  $\alpha$  et  $\beta$  égal à  $\bar{1}$ , il provient de :

$$\forall x \in G. \quad (\bar{1} + \bar{1})x = \bar{0}x = 0 \quad \text{et} \quad \bar{1}x + \bar{1}x = x + x = 0.$$

Comme l'ensemble  $G$  est fini, l'espace vectoriel que nous venons de construire est de dimension finie  $r$  et est donc isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ . Le groupe additif  $G$  est donc isomorphe au groupe additif  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ .

8. On se place dans le groupe  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ . La relation  $\bar{2}^p = \bar{1}$  montre que l'ordre de  $\bar{2}$  est un diviseur de  $p$ . Comme  $\bar{2}$  est différent de  $\bar{1}$ , cet ordre est  $p$ . Le sous-groupe engendré par  $\bar{2}$  a donc  $p$  éléments et le théorème de Lagrange montre que  $p$  divise  $q - 1$ . Comme  $q - 1$  est pair, il vient finalement :

$$2p \mid q - 1.$$

9. Nous avons vu dans le cours, qu'un groupe fini de cardinal premier  $p$  est cyclique et, donc, isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Ainsi, les groupes à 1, 2, 3, 5 et 7 éléments sont respectivement isomorphes à :

$$\{e\}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Soit  $G$  un groupe ayant 4 éléments. Les éléments de  $G$  différents du neutre sont d'ordre 2 ou 4. Si  $G$  contient un élément d'ordre 4, il est cyclique isomorphe à  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Si  $G$  ne contient pas d'éléments d'ordre 4, tous ses éléments vérifient  $x^2 = e$ . L'exercice 7 montre qu'il est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ .

Soit  $G$  un groupe ayant 6 éléments. Les éléments de  $G$  différents du neutre sont d'ordre 2, 3 ou 6.

1. Si  $G$  contient un élément d'ordre 6, il est cyclique isomorphe à  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .
2. Si  $G$  ne contient pas d'éléments d'ordre 6, il contient un élément d'ordre 3. Dans le cas contraire, on aurait  $\forall x, x^2 = e$  et, par l'exercice précédent,  $6 = 2^r$ , ce qui n'est pas. Si  $G$  est abélien, l'exercice 4 montre que le produit d'un élément d'ordre 2 par un élément d'ordre 3 est d'ordre 6, ce qui a été exclus.

Le groupe  $G$  contient donc un élément  $a$  d'ordre 2 et un élément  $b$  d'ordre 3 vérifiant  $ab \neq ba$ . On vérifie alors sans difficulté que les éléments  $e, b, b^2, a, ab, ab^2$  sont deux à deux distincts. On a donc :

$$G = \{e, b, b^2, a, ab, ab^2\}.$$

Puisque  $ba$  est différent de  $e$  (sinon  $b = a$  d'ordre 2), de  $b$  (sinon  $a = e$ ), de  $b^2$  (sinon  $a = b$  d'ordre 3), de  $a$  (sinon  $b = e$ ) et de  $ab$  (par hypothèse), on a  $ba = ab^2$ . Il est alors aisé de construire la table de  $G$  et de vérifier

qu'il est isomorphe à  $S_3$ . On peut aussi remarquer que l'ensemble des éléments d'ordre 2 de  $G$  est  $X = \{a, ab, ab^2\}$ . Cette partie étant stable par automorphisme intérieur, l'application  $\Phi$  qui associe à tout  $g$  de  $G$  la restriction à  $X$  de  $\varphi_g : h \mapsto ghg^{-1}$  définit un morphisme de groupes de  $G$  dans  $S_X$ . Puisque le sous-groupe  $\Phi(G)$  de  $S_X$  contient  $\Phi(b) = (a, ab, ab^2)$  (cycle d'ordre 3) et  $\Phi(a) = (ab, ab^2)$  (cycle d'ordre 2) qui engendrent  $S_X$ , l'application  $\Phi$  est surjective. Pour des raisons de cardinalité,  $\Phi$  est alors un isomorphisme de  $G$  sur  $S_X$ .

10. Considérons, en effet, l'ensemble :

$$E = \{ (g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = e \}.$$

L'application  $\sigma : (g_1, \dots, g_{p-1}, g_p) \mapsto (g_2, \dots, g_p, g_1)$  de  $G^p$  dans lui-même est bijective et vérifie  $\sigma^p = \text{Id}_{G^p}$ . L'implication :

$$g_1 \cdots g_{p-1} g_p = e \implies g_2 \cdots g_p g_1 = e$$

montre que  $\sigma$  laisse  $E$  stable. La restriction de  $\sigma$  à  $E$  est alors une permutation  $\rho$  de cet ensemble vérifiant  $\rho^p = \text{Id}_E$ . Le morphisme de groupes  $k \mapsto \rho^k$  de  $\mathbb{Z}$  vers  $S(E)$  dont le noyau contient  $p\mathbb{Z}$  se factorise alors en un morphisme de groupes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \rightarrow & S(E) \\ \bar{k} & \mapsto & \rho^k \end{array}$$

que l'on peut interpréter comme une action de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sur  $E$ .

Le nombre d'éléments d'une orbite de  $E$  sous cette action est un diviseur de  $p$  et vaut donc 1 ou  $p$ . Notons alors  $r$  le nombre d'orbites réduites à un point et  $s$  celui des autres. La formule des classes :

$$n^{p-1} = r + ps$$

montre que  $p$  divise  $r$ . Comme ce nombre n'est pas nul puisque l'orbite de  $(e, \dots, e)$  est réduite à un point  $r$  est strictement supérieur à 1. Il existe donc un élément  $(g_1, \dots, g_p)$  différent de  $(e, \dots, e)$  dans  $E$  fixe par  $\rho$ . La relation :

$$\rho(g_1, \dots, g_p) = (g_1, \dots, g_p)$$

montre que l'on a  $g_2 = g_1, \dots, g_1 = g_p$ . Cet élément est donc de la forme  $(g_1, \dots, g_1)$  avec  $g_1 \neq e$ . Puisqu'il appartient à  $E$ , on obtient  $g_1^p = e$  avec  $g_1 \neq e$ .

L'ordre de  $g_1$  qui est un diviseur de  $p$  différent de 1 est alors égal à  $p$ .

**11** D'après le théorème de Cauchy,  $G$  contient un élément  $a$  d'ordre 5. Notons  $H$  le sous-groupe engendré par cet élément et montrons que c'est le seul sous-groupe à 5 éléments de  $G$ . Si  $H'$  est un sous-groupe à 5 éléments de  $G$  différent de  $H$ , l'intersection  $H \cap H'$  est un sous-groupe de  $H$  de cardinal strictement inférieur à 5. Elle est donc réduite à  $\{e\}$  puisque 5 est premier. Il est alors trivial de vérifier que l'application  $(h, h') \mapsto hh'$  de  $H \times H'$  vers  $G$  est injective. Cela n'est pas possible puisque  $H \times H'$  à 25 éléments et  $G$  seulement 15. Ainsi,  $H$  est le seul sous-groupe à 5 éléments de  $G$ . Il contient, en particulier, tous les éléments d'ordre 5 de  $G$ .

Pour tout  $g \in G$ , le conjugué  $gHg^{-1}$  est un sous-groupe à 5 éléments de  $G$ . Il est donc égal à  $H$ . Ainsi  $H$  est distingué dans  $G$  et l'on peut considérer l'action restreinte de  $G$  sur  $H$  définie par  $g * h = ghg^{-1}$  pour tout  $(g, h) \in G \times H$ . Cette action induit un morphisme  $\varphi$  de  $G$  dans le groupe des automorphismes de groupe de  $H$ . Celui-ci est évidemment isomorphe au groupe des automorphismes de groupes de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  qui a 4 éléments puisqu'il existe un et un seul automorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  tel que  $\varphi(\bar{1})$  soit égal à  $\alpha$  pour tout classe  $\alpha$  non nulle de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .

Considérons alors un élément  $b \in G \setminus H$ . Nous avons vu que cet élément est d'ordre 3. Son image par  $\varphi$  vérifie  $\varphi(b)^3 = \text{Id}_{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$  et appartient au groupe à 4 éléments des automorphismes de groupes de  $H$ . Son ordre est donc 1. On a ainsi  $\varphi(b) = \text{Id}_{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$ , ce qui signifie que  $b$  commute avec tous les éléments de  $H$ . En particulier,  $a$  commute avec  $b$  et l'élément  $ab$  est alors d'ordre 15.

Finalement,  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ .

**12.** 1. Soit  $N$  le noyau d'un morphisme de groupes  $\varphi : G \rightarrow G'$ . Si  $n$  appartient à  $N$ , alors, pour tout  $g$  de  $G$ , on a :

$$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e$$

et, par conséquent,  $gng^{-1} \in N$ .

2. La relation  $x \equiv y [H]$  est réflexive puisque  $xx^{-1} \in H$ , symétrique puisque

$$xy^{-1} \in H \implies yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in H$$

et transitive puisque :

$$xy^{-1} \in H \quad \text{et} \quad yz^{-1} \in H \implies yz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H.$$

3. Soit  $x \equiv y [H]$  et  $u \equiv v [H]$ . On a  $xy^{-1} \in H$  et  $uv^{-1} \in H$ . Puisque  $H$  est distingué, on a aussi  $y(uv^{-1})y^{-1} \in H$ . Il vient alors :

$$(xu)(yv)^{-1} = (xy^{-1})y(uv^{-1})y^{-1} \in H$$

et  $xu \equiv yv [H]$ .

On construit alors une loi quotient sur  $G/H$  exactement de la même façon que l'on a construit la loi addition quotient de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On vérifie aussi de la même façon que cette loi est la seule loi de  $G/H$  telle que  $\pi$  soit un morphisme et qu'elle donne à  $G/H$  une structure de groupe.

Le noyau du morphisme  $\pi$  est la classe de  $e$  pour la relation  $x \equiv y [H]$ . Il est immédiat que c'est  $H$ .

13. 1. Soient  $X$  une orbite de  $E$  sous l'action de  $G$  possédant  $l$  éléments et  $a \in X$ . L'ensemble  $X$  est aussi l'orbite de  $a$  sous l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $E$  définie par  $k * x = \sigma^k(x)$ . Notons alors  $S$  le sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  stabilisateur de  $a$  et  $l$  le générateur positif de  $S$ . La relation  $k * a = k' * a$ , équivalente à  $k' - k \in S$ , est simplement la congruence  $k \equiv k'$  modulo  $l$ . Puisque les entiers  $0, 1, \dots, l-1$  forment un système de représentant des entiers modulo  $l$ , les éléments :

$$a, \sigma^1(a), \dots, \sigma^{l-1}(a)$$

sont deux à deux distincts et leur ensemble forme l'orbite  $X$ .

Lorsque  $l$  est strictement supérieur à 1, l'application  $\sigma'_X$  est égale au cycle  $(a_1, \dots, a_l)$  puisqu'elle transforme  $\sigma^i(a)$  en  $\sigma^{i+1}(a)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, l-2 \rrbracket$  ainsi que  $\sigma^{l-1}(a)$  en  $a$  vu  $l \in S$  et puisque  $\sigma_X(x) = x$  pour tout  $x \notin X$ . Lorsque  $l$  est égal à 1, l'application  $\sigma_X$  se réduit à l'identité.

2. On appelle support d'une permutation  $\rho$  l'ensemble  $\{x \mid \rho(x) \neq x\}$ . C'est évidemment une partie stable par  $\rho$ . Considérons alors une famille de permutations  $\rho_1, \dots, \rho_r$  à supports  $S_1, \dots, S_r$  deux à deux disjoints. On a évidemment  $(\rho_1 \circ \dots \circ \rho_r)(x) = x$  pour tout  $x$  n'appartenant pas à la réunion des  $S_i$  et :

$$(\rho_1 \circ \dots \circ \rho_r)(x) = (\rho_1 \circ \dots \circ \rho_{i-1})(\rho_i(x)) = \rho_i(x)$$

pour tout  $S_i$  puisque  $\rho_k(x) = x$  pour tout  $x \in S_i$  et  $k > i$ ,  $\rho_i(x) \in S_i$  et  $\rho_k(y) = y$  pour tout  $y \in S_i$  et  $k < i$ . Le produit  $\rho_1 \circ \dots \circ \rho_r$  est donc la permutation qui laisse invariants les éléments extérieurs à la réunion des  $S_i$  et qui agit comme  $\rho_i$  sur chaque  $S_i$ . On en déduit évidemment que les ces éléments commutent deux à deux

Revenons à la permutation  $\sigma$ . Notons  $X_1, \dots, X_r$  les orbites non réduites à un éléments de  $E$  sous l'action de  $G$  et  $c_1, \dots, c_r$  les cycles définis par  $c_i = \sigma_{X_i}$  pour tout  $i$ . Nous avons vu que les cycles  $c_1, \dots, c_r$ , dont les supports  $X_1, \dots, X_r$  sont deux à deux disjoints, commutent deux à deux. Leur produit  $\rho$  vérifie  $\rho(x) = \sigma(x)$  pour tout  $x \notin \bigcup X_i$  puisque l'on a alors  $\rho(x) = x$  et  $\sigma(x) = x$  ainsi que  $\rho(x) = \sigma(x)$  pour tout  $x \in X_i$  puisque l'on a alors  $\rho(x) = c_i(x)$  et  $c_i(x) = \sigma(x)$ . La permutation  $\sigma$  est donc le produit des cycles à supports deux à deux disjoints  $c_1, \dots, c_r$ .

Supposons maintenant que  $\sigma$  soit égal au produit des cycles  $d_1, \dots, d_s$  à supports  $Y_1, \dots, Y_s$  deux à deux disjoints. Nous avons vu que les orbites



non réduites à un point de  $d_1 \circ \dots \circ d_s$  sont  $Y_1, \dots, Y_s$ . On a donc  $s = r$  et, à l'ordre près,  $Y_i = X_i$  pour tout  $i$ . Comme de plus,  $d_i$  est alors le cycle égal à  $\sigma$  sur  $X_i$  et à l'identité sur  $E \setminus X_i$ , on a  $d_i = \sigma_{X_i}$  soit  $d_i = c_i$  pour tout  $i$ .

3. Supposons que la décomposition en produit des cycles à supports deux à deux disjoints de  $\sigma$  soit  $c_1 \circ \dots \circ c_r$ . Notons  $l_i$  la longueur de  $c_i$  pour tout  $i$ . On a évidemment :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^r \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^r (-1)^{l_i-1}$$

puisque la signature d'un cycle de longueur  $l$  est égal à  $(-1)^l$ . Notons  $l$  le PPCM des  $l_i$ . On a  $\sigma^l = c_1^l \circ \dots \circ c_r^l$  puisque les  $c_1, \dots, c_r$  commutent deux à deux et sont respectivement d'ordre  $l_1, \dots, l_r$ . Étudions alors l'équation  $\sigma^k = \text{Id}_E$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . On a bien sûr  $\sigma^k = c_1^k \circ \dots \circ c_r^k$ . Les permutations  $c_1^k, \dots, c_r^k$  étant à supports deux à deux disjoints, on obtient  $c_i^k = \text{Id}_E$  soit  $l_i \mid k$  pour tout  $i$  et, par conséquent  $l \mid k$ . L'ordre de  $\sigma$  est donc le PPCM des  $l_i$ .

4. Déterminons les orbites sous l'action du sous-groupe engendré par  $\sigma$ . Les images successives de 1 sont 5, 7, 9, 8, 3 et 1. Celles de 2 sont 4 et 2. Celle de 6 est 6. On a donc :

$$\sigma = (1, 5, 7, 9, 8, 3) \circ (2, 4).$$

La signature de  $\sigma$  est  $(-1)^{6-1} (-1)^{2-1} = 1$  et son ordre est 6.

14. On appelle support d'une transposition  $(a, b)$  l'ensemble à deux éléments  $\{a, b\}$ .

1. Rappelons tout d'abord que sous l'hypothèse  $n \geq 3$ , le groupe  $S_n$  n'est pas commutatif ; si  $a, b$  et  $c$  sont trois éléments deux à deux distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , les produits  $(a, b) \circ (b, c)$  et  $(b, c) \circ (a, b)$  sont, en effet respectivement les cycles distincts  $(a, b, c)$  et  $(a, c, b)$ . Le groupe  $S_n$  n'est donc pas engendré par une partie ayant moins d'un élément.

Soient  $\tau$  la transposition  $(1, 2)$  et  $\sigma$  le cycle  $(1, 2, \dots, n)$ . On vérifie aisément que la permutation conjuguée  $\sigma^k \circ \tau \circ \sigma^{-k}$  est égale à la transposition  $(k, k + 1)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$ . Le sous-groupe  $G$  engendré par la partie  $\{\tau, \sigma\}$  contient donc la partie :

$$\mathcal{T}_0 = \{ (k, k + 1) \mid k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \}.$$

Il est donc égal à  $S_n$  puisque  $\mathcal{T}_0$  est génératrice.

2. Notons  $\mathcal{T}$  une partie génératrice de  $S_n$  formée uniquement de transpositions.

Montrons tout d'abord que pour toute partie  $A$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  différente du vide et de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe une transposition  $(a, b)$  de  $\mathcal{T}$  telle que  $a \in A$  et  $b \notin A$ . Si ce n'est pas le cas tout élément de  $\mathcal{T}$  stabilise  $A$  (vérifie  $\tau(A) = A$ ). Comme  $\mathcal{T}$  engendre  $\mathcal{S}_n$ , on en déduit que toute permutation stabilise  $A$ . Cela est évidemment impossible puisqu'il existe des éléments de  $\mathcal{S}_n$ , par exemple des transpositions, envoyant un élément de  $A$  sur un élément de son complémentaire.

Construisons alors par récurrence une suite  $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$  d'éléments de  $\mathcal{T}$  telle que la réunion notée  $A_r$  des supports de  $\tau_1, \dots, \tau_r$  ait  $r + 1$  éléments pour tout  $r \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ . On obtient le premier élément  $\tau_1$  en choisissant un élément quelconque de  $\mathcal{T}$ . Son support  $A_1$  a bien 2 éléments. Si l'on a construit les  $r < n - 1$  éléments  $(\tau_1, \dots, \tau_r)$  de la suite recherchée, on obtient  $\tau_{r+1}$  en choisissant une transposition de  $\mathcal{T}$  dont le support contient un élément de  $A_r$  et un élément extérieur à  $A_r$ . La réunion  $A_{r+1}$  a alors  $r + 2$  éléments. Cela achève la récurrence.

La suite  $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$  est évidemment injective ; pour tout  $r < s$ , le support de la transposition  $\tau_r$  est contenu dans  $A_r$  alors que celui de  $\tau_s$  contient un élément extérieur à  $A_r$ . La partie  $\mathcal{T}$  contient donc au moins  $n - 1$  éléments. Nous avons vu dans le cours, et utilisé dans la première question, que la partie  $\mathcal{T}_0$  formée de  $n - 1$  transpositions engendre  $\mathcal{S}_n$ .

15. Les deux applications indiquées sont évidemment des morphismes de  $\mathcal{S}_n$  vers  $\mathbb{C}^*$ .

Soit maintenant  $\mu$  un morphisme de  $\mathcal{S}_n$  vers le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ . Pour toute transposition  $\tau$ , la relation  $\tau^2 = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$  montre que  $\mu(\tau)$  vérifie  $\mu(\tau)^2 = 1$  et vaut donc  $\pm 1$ . Si  $\tau_1 = (a_1, b_1)$  et  $\tau_2 = (a_2, b_2)$  sont deux transpositions, il existe évidemment une permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  telle que  $\sigma(a_1) = a_2$  et  $\sigma(b_1) = b_2$ . On a alors  $(a_2, b_2) = \sigma \circ (a_1, b_1) \circ \sigma^{-1}$ . Cela entraîne :

$$\mu((a_2, b_2)) = \mu(\sigma)\mu((a_1, b_1))\mu(\sigma)^{-1} = \mu((a_1, b_1))$$

puisque  $\mathbb{C}^*$  est commutatif. Ainsi, il existe un entier  $s$  de  $\{-1, 1\}$  tel que la valeur de  $\mu$  sur les transpositions soit toujours  $s$ .

Puisque l'ensemble des transpositions engendre  $\mathcal{S}_n$ , toute permutation  $\sigma$  peut s'écrire  $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$  où les  $\tau_i$  sont des transpositions. On obtient alors  $\mu(\sigma) = s^r$ . Le morphisme  $\mu$  est l'application constante de valeur 1 lorsque  $s$  est égal à 1, la signature lorsqu'il est égal à  $-1$ .

16. 1. Le nombre  $z$  n'étant pas réel, la dénominateur  $cz + d$  n'est jamais nul. De plus, la relation :

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd}{|cz + d|^2} + \frac{(ad - bc)\text{Im } z}{|cz + d|^2}i$$

montre que  $g * z$  appartient à  $\mathbf{H}$  pour tout  $(g, z) \in G \times \mathbf{H}$ . La loi externe est donc bien définie. On vérifie par un simple calcul qu'il s'agit d'une action de groupe.

2. Soit  $X$  l'orbite de  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbf{H}$ . Si l'ensemble des  $\text{Im } z$  lorsque  $z$  appartient à  $X$  n'admet pas de maximum dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite injective  $g_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$  d'éléments de  $G$  telle que la suite  $(\text{Im}(g_n * z_0))$ , égale à  $|c_n z_0 + d_n|^{-2} v_0$  par ce qui précède, soit strictement croissante. La suite :

$$|c_n z + d_n|^2 = (c_n u_0 + d_n)^2 + c_n^2 v_0^2$$

est alors strictement décroissante. Les coefficients des  $g_n$  étant des entiers, les suites  $(c_n)$  et  $(d_n)$  sont bornées et ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Cela montre alors que la suite  $(\text{Im}(g_n * z_0))$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs et contredit notre hypothèse. L'ensemble que nous avons considéré possède donc un maximum que nous noterons  $M$ .

Soit  $z_1 = u_1 + iv_1$  un élément de  $X$  de partie imaginaire  $M$ . Il existe un entier  $n_1$  tel que  $|u_1 - n_1|$  soit inférieur ou égal à  $\frac{1}{2}$ . La relation :

$$T^{n_1} * z_1 = (u_1 - n_1) + iv_1$$

montre que  $X$  contient un élément  $z_2 = u_2 + iv_2$  de partie imaginaire  $M$  et vérifiant  $|v_2| \leq \frac{1}{2}$ . Si l'on a  $|z_2| < 1$ , la partie imaginaire de  $S * z_2$ , égale à  $v_2 |z_2|^{-2}$ , est strictement supérieure à  $M$ . Cette contradiction montre que  $z_2$  appartient à  $D$ .

3. Soit  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $G$  telle que  $g * 2i$  appartiennent à  $D$ . Tout élément de  $D$  étant de partie imaginaire supérieure ou égale à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (cela se voit sur un dessin de  $D$ ), la relation  $\text{Im}(g * 2i) = |c2i + d|^{-2}$  montre que l'on a :

$$4c^2 + d^2 \leq \frac{4}{3}.$$

Cela implique  $c = 0$  et  $d = \pm 1$  puisque ces deux entiers ne peuvent être simultanément nuls. La matrice  $g$  est donc de la forme  $\pm \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  puisqu'elle est à coefficients entiers et de déterminant 1. Le nombre  $g * 2i$  vaut alors  $2i + k$ . Il n'appartient à  $D$  que pour  $k = 0$ . Les matrices  $g$  telles que  $g * 2i$  appartiennent à  $D$  sont donc  $\pm I_2$ .

4. On montre exactement comme dans la première question que toute orbite de  $\mathbf{H}$  sous l'action du sous-groupe  $H$  engendré par  $S$  et  $T$  contient un élément de  $D$ . Soit alors  $g \in G$ . L'orbite de  $g * 2i$  sous l'action de  $H$  contient un

élément de  $D$ . Il existe donc un élément  $h$  de  $H$  tel que  $hg * i$  appartienne à  $D$ . Cela entraîne  $hg = \pm I_2$ . Comme  $I_2$  et  $-I_2$  valent respectivement  $S^4$  et  $S^2$ , on a, soit  $g = h^{-1}S^4$ , soit  $g = h^{-1}S^2$ . Ainsi  $g$  appartient à  $H$ . Finalement, la partie  $\{S, T\}$  engendre  $G$ .

17. Les parties de la forme  $gH$  sont les orbites de  $G$  sous l'action  $(h, g) \mapsto gh^{-1}$  de  $H$  sur  $G$ . Elles forment donc une partition de  $G$  et leur ensemble  $\mathcal{X}$  a  $p$  éléments.

Pour toute partie  $A$  de  $\mathcal{X}$  et  $g$  de  $G$ , la partie  $gA = \{ga \mid a \in A\}$  appartient aussi à  $\mathcal{X}$  puisqu'elle est égal à  $g'H$  si  $A = g'H$ . Cela permet de définir la loi externe  $(g, A) \mapsto gA$  de  $G \times \mathcal{X}$  vers  $\mathcal{X}$ . C'est une action de groupe puisque  $eA = A$  et  $g(g'A) = (gg')A$  pour tous  $(g, g') \in G^2$  et  $A \in \mathcal{X}$ .

Cette action induit un morphisme  $\varphi$  de  $G$  vers le groupe symétrique  $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ . Notons  $N$  le noyau de  $\varphi$ . Si  $g$  appartient à  $N$ , on a  $gA = A$  pour tout  $A$  de  $\mathcal{X}$  et, en particulier,  $gH = H$ . Cela entraîne  $g \in H$ . Ainsi  $N$  est inclus dans  $H$ .

Notons alors  $k$  le nombre d'éléments de  $N$ . On peut écrire  $n = kk'$  avec  $k' \in \mathbb{N}$  par le théorème de Lagrange. On sait que  $k'$  est le cardinal de l'image de  $\varphi$ . Il divise donc  $p!$  puisque  $\text{Im } \varphi$  est un sous-groupe de  $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ . Comme  $k'$  divise  $p!$ , la décomposition en facteur premiers de ce nombre est :

$$k' = p^a p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$$

où  $a$  est égal à 0 ou 1 et où les nombres  $p_2, \dots, p_r$  sont strictement inférieurs à  $p$ . Comme d'un autre côté,  $k'$  divise  $n$ , il ne peut posséder de diviseur premier strictement inférieur à  $p$ . On en déduit que  $k'$  est égal à 1 ou  $p$ . Cela entraîne alors  $k = n$  ou  $m$ . Comme  $N$  est inclus dans  $H$ , on obtient  $k = m$  et  $N = H$ .

Finalement, le sous-groupe  $H$  est distingué comme noyau du morphisme  $\varphi$ .

18. Considérons en effet l'ensemble  $X$  des couples  $(g, x) \in G \times E$  tels que  $g \cdot x = x$ . On a évidemment :

$$\text{Card } X = \sum_{g \in G} \text{Card } \{x \mid g \cdot x = x\}$$

et, d'un autre coté :

$$\text{Card } X = \sum_{x \in E} \text{Card } \{g \mid g \cdot x = x\} = \sum_{x \in E} \text{Card } G_x.$$

Soit alors  $x_1, \dots, x_r$  un système de représentants des orbites de  $E$ . En regroupant les éléments de  $E$  par orbite et en remarquant que les stabilisateurs des éléments de l'orbite  $\mathcal{O}(x_i)$  ont tous :

$$\text{Card } G_{x_i} = \frac{\text{Card } G}{\text{Card } \mathcal{O}(x_i)}$$

éléments, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Card } X &= \sum_{i=1}^r \left( \sum_{x \in \mathcal{O}(x_i)} \text{Card } G_x \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \text{Card } \mathcal{O}(x_i) \cdot \text{Card } G_{x_i} \\ &= r \text{Card } G. \end{aligned}$$

- 19** On représente la roue par le groupe  $\mathbb{U}_n$  des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité de  $\mathbb{C}$  et un coloriage par un élément  $f$  de l'ensemble  $\mathcal{F}$  des applications de  $\mathbb{U}_n$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

Pour tous  $z \in \mathbb{U}_n$  et  $f \in \mathcal{F}$ , on définit l'application  $z * f$  de  $\mathcal{F}$  par :

$$\forall u \in \mathbb{U}_n, \quad ((z * f)(u) = f(zu).$$

La loi externe  $(z, f) \mapsto z * f$  est alors une action de  $\mathbb{U}_n$  sur  $\mathcal{F}$  puisque l'on a  $1 * f = f$  et  $(zz') * f = z * (z' * f)$  pour tous  $(z, z') \in \mathbb{U}_n$  et  $f \in \mathcal{F}$ .

Si  $f$  et  $g$  représentent deux coloriages qui coïncident par la rotation associée à  $z$ , on a bien sûr  $z * f = g$ . Ainsi le nombre de coloriages recherché est le nombre d'orbites de  $\mathcal{F}$  sous l'action de  $\mathbb{U}_n$ . La formule de Burnside de l'exercice précédent montre que l'on a :

$$r = \frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} \text{Card} \{f \in \mathcal{F} \mid z * f = f\}.$$

Soit alors  $z \in \mathbb{U}_n$ . Une fonction  $f \in \mathcal{F}$  vérifie  $z * f = f$  si, et seulement si, elle vérifie  $t * f = f$  pour tout élément  $t$  du sous-groupe  $\langle z \rangle$  engendré par  $z$ . Par définition même de  $t * f$ , cette situation est réalisée si, et seulement si, la fonction  $f$  prend la même valeur sur les orbites  $\langle z \rangle u$  de l'action par translation à gauche de  $\langle z \rangle$  sur  $G$ . Comme il y a  $\frac{n}{\text{Card} \langle z \rangle}$  telles orbites, on obtient :

$$\text{Card} \{f \in \mathcal{F} \mid z * f = f\} = p^{\frac{n}{\omega(z)}}$$

en notant  $\omega(z)$  l'ordre de  $z$

Il vient alors

$$r = \frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} p^{\frac{n}{\omega(z)}} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) p^{\frac{n}{d}}$$

en se souvenant qu'il y a  $\varphi(d)$  éléments d'ordre  $d$  dans  $\mathbb{U}_n$  pour tout diviseur  $d$  de  $n$  ( $\varphi$  est bien sûr l'indicateur d'Euler).

20. 1. Un caractère est une application de  $G$  dans  $\mathbb{C}^*$ . C'est donc un élément inversible de l'algèbre  $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ . L'ensemble  $\widehat{G}$  est non vide puisqu'il contient le caractère 1 (l'application constante de valeur 1). Si  $\chi$  et  $\zeta$  sont deux caractères, la relation immédiate :

$$\forall g \in G, \quad (\zeta^{-1}\chi)(gg') = (\zeta^{-1}\chi)(g')(\zeta^{-1}\chi)(g')$$

montre que  $\zeta^{-1}\chi$  est un caractère.

2. Si  $\chi$  est un caractère de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , le nombre complexe  $\chi(\bar{1})$  appartient au groupe des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité de  $\mathbb{C}$  puisque l'on a  $\chi(\bar{1})^n = \chi(\bar{n}) = 1$ . Considérons alors l'application  $\varphi : \chi \mapsto \chi(\bar{1})^n$  de  $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  vers  $\mathbb{U}_n$ . Il est immédiat que  $\varphi$  est un morphisme de groupes. Elle est aussi injective puisque,  $G$  étant engendré par  $\bar{1}$ , la valeur  $\chi(\bar{1})$  détermine  $\chi$ . Montrons qu'elle est surjective. Soit  $z \in \mathbb{U}_n$ . L'application  $\psi : k \mapsto z^k$  de  $\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{U}_n$  est un morphisme de groupes. Son noyau contient  $n\mathbb{Z}$  puisque  $z^n = 1$ . Le morphisme  $\psi$  se factorise donc en un morphisme  $\chi$  de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{U}_n$  vérifiant  $\chi(\bar{1}) = z$ . On a ainsi obtenu un caractère  $\chi$  de  $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  tel que  $\varphi(\chi) = z$ . Finalement,  $\varphi$  réalise un isomorphisme de  $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  sur  $\mathbb{U}_n$ .
3. Soient  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $a$  appartenant à  $G$ .

L'ensemble des  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a^k \in H$  est un sous-groupe  $I$  de  $\mathbb{Z}$  non réduit à  $\{0\}$  puisque  $a^n = e$ . Notons alors  $d$  le générateur positif de  $I$ . L'entier  $d$  divise  $n$ . Puisque  $G$  est abélien, le sous-groupe  $L$  de  $G$  engendré par  $H \cup \{a\}$  est l'ensemble des éléments de  $G$  que l'on peut écrire sous la forme (non nécessairement unique)  $ha^k$ . Puisque  $a^d$  appartient à  $H$ , le nombre complexe  $\zeta(a^d)$  est défini. Choisissons un élément  $z \in \mathbb{C}^*$  tel que  $z^d = \zeta(a^d)$ . Considérons alors un élément  $g$  de  $L$ . On peut écrire  $g$  sous la forme  $ha^k$ . Supposons que l'on ait aussi une autre écriture  $h'a^{k'}$  de  $g$ . On a alors  $ha^k = h'a^{k'}$  soit  $h^{-1}h' = a^{k-k'}$ . En particulier,  $a^{k-k'}$  appartient à  $H$  et on peut écrire  $k - k' = dl$ . Le nombre complexe  $\zeta(h)^{-1}\zeta(h')$  est alors égal à  $\zeta(a^d)^l$ , c'est-à-dire à  $z^{k-k'}$ . On a donc :

$$\zeta(h)z^k = \zeta(h')z^{k'}$$

Ce que nous venons de prouver montre que l'on peut définir une application  $\chi$  de  $L$  vers  $\mathbb{C}^*$  en posant  $\chi(g) = \zeta(h)z^k$  lorsque  $g = ha^k$  puisque cela ne dépend pas de l'écriture considérée. Il est alors immédiat de vérifier que  $\chi$  est un caractère de  $L$  qui prolonge  $\zeta$ .

Pour prolonger  $\zeta$  en un caractère de  $G$ , on procède itérativement de la façon suivante : il existe une suite  $a_1, \dots, a_r$  d'éléments de  $G$  tel que  $H \cup \{a_1, \dots, a_r\}$  engendre  $G$  puisque  $G$  est fini. On prolonge alors successivement  $\zeta$  à  $H \cup \{a_1\}$ , puis à  $H \cup \{a_1, a_2\}$  et ainsi de suite à  $G$ .

## Chapitre 3

1. Si  $(I_n)$  est une suite croissante d'idéaux, notons :

$$I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n.$$

On a évidemment  $0 \in I$ . Pour tout  $(u, v) \in A$  et  $(x, y) \in I$ , il existe  $n$  et  $m$  tels que  $i \in I_n$  et  $j \in I_m$ . Si  $p$  désigne le plus grand élément de  $\{n, m\}$ , on obtient  $i \in I_p, j \in I_p$  et,  $I_p$  étant un idéal,  $ui + vj \in I_p$ . On a donc  $ui + vj \in I$ . L'ensemble  $I$  est donc un idéal de  $A$ .

Il existe donc un élément  $a$  de  $A$  tel que  $I = (a)$ . Puisque  $a$  appartient à  $I$ , il existe  $n$  tel que  $a \in I_n$ . On a alors :

$$I = (a) \subset I_n \subset I$$

soit  $I_n = I$ . La suite étant croissante, il vient  $\forall k \geq n, I_k = I$ .

2. 1. Soit  $I$  le noyau d'un morphisme d'anneaux  $\varphi : A \rightarrow B$ . On sait que  $I$  est un sous-groupe additif de  $A$ . Si  $a$  appartient à  $A$  et  $i \in I$ , on a alors :

$$\varphi(ai) = \varphi(a)\varphi(i) = \varphi(a)0 = 0$$

et, par conséquent,  $ai \in I$ .

2. Le sous-groupe additif  $I$  de  $A$  est distingué puisque  $(A, +)$  est abélien. La relation  $x \equiv y [I]$ , associée au sous-groupe  $I$  de  $(A, +)$ , est une relation d'équivalence (voir exercice 12 page 43).
3. Nous avons vu que la relation  $x \equiv y [I]$  est compatible avec l'addition et qu'il existe sur  $A/I$  une unique structure de groupe additif tel que  $\pi$  soit un morphisme. Si  $x \equiv y [I]$  et  $u \equiv v [I]$ , on a :

$$xu - yv = (x - y)u + y(u - v) \in I$$

puisque  $y - x$  et  $u - v$  appartiennent à l'idéal  $I$ .

On construit alors une loi produit quotient sur  $A/I$  exactement de la même façon que l'on a construit la loi produit quotient de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On vérifie alors de la même façon que cette loi est la seule loi de  $A/I$  telle que  $\pi$  soit un morphisme et qu'elle donne au groupe additif  $A/I$  une structure d'anneau. Le noyau du morphisme  $\pi$  est la classe de 0 pour la relation  $x \equiv y [I]$ , soit  $I$ .

4. Si  $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative, l'application  $\varphi : \alpha \mapsto \alpha 1_A$  est un morphisme d'anneaux de  $\mathbb{K}$  dans  $A$ . Il en est de même de  $\varphi : \alpha \mapsto \pi(\alpha 1_A)$  est un morphisme d'anneaux de  $\mathbb{K}$  dans  $A/I$ . On vérifie alors sans difficulté que la loi externe :

$$(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times (A/I) \longrightarrow \pi(\alpha 1_A)x \in A/I$$

donne à  $A/I$  une structure de  $\mathbb{K}$ -algèbre telle que  $\pi$  soit un morphisme d'algèbres et que c'est la seule.

3. 1. Soit  $u \in \mathbb{K}[X]/(P)$ . Il existe alors un polynôme  $U = \sum_{k=0}^q \alpha_k X^k$  tel que  $u = \pi(U)$ . On en déduit :

$$u = \pi(U) = \sum_{k=0}^q \alpha_k \xi^k.$$

Ainsi,  $\xi = \pi(X)$  engendre  $\mathbb{K}[X]/(P)$ .

Pour tout polynôme  $U = \sum_{k=0}^q \alpha_k X^k$ , on a  $U(\xi) = \pi(U)$  par ce qui précède.

On en déduit :

$$U(\xi) = 0 \iff U \in (P).$$

Cela montre que  $(P)$  est l'idéal annulateur de  $\xi$ . L'élément  $\xi$  est donc algébriquement lié si, et seulement si,  $P$  n'est pas nul. Dans ce cas, le polynôme minimal de  $\xi$  est  $P$ .

2. Cela provient du cours
3. La  $\mathbb{R}$ -algèbre  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$  est engendré par l'élément  $\xi = \pi(X)$  dont le polynôme minimal est  $X^2 + 1$ . La famille  $(1, \xi)$  est donc une base de  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ . Le produit de deux éléments de  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$  est donné par  $(a, b, c, d)$  réels) :

$$\begin{aligned} (a + b\xi)(c + d\xi) &= ac + (ad + bc)\xi + bd\xi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)\xi \end{aligned}$$

puisque  $\xi$  vérifie  $\xi^2 = -1$ .

On en déduit immédiatement que l'application  $\varphi : a + b\xi \mapsto a + ib$  de  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$  vers  $\mathbb{C}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres. Puisque  $X^2 + 1$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$ , on retrouve que  $\mathbb{C}$  est un corps.

4. 1. Considérons un facteur irréductible  $Q$  de  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ . La  $\mathbb{K}$ -algèbre  $\mathbf{L} = \mathbb{K}[X]/(Q)$  est de dimension finie  $\deg Q$  sur  $\mathbb{K}$ . Puisque  $Q$  est irréductible l'exercice précédent montre que c'est un corps. Comme  $Q$  est le polynôme minimal de  $\xi = \pi(X)$  de  $P$ , on a  $Q(\xi) = 0$ . L'élément  $\xi$  est donc une racine de  $P$ .
2. On montre la question par récurrence sur le degré de  $P$ . Elle est évidente si le degré de  $P$  est inférieur ou égal à 1. Supposons-la acquise pour tout corps et tout polynôme de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ .
- Soit alors  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n$ . Par la question précédente, il existe un sur-corps  $\mathbf{L}$  de  $\mathbb{K}$  de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  telle que  $P$  puisse s'écrire  $P = (X - \lambda)Q$  dans  $\mathbf{L}[X]$ .
- Le degré de  $Q$  étant égal à  $n - 1$ , il existe un sur-corps  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{L}$  de dimension finie sur  $\mathbf{L}$  telle que  $Q$  soit scindé dans  $\mathbf{M}[X]$ . Le polynôme  $P$  est alors scindé dans  $\mathbf{M}$ .



Pour montrer que le sur-corps  $\mathbf{M}$  est de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ , considérons une base finie  $(\ell_i)$  de  $\mathbf{L}$  sur  $\mathbf{K}$  et une base finie  $(m_j)$  de  $\mathbf{M}$  sur  $\mathbf{L}$ . Pour tout  $m$  de  $\mathbf{M}$ , il existe une famille  $\lambda_j$  d'éléments de  $\mathbf{L}$  telle que  $m = \sum_j \lambda_j m_j$ .

Pour tout  $j$ , il existe une famille  $\kappa_{i,j}$  d'éléments de  $\mathbf{L}$  telle que  $\lambda_j = \sum_i \kappa_{i,j} \ell_i$ .

On en déduit :

$$m = \sum_{i,j} \kappa_{i,j} \ell_i m_j.$$

Ainsi,  $(\ell_i m_j)$  engendre  $\mathbf{M}$  sur  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  est de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ .

- 5 1. Supposons  $I$  premier. Puisque  $I$  est différent de  $A$ , l'anneau  $A/I$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Considérons alors deux éléments  $\alpha$  et  $\beta$  de  $A/I$  tels que  $\alpha\beta = 0$ . Puisque  $\pi$  est surjective, il existe  $a$  et  $b$  de  $A$  tels que  $\alpha = \pi(a)$  et  $\beta = \pi(b)$ . On a alors  $\pi(ab) = \alpha\beta = 0$  et donc  $ab \in I$ . Par hypothèse, on a alors  $a \in I$  ou  $b \in I$ , c'est-à-dire  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ . Ainsi,  $A/I$  est intègre. Supposons  $A/I$  intègre. Puisque  $A/I$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ ,  $I$  est différent de  $A$ . Si  $ab \in I$ , on a  $\pi(a)\pi(b) = 0$  dans  $A/I$  et, par intégrité,  $\pi(a) = 0$  ou  $\pi(b) = 0$ , c'est-à-dire  $a \in I$  ou  $b \in I$ . Ainsi,  $I$  est premier.
2. Supposons  $I$  maximal. Comme ci-dessus,  $A/I$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Soit  $\alpha \neq 0$  de  $A/I$ . Il existe  $a \in A$  tel que  $\pi(a) = \alpha$ . L'élément  $a$  n'appartient pas à  $I$  puisque  $\alpha$  est non nul. L'idéal  $I + (a)$  contient strictement  $I$  puisque  $a$  n'appartient pas à  $I$ . On a donc  $I + (a) = A$ . Il existe donc des éléments  $i \in I$  et  $u \in A$  tels que :

$$1 = i + ua.$$

Puisque  $\pi(i) = 0$  dans  $A/I$ , il vient  $\pi(1) = \pi(u)\alpha$ . Ainsi,  $\alpha$  possède un inverse dans  $A/I$ . Finalement,  $A/I$  est un corps.

Supposons que  $A/I$  soit un corps. Comme ci-dessus,  $I$  est différent de  $A$ . Soit alors  $J$  un idéal de  $A$  contenant strictement  $I$  et  $a$  un élément de  $J \setminus I$ . L'élément  $\pi(a)$  différent de 0 dans le corps  $A/I$ , il existe un élément  $b$  de  $A$  tel que  $\pi(a)\pi(b) = \pi(1)$ . On a donc :

$$ab - 1 \in I.$$

Puisque  $b \in J$  et  $I \subset J$ , on obtient  $1 \in J$  et  $J = A$ .

- 3 Un idéal  $I$  de  $\mathbb{Z}$  est de la forme  $n\mathbb{Z}$ . Les équivalences :

$$n \text{ premier} \iff \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ intègre} \iff \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ corps}$$

prouvent les équivalences :

$$n \text{ premier} \iff n\mathbb{Z} \text{ premier} \iff n\mathbb{Z} \text{ maximal.}$$

Un idéal  $I$  de  $\mathbf{K}[X]$  est de la forme  $P\mathbf{K}[X]$ . Les propriétés de  $\mathbf{K}[X]/(P)$  montrent aussi les équivalences :

$$P \text{ irréductible} \iff (P) \text{ premier} \iff (P) \text{ maximal}$$

6. 1. Soit  $I$  un idéal vérifiant (\*). Considérons alors l'ensemble :

$$X = \left\{ x \in [0, 1] \mid \exists f \in I : f([0, x]) \subset \mathbb{R}^* \right\}.$$

Par la propriété (\*) en 0, il existe  $f \in I$  tel que  $f(0) \neq 0$ . L'ensemble  $X$  contient donc 0. Comme il est majoré, il admet une borne supérieure  $\alpha$ .

Par (\*), il existe une fonction  $g \in I$  telle que  $g(\alpha) \neq 0$ . Par continuité, il existe  $\mu > 0$  tel que

$$g([0, 1] \cap [\alpha - \mu, \alpha + \mu]) \subset \mathbb{R}^*.$$

Puisque  $\alpha - \mu$  est strictement inférieur à  $\alpha$ , il existe  $x \in X$  vérifiant  $\alpha - \mu < x$  et une fonction  $h \in I$  telle que  $h([0, x]) \subset \mathbb{R}^*$ . On en déduit que la fonction :

$$f = g^2 + h^2$$

ne s'annule pas sur  $[0, 1] \cap [0, \alpha + \mu] = [0, \alpha']$ . Comme  $f$  appartient à l'idéal  $I$ , l'élément  $\alpha'$  appartient à  $X$  et vérifie  $\alpha' \leq \alpha$ . Cela n'est possible que si  $\alpha = 1$ .

Il existe donc un élément  $f$  de  $I$  ne s'annulant pas sur  $[0, 1]$ . Comme  $f^{-1}$  appartient à  $\mathcal{C}$ , on voit que  $1 = f^{-1}f$  appartient à  $I$  et que  $I$  est égal à  $\mathcal{C}$ .

- 2 Si  $a$  est un élément de  $[0, 1]$ , l'ensemble  $I_a = \{f \in \mathcal{C} \mid f(a) = 0\}$ , noyau du morphisme  $f \mapsto f(a)$ , est un idéal de  $\mathcal{C}$ . Soit alors  $J$  un idéal de  $\mathcal{C}$  contenant strictement  $I$ . Il existe dans  $J$  un élément  $f$  tel que  $f(a) \neq 0$ . Puisque  $f$  appartient à  $J$  et  $f - f(a)$  à  $I_a \subset J$ , la fonction constante :

$$1 = \frac{1}{f(a)}f - \frac{1}{f(a)}(f - f(a))$$

appartient à  $J$ . On a donc  $J = \mathcal{C}$ . Ainsi,  $I_a$  est un idéal maximal de  $\mathcal{C}$ .

Soit  $J$  un idéal maximal de  $\mathcal{C}$ . Puisque  $J$  est différent de  $\mathcal{C}$ , la première question montre qu'il existe  $a \in [0, 1]$  tel que  $J \subset I_a$ . Puisque  $I_a$  est différent de  $\mathcal{C}$ , la maximalité de  $J$  entraîne  $J = I_a$ .

7. On a  $C_p^0 \equiv 1$  modulo  $p$  et :

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad C_{p-1}^{k-1} + C_{p-1}^k = C_p^k \equiv 0 \text{ modulo } p.$$

On en déduit  $C_p^k \equiv (-1)^k$  modulo  $p$  par récurrence

8. On vérifie aisément que  $a$  est l'opposé du coefficient de  $X$  dans le développement :

$$\prod_{k=1}^{p-1} (X - k) = X^{p-1} - \sigma_1 X^{p-2} + \dots + (-1)^{p-2} \sigma_{p-2} X + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} \quad (*)$$

puisque  $p$  est impair.

La relation : 
$$\prod_{k=1}^{p-1} (X - \bar{k}) = X^{p-1} - \bar{1}$$

dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$  montre que, pour tout  $k \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket$ , l'entier  $p$  divise  $\sigma_k$ .

L'évaluation de (\*) en  $p$  fournit la relation :

$$(p-1)! = p^{p-1} - \sigma_1 p^{p-2} + \dots + (-1)^{p-2} \sigma_{p-2} p + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1}$$

et  $(-1)^{p-1} \sigma_{p-1} = (p-1)!$ , l'égalité :

$$\sigma_{p-2} p = p^{p-1} - \sigma_1 p^{p-2} + \dots + (-1)^{p-3} \sigma_{p-3} p^2.$$

Puisque  $p-3$  est supérieur ou égal à 2, il vient  $p^3 \mid p\sigma_{p-2}$  et, donc,  $p^2 \mid a$ .

9. 1. Le terme  $C_{2p}^p$  est le coefficient de  $X^p$  dans le polynôme :

$$(X+1)^{2p} = \left( \sum_{k=0}^p C_p^k X^k \right)^2.$$

En tenant compte de la relation  $C_p^k = C_p^{p-k}$ , on obtient :

$$C_{2p}^p = \sum_{k=0}^p C_p^k C_p^{p-k} = \sum_{k=0}^p (C_p^k)^2.$$

2. Puisque, pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $p$  divise  $C_p^k$ , notons  $C_p^k = pa_k$ . Il vient alors :

$$C_{2p}^p = 2 + p^2 \sum_{k=1}^{p-1} a_k^2$$

et  $C_{2p}^p \equiv 2$  modulo  $p^2$ .

3. Notons  $r = 2^{-1}(p-1)$  et  $P = \sum_{k=1}^{p-1} a_k a_k$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a

$a_k = \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$ . Les relations  $(p-k) \equiv -k$  modulo  $p$ , fournissent les congruences :

$$1.2. \dots k.1.2. \dots (p-k).a_k \equiv 1.2. \dots k.k.(k+1). \dots (p-1).a_k \equiv (p-1)!$$

et donc  $ka_k \equiv 1$  modulo  $p$ . Il vient ainsi :

$$\bar{P} = 2 \sum_{k=1}^r \bar{k}^{-2} = \sum_{k=1}^{p-1} \bar{k}^{-2}$$

dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et, par bijectivité de  $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$  sur  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  :

$$\bar{P} = \sum_{k=1}^{p-1} \bar{k}^2.$$

Puisque  $\prod_{k=1}^{p-1} (X - \bar{k}) = X^{p-1} - \bar{1}$  avec  $p \geq 5$  les fonctions symétriques élémentaires des classes de congruences  $\bar{k}$  lorsque  $k$  appartient à  $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$  sont :

$$\sigma_1 = \bar{0} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \bar{0}.$$

On en déduit :

$$P = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \bar{0}$$

et, finalement,  $C_{2p}^p - 2 = p^2 P \equiv 0$  modulo  $p^3$ .

10. 1. Le groupe des unités de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ayant  $\varphi(n)$  éléments, on a la relation d'Euler  $\alpha^{\varphi(n)} = 1$  pour tout  $\alpha \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ . Puisque  $a$  est premier avec  $n$ , la classe  $\bar{a}$  de  $a$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est inversible et vérifie  $\bar{a}^{\varphi(n)} = \bar{1}$ . On en déduit  $a^{\varphi(n)} \equiv 1$  modulo  $n$ .
2. Comme 3 appartient au groupe  $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})^*$  qui possède :

$$\varphi(100) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = 40$$

éléments, on a  $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$ . Il vient alors :

$$3^{2000} = 3^{40 \cdot 50} \equiv 1 \pmod{100}.$$

Les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $3^{2000}$  sont donc 01

11. 1. Montrons par récurrence l'inégalité  $a_{r-k} \geq F_{k+2}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ . Elle est vérifiée pour  $k = 0$  et  $k = 1$  puisque l'on a  $a_r \geq 1 = F_2$  et  $a_{r-1} \geq 2 = F_3$ . Pour achever, il suffit de remarquer que les relations  $a_{r-k} \geq F_{k+2}$  et  $a_{r-k-1} \geq F_{k+3}$  entraînent :

$$a_{r-k-2} = a_{r-k-1} + a_{r-k-2} \geq a_{r-k-1} + a_{r-k} \geq F_{k+3} + F_{k+2} = F_{k+4}.$$

On obtient alors, pour  $k = r$ , l'inégalité  $a_0 \geq F_{r+2}$ .

2. Les nombres  $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  et  $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  sont les racines de l'équation caractéristique  $X^2 - X - 1 = 0$  de la relation de récurrence linéaire définissant la suite  $(F_n)$ . On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^n - \beta^n).$$

Si  $a_0$  est inférieur à  $m$ , la longueur de l'algorithme d'Euclide de  $(a_0, a_1)$  vérifie  $F_{r+2} \leq m$ . Cela implique  $\alpha^{r+1} \frac{1 + u^{r+2}}{1 + u} \leq m$  avec  $u = -\beta\alpha^{-1}$ . En remarquant que  $u$  appartient à  $]0, 1[$  et que  $\ln_\alpha(1 + u)$  est inférieur ou égal à 1, il vient :

$$r \leq \ln_\alpha m + \ln_\alpha \frac{1 + u}{1 + u^{r+2}} - 1 \leq \ln_\alpha m.$$

- 12.** 1. Il est clair que  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$  sont premiers entre eux. Supposons par hypothèse de récurrence que  $F_k$  et  $F_{k+1}$  soient premiers entre eux pour  $k \in \mathbb{N}$ . La relation  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$  montre que le PGCD de  $F_{k+1}$  et  $F_{k+2}$  est égal à celui de  $F_k$  et  $F_{k+1}$ . Il est donc égal à 1.
2. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  fixé. La suite  $(F_{k+d})$  vérifie évidemment la relation de récurrence linéaire  $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$ . C'est donc une combinaison linéaire des deux solutions indépendantes  $(F_k)$  et  $(F_{k+1})$  de cette relation. Il existe ainsi deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F_{k+d} = \lambda F_k + \mu F_{k+1}$$

pour tout  $k$ . On obtient  $\lambda = F_{d-1}$  et  $\mu = F_d$  en considérant les cas particuliers  $k = 0$  et  $k = 1$ . On a donc  $F_{k+d} = F_k F_{d-1} + F_{k+1} F_d$  pour tout  $k$  et  $d > 0$ .

3. Soient alors  $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$  et  $d$  leur PGCD. On notera  $a_0 = m$  et  $a_1 = n$ . Le cas  $a_1 = a_0$  étant trivial, on supposera  $a_1 < a_0$ . La relation  $F_{(k+1)d} = F_{kd} F_{d-1} + F_{k+d} F_d$  montre aisément, par récurrence, que  $F_d$  divise  $F_{kd}$  pour tout  $k$ . L'entier  $F_d$  divise donc  $F_{a_0}$  et  $F_{a_1}$ . Soit maintenant un diviseur  $c$  de ces deux nombres. La relation :

$$F_{a_0} = F_{a_1} F_{a_0-a_1-1} + F_{a_1+1} F_{a_0-a_1}$$

montre que  $c$  divise  $F_{a_1+1} F_{a_0-a_1}$ . Comme  $F_{a_1}$  est premier avec  $F_{a_1+1}$ , l'entier  $c$  est premier avec  $F_{a_1+1}$  et divise  $F_{a_0-a_1}$  par le théorème de Gauss. Par itération, il divise  $F_{a_1}$  et  $F_{a_2}$  où  $a_2$  est le reste de la division euclidienne de  $a_0$  par  $a_1$ . De la même façon,  $c$  divisera les entiers  $F_{a_k}$  pour  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  en reprenant les notations de la première question. Finalement  $c$  divise  $F_d$ . Le PGCD de  $F_n$  et  $F_m$  est donc  $F_d$ .

- 13** 1. Montrons les deux assertions par récurrence sur  $n > 0$ . Elles sont vérifiées pour  $n = 1$  puisque l'on a  $F_1 = \{0, 1\}$ ,  $F_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ . Supposons-les acquises pour des indices strictement inférieurs à l'entier  $n > 1$

Soient  $\frac{p}{q}$  et  $\frac{r}{s}$  les formes irréductibles de deux éléments consécutifs de  $F_n$ .

Il existe deux éléments consécutifs  $F_{n-1}$  d'écritures irréductibles  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ , tels que l'on ait :

$$\frac{a}{b} \leq \frac{p}{q} < \frac{r}{s} \leq \frac{c}{d}.$$

On a alors  $b + d \geq n$  et  $cb - ad = 1$ . Si  $b + d = n$ , le seul élément de  $F_n$  de  $\left] \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right[$  étant  $\frac{a+c}{b+d}$ , le couple  $\left( \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right)$  est, soit  $\left( \frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d} \right)$ , soit

$\left(\frac{a+c}{b+d}, \frac{b}{d}\right)$ . On a donc  $qr - sp = 1$  et  $q + s \geq n + 1$ . Si  $b + d \geq n + 1$ , le couple  $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$  est égal à  $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$  et les relations désirées sont vérifiées.

La relation  $rq - sp = 1$  montre alors que toute fraction  $\frac{e}{f}$  de l'intervalle  $\left[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right]$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{pu + rv}{qu + sv}$  où  $u = rf - se$  et  $v = eq - pf$  sont deux entiers strictement positifs. L'intervalle  $\left[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right]$  ne contient donc aucun élément de  $F_{n+1}$  si  $q + s$  est strictement supérieur à  $n + 1$  et ne contient que  $\frac{p+r}{q+s}$  si  $q + s = n + 1$ .

2. Soit  $n > 0$  et  $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$  le couple de fractions irréductibles de  $F_n$  encadrant  $\xi$ . Puisque  $\xi$  est irrationnel, il vient :

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| = \frac{1}{qs} \leq \frac{1}{qn}$$

avec  $q \leq n$ .

- 3 Le nombre  $\zeta = \xi - [\xi]$  étant un irrationnel de  $[0, 1]$ , il existe pour tout  $n$  une fraction irréductible  $\frac{p'_n}{q_n}$  telle que  $\left|\xi - \frac{p'_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}$  avec  $q_n \leq n$ . Les fractions irréductibles  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p'_n + [\xi]q_n}{q_n}$  vérifient  $\left|\zeta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}$  puisque l'on a  $q_n \leq n$ . La suite  $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$  qui converge vers le nombre irrationnel  $\xi$  a une infinité de valeurs vérifiant évidemment :

$$\left|\zeta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

puisque l'on a  $q_n \leq n$  pour tout  $n$ .

- 14 La suite des  $n + 1$  classes :

$$(\overline{0}, \overline{a_1}, \overline{a_1} + \overline{a_2}, \dots, \overline{a_1} + \dots + \overline{a_n})$$

de l'ensemble à  $n$  éléments  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ne peut être injective.

Il existe donc  $k < l$  tels que  $\overline{a_1} + \dots + \overline{a_k}$  soit égal à  $\overline{a_1} + \dots + \overline{a_l}$ . L'entier  $a_{k+1} + \dots + a_l$ , de classe nulle, est donc divisible par  $n$

- 15** 1. On obtient la suite  $(c_n)_{n>0}$  des chiffres du développement décimal propre de  $r$  grâce aux suites récurrentes  $(x_n) \in [0, 1[^\mathbb{N}}$  et  $(c_n) \in \llbracket 0, 9 \rrbracket^\mathbb{N}}$  définies par  $x_0 = r$  et  $c_0 = 0$ . ainsi que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = [10x_n] \quad \text{et} \quad 10x_n = c_{n+1} + x_{n+1}.$$

La suite  $(y_n) \in [0, q[^\mathbb{N}}$  définie par  $y_n = qx_n$  pour tout  $n$  vérifie alors :

$$y_0 = p \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 10y_n = qc_{n+1} + y_{n+1}.$$

Il s'agit donc d'une suite d'entiers de  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  où  $c_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  sont respectivement le quotient et le reste de la division de  $10y_n$  par  $q$  pour tout  $n$ . On obtient en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \equiv 10^n p \text{ modulo } q.$$

La suite  $(y_n)$  ne prenant qu'un nombre fini de valeurs on peut considérer le plus petit entier  $s > 0$  tel qu'il existe  $t$  avec  $y_{t+s} = y_t$ . On voit alors que la suite  $(y_n)$  devient périodique à partir de  $t$  et que  $s$  est sa plus petite période. Les relations reliant les suites  $(y_n)$  et  $(c_{n+1})$  montrent alors que  $(c_n)_{n>0}$  devient périodique à partir de  $t + 1$  et que  $s$  est sa plus petite période.

Ainsi, le développement décimal propre de  $r$  devient périodique et sa plus petite période est donnée par le plus petit entier  $s > 0$  pour lequel il existe  $t$  tel que :

$$10^{t+s} p \equiv 10^t p \text{ modulo } q,$$

où, puisque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux  $10^{t+s} \equiv 10^t \text{ modulo } q$ .

- 2.** Lorsque 10 est premier avec  $q$ , l'équation précédente est équivalente à

$$10^s \equiv 1 \text{ modulo } q$$

puisque la classe  $\overline{10^t p}$  est inversible dans l'anneau  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . L'entier  $s$ , plus petit entier  $k > 0$  tel  $\overline{10^k} = 1$  dans  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ , est donc l'ordre de 10 dans le groupe multiplicatif de  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .

- 16.** Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini  $p_1, \dots, p_r$  de nombres premiers congrus à  $-1$  modulo 4.

Considérons alors l'entier :

$$N = 4(p_1 \cdots p_r)^2 - 1.$$

Puisque  $N$  est impair supérieur ou égal à 3, sa décomposition  $N = q_1 \cdots q_s$  en facteurs premiers est formée de nombres premiers impairs. Les nombres  $q_k$  sont donc congrus à  $\pm 1$  modulo 4 et la relation :

$$\overline{q_1} \cdots \overline{q_s} = \overline{N} = -\overline{1}$$

dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  montre qu'il existe un entier  $k$  tel que  $q_k$  soit congru à  $-1$  modulo 4. Comme le nombre  $q_k$  ne divise pas 1, il est différent de tous les  $p_i$ . Cette contradiction montre ce que l'on voulait.

17. 1. Si  $\overline{-1}$  est le carré de  $\alpha \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ , on a par le petit théorème de Fermat

$$(-\overline{1})^{\frac{p-1}{2}} = \alpha^{p-1} = \overline{1}.$$

Comme  $p$  est strictement supérieur à 2 il vient  $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$  et  $p-1 \equiv 0$  modulo 4.

Supposons que  $p$  soit de la forme  $4k+1$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . D'après le théorème de Wilson, on a  $(4k)! \equiv -1$  modulo  $m$ . Cela donne :

$$((2k)!)^2 \equiv (-1)^{2k} (1) \cdots (2k) (p-2k) \cdots (p-1) \equiv -1 \text{ modulo } m.$$

Ainsi  $-\overline{1}$  est le carré de  $\overline{((2k)!)}$  dans l'anneau  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

2. Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini  $p_1, \dots, p_r$  de nombres premiers congrus à 1 modulo 4. Considérons alors un diviseur premier  $p$  de :

$$1 + 4(p_1 \cdots p_r)^2.$$

Le nombre premier  $p$  est impair et est congru à  $-1$  modulo 4 puisque  $-1$  est congru au carré de  $2(p_1 \cdots p_r)$  modulo  $p$ . Il est aussi différent de tous les  $p_i$ . Cette contradiction montre ce que l'on voulait.

18. 1. Nous avons démontré que le groupe  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  est un groupe cyclique dans l'exercice 5 page 42.

2. Soit  $\omega$  un générateur de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . Tout élément de ce groupe peut s'écrire  $\omega^k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si  $\alpha$  est un carré, on a  $\alpha = \beta^2$  pour  $\beta \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . Il vient alors  $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = \beta^{p-1} = \overline{1}$ .

Si  $\alpha$  n'est pas un carré, on a  $\alpha = \omega^k$  avec  $k$  impair. La puissance

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}} = \omega^{k\frac{p-1}{2}}$$

n'est pas égal à  $\overline{1}$  parce que  $p-1$ , ordre de  $\omega$ , ne divise pas  $k\frac{p-1}{2}$ . Comme son carré vaut  $\overline{1}$  par le petit théorème de Fermat, elle est égale à  $-\overline{1}$ .

3. Si l'un des entiers  $a$  ou  $b$  est divisible par  $p$ , les deux membres de la relation demandée sont nuls. Dans le cas contraire, il suffit de considérer la congruence modulo  $p$  de l'égalité :

$$(ab)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}}.$$

4. Soit  $\omega$  un générateur de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . La multiplication par  $\omega$  est la permutation circulaire :

$$(\omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-2})$$

de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ( $\overline{0}$  est fixe). Sa signature est égale à  $(-1)^{p-2} = -1$ . Comme la multiplication par  $\alpha = \omega^k$  est la  $k^{\text{ième}}$  puissance de la multiplication par  $\omega$  la



signature de cette permutation est  $(-1)^k$ . Elle est donc paire si, et seulement si,  $k$  est pair, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\alpha$  est un carré.

**19.** 1. Soit  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ . La relation :

$$P(\zeta) = (P(\zeta_1), \dots, P(\zeta_n))$$

pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$  montre que  $P$  est un polynôme annulateur de  $\zeta$  si, et seulement, on a  $P(\zeta_i) = 0$  pour tout  $i$ .

Le polynôme minimal de  $\zeta$  est donc le polynôme unitaire scindé simple dont l'ensemble des racines est  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ .

2. L'élément  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  engendre l'algèbre  $\mathbb{C}^n$  si, et seulement si, son polynôme minimal est de degré  $n$ . C'est le cas si, et seulement si, les  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  sont deux à deux distincts. Son polynôme minimal est alors  $\prod_{i=1}^n (X - \zeta_i)$ .

3. Il est clair que pour toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , l'application :

$$U_\sigma : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

est un automorphisme de  $\mathbb{C}^n$ .

Soit, réciproquement, un automorphisme  $\varphi$  de la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathbb{C}^n$ . Si  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  est un élément générateur de  $\mathbb{C}^n$  de polynôme minimal :

$$M = \prod_{i=1}^n (X - \zeta_i),$$

il est clair que  $\varphi(\zeta)$  est un élément générateur ( $\varphi$  est surjective) de polynôme minimal  $M$ . Comme les  $\zeta_i$  sont deux à deux distincts, il existe une permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  tel que :

$$\varphi(\zeta) = (\zeta_{\sigma(1)}, \dots, \zeta_{\sigma(n)}).$$

Il est alors évident que  $\varphi$  est égal à  $U_\sigma$ .

L'application  $\sigma \mapsto U_\sigma$  qui est clairement injective est alors un isomorphisme du groupe  $\mathcal{S}_n$  sur le groupe des automorphismes de la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathbb{C}^n$ .

**20.** 1. Puisque  $\omega$  est irrationnel, son polynôme minimal est  $X^2 - A$ . La famille  $(1, \omega)$  est donc libre sur  $\mathbb{Q}$ .

L'ensemble  $\mathbb{Z}[\omega]$  contient 0 et est évidemment stable par différence. Il contient aussi 1 et la relation :

$$(n + m\omega)(n' + m'\omega) = (nn' + Amm') + (nm' + n'm)\omega$$

montre qu'il est stable par produit.

2. L'application  $N$  est bien définie parce que l'écriture  $x = n + m\omega$  est unique. On vérifie alors par un simple calcul que l'on a  $N(xy) = N(x)N(y)$ . Si  $x$  est inversible, il existe  $y$  de  $\mathbb{Z}[\omega]$  tel que  $xy = 1$ . Cela entraîne  $N(x)N(y) = N(1) = 1$ . Puisque les valeurs de  $N$  sont entières,  $N(x)$  est égal à  $\pm 1$ . Si  $N(x)$  est égal à  $\pm 1$ , on a :

$$x^{-1} = \frac{n - m\omega}{n^2 - m^2A} = (\pm n) - (\pm m)\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$$

et  $x$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[\omega]$ .

3. Soit  $x = n + m\omega$  un élément inversible tel que  $x > 1$ . On a alors :

$$-x < -x^{-1} < x^{-1} < x.$$

Si  $N(x) = 1$ , la relation :

$$-x^{-1} = -n + m\omega < x = n + m\omega$$

implique  $n > 0$ . La relation  $x^{-1} = n - m\omega < x = n + m\omega$  implique  $m > 0$ . Il en est de même lorsque  $N(x) = -1$ . La réciproque est évidente.

L'ensemble  $G = \mathbb{Z}[\omega] \cap \mathbb{R}_+^*$  est un groupe. S'il n'est pas réduit à  $\{1\}$ , il contient un élément  $x_0 > 1$ . Si  $x = n + m\omega \in G$  vérifie  $1 < x \leq x_0$ , on a  $n > 0$ ,  $m > 0$  et donc  $n < x_0$  et  $m_0 < x_0$ . L'ensemble non vide fini  $G \cap ]1, x_0]$  possède donc un plus petit élément  $a$ .

On montre alors que  $G$  est égal à  $a^{\mathbb{Z}}$  par division euclidienne. On a bien sûr  $a^{\mathbb{Z}} \subset G$ . Réciproquement, si  $g \in G$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a^k \leq g < a^{k+1}$ . On en déduit  $ga^{-k} \in G$  et  $[1, a[$ . Cela entraîne  $ga^{-k} = 1$  et  $g = a^k$ . Finalement :

$$G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

4. On vérifie par calcul que  $a = 3 + \sqrt{10}$  est un élément inversible de  $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$  vérifiant  $N(a) = -1$ . Comme il n'existe pas d'élément inversible de la forme  $n + m\sqrt{10} < a$ , l'élément  $a$  est l'élément inversible fondamental de  $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ . Un couple  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  vérifie  $m^2 - 10n^2 = \pm 1$  si  $x = n + m\sqrt{10}$  appartient à  $G$  et vérifie  $x > 1$ . On a donc  $x = a^p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . On a donc :

$$n + m\sqrt{10} = \left(8 + 3\sqrt{10}\right)^p$$

et, par conséquent :

$$n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} C_p^{2k} 8^{p-2k} 3^{2k} 10^k \quad \text{et} \quad m = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} C_p^{2k+1} 8^{p-2k-1} 3^{2k+1} 10^k$$

Puisque  $N(a) = 1$ , les couple  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  vérifiant  $m^2 - 10n^2 = 1$  si  $x = n + m\sqrt{10}$  et de la forme  $x = a^{2p}$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . On a donc :

$$n + m\sqrt{10} = \left(8 + 3\sqrt{10}\right)^{2p} = \left(154 + 48\sqrt{10}\right)^p$$

et, par conséquent :

$$n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} C_p^{2k} 154^{p-2k} 48^{2k} 10^k \quad \text{et} \quad m = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} C_p^{2k+1} 154^{p-2k-1} 48^{2k+1} 10^k.$$

## Chapitre 4

- 1 Si la famille  $(\ln p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est liée sur  $\mathbb{Q}$ , il existe une partie finie  $I \subset \mathbb{N}$  et une famille  $(r_n)_{n \in I}$  de nombres rationnels non nuls telles que l'on ait :

$$\sum_{n \in I} r_n \ln p_n = 0.$$

Après multiplication par un dénominateur commun et répartition des termes suivant leur signe, on obtient :

$$\sum_{n \in I^+} a_n \ln p_n = \sum_{n \in I^-} a_n \ln p_n$$

où les  $a_n$  sont des entiers strictement positifs et où  $I^+ \cup I^- = I$  est non vide. Cela donne l'égalité :

$$\prod_{n \in I^+} p_n^{a_n} = \prod_{n \in I^-} p_n^{a_n}$$

qui contredit l'unicité de la factorisation en nombres premiers.

2. Supposons que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit une base de  $E$ .

Une famille génératrice de  $E$  est nécessairement infinie ; sinon  $E$  serait de dimension finie et toute base de  $E$  serait finie à  $\dim E$  éléments.

Soit  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille libre de  $E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$I_n = \{ i \in I \mid f_i \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_n) \}.$$

Pour tout  $n$ , la famille  $(f_i)_{i \in I_n}$  est libre dans l'espace  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$  de dimension  $n + 1$ , la partie  $I_n$  est donc finie et possède moins de  $n + 1$  éléments. D'un autre côté, pour tout  $i$ , le vecteur  $f_i$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'un nombre finie de vecteurs de  $(e_n)$  et il existe un entier  $n$  tel que  $i \in I_n$ . La suite  $(I_n)_n$  est donc une suite exhaustive de parties finies de  $I$ . L'ensemble  $I$  est donc dénombrable.

Par conjonction une base de  $E$  est donc infinie dénombrable.

3. • Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$  différents de  $E$ . Si  $F \subset G$ , la réunion  $F \cup G$  est égale à  $G$  et, par conséquent, différente de  $E$ . Il en est de même lorsque  $G \subset F$ . On peut donc supposer  $F \not\subset G$  et  $G \not\subset F$ . Il existe alors un élément  $f \in F$  n'appartenant pas à  $G$  et  $g \in G$  n'appartenant pas à  $F$ . Le vecteur  $v = f + g$  n'appartient pas, alors, à la réunion  $F \cup G$ ; sinon, il appartiendrait, par exemple, à  $F$  et l'on aurait :

$$g = v - f \in F.$$

Dans tous les cas,  $F \cup G$  n'est pas égal à  $E$ .

- Montrons par récurrence sur  $n \leq \text{Card } \mathbf{K}$  que la réunion  $F$  d'une famille  $(F_k)_{k \in [1, n]}$  de sous-espaces différents de  $E$  est strictement incluse dans  $E$ . Le résultat est vrai pour  $n = 1$ . Supposons-le acquis pour tout  $k < n \leq \text{Card } \mathbf{K}$ .

Soit alors  $(F_k)_{k \in [1, n]}$  une famille de sous-espaces différents de  $E$  avec  $n \leq \text{Card } \mathbf{K}$  et  $F$  sa réunion. Supposons  $F = E$ .

Par hypothèse de récurrence, la réunion  $G$  de la famille  $\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k$  n'est pas égale à  $E$ . On peut donc supposer  $F_n \not\subset G$ . Soient alors  $f \in F_n \setminus G$  et  $g \in E \setminus F_n$ . Si les  $\text{Card } \mathbf{K}$  vecteurs :

$$\lambda f + g \quad \text{pour } \lambda \in \mathbf{K}$$

appartiennent à la réunion  $G$ , l'inégalité  $n-1 < \text{Card } \mathbf{K}$  montre qu'il existe un indice  $k \in [1, n-1]$  et deux scalaires  $\alpha \neq \beta$  dans  $\mathbf{K}$  tels que :

$$\alpha f + g \in F_k \quad \text{et} \quad \beta f + g \in F_k.$$

Par différence, il vient  $(\alpha - \beta)f \in F_k$  et  $f \in F_k$  avec  $k < n$ , ce qui est impossible. Il existe donc  $\lambda$  tel que  $\lambda f + g$  appartienne à  $F_n$ . On en déduit  $g \in F_n$ , ce qui est aussi impossible.

4. Une application de la forme :

$$f(t) = \sum_{x \in [a, b]} \alpha_x |t - x|$$

est une application continue affine par morceaux sur  $[a, b]$ . Elle est dérivable sur :

$$[a, b] \setminus \{x \in ]a, b[ \mid \alpha_x \neq 0\}.$$

En un point  $x \in ]a, b[$  tel que  $\alpha_x \neq 0$ , elle admet des dérivées à gauche et à droite de la forme :

$$f'_g(t) = -\alpha_x + d \quad \text{et} \quad f'_d(t) = +\alpha_x + d.$$

Une combinaison linéaire des  $\varphi_x$  ne peut donc être nulle que si elle se réduit à :

$$\alpha_a |t - a| + \alpha_b |t - b| = 0.$$

L'évaluation en  $a$  et  $b$  fournit alors  $\alpha_b = 0$  et  $\alpha_a = 0$ . Ainsi, la famille  $(\varphi_x)_{x \in [a, b]}$  est libre.

Soient maintenant  $f$  une fonction réelle affine par morceaux sur  $[a, b]$  et  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, r+1 \rrbracket}$  une subdivision (une suite strictement croissante de  $[a, b]$  vérifiant  $x_0 = a$  et  $x_{r+1} = b$ ) adaptée à  $f$ . Par définition, la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  est une fonction affine de la forme  $t \mapsto p_i t + q_i$  pour tout  $i$ . La fonction :

$$g(t) = f(t) - \sum_{i=1}^r \frac{1}{2} (p_{i+1} - p_i) |t - x_i|$$

est donc dérivable en tout point de  $]a, b[$  puisqu'elle l'est évidemment en tout point  $x$  différent des  $x_i$  et qu'en  $x_i$  de  $]a, b[$  ses dérivées à gauche et à droite, de la forme :

$$p_i + \frac{1}{2} (p_{i+1} - p_i) + r \quad \text{et} \quad p_{i+1} - \frac{1}{2} (p_{i+1} - p_i) + r,$$

sont égales. Comme elle est aussi affine par morceaux elle est de la forme  $pt + q$ . On peut donc l'écrire :

$$g(t) = \frac{pb + q}{b - a} |t - a| + \frac{pa + q}{b - a} |t - b|.$$

L'application  $f$  est donc combinaison linéaire de fonctions  $\varphi_x$ .

On peut aussi démontrer ce dernier point de la façon suivante : soit  $\sigma = (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  une subdivision de  $[a, b]$ . L'ensemble des  $\mathcal{A}_\sigma$  des applications  $f$  de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ , continues et affines par morceaux telle que  $\sigma$  soit adaptée à  $f$  est évidemment un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}$ . L'application linéaire  $f \mapsto (f(a_i))$  de  $\mathcal{A}_\sigma$  vers  $\mathbb{R}^{n+1}$  étant clairement bijective, cet espace est de dimension  $n + 1$ . La famille des  $n + 1$  applications  $(\varphi_{a_i})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  de  $\mathcal{A}_\sigma$  étant libre, l'espace  $\mathcal{A}_\sigma$  est donc engendré par  $(\varphi_{a_i})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ . On conclut alors en remarquant que toute application de  $\mathcal{A}$  appartient à un  $\mathcal{A}_\sigma$ .

5. Si  $u$  commute avec  $p$ , alors les sous-espaces  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont stables par  $u$  d'après le cours.

Si le sous-espace  $\text{Ker } p$  est stable par  $u$ , alors pour tout  $f \in \text{Ker } p$ , on a  $u(f) \in \text{Ker } p$ . Cela donne :

$$(p \circ u)(f) = p(u(f)) = 0 \quad \text{et} \quad (u \circ p)(f) = u(p(f)) = 0.$$

De même, puisque  $\text{Im } p$  est stable par  $u$ , alors, pour tout  $g \in \text{Im } p$ , on a  $u(g) \in \text{Im } p$ . Cela donne :

$$(p \circ u)(g) = p(u(g)) = u(g) \quad \text{et} \quad (u \circ p)(g) = u(p(g)) = u(g).$$

Comme tout élément  $x$  de  $E$  peut s'écrire sous la forme  $x = f + g$  avec  $f \in \text{Ker } p$  et  $g \in \text{Im } p$ , il vient :

$$(p \circ u)(x) = (p \circ u)(f) + (p \circ u)(g) = (u \circ p)(f) + (u \circ p)(g) = (u \circ p)(x).$$

6 Si  $p + q$  est un projecteur, on a  $(p + q)^2 = p + q$  soit :

$$p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$

et  $p \circ q + q \circ p = 0$ . Par multiplication par  $p$  à droite et à gauche, il vient :

$$p \circ q \circ p + q \circ p = 0 \quad \text{et} \quad p \circ q \circ p + p \circ q = 0.$$

On obtient finalement  $p \circ q = q \circ p$  et :

$$p \circ q = q \circ p = p \circ q + q \circ p = 0.$$

Si  $p \circ q = q \circ p = 0$ , on obtient immédiatement :

$$(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q.$$

7. La caractéristique de  $\mathbf{K}$ , ordre de  $1_{\mathbf{K}}$  dans  $\mathbf{K}^*$ , est évidemment finie. C'est donc un nombre premier  $p$ . L'application  $k \mapsto k1_{\mathbf{K}}$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbf{K}$  se factorise alors en un morphisme injectif  $\varphi$  du corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  dans  $\mathbf{K}$ . L'image de  $\varphi$  est un sous-corps  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{K}$  isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . La dimension de  $\mathbf{K}$  sur  $\mathbf{P}$  est évidemment finie et  $\mathbf{K}$  a  $p^r$  éléments avec  $r = \dim_{\mathbf{P}} \mathbf{K}$ . Comme  $\mathbf{K}$  a au moins deux éléments, on a  $r > 0$ .

8. 1. Soit  $x \in E$ . On peut s'écrire  $x = \sum_{j \in J} \beta_j e_j$  avec  $(\beta_j) \in \mathbf{L}^{(J)}$  et  $\beta_j = \sum_{i \in I} \alpha_{i,j} \ell_i$  avec  $(\alpha_{i,j}) \in \mathbf{K}^{(I)}$  pour tout  $j$ . On obtient alors  $x = \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_{i,j} \ell_i e_j$  où  $(\alpha_{i,j}) \in \mathbf{K}^{(I \times J)}$ . La famille  $(\ell_i e_j)$  est donc une famille génératrice du  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Si  $(\alpha_{i,j}) \in \mathbf{K}^{(I \times J)}$  est tel que  $\sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_{i,j} \ell_i e_j = 0$ , l'écriture :

$$\sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} \alpha_{i,j} \ell_i \right) e_j = 0$$

et l'indépendance des  $(e_j)$  sur  $\mathbf{L}$  montrent que l'on a  $\sum_{i \in I} \alpha_{i,j} \ell_i = 0$  pour tout  $j$ . On obtient alors  $\alpha_{i,j} = 0$  pour tout  $(i,j)$  puisque  $(\ell_i)$  est indépendante sur  $\mathbf{K}$ . La famille  $(\ell_i e_j)$  est donc libre sur  $\mathbf{K}$ .

2. Si  $E$  est de dimension finie sur  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{L}$  de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ , il existe une base finie  $(\ell_i)_{i \in I}$  de  $\mathbf{L}$  sur  $\mathbf{K}$  et une base finie  $(e_j)_{j \in J}$  de  $E$  sur  $\mathbf{L}$ . Le premier point montre alors que  $(\ell_i e_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est une base de  $E$  sur  $\mathbf{K}$  de cardinal  $\text{Card}(I \times J)$ .

Supposons  $E \neq \{0\}$  de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ . Une base de  $E$  sur  $\mathbf{K}$  étant évidemment une famille génératrice de  $E$  sur  $\mathbf{L}$ ,  $E$  est de dimension finie sur  $\mathbf{L}$ . Soit alors  $x \neq 0$  dans  $E$ . Le sous-espace  $\mathbf{L}x$  de  $E$ , isomorphe à  $\mathbf{L}$ , est de dimension finie sur  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$  est de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ .

9. 1. L'application  $\Delta$  est linéaire comme différence du morphisme d'évaluation  $T$  qui associe à  $P(X)$  le polynôme  $P(X + 1)$  et de l'identité.

Si  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$  est de degré  $n$ , l'expression :

$$(\Delta P)(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left( \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i X^i \right)$$

montre que  $\Delta P$  est de degré  $n - 1$  et de coefficient dominant  $n\alpha_n$ .

Un polynôme  $P$  appartient au noyau de  $\Delta$  si, et seulement si, il est constant. La relation  $\deg \Delta(X^n) = n - 1$  montre que la suite  $(\Delta(X^n))_{n \in \mathbf{N}^*}$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ . L'application  $\Delta$  est donc surjective.

2. On montre l'existence et l'unicité de la suite  $(H_n)$  par récurrence. On a  $H_0 = 1$ . Supposons que l'on ait prouvé l'existence et l'unicité de  $(H_0, \dots, H_{n-1})$ . Puisque le sous-espace  $(X)$  des polynômes nuls en 0 est un supplémentaire de  $\text{Ker } \Delta$ , l'application  $\Delta|_{(X)} : (X) \rightarrow \mathbb{R}[X]$  est un isomorphisme. Il existe donc un unique polynôme  $H_n$  vérifiant  $H_n(0) = 0$  et  $\Delta(H_n) = H_{n-1}$ .

On vérifie alors aisément par récurrence que  $H_n$  est de degré  $n$  et s'annule en les entiers de  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ . Le polynôme  $H_n$  est donc de la forme :

$$\alpha_n X(X - 1) \cdots (X - n + 1)$$

avec  $\alpha_n \neq 0$ . On a évidemment  $\alpha_0 = 1$ . On obtient  $n\alpha_n = \alpha_{n-1}$  en utilisant  $\Delta H_n = H_{n-1}$ . Cela fournit :

$$H_n = \frac{X(X - 1) \cdots (X - n + 1)}{n!}$$

pour tout  $n$  (polynôme interpolateur de Lagrange).

La suite  $(H_n)$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$  puisque le degré de  $H_n$  est  $n$  pour tout  $n$ . Il existe donc une suite à support fini telle que :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k H_k.$$

Les relations  $\Delta^n(H_k) = H_{k-n}$  fournissent  $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{n+k} H_k$ . On obtient  $\alpha_n = \Delta^n(P)(0)$  par évaluation en 0.

3. On a  $\Delta = T - \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}$  dans l'algèbre des endomorphismes de  $\mathbb{R}[X]$ . On obtient alors :

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k T^k$$

Comme  $(T^k P)(X)$  est évidemment égal à  $P(X+k)$ , il vient :

$$(\Delta^n P) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k P(X+k).$$

L'évaluation en 0 fournit la relation désirée.

L'assertion (a) implique évidemment (b).

Si  $P(X)$  ne prend que des valeurs entières sur  $\llbracket 0, p \rrbracket$ , la formule (\*) montre que les coordonnées de  $P$  dans la base  $(H_n)$  sont des entiers. Ainsi, (b) entraîne (c). Supposons que l'on ait  $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k H_k$  avec  $\alpha_k \in \mathbb{Z}$  pour tout  $k$ .

La valeur de  $H_k$  sur un entier relatif  $a$  est nulle si  $a$  appartient à  $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$ . Si  $a$  est supérieur ou égal à  $k$ , on a :

$$H_k(a) = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} = C_a^k$$

Si  $a$  est un entier strictement négatif  $-b$ , il vient :

$$H_k(a) = (-1)^k \frac{b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!} = (-1)^k C_{b+k-1}^k.$$

Ainsi,  $H_k$  prend des valeurs entières sur  $\mathbb{Z}$ . Cela valant pour tout  $k$ , le polynôme  $P$  prend aussi des valeurs entières sur  $\mathbb{Z}$ . Cela montre que (c) implique (a) et prouve l'équivalence des trois premiers points.

Il est clair que (a) entraîne (d). Si  $P$  prend des valeurs entières sur  $\llbracket a, a+p \rrbracket$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ , le polynôme  $Q(X) = P(X+a)$  prend des valeurs entières sur  $\llbracket 0, p \rrbracket$ . Comme  $Q$  est de degré  $p$ , il prend des valeurs entières sur  $\mathbb{Z}$  et, par conséquent,  $P$  aussi.

4. On montre que l'expression  $P$  est un entier par récurrence sur le nombre  $k$  d'indices  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $a_i$  n'appartienne pas à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Si  $k = 0$ , tous les  $a_i$  appartiennent à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . S'il ne sont pas deux à deux distincts, alors  $P$  est nul. Sinon,  $P$  est la signature  $\pm 1$  de la permutation  $i \mapsto a_i$  de  $S_n$ .

Soit  $p > 0$ . Supposons alors le résultat est acquis par récurrence pour toute famille telle que  $k < p$  et considérons une famille  $(a_i)$  avec  $k = p$ . On



peut supposer que  $a_1, \dots, a_p$  n'appartiennent pas à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Le polynôme  $Q(X)$  obtenu en remplaçant  $a_p$  par l'indéterminée  $X$  dans l'expression de  $P$  est un polynôme de degré  $n - 1$ . Par hypothèse de récurrence, il prend des valeurs entières lorsque  $a_p$  appartient à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , puisqu'alors il n'y a que  $p - 1$  indice tels que  $a_i \notin \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le polynôme  $Q$  prend alors des valeurs entières pour tout  $a_p \in \mathbb{Z}$  par la question précédente. Ainsi,  $P$  est aussi un entier lorsque  $k = p$ .

10. 1. Les inclusions  $\text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$  et  $\text{Ker } u^k \subset E$  montrent que  $(d)_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante et bornée par  $n$ .

Soient alors  $k \in \mathbb{N}$  et  $N_{k+1}$  un supplémentaire de  $\text{Ker } u^{k+1}$  dans  $\text{Ker } u^{k+2}$ . Pour tout  $x \in N_{k+1}$ , on a  $u(u^k(x)) = 0$ . Ainsi, le sous-espace  $u(N_{k+1})$  est contenu dans  $\text{Ker } u^k$ . Montrons qu'il est en somme directe avec  $\text{Ker } u^{k+1}$ . Si  $x$  appartient à l'intersection  $u(N_{k+1}) \cap \text{Ker } u^{k+1}$ , il existe alors  $z \in N_{k+1}$  tel que  $x = u(z)$  et  $u^{k+1}(x)$  est nul. On obtient alors  $u^{k+2}(z) = 0$ , ce qui montre que  $z$  appartient à  $N_{k+1}$  et à  $\text{Ker } u^{k+2}$ . Cette intersection étant réduite à  $\{0\}$ , il vient  $z = 0$  et, par suite,  $x = 0$ . Les sous-espaces  $u(N_{k+1})$  et  $\text{Ker } u^{k+1}$  de  $\text{Ker } u^k$  sont donc en somme directe. On a donc :

$$\dim u(N_{k+1}) \leq \dim \text{Ker } u^{k+1} - \text{Ker } u^k = d_{k+1} - d_k.$$

D'un autre côté, l'application restreinte  $u|_{N_{k+1}}$  de  $N_{k+1}$  vers  $u(N_{k+1})$  est injective puisque son noyau  $N_{k+1} \cap \text{Ker } u$  est contenu dans le sous espace nul  $N_{k+1} \cap \text{Ker } u^{k+1}$ . Comme elle est surjective par construction, il vient :

$$d_{k+2} - d_{k+1} = \dim N_{k+1} = \dim u(N_{k+1}) \leq d_{k+1} - d_k.$$

2. La suite  $(d_{k+1} - d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  étant décroissante et minorée par 0 on peut considérer le plus petit entier  $p$  tel que  $d_{p+1} - d_p$  soit nul. La suite  $(d_k)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}$  est alors strictement croissante et la suite  $(d_k)_{k \geq p}$  est constante. Comme il existe  $k_0$  tel que  $u^k$  soit nul pour tout  $k \geq k_0$ , on a  $d_k = n$  pour tout  $k \geq p$ .

11. Considérons l'application linéaire  $\varphi : x \mapsto u(x)$  de  $\text{Ker } (u + v)$  vers  $F$ .

Si  $x$  appartient au noyau de  $\varphi$ , on a  $x \in \text{Ker } (u + v)$  et  $u(x) = 0$ . On en déduit  $x \in \text{Ker } u \cap \text{Ker } v$ . La réciproque étant évidente, on a :

$$\text{Ker } \varphi = \text{Ker } u \cap \text{Ker } v.$$

D'un autre côté, l'image de  $\varphi$  est évidemment contenue dans  $\text{Im } u$ . La relation  $v(x) = -u(x)$  pour tout  $x$  de  $\text{Ker } (u + v)$  montre qu'elle est aussi contenu dans  $\text{Im } v$ .

Le théorème du rang nous fournit alors l'inégalité :

$$\dim \text{Ker } (u + v) \leq \dim (\text{Ker } u \cap \text{Ker } v) + \dim (\text{Im } u \cap \text{Im } v).$$

- 12.** Considérons les applications restrictions  $w' = w|_{\text{Im}(v)}$  de  $\text{Im}(v)$  vers  $\text{Im}(w \circ v)$  et  $w'' = w|_{\text{Im}(v \circ u)}$  de  $\text{Im}(v \circ u)$  vers  $\text{Im}(w \circ v \circ u)$

L'application linéaire  $w'$  est surjective. Son noyau est le sous-espace  $\text{Im}(v) \cap \text{Ker } w$ . On en déduit :

$$\dim \text{Im}(v) = \dim \text{Im}(w \circ v) + \dim (\text{Im } v \cap \text{Ker } w).$$

De même, l'application linéaire  $w''$  est surjective de noyau  $\text{Im}(v \circ u) \cap \text{Ker } w$  et on a :

$$\dim \text{Im}(v \circ u) = \dim \text{Im}(w \circ v \circ u) + \dim (\text{Im}(v \circ u) \cap \text{Ker } w).$$

L'inclusion  $\text{Im}(v \circ u) \cap \text{Ker } w \subset \text{Im } v \cap \text{Ker } w$  prouve l'inégalité :

$$\text{rg}(v \circ u) - \text{rg}(w \circ v \circ u) \leq \text{rg}(v) - \text{rg}(w \circ v)$$

recherchée. On a l'égalité si, et seulement si,  $\text{Im}(v \circ u) \cap \text{Ker } w = \text{Im } v \cap \text{Ker } w$

- 13** 1. S'il existe une application  $w \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u = v \circ w$ , on a :

$$\text{Im } u = v(w(E)) \subset v(F) = \text{Im } v.$$

Supposons que l'on ait  $\text{Im } u \subset \text{Im } v$ . Considérons alors un supplémentaire  $H$  de  $\text{Ker } v$ . On sait que l'application  $v$  induit un isomorphisme  $\tilde{v}$  de  $H$  sur  $\text{Im } v$ . L'inclusion  $\text{Im } u \subset \text{Im } v$  permet alors de considérer l'application linéaire  $w = \tilde{v}^{-1} \circ u$ . On a  $v(\tilde{v}^{-1}(y)) = y$  pour tout  $y$  de  $\text{Im } v$ . On en déduit :

$$(v \circ w)(x) = v(\tilde{v}^{-1}(u(x))) = u(x)$$

pour tout  $x$  de  $E$  puisque  $u(x)$  appartient à  $\text{Im } u$  donc à  $\text{Im } v$ .

2. S'il existe une application  $w \in \mathcal{L}(F, G)$  telle que  $u = w \circ v$ , la relation  $v(x) = 0$  entraîne  $u(x) = w(v(x)) = 0$  puisque  $w$  est linéaire. On a donc :

$$\text{Ker } v \subset \text{Ker } u.$$

Supposons que l'on ait  $\text{Ker } v \subset \text{Ker } u$ . Considérons alors un supplémentaire  $H$  du noyau de  $\text{Ker } v$  dans  $E$  et un supplémentaire  $P$  de  $\text{Im } v$  dans  $F$ . On sait que l'application  $v$  induit un isomorphisme  $\tilde{v}$  de  $H$  sur  $\text{Im } v$ . On considère alors l'unique application linéaire  $w$  de  $F$  vers  $G$  égale à  $u \circ \tilde{v}^{-1}$  sur  $\text{Im } v$  et 0 sur  $P$ . Pour tout  $x$  de  $E$ , on peut écrire  $x = n + h$  avec  $n \in \text{Ker } v$  et  $h \in H$ . Il vient alors  $v(x) = v(h)$  et donc  $\tilde{v}^{-1}(v(x)) = h$ . Cela entraîne :

$$(w \circ v)(x) = u(\tilde{v}^{-1}(v(x))) = u(h) = u(x)$$

puisque  $n$  appartient à  $\text{Ker } v$  donc à  $\text{Ker } u$

14. 1. Il est immédiat que  $\mathcal{I}_F$  est un sous-espace de  $\mathcal{L}(E)$ . C'est un idéal à droite puisque l'on a  $\text{Im } u \circ f \subset \text{Im } u$  pour tous  $u$  et  $f$  de  $\mathcal{L}(E)$ . Comme  $\mathcal{I}_F$  s'identifie à l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$ , sa dimension est égale à  $n \dim F$ .

2. L'intersection  $\mathcal{I}_F \cap \mathcal{I}_G$ , égale à

$$\{u \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im } u \subset F \text{ et } \text{Im } u \subset G\},$$

est évidemment  $\mathcal{I}_{F \cap G}$ . Il est immédiat que la somme  $\mathcal{I}_F + \mathcal{I}_G$  est contenue dans  $\mathcal{I}_{F+G}$ . On a de plus :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{I}_F + \mathcal{I}_G) &= \dim \mathcal{I}_F + \dim \mathcal{I}_G - \dim(\mathcal{I}_F \cap \mathcal{I}_G) \\ &= n(\dim F + \dim G - \dim F \cap G) \end{aligned}$$

soit  $\dim(\mathcal{I}_F + \mathcal{I}_G) = \dim \mathcal{I}_{F+G}$ . Cela entraîne  $\mathcal{I}_F + \mathcal{I}_G = \mathcal{I}_{F+G}$ .

3. Soient  $\mathcal{I}$  un idéal à droite de  $\mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace de dimension maximale parmi les sous-espaces de  $E$  qui sont des images d'éléments de  $\mathcal{I}$ . Il existe donc une application  $u \in \mathcal{I}$  d'image  $F$ . Considérons alors un élément  $v \in \mathcal{I}$  d'image  $G$ . Le théorème de factorisation montre que les idéaux à droite  $\mathcal{I}_F$  et  $\mathcal{I}_G$  sont respectivement les ensembles  $\{u \circ f \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$  et  $\{v \circ f \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$ . Ils sont donc contenus dans  $\mathcal{I}$  comme leur somme  $\mathcal{I}_F + \mathcal{I}_G = \mathcal{I}_{F+G}$ . Une application d'image  $F + G$ , par exemple une projection, appartient donc à  $\mathcal{I}$ . La maximalité de la dimension de  $F$  entraîne  $F = F + G$ . Ainsi  $G \subset F$ . On a donc  $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_F$ .

Comme d'autre part le théorème de factorisation montre que tout élément de  $\mathcal{I}_F$  est de la forme  $u \circ f$  pour  $f \in \mathcal{L}(E)$  et appartient donc à  $\mathcal{I}$ , on a  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_F$ . Si  $p$  est un projecteur d'image  $F$ , ce qui précède montre que  $\mathcal{I}$  est égal à :

$$p \circ \mathcal{L}(E) = \{p \circ f \mid f \in \mathcal{L}(E)\}.$$

15. 1. Il est immédiat que  $\mathcal{K}_F$  est un sous-espace de  $\mathcal{L}(E)$ . C'est un idéal à gauche puisque l'on a  $\text{Ker } u \subset \text{Ker } f \circ u$  pour tous  $u$  et  $f$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

Soit  $N$  un supplémentaire de  $F$ . Il est immédiat que l'application  $\varphi : u \mapsto u|_N$  est une application linéaire de  $\mathcal{K}_F$  vers  $\mathcal{L}(N, E)$ . Si  $v$  appartient à  $\mathcal{L}(N, E)$ , l'unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E)$  valant 0 sur  $F$  et  $v$  sur  $N$  vérifie bien sûr  $\varphi(u) = v$ . Ainsi  $\varphi$  est surjective. Elle est injective puisque un élément  $u$  de son noyau est nul, étant nul sur  $F$  et  $N$ . Finalement, la dimension de  $\mathcal{K}_F$  est :

$$\dim \mathcal{K}_F = n(n - \dim F).$$

2. Une application  $f$  appartient à  $\mathcal{K}_{F+G}$  si, et seulement si, on a  $F \subset \text{Ker } f$  et  $G \subset \text{Ker } f$ . C'est-à-dire si, et seulement si, elle appartient à  $\mathcal{K}_F$  et à  $\mathcal{K}_G$ . On a donc  $\mathcal{K}_{F+G} = \mathcal{K}_F \cap \mathcal{K}_G$ . On montre aussi aisément l'inclusion  $\mathcal{K}_F + \mathcal{K}_G \subset \mathcal{K}_{F \cap G}$ . On prouve comme dans la deuxième question de l'exercice précédent que ces espaces ont même dimension. Il vient finalement  $\mathcal{K}_F + \mathcal{K}_G = \mathcal{K}_{F \cap G}$ .

3. Soient  $\mathcal{K}$  un idéal à gauche de  $\mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace de dimension minimale parmi les sous-espaces de  $E$  qui sont des noyaux d'éléments de  $\mathcal{K}$ . Il existe donc une application  $u \in \mathcal{I}$  de noyau  $F$ . Considérons alors un élément  $v \in \mathcal{K}$  de noyau  $G$ . Le théorème de factorisation montre que les idéaux à droite  $\mathcal{K}_F$  et  $\mathcal{K}_G$  sont respectivement les ensembles  $\{f \circ u \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$  et  $\{f \circ v \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$ . Ils sont donc contenus dans  $\mathcal{K}$  comme leur somme  $\mathcal{K}_F + \mathcal{K}_G = \mathcal{K}_{F \cap G}$ . Une application de noyau  $F \cap G$ , par exemple une projection, appartient donc à  $\mathcal{K}$ . La minimalité de la dimension de  $F$  entraîne alors  $F \cap G = F$  et, donc,  $F \subset G$ . On a donc  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_F$ . Comme le théorème de factorisation montre que tout élément de  $\mathcal{K}_F$  est de la forme  $f \circ u$  pour  $f \in \mathcal{L}(E)$  et on a finalement  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_F$ . Si  $p$  est un projecteur de noyau  $F$ , ce qui précède montre que  $\mathcal{K}$  est égal à :

$$\mathcal{L}(E) \circ p = \{f \circ p \mid f \in \mathcal{L}(E)\}$$

16. 1. Si  $\mathcal{I}$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(E)$  il existe deux sous-espaces  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_F = \mathcal{K}_G.$$

Sa dimension est donc aussi bien  $n \dim F$  que  $n(n - \dim G)$ . On peut aussi écrire :

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im } f \subset F \text{ et } G \subset \text{Ker } f\}.$$

Soit  $N$  un supplémentaire de  $G$ . On montre alors de la même façon que dans l'exercice précédent que  $u \mapsto u|_N$  est un isomorphisme de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{L}(N, F)$ . Ainsi la dimension de  $\mathcal{I}$  est aussi  $\dim F(n - \dim G)$ . On en déduit  $\dim F = 0$  ou  $n$ . Finalement  $\mathcal{I}$  est égal à  $\{0\}$  ou  $\mathcal{L}(E)$ .

2. L'ensemble  $\mathcal{L}_f(E)$  des endomorphismes de rang fini de  $E$  contient évidemment l'application nulle. L'inclusion :

$$\text{Im}(\alpha u + \beta v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$$

montre que c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ . Soit alors  $u \in \mathcal{L}_f(E)$ . L'inclusion  $\text{Im}(u \circ f) \subset \text{Im } u$  montre que  $u \circ f$  appartient à  $\mathcal{L}_f(E)$  pour tout  $f$ . De la même façon, la surjection  $f|_{\text{Im } u}$  de  $\text{Im } u$  vers  $\text{Im } f \circ u$  montre que  $f \circ u$  appartient à  $\mathcal{L}_f(E)$  pour tout  $f$ . Ainsi,  $\mathcal{L}_f(E)$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(E)$ .

L'identité n'est pas une application de rang fini lorsque  $E$  est de dimension infinie. Ainsi,  $\mathcal{L}_f(E)$  est différent de  $\mathcal{L}(E)$ . Pour montrer que cet idéal n'est pas réduit à  $\{0\}$ , considérons un vecteur non nul  $v$  de  $E$  et  $P$  un sous-espace supplémentaire de  $\mathbb{K}v$ . La projection de  $E$  sur  $\mathbb{K}v$  est alors un élément de  $\mathcal{L}_f(E)$ .

17. Le théorème du rang donne :

$$\dim E_i = \dim \text{Ker } u_i + \dim \text{Im } u_i = \dim \text{Im } u_{i-1} + \dim \text{Im } u_i$$

pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . On obtient alors par sommation :

$$\sum_{i=1}^r (-1)^i \dim E_i = -\dim \text{Im } u_0 + (-1)^r \dim \text{Im } u_r = 0.$$

18. On raisonne par récurrence sur  $r$ . Le résultat est évident si  $r = 0$ . On le suppose acquis pour  $r - 1$ .

Si  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces de  $E$  de même codimension finie  $r > 0$ , l'exercice 3 page 106 montre que sous les différentes hypothèses envisagées, la réunion des  $F_i$  est différente de  $E$ . Il existe donc un vecteur  $v$  de  $E$  n'appartenant à aucun des  $F_i$ . Pour tout  $v$ , les espaces  $F_i$  et  $\mathbb{K}v$  sont donc en somme directe.

Notons alors :

$$G_i = F_i \oplus \mathbb{K}v.$$

Puisque  $F_i$  est de codimension  $r$ , il existe  $r$  vecteurs indépendants  $(x_1, \dots, x_r)$  tels que :

$$E = F_i \oplus \mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_r.$$

Puisque  $v$  n'appartient pas à  $F_i$ , il existe  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  telle que la décomposition de  $x$  dans cette somme directe soit de la forme :

$$v = f + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r$$

avec  $\alpha_k \neq 0$ . On en déduit alors immédiatement par échange :

$$E = F_i \oplus \mathbb{K}v \oplus \mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_{k-1} \oplus \mathbb{K}x_{k+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_r.$$

Ainsi,  $G_i$  est de codimension finie  $r - 1$ .

Par hypothèse de récurrence, il existe alors un sous-espace  $G$  tel que l'on ait :

$$\forall i, \quad G_i \oplus G = E.$$

Le sous-espace  $F = \mathbb{K}v \oplus G$  est alors un supplémentaire commun aux  $F_i$  puisque l'on a :

$$\forall i, \quad F \oplus (\mathbb{K}v \oplus G_i) = (F \oplus \mathbb{K}v) \oplus G_i = E.$$

- 19
1. La relation  $x \equiv y [F]$  est associée au sous-groupe (distingué)  $F$  de  $(E, +)$ . C'est une relation d'équivalence (voir exercice 12 page 43).
  2. Nous avons vu que la relation  $x \equiv y [F]$  est compatible avec l'addition et qu'il existe sur  $E/F$  une unique structure de groupe additif telle que  $\pi$  soit un morphisme.

Si  $x \equiv y [I]$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\alpha x - \alpha y = \alpha(x - y) \in F$$

puisque  $F$  est un sous-espace. Si  $u$  est une classe modulo  $F$ , on définit  $\alpha u$  comme la classe  $\alpha x$  où  $x$  est un élément de  $E$  représentant  $u$  puisque, par ce qui précède, cette classe ne dépend pas du représentant choisi. On construit ainsi une loi externe quotient  $\mathbb{K} \times (E/F) \rightarrow E/F$  telle  $\pi$  vérifie  $\pi(\alpha x) = \alpha\pi(x)$ .

On vérifie alors par simple routine que  $(E/F, +)$  muni de la loi externe est un espace vectoriel et que  $\pi$  est une application linéaire. On vérifie de même que c'est la seule structure d'espace vectoriel sur  $E/F$  telle que  $\pi$  soit linéaire.

Le noyau de  $\pi$  est la classe de 0, soit  $F$ .

3. Si l'on a  $u = v \circ \pi$ , alors  $x \in F$  implique  $\pi(x) = 0$  et  $u(x) = v(\pi(x)) = 0$ . Supposons réciproquement  $F \subset \text{Ker } u$ . Si  $x$  et  $y$  vérifie  $x \equiv y [F]$ , on a  $x - y \in F$ ,  $v(x - y) = 0$  par hypothèse et, donc,  $v(x) = v(y)$ . On construit alors une application  $v$  de  $E/F$  vers  $G$  en associant à toute classe  $u$  de  $E/F$  l'image  $u(x)$  de l'un des représentant de  $u$  puisque, par ce qui précède, cette valeur est indépendante du représentant choisi. Cette application est uniquement déterminée parce que  $\pi$  est surjective.

On vérifie alors simplement que  $v$  est une application linéaire. On a :

$$\text{Im } u = u(E) = v(E/F)$$

puisque  $\pi$  est surjective et, comme dans le cas des groupes,  $\text{Ker } v = \pi(\text{Ker } u)$ .

- 20 Si  $F$  est de codimension finie, il existe un sous-espace de dimension finie  $P$  de  $E$  tel que  $F \oplus P = E$ . L'application  $\pi$  de  $E$  vers  $E/F$  induit alors un isomorphisme de  $P$ , supplémentaire de son noyau  $F$ , sur son image  $E/F$ . L'espace  $E/F$  est donc de dimension finie  $\dim P$ .

Si  $E/F$  est de dimension finie, il possède une base  $(f_i)_{i \in [1, r]}$ . On choisit alors, pour tout  $i$ , un représentant  $e_i \in E$  ( $\pi(e_i) = f_i$ ) et l'on considère l'unique application linéaire  $s : E/F \rightarrow E$  telle que, pour tout  $i$ ,  $s(f_i) = e_i$ . On a bien sûr  $\pi \circ s = \text{Id}_{E/F}$ . L'application  $s$  est donc injective et réalise un isomorphisme de  $E/F$  sur son image  $P = \text{Im } s$ . Comme  $\pi|_P$  est un isomorphisme de  $P$  sur  $E/F$ , le sous-espace  $P$  est un supplémentaire de  $F$  et  $F$  est de codimension finie.

21. 1. Si  $L$  est un sous-espace tel que  $F + L = E$ , on a  $\pi(L) = E/F$ . Si de plus  $L$  est de dimension finie,  $E/F$  est de dimension finie et  $F$  de codimension finie dans  $E$ .

2. Notons  $\pi_F$  et  $\pi_G$  les projections canoniques de  $E$  sur  $E/F$  et  $E/G$ .

L'application surjective  $\pi_G$  vérifie  $F \subset \text{Ker } \pi_G$ . Il existe donc (voir exercice 19 page 110) une application linéaire  $\varphi : E/F \rightarrow E/G$  vérifiant  $\pi_G = \varphi \circ \pi_F$ . Cette application est surjective et son noyau, ensemble des classes modulo  $F$  des éléments de  $G$ , est l'ensemble  $G/F$ .

D'après le théorème du rang, l'espace  $E/F$  est de dimension finie si, et seulement si,  $G/F$  et  $E/G$  le sont. La relation :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \text{Ker } \varphi + \text{Im } \varphi \\ &= \dim G/F + \dim E/G \end{aligned}$$

fournit l'égalité souhaitée.

3. Soit  $\pi_F, \pi_G, \pi_{F \cap G}$  et  $\pi_{F+G}$  les projections canoniques de  $E$  sur  $E/F, E/G, E/(F \cap G)$  et  $E/(F + G)$ .

L'application linéaire :

$$x \in E \longmapsto (\pi_F(x), \pi_G(x)) \in (E/F) \times (E/G)$$

est de noyau  $F \cap G$ . Sa factorisation par  $\pi_{F \cap G}$  est donc une application linéaire injective  $\varphi$  de  $E/(F \cap G)$  vers  $(E/F) \times (E/G)$

De même, l'application linéaire :

$$(x, y) \in E \times E \longmapsto \pi_{F+G}(x) - \pi_{F+G}(y) \in E/(F + G)$$

est nulle sur  $F \times G$ . Elle se factorise alors en une application linéaire  $\psi$  de  $(E/F) \times (E/G)$  vers  $E/(F + G)$ . Si  $u$  est la classe de  $x \in E$  modulo  $F + G$ , alors  $u$  est l'image par  $\psi$  du couple  $(\pi_F(x), \pi_G(0))$ . Ainsi  $\psi$  est surjective.

On vérifie immédiatement que  $\psi \circ \varphi$  est nulle. On a donc  $\text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \psi$ . Si un couple  $c = (\pi_F(x), \pi_G(y))$  appartient au noyau de  $\psi$ , alors  $x$  et  $y$  sont congrus modulo  $F + G$ . On peut donc écrire :

$$x - y = f + g \quad \text{avec } (f, g) \in F \times G.$$

En notant  $z = x - f = y + g$ , on a alors :

$$c = (\pi_F(z), \pi_G(z)) = \varphi(\pi_{F \cap G}(z)).$$

Ainsi, la suite :

$$\{0\} \longrightarrow E/(F \cap G) \xrightarrow{\varphi} (E/F) \times (E/G) \xrightarrow{\psi} E/(F + G) \longrightarrow \{0\}$$

est exacte. Le théorème du rang montre alors que  $(E/F) \times (E/G)$  est de dimension finie si et seulement si,  $E/(F \cap G)$  et  $E/(F + G)$  le sont et que l'on a alors :

$$\dim (E/F) \times (E/G) = \dim E/(F \cap G) + \dim E/(F + G).$$

## Chapitre 5

1. Notons  $(\beta_{i,j})$  la matrice  $A^{-1}$ . Pour tout  $(i, j)$ , on a :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \beta_{k,j} = \delta_{i,j}.$$

Soit  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Il existe  $j$  tel que  $\beta_{l,j} \neq 0$  puisque  $A^{-1}$  est inversible. Pour tout  $i \neq j$ , il vient :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \beta_{k,j} = 0$$

et les éléments étant positifs,  $\alpha_{i,k} \beta_{k,j} = 0$ . On en déduit  $\alpha_{i,l} = 0$  pour tout  $i \neq j$ . La matrice  $A$  étant inversible,  $\alpha_{j,l}$  est non nul.

Ainsi, pour tout  $j$ , il existe un et un seul indice  $i$  tel que  $\alpha_{i,j} \neq 0$ . Cela définit une application  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même. Elle est surjective puisque, la matrice étant inversible toute ligne de  $A$  possède un élément non nul. L'application  $\sigma$  est donc une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et l'on a :

$$A = (\delta_{i,\sigma(j)} a_j)$$

avec  $a_j = \alpha_{\sigma(j),j}$ .

2. On a  $A + {}^t A = J - I_n$  où  $J$  désigne la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Considérons alors le système de  $n + 1$  équations :

$$\begin{cases} AX & = 0 \\ x_1 + \dots + x_n & = 0 \end{cases} \quad (*)$$

avec  $X = (x_i)$ . On obtient  $AX = 0$  et  $JX = 0$  puis, en utilisant :

$$(A + {}^t A) X = JX - X,$$

la relation  ${}^t AX = -X$ . On en déduit :

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = -{}^t X X = -{}^t X ({}^t AX) = -{}^t (AX) X = 0$$

et  $X = 0$ .

Le système (S) est donc de rang  $n$ . Cela entraîne que  $A$  est de rang supérieur ou égal à  $n - 1$ .



3. Rappelons que le nombre d'éléments de  $\mathbb{F}$  est de la forme  $q = p^r$  où  $p$  est la caractéristique du corps et que le nombre d'éléments d'un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{F}$  est  $q^n$ .

1. Montrons par récurrence sur  $k$  que le nombre de familles libres à  $k$  vecteurs de  $E$  est :

$$L_k = (q^n - q^{k-1}) (q^n - q^{k-2}) \cdots (q^n - q^0).$$

C'est conventionnel pour  $k = 0$  puisque la famille vide est libre. Supposons alors le résultat acquis pour  $k - 1$ .

L'application qui associe à toute famille  $(v_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$  la sous-famille  $(v_i)_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket}$  est évidemment une surjection de l'ensemble des familles libres de  $k$  vecteurs vers celui des familles libres de  $k - 1$  vecteurs. De plus, le nombre d'antécédents pour cette application d'une famille libre de  $k - 1$  vecteurs  $(v_i)_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket}$  donnée est égal au nombre de vecteurs  $w$  n'appartenant pas au sous-espace  $F$  engendré par  $(v_i)_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket}$ . Ce sous-espace ayant  $q^{k-1}$  éléments, ce nombre est égal à  $(q^n - q^{k-1})$ . On a donc :

$$L_k = (q^n - q^{k-1}) L_{k-1} = (q^n - q^{k-1}) (q^n - q^{k-2}) \cdots (q^n - q^0),$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

Le nombre de bases de  $E$ , égal au nombre de familles libres à  $n$  éléments de  $E$ , est égal à :

$$L_n = (q^n - q^{n-1}) (q^n - q^{n-2}) \cdots (q^n - q^0).$$

2. Soit  $\mathcal{B}_0$  une base de  $E$ . On soit que l'application qui associe à tout automorphisme  $u$  de  $E$  la famille des vecteurs images de ceux de  $\mathcal{B}_0$  par  $u$  est une bijection. Le cardinal de  $\mathcal{GL}(E)$  est donc égal au nombre de bases de  $E$ , soit :

$$(q^n - q^{n-1}) (q^n - q^{n-2}) \cdots (q^n - q^0).$$

3. L'application  $\det : \mathcal{GL}(E) \rightarrow \mathbb{F}^*$  est un morphisme de groupes surjectif puisque le déterminant de l'automorphisme ayant  $\text{diag}(1, \dots, 1, \alpha)$  comme matrice dans  $\mathcal{B}_0$  est  $\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{F}^*$ . Le cardinal de son noyau  $\mathcal{SL}(E)$  est donc :

$$\frac{(q^n - q^{n-1}) (q^n - q^{n-2}) \cdots (q^n - q^0)}{q - 1}.$$

4. L'application qui associe à toute famille libre de  $k$  vecteurs le sous-espace qu'elle engendre est évidemment une surjection de l'ensemble de ces familles libres sur l'ensemble des sous-espaces de dimension  $k$ . Le nombre d'antécédents pour cette application d'un sous-espace  $F$  de dimension  $k$  est égal au nombre de bases de  $F$ . Le nombre de sous-espaces de dimension  $k$  est donc :

$$\frac{(q^n - q^{n-1}) (q^n - q^{n-2}) \cdots (q^n - q^{n-k})}{(q^k - q^{k-1}) (q^k - q^{k-2}) \cdots (q^k - q^0)}.$$

4. Le groupe  $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est égal à  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  puisque le seul élément non nul de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est l'unité 1. Il agit naturellement sur  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  par l'action  $(A, x) \mapsto Ax$ . Le point  $(0, 0)$  étant fixe, il agit aussi sur l'ensemble  $E$  des trois éléments  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$ . Cela induit un morphisme de groupes de  $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  vers  $\mathcal{S}_3$  injectif puisqu'une application linéaire qui laisse fixe  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  est l'identité. Pour montrer qu'il est surjectif il suffit alors de montrer que son image contient les transpositions de  $E$ . On remarque alors que les transpositions  $((1, 0), (0, 1))$ ,  $((1, 0), (1, 1))$  et  $((0, 1), (1, 1))$  sont respectivement les images des matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On aurait pu remarquer, aussi, que  $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  à  $(4-1)(4-2) = 6$  éléments.

Il n'existe qu'un seul morphisme de  $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  vers  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^*$  réduit  $\{1\}$ , à savoir l'application constante de valeur 1. Puisque  $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\mathcal{S}_3$ , il existe deux morphismes de ce groupes vers  $\mathbb{C}^*$ , à savoir l'identité et le morphisme qui associe à toute matrice la signature de la permutation qu'elle induit sur  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ .

- 5 Rappelons tout d'abord que l'on a  $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,j}$  pour tous indices.

1. Dans le premier cas avec  $\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ , il vient :

$$(I_n - \beta E_{i,i}) T_{i,j} (-\lambda \beta^{-1}) (I_n - \beta E_{i,i})^{-1} = T_{i,j} (-\lambda \beta^{-1} (1 - \beta)).$$

Le produit  $(I_n - \beta E_{i,i}) T_{i,j} (\lambda \beta^{-1}) (I_n - \beta E_{i,i})^{-1} T_{i,j} (\lambda \beta^{-1})^{-1}$  est donc égal à :

$$T_{i,j} (\lambda \beta^{-1} (1 - \beta)) T_{i,j} (\lambda \beta^{-1})^{-1} = T_{i,j} (-\lambda \beta^{-1} (1 - \beta) + \lambda \beta^{-1}) = T_{i,j}(\lambda).$$

Cela entraîne :

$$\begin{aligned} \varphi(T_{i,j}(\lambda)) &= \varphi(I_n - \beta E_{i,i}) \varphi(T_{i,j}(-\lambda \beta^{-1})) \\ &\quad \varphi(I_n - \beta E_{i,i})^{-1} \varphi(T_{i,j}(-\lambda \beta^{-1}))^{-1} = 1 \end{aligned}$$

pour tous  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Lorsque  $n$  est supérieur ou égal à 3 et  $k \notin \{i, j\}$ , il vient :

$$T_{i,k}(\lambda) T_{k,j}(1) = I_n + \lambda E_{i,k} + E_{k,i} + \lambda E_{i,j}$$

et :

$$T_{i,k}(\lambda)^{-1} T_{k,j}(1)^{-1} = I_n - \lambda E_{i,k} - E_{k,i} + \lambda E_{i,j}.$$

Le produit  $T_{i,k}(\lambda)T_{k,j}(1)T_{i,k}(\lambda)^{-1}T_{k,i}(1)^{-1}$ , de développement :

$I_n - \lambda E_{i,k} - E_{k,j} + \lambda E_{i,j} + \lambda E_{i,k} - \lambda E_{i,j} + E_{k,j} + \lambda E_{k,j} + \lambda E_{i,j} + \lambda E_{i,j}$ , est égal à  $I_n + \lambda E_{i,j}$ . On a alors :

$$\varphi(T_{i,j}(\lambda)) = \varphi(T_{i,k}(\lambda))\varphi(T_{k,j}(1))\varphi(T_{i,k}(\lambda))^{-1}\varphi(T_{k,i}(1))^{-1} = 1$$

pour tous  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

2. Nous noterons  $\psi$  l'application de  $\mathbf{K}^*$  vers  $\mathbf{K}^*$  définie par :

$$\psi(\alpha) = \varphi(\text{diag}(1, \dots, 1, \alpha)).$$

Il est immédiat que  $\psi$  est un morphisme de groupes. Soit alors  $A$  une matrice de  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ . On sait qu'il existe une suite  $(T_1, \dots, T_r)$  matrices élémentaire de transvection et un scalaire  $\alpha \in \mathbf{K}^*$  tels que  $A$  soit le produit :

$$T_1 \dots T_r \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha).$$

Il vient alors  $\varphi(A) = \psi(\alpha)$ . Comme  $\alpha$  est le déterminant de  $A$ , on a  $\varphi(A) = \psi(\det A)$ .

Finalement  $\varphi$  est égal à la composée  $\psi \circ \det$ .

3. Pour toute matrice  $A$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , l'application linéaire canoniquement associée  $u_A$  est une bijection de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  qui possède, comme toute permutation, une signature. L'application  $\varphi$  qui associe à toute matrice  $A$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  la signature de la permutation  $u_A$  de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  est alors un morphisme de groupes. Elle est donc de la forme  $\psi \circ \det$  où  $\psi$  est le morphisme de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  vers  $\{-1, 1\}$  défini par  $\psi(\alpha) = \text{sign } u_{\text{diag}(1, \dots, 1, \alpha)}$  pour tout  $\alpha \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ .

On sait que le groupe  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  est cyclique. Soit  $\omega$  l'un de ses générateurs et  $u$  l'application linéaire associée à la matrice  $\text{diag}(1, \dots, 1, \omega)$ . L'application  $u^k$  transformant  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$  en  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \omega^k)$ , les orbites sous l'action du sous-groupe engendré par  $u$  sont :

$$\{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)\} \quad \text{et} \quad \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \omega^k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

pour  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n-1}$ . En utilisant la formule qui donne la signature d'une permutation en fonction de sa décomposition en cycles à supports deux à deux disjoints (voir exercice 13 page 43), on obtient :

$$\text{sign } u = (-1)^{p^{n-1}(p-2)} = -1.$$

On a donc  $\psi(\omega) = -1$  et  $\psi(\omega^k) = (-1)^k$ . Le morphisme  $\omega$  est donc le caractère quadratique  $\alpha \mapsto \left(\frac{\alpha}{p}\right)$  de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  défini dans l'exercice 18 page 79

Il vient finalement :

$$\text{sign } u_A = \left(\frac{\det A}{p}\right).$$

6. Montrons, ce qui est équivalent, que l'on a  $\text{tr } A^p = \text{tr } A$  pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .

Soient  $(A, B) \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ . Par développement dans l'algèbre  $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ , la puissance  $(A + B)^p$  s'écrit comme la somme des produits  $C_1 \cdots C_p$  où  $(C_1, \dots, C_p)$  parcourt l'ensemble des suites  $\{A, B\}^p$ . On obtient alors :

$$\text{tr } (A + B)^p = \sum_{(C_1, \dots, C_p) \in \{A, B\}^p} \text{tr } (C_1 \cdots C_p). \quad (*)$$

Les propriétés de la trace montrent que l'on a :

$$\text{tr } (C_2 \cdots C_p C_1) = \text{tr } (C_1 C_2 \cdots C_p)$$

pour tout  $(C_1, \dots, C_p) \in \{A, B\}^p$ . Ainsi, les termes  $\text{tr } (C_1 \cdots C_p)$  de la somme (\*) prennent la même valeur sur les orbites de l'ensemble  $\{A, B\}^p$  sous l'action :

$$(\sigma, (C_1, \dots, C_p)) = (C_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, C_{\sigma^{-1}(p)})$$

du sous-groupe de  $S_p$  engendré par le cycle  $(1, \dots, p)$ . Ce sous-groupe ayant  $p$  éléments, ses orbites ont 1 ou  $p$  éléments. Les orbites réduites à un point sont les orbites des suites constantes  $(A, \dots, A)$  et  $(B, \dots, B)$  ; elles correspondent aux termes  $\text{tr } A^p$  et  $\text{tr } B^p$  de (\*). Les autres orbites ont  $p$  éléments et la somme des traces correspondantes, de la forme  $p \text{tr } (C_1 \cdots C_p)$ , est nulle dans le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Il vient finalement :

$$\text{tr } (A + B)^p = \text{tr } A^p + \text{tr } B^p.$$

Considérons maintenant l'application  $\varphi$  de  $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  vers  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  définie par  $\varphi(A) = \text{tr } A^p$ . On obtient par ce qui précède :

$$\varphi(A + B) = \alpha^p \text{tr } A^p + \beta^p \text{tr } B^p = \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$$

pour tout  $(A, B) \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  et  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ . Ainsi  $\varphi$  est linéaire. Elle vérifie, de plus, la relation :

$$\varphi(AB) = \text{tr } (AB \cdots AB) = \text{tr } (BAB \cdots A) = \varphi(BA).$$

L'application  $\varphi$  est donc proportionnelle à la trace, c'est-à-dire de la forme  $\alpha \text{tr}$  pour un unique  $\alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . En évaluant cette équation sur la matrice  $E_{1,1}$ , on obtient  $\alpha = 1$ . Cela achève la démonstration.

7. 1. Si, pour tout  $x$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée, alors, dans une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , la matrice de  $u$  est  $\text{diag } (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Puisque  $e = e_1 + \dots + e_n$  est non nul, il existe  $\alpha$  tel que  $u(e) = \alpha e$ . On en déduit :

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \alpha(e_1 + \dots + e_n)$$

et, pour tout  $i$ ,  $\alpha_i = \alpha$ . Ainsi,  $u$  est l'homothétie de rapport  $\alpha$  et  $\text{tr } u = \alpha n$  non nul.

Montrons maintenant par récurrence sur la dimension de l'espace qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  est de diagonale nulle. Le résultat est évident si la dimension est égale à 1. Supposons donc le résultat acquis en dimension strictement inférieure à  $n$ .

Soit alors  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  de trace nulle. Si  $u$  est nulle, la matrice de  $u$  dans toute base est de diagonale nulle. Si  $u$  n'est pas nul, la première partie de la question fournit un vecteur  $x$  tel que  $(x, u(x))$  soit libre. Il existe donc une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que la matrice  $A$  de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & l \\ c & A' \end{pmatrix}$$

avec  $A' \in M_{n-1}(\mathbb{K})$  vérifiant  $\text{tr } A' = \text{tr } A = 0$ . Notons  $F = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$  et  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $\mathbb{K}e_1$ . La matrice  $A'$  est la matrice de l'endomorphisme  $v = p \circ u|_F$  de  $F$  dans la base  $(e_2, \dots, e_n)$ . Puisque  $\text{tr } v = \text{tr } A' = 0$ , il existe par hypothèse de récurrence une base  $(f_2, \dots, f_n)$  de  $F$  dans laquelle la matrice  $B$  de  $v$  est de diagonale nulle. La matrice  $B$  de  $u$  dans la base  $(e_1, f_2, \dots, f_n)$  est alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B' \end{pmatrix}$$

Sa diagonale est donc nulle.

2. Soit  $\mathcal{B}$  une base dans laquelle la matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  de  $u$  est de diagonale nulle. Si  $v$  et  $w$  sont des endomorphismes de  $E$  de matrices  $\text{diag}(1, 2, \dots, n)$  et  $(\beta_{i,j})$  avec :

$$\beta_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j}}{i-j} \quad \text{si } i \neq j \quad \text{et} \quad \beta_{i,i} = 0,$$

un simple calcul prouve  $u = v \circ w - w \circ v$ .

8. 1. Le déterminant de  $A$  est bien sûr un entier. Si  $B = A^{-1}$  est à coefficients entiers, le déterminant de  $B$  est aussi un entier. La relation :

$$\det A \det B = 1$$

entraîne  $\det A = \pm 1$ .

Supposons réciproquement que  $\det A = \pm 1$ . Les cofacteurs de la matrice  $A$ , égaux au signe près à des déterminants de sous-matrices de  $A$ , sont évidemment des entiers. On en déduit que la matrice  $C$  des cofacteurs est à coefficients entiers. La relation :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t C$$

montre alors que  $A^{-1}$  est à coefficients entiers

2. Si  $\det A = \pm 1$ , le développement du déterminant de  $A$  suivant la première colonne fournit une relation :

$$\alpha_{1,1}C_{1,1} + \cdots + \alpha_{n,1}C_{n,1} = \pm 1$$

où les cofacteurs  $C_{i,1}$  sont entiers. Cette relation de Bézout montre que les  $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{n,1}$  sont premiers entre eux dans leur ensemble.

3. Le résultat est évident si  $n = 1$ . Supposons le acquis en dimension strictement inférieure à  $n$ . Notons alors  $d$  le PGCD des entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Puisque les entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont premiers entre eux dans leur ensemble, les entiers  $d$  et  $\alpha_n$  sont premiers entre eux et il existe des entiers  $u$  et  $v$  tels que :

$$ud + v\alpha_n = 1.$$

Notons  $\alpha'_i = d^{-1}\alpha_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Les entiers  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}$  étant premiers entre eux dans leur ensemble, il existe une matrice de  $M_{n-1, n-2}(\mathbb{Q})$  à coefficients entiers telle que :

$$N_1 = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & & \\ & \vdots & M \\ & & \alpha'_{n-1} \end{pmatrix}$$

soit de déterminant 1. Par permutations, il est clair que la matrice :

$$N_2 = \begin{pmatrix} & \alpha'_1 & \\ M & \vdots & \\ & \alpha'_{n-1} & \end{pmatrix}$$

est de déterminant  $(-1)^{n-2}$ .

Considérons alors la matrice à coefficients entiers :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & -v\alpha'_1 \\ \vdots & M & \vdots \\ \alpha_{n-1} & & -v\alpha'_{n-1} \\ \alpha_n & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Par développement suivant la dernière ligne, il vient :

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{n+1} \alpha_n (-1) v \det N_2 + ud \det N_2 \\ &= \alpha_n v + ud \\ &= 1. \end{aligned}$$

9. 1. Il est immédiat que  $SL_n(\mathbb{Z})$  contient la matrice  $I_n$  et est stable pour le produit. En ce qui concerne l'inverse, considérons  $A \in SL_n(\mathbb{Z})$ . L'inverse de  $A$  dans  $SL_n(\mathbb{Q})$  est la matrice complémentaire  $\tilde{A}$  de  $A$  puisque  $\det A = 1$ .

Ses coefficients étant à transposition et au signe près les mineurs de  $A$ , c'est une matrice à coefficients entiers. Comme elle reste de déterminant 1, elle appartient à  $SL_n(\mathbb{Z})$ .

L'ensemble  $SL_n(\mathbb{Z})$  est donc un groupe pour le produit.

2. L'application  $\pi_p$  transforme la matrice  $(a_{i,j})$  de  $M_n(\mathbb{Z})$  en la matrice  $(\pi_p(a_{i,j}))$  de  $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ . C'est un morphisme puisque l'application qui associe à tout entier sa classe modulo  $p$  est un morphisme d'anneaux de  $\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Cette application induit un morphisme de groupes de  $SL_n(\mathbb{Z})$  vers  $SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ . Pour montrer qu'il est surjectif, il suffit de montrer que son image contient les matrices de transvection élémentaire  $I_n + \alpha E_{i,j}$  pour tout  $i \neq j$  et  $\alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  puisque  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps. Mais cela est évident ; si  $\alpha$  est la classe de  $a \in \mathbb{Z}$ , la matrice  $I_n + \alpha E_{i,j}$  est l'image par  $\pi_p$  de la matrice  $I_n + a E_{i,j}$  de  $SL_n(\mathbb{Z})$ .

10. 1. Les endomorphismes de  $E$  canoniquement associés à  $\mathcal{B}_0$  vérifient les relations  $\sum_{i=1}^n u_{i,i} = \text{Id}_E$  et  $u_{i,j} \circ u_{k,l} = \delta_{j,k} u_{i,l}$ . Leurs images  $v_{i,j} = \varphi(u_{i,j})$  vérifient évidemment les mêmes relations.

Les identités  $v_{i,i}^2 = v_{i,i}$ ,  $v_{i,i} \circ v_{j,j} = 0$  pour  $i \neq j$  et  $\sum_{i=1}^n v_{i,i} = \text{Id}_F$  montrent que la famille  $(v_{1,1}, \dots, v_{n,n})$  est la famille des projecteurs associés à une décomposition en somme directe :

$$F = F_1 \oplus \dots \oplus F_n.$$

L'image de  $v_{j,i}$  est contenue dans  $F_j$  puisque l'on a  $v_{j,j}(v_{j,i}(x)) = v_{j,i}(x)$  pour tout  $x$ . Notons alors  $v'_{j,i}$  l'application restreinte  $v_{j,i}|_{F_i}$  de  $F_i$  vers  $F_j$ . Les relations :

$$v'_{i,j} \circ v'_{j,i} = v_{i,i}|_{F_i} = \text{Id}_{F_i} \quad \text{et} \quad v'_{j,i} \circ v'_{i,j} = v_{j,j}|_{F_j} = \text{Id}_{F_j}$$

montrent que  $v'_{j,i}$  est un isomorphisme de  $F_i$  sur  $F_j$  d'inverse  $v'_{i,j}$  pour tous  $i, j$ . Ainsi, les  $F_i$  ont la même dimension  $r$ .

Soit  $\mathcal{C}_1 = (f_1, \dots, f_r)$  une base de  $F_1$ . La famille  $\mathcal{C}_i = v'_{i,1}(\mathcal{C}_1)$  est une base de  $F_i$  pour tout  $i$  (on a  $\mathcal{C}_1 = v'_{1,1}(\mathcal{C}_1)$  puisque  $v'_{1,1}$  est l'identité de  $F_1$ ). Notons alors  $\mathcal{C}$  la base adaptée à la somme directe  $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$  obtenue par réunion des  $\mathcal{C}_i$ . On obtient, en particulier,  $m = rn$ .

Soit alors  $u = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} u_{i,j} \in \mathcal{L}(E)$  de matrice  $(\alpha_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ . Le bloc d'indice  $(i, j)$  de la matrice de  $\varphi(u)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est la matrice de l'application :

$$\psi_{i,j} = v_{i,i} \circ \varphi(u)|_{F_j} : F_j \rightarrow F_i$$

de  $F_j$  vers  $F_i$  dans les bases  $\mathcal{C}_j$  et  $\mathcal{C}_i$ . On obtient :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j}(v'_{j,1}(f_a)) &= \sum_{k,l} \alpha_{k,l} (v_{i,i} \circ \varphi(u_{k,l}) \circ v_{j,1})(f_a) \\ &= \sum_{k,l} \alpha_{k,l} (v_{i,i} \circ v_{k,l} \circ v_{j,1})(f_a) \\ &= \alpha_{i,j} v'_{i,1}(f_a)\end{aligned}$$

pour tout  $a$ . Le bloc d'indice  $(i, j)$  de la matrice de  $\varphi(u)$  dans  $\mathcal{C}$  est donc la matrice scalaire  $\alpha_{i,j} I_r$ .

2. Dans ce cas,  $r = 1$ . Notons alors  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ . La matrice de  $\varphi(u)$  dans  $\mathcal{B}$  est alors égale à  $PAP^{-1}$  si  $A$  est celle de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ . Si  $p$  est l'automorphisme de  $E$  de matrice  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on a pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$  :

$$\varphi(u) = p \circ u \circ p^{-1}.$$

Il est clair que toute application de cette forme est un automorphisme de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ .

11. 1. Il est immédiat que  $D_A$  est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{K})$ . C'est une dérivation puisque l'on a :

$$\begin{aligned}D_A(MN) &= AMN - MNA \\ &= (AM - MA)N + M(AN - NA) \\ &= D_A(M)N + MD_A(N).\end{aligned}$$

Une matrice  $A$  induit une dérivation  $D_A$  nulle si, et seulement si, on a  $AM = MA$  pour tout  $M$ . On sait que cela est équivalent à ce que  $A$  soit scalaire.

2. Si  $A$  est la matrice  $(\alpha_{i,j})$ , un simple calcul montre que l'on a :

$$\begin{aligned}D_A(E_{i,j}) &= \sum_{k,l} \alpha_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} - \sum_{k,l} \alpha_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} \\ &= \sum_k \alpha_{k,i} E_{k,j} - \sum_l \alpha_{j,l} E_{i,l}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}D_A(E_{1,i}) E_{j,1} &= \left( \sum_k \alpha_{k,1} E_{k,i} - \sum_l \alpha_{i,l} E_{1,l} \right) E_{j,1} \\ &= \sum_k \alpha_{k,1} \delta_{i,j} E_{k,1} - \alpha_{i,j} E_{1,1}\end{aligned}$$

et donc :

$$\text{tr}(D(E_{1,i}) E_{j,1}) = \delta_{i,j} \alpha_{1,1} - \alpha_{i,j}.$$



Si  $D$  est une dérivation de  $M_n(K)$ , posons :

$$\alpha_{i,j} = -\operatorname{tr}(D(E_{1,i})E_{j,1})$$

pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(D(E_{i,j})E_{l,k}) &= \operatorname{tr}(D(E_{i,j})E_{l,1}E_{1,k}) \\ &= \operatorname{tr}(E_{1,k}D(E_{i,j})E_{l,1}) \\ &= \operatorname{tr}(D(E_{1,k}E_{i,j})E_{l,1}) - \operatorname{tr}(D(E_{1,k})E_{i,j}E_{l,1}) \\ &= \delta_{k,i} \operatorname{tr}(D(E_{1,j})E_{l,1}) - \delta_{j,l} \operatorname{tr}(D(E_{1,k})E_{i,1}) \\ &= \delta_{j,l} \alpha_{k,i} - \delta_{k,i} \alpha_{j,l}. \end{aligned}$$

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . La matrice  $D(E_{i,j})$  s'écrit sous la forme  $\sum_{u,v} \beta_{u,v} E_{u,v}$ .

On obtient alors  $D(E_{i,j})E_{l,k} = \sum_{u,v} \beta_{u,v} E_{u,v}E_{l,k}$  et :

$$\operatorname{tr}(D(E_{i,j})E_{l,k}) = \sum_u \beta_{u,l} \operatorname{tr} E_{u,k} = \beta_{k,l}.$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} D(E_{i,j}) &= \sum_{k,l} (\delta_{j,l} \alpha_{k,i} - \delta_{k,i} \alpha_{j,l}) E_{k,l} \\ &= \sum_k \alpha_{k,i} E_{k,j} - \sum_l \alpha_{j,l} E_{i,l}. \end{aligned}$$

Notons  $A$  la matrice  $(\alpha_{i,j})$ . Le calcul que nous avons fait au début de la question montre que l'on a :

$$\begin{aligned} D_A(E_{i,j}) &= \sum_{k,l} \alpha_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} - \sum_{k,l} \alpha_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} \\ &= \sum_k \alpha_{k,i} E_{k,j} - \sum_l \alpha_{j,l} E_{i,l} \\ &= D(E_{i,j}) \end{aligned}$$

pour tout  $(i, j)$ . Par linéarité,  $D = D_A$ .

**12.** Si  $D$  est inversible, on a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det(A - BD^{-1}C) \det D \\ &= \det(AD - BD^{-1}CD) \\ &= \det(AD - BC) \end{aligned}$$

puisque  $C$  et  $D$  commutent

Si  $D$  n'est pas inversible, la matrice  $D + XI_n$  de  $M_n(\mathbf{K}(X))$  est inversible puisque son déterminant est un polynôme de degré  $n$  (voir la notion de polynôme caractéristique du cours). On a donc :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + XI_n \end{pmatrix} = \det (A(D + XI_n) - CB) \quad (*)$$

dans  $\mathbf{K}(X)$  par ce qui précède. La relation (\*) est une relation entre polynômes. En l'évaluant en 0, on obtient l'égalité désirée.

13. On a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

et donc  $AA' + BC' = I_p$  et  $CA' + BD' = 0$ . On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ C' & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & B \\ CA' + BD' & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

et en prenant les déterminants,  $\det M \det A' = \det D$

On obtient symétriquement  $\det M^{-1} \det A = \det D'$ , d'où :

$$\det A \det A' = \det D \det D'$$

14. On suppose évidemment que  $\mathcal{V}$  contient un endomorphisme  $j$  de rang  $r$  et on choisit une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $j$  est  $J_r$ . On raisonne alors sur les matrices en notant  $V$  le sous-espace de  $M_n(\mathbf{K})$  image de  $\mathcal{V}$  par l'isomorphisme  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ . On écrira les matrices par blocs associés à la partition  $(r, n - r)$ .

La matrice  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  appartient à  $V$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$  un élément de  $V$ . Pour tout  $\lambda$  de  $\mathbf{K}$ , la matrice :

$$\lambda J_r + A = \begin{pmatrix} \lambda I_r + A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

appartient à  $V$  et est donc de rang  $r$ . Pour tout  $(i, j) \in \llbracket r + 1, n \rrbracket^2$ , le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} + \lambda & \dots & \alpha_{1,r} & \alpha_{1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r,1} & \dots & \alpha_{r,r} + \lambda & \alpha_{r,j} \\ \alpha_{i,1} & \dots & \alpha_{i,r} & \alpha_{i,j} \end{vmatrix}$$

est nul. Son développement comme expression polynomiale en  $\lambda$  étant :

$$\alpha_{i,j} \lambda^r + (\alpha_{i,1} \alpha_{1,j} + \dots + \alpha_{i,r} \alpha_{r,j}) \lambda^{r-1} + \dots,$$

cela implique

$$\alpha_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{i,1}\alpha_{1,j} + \dots + \alpha_{i,r}\alpha_{r,j} = 0$$

puisque  $\mathbf{K}$  est infini.

On a donc  $A_{2,2} = 0$  et :

$$\forall (i, j) \in \llbracket r + 1, n \rrbracket^2, \quad \alpha_{i,1}\alpha_{1,j} + \dots + \alpha_{i,r}\alpha_{r,j} = 0.$$

Notons  $l_i$  l'application qui associe à toute matrice  $A$  de  $M_n(\mathbf{K})$  le  $r$ -uplet  $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,r})$  et  $c_j$  celle qui associe à toute matrice  $A$  de  $M_n(\mathbf{K})$  le  $r$ -uplet  $(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{r,j})$  ainsi que  $L_i$  et  $C_j$  les sous-espaces  $l_i(V)$  et  $c_j(V)$  de  $\mathbf{K}^r$  respectivement. Pour la forme bilinéaire non dégénérée :

$$((\alpha_i) \mid (\beta_i)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i$$

sur  $\mathbf{K}^r$ , on a  $l_i(V) \perp c_i(V)$  (voir exercice 6 page 175) pour tout  $i \in \llbracket r + 1, n \rrbracket$ .

On a donc :

$$\dim l_i(V) + \dim c_i(V) \leq r.$$

L'application :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in V \mapsto (A_{1,1}, l_{r+1}(A), c_{r+1}(A), \dots, l_n(A), c_n(A))$$

de  $V$  dans  $M_r(\mathbf{K}) \times l_{r+1}(V) \times c_{r+1}(V) \times \dots \times l_n(V) \times c_n(V)$  est évidemment linéaire. Elle est injective puisque l'on a  $A_{2,2} = 0$  pour toute  $A$  de  $V$ . Il vient donc :

$$\dim V = r^2 + \sum_{i=r+1}^n (\dim l_i(V) + \dim c_i(V)) \leq r^2 + (n - r)r = rn.$$

## Chapitre 6

1. Pour tout  $k$ , l'application  $x_k \mapsto \psi(x_0, \dots, x_k, \dots, x_p)$  est linéaire comme combinaison des applications linéaires :

$$x_k \longmapsto \varphi(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)x_i.$$

Si on a  $x_k = x_l$  pour  $k < l$ , il vient :

$$\begin{aligned} \psi(x_0, \dots, x_p) &= (-1)^k \varphi(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_l, \dots, x_p)x_k \\ &\quad + (-1)^l \varphi(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_p)x_k \end{aligned}$$

puisque les termes  $\varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$  avec  $i \notin \{k, l\}$ , contenant deux vecteurs égaux, sont nuls. En transposant  $x_k$  avec les  $l-k-1$  vecteurs  $x_{k+1}, \dots, x_{l-1}$ , on voit que :

$$\varphi(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_p)$$

est égal à :

$$(-1)^{l-k-1} \varphi(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, \dots, x_p).$$

En tenant compte de  $x_k = x_l$ , on a finalement :

$$\begin{aligned} \psi(x_0, \dots, x_p) &= (-1)^k \varphi(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_l, \dots, x_p) x_k \\ &\quad + (-1)^l (-1)^{l-k-1} \varphi(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_l, \dots, x_p) x_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $\psi$  est  $(p+1)$ -linéaire alternée.

2. La question précédente montre que l'application  $\psi$  de  $E^{n+1}$  vers  $E$  définie par :

$$\psi(x_0, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-i)^i \det_{\mathcal{B}}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i$$

est  $(n+1)$ -linéaire alternée.

Pour tout  $(n+1)$ -uplet  $(x_0, \dots, x_{n+1})$ , la famille  $(x_0, \dots, x_n)$  est liée puisque  $E$  est de dimension  $n$  et il existe  $i$  tel que l'on puisse écrire :

$$x_i = \sum_{j, j \neq i} \alpha_j x_j.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \psi(x_0, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{j, j \neq i} \alpha_j \psi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. 1. Pour tout  $\varphi \in F^*$ , l'application  $\varphi \circ u$  est linéaire et appartient donc à  $E^*$ . La relation :

$$(\alpha\varphi + \beta\psi) \circ u = \alpha(\varphi \circ u) + \beta(\psi \circ u)$$

montre que  $\psi \circ u$  appartient à  $\mathcal{L}(F^*, E^*)$ .

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$  les bases de  $E$  et  $F$  considérées ainsi que  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  et  $\mathcal{C}^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)$  les bases duales. Si  $A = (\alpha_{i,j})$  est la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , on a :

$$\forall j, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{i,j} f_i$$

et donc  $\alpha_{i,j} = f_i^*(u(e_j))$  pour tout  $i, j$ .

On en déduit :

$$\forall (i, j), \quad \alpha_{i,j} = {}^t u(f_i^*)(e_j).$$

Par permutation des indices  $i, j$ , on obtient :

$$\forall j, \quad {}^t u(f_{ij}^*) = \sum_{i=1}^n \alpha_{j,i} e_i^*.$$

La matrice de  ${}^t u$  dans  $C^*$  et  $B^*$  est donc la transposée de  $A$ .

2. Un élément  $\varphi$  de  $F^*$  appartient au noyau de  ${}^t u$  si et seulement si :

$${}^t u(\varphi)(E) = \varphi(u(E)) = \varphi(\text{Im } \varphi) = \{0\},$$

c'est-à-dire  $\varphi \in (\text{Im } \varphi)^\perp$ . On a donc  $\text{Ker } {}^t u = (\text{Im } u)^\perp$ .

On en déduit par orthogonalité :

$$\begin{aligned} \text{rg } {}^t u &= \dim F - \dim \text{Ker } {}^t u \\ &= \dim F - \dim (\text{Im } u)^\perp \\ &= \dim (\text{Im } u) \\ &= \text{rg } u. \end{aligned}$$

Si  $\varphi$  appartient à  $\text{Im } {}^t u$ , il existe  $\psi \in F^*$  tel que  $\varphi = \psi \circ u$ . On a alors :

$$\varphi(\text{Ker } u) = \psi(u(\text{Ker } u)) = \{0\}$$

et donc  $\varphi \in (\text{Ker } u)^\perp$ . L'égalité  $\text{rg } {}^t u = \text{rg } u$  entraîne

$$\dim \text{Im } {}^t u = \dim E - \dim \text{Ker } u = \dim (\text{Ker } u)^\perp.$$

On a donc  $\text{Im } {}^t u = (\text{Ker } u)^\perp$ .

3. Le déterminant de la matrice  $A$  des coefficients calculé par développement suivant la première colonne est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}.$$

- Supposons  $n$  impair. Le système est alors un système de Cramer. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il vient :

$$\sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k y_k = \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k (x_k + x_{k+1}) = -x_1 + (-1)^{i-1} x_i$$

et :

$$x_i = (-1)^{i-1} x_1 + \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k+1} y_k$$

On en déduit :

$$y_n = x_1 + (-1)^{n-1}x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+k+1}y_k$$

et en tenant compte de l'imparité de  $n$  :

$$x_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^k y_k.$$

Il vient finalement :

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} y_k - \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} y_k \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} y_k + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^n (-1)^{i+k} y_k. \end{aligned}$$

- Supposons  $n$  pair. La matrice  $A$  des coefficients dont les  $n-1$  premières colonnes sont indépendantes, est de rang  $n-1$ .

Choisissons alors la sous-matrice formée des  $n-1$  premières lignes et  $n-1$  premières colonnes comme matrice principale. La matrice complète associée, obtenue en remplaçant la dernière colonne de  $A$  par la colonne des seconds membres, est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & y_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & y_{n-1} \\ 1 & & 0 & y_n \end{pmatrix}.$$

L'opération  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + \dots + (-1)^{n-1}L_n$  montre que son déterminant est égal à :

$$d = y_1 - y_2 + \dots + (-1)^{n-1}y_n$$

(on utilise la parité de  $n$ ).

- Si  $d$  n'est pas nul, le système (\*) n'a pas de solution.
- Si  $d$  est nul l'ensemble des solutions de (\*) est un sous-espace affine de dimension 1 de  $\mathbb{C}^n$  donné, en fonction du paramètre  $x$ , par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = (-1)^{i-1}x - \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} y_k.$$

4. Il s'agit de résoudre le système :

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{i+j-1} = y_i.$$

Soit alors la fraction rationnelle :

$$R(X) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{X+j-1} = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

avec  $Q(X) = \prod_{j=1}^n (X+j-1)$ . Pour tout  $i$ , on a  $P(i) = y_i Q(i)$  avec :

$$Q(i) = (i+0) \cdots (i+n-1) = \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!}.$$

Puisque  $P$  est de degré inférieur à  $n-1$ , on peut l'écrire en fonction des polynômes de Lagrange sous la forme :

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(i) \frac{(X-1) \cdots \widehat{(X-i)} \cdots (X-n)}{(i-1) \cdots \widehat{(i-i)} \cdots (i-n)}$$

où, comme il est usuel, les termes chapeautés sont omis. Il vient finalement :

$$P(X) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} y_i \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!(i-1)!(n-i)!} (X-1) \cdots \widehat{(X-i)} \cdots (X-n).$$

Comme résidus de la décomposition de  $R$  en somme d'éléments simples, les  $x_j$  sont donnés par  $x_j = \frac{P(1-j)}{Q'(1-j)}$ . On a  $Q'(1-j) = (j-1)!(n-j)!$  et :

$$P(1-j) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} y_i \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!(i-1)!(n-i)!} \frac{(-1)^{n-1} (n+j-1)!}{(i+j-1)(j-1)!}.$$

On obtient finalement :

$$x_j = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \frac{1}{(i+j-1)} \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!(i-1)!(n-i)!} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!(j-1)!(n-j)!} y_i.$$

L'unicité de la solution  $(x_j)$  montre que  $H$  est inversible et que son inverse est  $H^{-1} = (\beta_{i,j})$  avec :

$$\beta_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{1}{(i+j-1)} \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!(i-1)!(n-i)!} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!(j-1)!(n-j)!}.$$

On écrit alors  $\beta_{i,j}$  sous la forme :

$$(-1)^{i+j} \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} \frac{(n+i-1)!}{(i+j-1)!(n-j)!} \frac{(n+j-i-1)!}{(j-1)!(n-i)!} \frac{(n+j-1)!}{(n+j-i-1)!(i-1)!},$$

soit :

$$(-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{i-1} C_{n+i-1}^{n-j} C_{n+j-i-1}^{j-1} C_{n+j-2}^{i-1} (n+j-1).$$

Ainsi,  $\beta_{i,j}$  est un entier.

5. Considérons l'endomorphisme  $u : N \mapsto AN - NA$  de  $M_n(\mathbf{K})$ . Le noyau  $\mathcal{N}$  de  $u$  est constitué des matrices  $P$  vérifiant  $AP = PA$  et l'image  $\mathcal{I}$  de  $u$  des matrices qui peuvent s'écrire sous la forme  $AN - NA$  avec  $N \in M_n(\mathbf{K})$ . Notons  $r$  la dimension de  $\mathcal{I}$ .

Pour toute matrice  $M$ , notons  $\varphi_M$  la forme linéaire  $P \mapsto \text{tr} MP$  sur  $M_n(\mathbf{K})$ . Nous avons vu dans le cours que l'application  $\Phi : M \mapsto \varphi_M$  est un isomorphisme de  $M_n(\mathbf{K})$  sur  $M_n(\mathbf{K})^*$ .

Si  $M$  s'écrit sous la forme  $AN - NA$ , alors, pour tout  $P$  de  $\mathcal{N}$ , on a :

$$\text{tr} MP = \text{tr} (AN - NA)P = \text{tr} ANP - \text{tr} NPA = 0$$

puisque  $\text{tr} A(NP) = \text{tr} (NP)A$ . Ainsi,  $\Phi(M)$  appartient à l'espace orthogonal  $\mathcal{N}^\perp$  de  $\mathcal{N}$ . On a donc  $\Phi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{N}^\perp$ . Puisque  $\Phi$  est un isomorphisme, la dimension de  $\Phi(\mathcal{I})$  est égale à  $r$ . Par orthogonalité, on a :

$$\dim \mathcal{N}^\perp = n^2 - \dim \mathcal{N} = \dim \mathcal{I}$$

On a donc  $\Phi(\mathcal{I}) = \mathcal{N}^\perp$ . Ainsi,  $M$  appartient à  $\mathcal{I}$  si, et seulement si la relation (\*) est vérifiée.

6. Soit  $X$  une indéterminée. Le déterminant de Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^0 & \dots & a_j^0 & \dots & a_n^0 & X^0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{i-1} & \dots & a_j^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} & X^{i-1} \\ a_1^i & \dots & a_j^i & \dots & a_n^i & X^i \\ a_1^{i+1} & \dots & a_j^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} & X^{i+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_j^n & \dots & a_n^n & X^n \end{vmatrix}$$

est égal au polynôme :

$$P(X) = \mathcal{V}(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n (X - a_i)$$

avec  $\mathcal{V}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i < j} (a_j - a_i)$ .



Le coefficient de  $X^i$  dans  $P$  est

$$(-1)^{n-i} \sigma_{n-i}(a_1, \dots, a_n) \mathcal{V}(a_1, \dots, a_n)$$

$\sigma_{n-i}(a_1, \dots, a_n)$  est la  $n - i^{\text{ième}}$  fonction symétrique élémentaire sur  $(a_1, \dots, a_n)$ . par développement suivant la dernière colonne de  $\Delta$ , il vient :

$$(-1)^{n-i} \sigma_{n-i}(a_1, \dots, a_n) \mathcal{V}(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n+i} \Delta_i.$$

On obtient finalement  $\Delta_i = \sigma_{n-i}(a_1, \dots, a_n) \mathcal{V}(a_1, \dots, a_n)$ .

7. Remarquons tout d’abord que les applications  $l_i, c_j, d$  et  $a$  sont des formes linéaires sur  $M_n(\mathbb{C})$

1. Le sous-ensemble  $\mathcal{N}_0$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  puisqu’il est défini par des équations linéaires. La relation évidente :

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

montre que  $\mathcal{N}_0$  peut être défini par les  $2n - 1$  formes linéaires  $(l_i)_{i \in [1, n]}$  et  $(c_j)_{j \in [1, n-1]}$ . La dimension de  $\mathcal{N}_0$  est donc supérieure ou égale à :

$$n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2.$$

Considérons maintenant l’application :

$$P : (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in [1, n]^2} \longmapsto (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in [1, n-1]^2}$$

de  $\mathcal{N}_0$  vers  $M_n(\mathbb{C})$ . Il est évident que  $P$  est linéaire. Si  $A = (\alpha_{i,j})$  appartient à  $\mathcal{N}_0$ , on a  $\alpha_{i,j}$  pour tout  $(i, j) \in [1, n - 1]^2$  par définition. On a alors  $\alpha_{i,n} = l_i(A) = 0$  et  $\alpha_{n,j} = c_j(A)$  pour tout  $(i, j) \in [1, n - 1]^2$ . La relation  $c_n(A) = 0$  montre alors que l’on a  $\alpha_{n,n} = 0$  et  $A = 0$ . Ainsi,  $P$  est injective et  $\dim \mathcal{N}_0 \leq (n - 1)^2$ .

On en déduit  $\dim \mathcal{N}_0 = (n - 1)^2$ .

2. Le sous-ensemble  $\mathcal{N}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{C})$  puisqu’il est défini par les équations linéaires  $l_i - c_j$  pour tout  $(i, j)$ .

Par définition  $\mathcal{N}_0$  est le noyau de la forme linéaire  $\varphi$  de  $\mathcal{N}^*$  restriction de  $l_1$  à  $\mathcal{N}$ . Considérons alors la matrice  $J$  dont tous les éléments sont égaux à 1.

La matrice  $\frac{1}{n} J$  appartient bien sûr à  $\mathcal{N}$  et vérifie  $l_1 \left( \frac{1}{n} J \right) = 1$ . On a donc :

$$\mathcal{N} = \mathbb{C} \left( \frac{1}{n} J \right) \oplus \mathcal{N}_0$$

et donc  $\dim \mathcal{N} = (n - 1)^2 + 1$ .

3. Notons  $\psi$  et  $\chi$  les formes linéaires de  $\mathcal{N}_0^*$  restriction de  $d$  et  $a$  à  $\mathcal{N}_0$ .

Soient  $K = (\kappa_{i,j})$  la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf :

$$\kappa_{1,1} = 1, \quad \kappa_{1,n} = -1, \quad \kappa_{n,1} = -1 \quad \text{et} \quad \kappa_{n,n} = 1$$

et  $L = nI_n - J$ . On a évidemment  $K \in \mathcal{N}_0$  et  $L \in \mathcal{N}_0$ . On obtient par calcul  $d(K) = 2$  et  $a(K) = -2$  ainsi que  $d(L) = n^2 - n$  et

$$a(L) = \begin{cases} -n & n \text{ pair} \\ -2 & n \text{ impair} \end{cases}$$

Puisque  $n$  est supérieur ou égal à 2, les formes linéaires  $\psi$  et  $\chi$  ne sont pas proportionnelles.

L'ensemble  $\mathcal{M}_0$ , intersection des noyaux de  $\psi$  et  $\chi$  est donc un sous-espace de  $M_n(\mathbb{C})$  de dimension  $(n-1)^2 - 2$ .

4. On montre comme dans la question 2 que l'on a la somme directe :

$$\mathcal{M} = \mathbb{C} \left( \frac{1}{n} J \right) \oplus \mathcal{M}_0.$$

On en déduit  $\dim \mathcal{M} = (n-1)^2 - 1$ .

## Chapitre 7

1. La majoration évidente :

$$e^{-|k|} P(k) Q(-k) = O(|k|^{-2})$$

montre que la famille  $(e^{-|k|} P(k) Q(-k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est sommable et  $\varphi$  bien définie.

Il est alors évident que  $\varphi$  est bilinéaire et symétrique. Notons  $\mathcal{P}_n$  et  $\mathcal{I}_n$  les sous-espaces des polynômes respectivement pairs et impairs de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Si  $P$  appartient à  $\mathcal{P}_n$ , la quantité :

$$\varphi(P, P) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|k|} P(k)^2$$

est positive. Elle n'est nulle que si l'on a  $\forall k, P(k) = 0$ , c'est-à-dire  $P = 0$ . La restriction de  $\varphi$  à  $\mathcal{P}_n$  est donc définie positive. De la même façon, la restriction de  $\varphi$  à  $\mathcal{I}_n$  est définie négative. De plus, si  $P$  appartient à  $\mathcal{P}_n$  et  $Q$  à  $\mathcal{I}_n$ , on a :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|k|} P(k) Q(k)$$

puisque  $PQ$  est impair.

On a bien sûr  $\mathbb{R}_n[X] = \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{I}_n$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  obtenue comme réunion d'une base  $\mathcal{B}_p$  de  $\mathcal{P}_n$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_p} \varphi = I_p$  et d'une base  $\mathcal{B}_i$  de  $\mathcal{I}_n$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_i} \varphi = -I_i$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_i \end{pmatrix}.$$

La signature de  $\varphi$  est donc  $(p, i)$  avec  $p = \dim \mathcal{P}_n$  et  $i = \dim \mathcal{I}_n$ . Elle vaut  $(k + 1, k - 1)$  si  $n = 2k$  et  $(k + 1, k)$  si  $n = 2k + 1$ .

**2** Pour tout  $X = (x_i)$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$\begin{aligned} {}^tXHX &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{i+j-1} x_i x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i,j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Ainsi,  ${}^tXHX$  est positif ou nul. Si  ${}^tXHX = 0$ , la fonction polynomiale réelle :

$$t \in [0, 1] \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$$

est nulle puisque l'intégrale de son carré sur  $[0, 1]$  est nulle. On en déduit  $X = (x_i) = 0$ .

**3.** Si  $X = (x_i)$ , on a par définition :

$$q(X) = \sum_{i,j=1}^n \min(i, j) x_i x_j$$

On obtient :

$$\begin{aligned} q(X) &= x_1^2 + 2x_1(x_2 + \dots + x_n) + \sum_{i,j=2}^n \min(i, j) x_i x_j \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - \sum_{i,j=2}^n x_i x_j + \sum_{i,j=2}^n \min(i, j) x_i x_j \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + \sum_{i,j=2}^n \min(i-1, j-1) x_i x_j \end{aligned}$$

Par itération, il vient :

$$q(X) = \sum_{i=1}^n (x_i + \cdots + x_n)^2.$$

Les formes linéaires  $(x_i) \mapsto x_i + \cdots + x_n$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  étant indépendantes,  $q$  est de signature  $(n, 0)$  et donc définie positive.

- 4 On vérifie immédiatement que  $\varphi$  est une forme bilinéaire. La relation classique :

$$\text{tr } BA = \text{tr } AB$$

montre qu'elle est symétrique.

Pour toute matrice  $A = (\alpha_{i,j})$ , la quantité :

$$\text{tr } {}^t AA = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ({}^t A[i, j]) A[j, i] = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j}^2$$

est positive. De plus, elle n'est nulle que pour  $A = 0$ .

Si  $A$  est symétrique,  $\varphi(A, A) = \text{tr } {}^t AA$  est positif et n'est nul que pour  $A = 0$ . La restriction de  $\varphi$  au sous-espace  $S_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques est donc définie positive. Si  $A$  est antisymétrique,  $\varphi(A, A) = -\text{tr } {}^t AA$  est négatif et n'est nul que pour  $A = 0$ . La restriction de  $\varphi$  au sous-espace  $A_n(\mathbb{R})$  des matrices antisymétriques est donc définie négative. Si  $A$  est une matrice symétrique et  $B$  antisymétriques, la relation :

$${}^t (AB) = {}^t B {}^t A = -BA$$

entraîne :

$$\varphi(A, B) = \text{tr } {}^t (AB) = -\text{tr } AB = \varphi(A, B) = 0.$$

On a bien sûr  $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $M_n(\mathbb{R})$  obtenue comme réunion d'une base  $\mathcal{S}$  de  $S_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{S}} \varphi = I_s$  et d'une base  $\mathcal{A}$  de  $A_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{A}} \varphi = -I_a$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_a \end{pmatrix}.$$

La signature de  $\varphi$  est donc :

$$\left( \frac{1}{2}n(n+1), \frac{1}{2}n(n-1) \right).$$

5. Soit  $\varphi$  la forme bilinéaire symétrique de matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $\varphi$  est positive, le déterminant  $\Delta_I$  est positif comme discriminant de la restriction de  $\varphi$  à  $\text{Vect}(e_i)_{i \in I}$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$ .

Pour prouver la réciproque, calculons tout d'abord le déterminant  $\det(\beta I_n + A)$  pour tout scalaire  $\beta$ .

Notons  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et  $(A_1, \dots, A_n)$  les colonnes de  $A$ . Par développement multilinéaire, on a :

$$\begin{aligned} \det(\alpha I_n + A) &= \det(\alpha E_1 + A_1, \dots, \alpha E_n + A_n) \\ &= \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} \alpha^{n-k} \det(C_1^I, \dots, C_n^I) \end{aligned}$$

où la colonne  $C_i^I$  est  $A_i$  lorsque  $i \in I$  et  $E_i$  lorsque  $i \notin I$ . Si  $I$  est la partie à  $k$  éléments  $\{i_1, \dots, i_k\}$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on transforme  $\det(C_1^I, \dots, C_n^I)$  en permutant ses colonnes puis ses lignes suivant une bijection vérifiant :

$$\forall l \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \sigma(i_l) = l.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \det(C_1^I, \dots, C_n^I) &= \begin{vmatrix} \alpha_{i_1, i_1} & \dots & \alpha_{i_1, i_k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_k, i_1} & \dots & \alpha_{i_k, i_k} & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \det(\alpha_{i,j})_{(i,j) \in I^2} \end{aligned}$$

et :

$$\det(\alpha I_n + A) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \alpha^{n - \text{Card } I} \det(\alpha_{i,j})_{(i,j) \in I^2}$$

Supposons maintenant que tous les mineurs diagonaux de  $A$  soient positifs. La formule précédente montre immédiatement que, pour tout  $\alpha > 0$ , le déterminants et, pour la même raison, tous les mineurs diagonaux de  $A + \alpha I_n$  sont strictement positifs. Par un théorème du cours, la matrice  $\alpha I_n + A$  est donc définie positive. Si  $\psi$  désigne la forme bilinéaire symétrique vérifiant  $\text{Mat}_B \psi = I_n$ , on a donc, pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) + \alpha\psi(x, x) \geq 0$$

On voit alors que  $\varphi$  est positive en faisant tendre  $\alpha$  vers 0.

Le résultat précédent est faux si l'on suppose seulement que les mineurs principaux sont positifs ou nuls ; par exemple, les mineurs principaux de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont  $\Delta_1 = |0| = 0$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$  et  $\Delta_3 = \det A = 0$ .

La forme quadratique  $q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_3 + x_1x_2)$  associée à  $A$  prend une valeur strictement négative pour  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, -2)$ .

6. 1. La bilinéarité de  $\varphi$  montre immédiatement que, pour tout  $x$ , l'application  $\Phi(x)$  est linéaire et, ensuite, que  $\Phi$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E^*$ .

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $A = (\alpha_{i,j})$  la matrice de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ . Pour tout  $j$ , l'application  $\Phi(e_j)$  est la forme linéaire :

$$x = \sum x_i e_i \mapsto \varphi(x, e_j) = \sum_i \alpha_{i,j} x_i.$$

On a ainsi  $\Phi(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} e_i^*$  et la matrice de  $\Phi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}^*$  de  $E$  et  $E^*$  est  $A$ . Puisque  $A$  est inversible,  $\Phi$  est un isomorphisme.

2. Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $F$ , les  $p$  formes linéaires de  $\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_p)$  sont indépendantes. L'ensemble :

$$\{x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \Phi(e_i)(x) = 0\} = F^\perp$$

est un sous-espace vectoriel de codimension  $p$  dans  $E$ .

Pour tout  $x \in E$ , on a  $\forall y \in F^\perp, \varphi(x, y) = 0$ . On a ainsi,  $F \subset (F^\perp)^\perp$  et  $F = (F^\perp)^\perp$  parce que ces espaces sont de dimension  $p$ .

3. Soit  $\varphi$  la forme bilinéaire symétrique de matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Le  $\varphi$ -orthogonal du sous-espace  $F = \mathbb{R}v$  avec  $v = (1, 1)$  est le sous-espace formé des vecteurs  $x = (x_1, x_2)$  vérifiant :

$$\varphi(x, v) = x_1 - x_2 = 0.$$

Ainsi,  $F^\perp$  est égal à  $F$  et,  $(F, F^\perp)$  n'est pas en somme directe.

4. Supposons  $(F, F^\perp)$  en somme directe. Dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  adaptée à la décomposition  $F \oplus F^\perp = E$ , la matrice de  $\varphi$  est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

où  $A'$  est la matrice de la restriction  $\varphi|_{F \times F}$  dans  $(e_1, \dots, e_p)$ . Puisque  $A$  est inversible,  $A'$  est aussi inversible et  $\varphi|_{F \times F}$  est non dégénérée.

Supposons  $\varphi|_{F \times F}$  non dégénérée. Un élément  $x \in F$  appartient à  $F \cap F^\perp$  s'il vérifie  $\forall f \in F, \varphi(x, f) = 0$ . Un tel élément appartient donc à l'orthogonal  $F^\perp$  de  $F$  pour  $\varphi|_{F \times F}$ . Cette forme étant non dégénérée,  $F^\perp$  est de dimension  $p - p, F^\perp$  réduit à  $\{0\}$  et  $x = 0$ . Ainsi,  $(F, F^\perp)$  est en somme directe et la somme  $F \oplus F^\perp$  est égale à  $E$  pour des raisons de dimension.

5. Il existe une base de  $F$  dans laquelle la matrice de la restriction de  $\varphi$  est diagonale  $D'$  avec  $n'$  éléments 1 et  $m'$  éléments  $-1$  (il n'y a pas de 0 puisque cette restriction est non dégénérée par la question précédente). Il existe une base de  $F^\perp$  dans laquelle la matrice de la restriction de  $\varphi$  est diagonale  $D''$  avec  $n''$  éléments 1 et  $m''$  éléments  $-1$ . Dans la base réunion, la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & D'' \end{pmatrix}$$

de  $\varphi$  possède  $n' + n''$  éléments 1 et  $m' + m''$  éléments  $-1$ .

7. 1. L'application  $x \mapsto x^2$  de  $\mathbb{F}_p^*$  dans lui-même est un morphisme de groupes multiplicatifs de noyau  $\{-1, 1\}$  ( $1 \neq -1$  car  $p$  impair). Il y a donc  $\frac{1}{2}(p - 1)$  carrés non nuls et  $\frac{1}{2}(p + 1)$  carrés dans  $\mathbb{F}_p$ .

Puisque  $\alpha$  est non nul, l'application  $u \mapsto \alpha u$  est bijective de  $\mathbb{F}_p$  dans lui-même et il y a donc  $\frac{1}{2}(p + 1)$  éléments de la forme  $\alpha x^2$  dans  $\mathbb{F}_p$ . De la même façon, il y a  $\frac{1}{2}(p + 1)$  éléments de la forme  $\beta - y^2$  dans  $\mathbb{F}_p$ . Puisque :

$$\frac{1}{2}(p + 1) + \frac{1}{2}(p + 1) > p,$$

il existe  $(x, y)$  tel que  $\alpha x^2 = \beta - y^2$ .

2. Par ce qui précède, il existe un couple  $(x, y)$  tel que  $\beta \alpha x^2 + y^2 = \beta$ . En en déduit :

$$\alpha x^2 + \beta(\beta^{-1}y)^2 = 1.$$

3. On sait, d'après le cours, qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et des  $\alpha_i$  dans  $\mathbb{F}_p^*$  tels que :

$$\varphi\left(\sum_i x_i e_i, \sum_i x_i e_i\right) = \sum_i \alpha_i x_i^2.$$

Les  $\alpha_i$  sont non nuls puisque  $\varphi$  est non dégénérée. D'après la question précédente, il existe  $(x_1, x_2)$  tel que  $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 1$ . Si  $e_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2$ , on a  $\varphi(e_1, e_1) = 1$ .

4. Le résultat est évident si  $n = 1$ . On raisonne alors par récurrence sur  $n$  en supposant le résultat acquis pour des dimension strictement inférieures. Soit alors  $e_1$  tel que  $\varphi(e_1, e_1) = 1$ . L'ensemble :

$$F = \{x \in E \mid \varphi(e_1, x) = 0\}$$

est un sous-espace de  $E$  de dimension supérieur ou égal à  $n - 1$ . Tout élément  $x$  de  $\mathbb{F}_p e_1 \cap F$  vérifie  $x = \alpha e_1$  et  $\varphi(x, e_1) = 0$ . Cela entraîne  $\alpha = \varphi(e_1, x) = 0$ . Le couple  $(\mathbb{F}_p e_1, F)$  est donc en somme directe et :

$$E = \mathbb{F}_p e_1 \oplus F$$

pour des raisons de dimension.

Si  $C'$  est la matrice de la restriction de  $\varphi$  dans une base  $C'$  de  $F$ , la matrice de  $\varphi$  dans la base réunion de  $(e_1)$  et  $C'$  est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\det C \neq 0$ , le déterminant de  $C'$  est non nul et la restriction de  $\varphi$  à  $F$  est non dégénérée. Par hypothèse de récurrence, il existe une base  $B'$  de  $F$  dans laquelle la matrice de la restriction de  $\varphi$  est  $\text{diag}(1, \dots, 1, \alpha)$  avec  $\alpha$  non nul. Dans la base de  $E$  réunion de  $(e_1)$  et  $B'$  la matrice de  $\varphi$  est :

$$\text{diag}(1, \dots, 1, \alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{F}_p^*.$$

8. S'il existe une base  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions énoncées on a

$$\text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) = {}^t T A T.$$

En notant avec un indice  $i$  les blocs formés des  $i$  premières lignes et colonnes on a alors :

$$\begin{pmatrix} \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_i) & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} T_i & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

soit

$$\text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_i) = {}^t T_i A_i T_i.$$

Il s'en suit  $\Delta_i = \beta_1 \cdots \beta_i$ .

On montre la réciproque, évidente si  $n = 1$ , par récurrence en supposant le résultat acquis en dimension  $n - 1$ .



Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Par hypothèse de récurrence appliquée à la restriction  $\varphi'$  de  $\varphi$  à  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$  muni de  $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1})$ , il existe une base  $\mathcal{C}' = (f_1, \dots, f_{n-1})$  dont la matrice  $T'$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure à éléments diagonaux égaux à 1 et telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}'} \varphi'$  soit de la forme :

$$\text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \quad \text{avec} \quad \beta_i \in \mathbf{K}^*$$

et  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\Delta_i = \beta_1 \cdots \beta_i$ . Dans la base  $(f_1, \dots, f_{n-1}, e_n)$ , la matrice de  $\varphi$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & 0 & \gamma_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

Posons alors  $f_n = -\sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i \beta_i^{-1}) f_i + e_n$ . La famille  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  est alors une base dont la matrice  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure à éléments diagonaux égaux à 1 et telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}} \varphi$  soit de la forme :

$$\text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n).$$

La relation  $\text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n) = {}^t T A T$  montre que l'on a  $\Delta_n = \beta_1 \cdots \beta_n$  et  $\beta_n \neq 0$ .

9. 1. Si  $\varphi$  est alternée, pour tout  $(x, y)$ , on a :

$$\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) = 0$$

et donc,  $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$ .

Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , il vient

$$\forall i, \quad \varphi(e_i, e_i) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad \varphi(e_j, e_i) = -\varphi(e_i, e_j).$$

La matrice  $A = (\varphi(e_i, e_j))$  est donc antisymétrique.

Si la matrice  $A = (\varphi(e_i, e_j))$  de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$  est antisymétrique, on a, pour  $x$  et  $y$  de  $E$  de vecteurs colonnes  $X = (x_i)$  et  $Y = (y_i)$  dans  $\mathcal{B}$  :

$$\varphi(x, y) = {}^t X A Y.$$

On en déduit :

$$\varphi(y, x) = {}^t Y A X = {}^t ({}^t Y A X) = -{}^t X A Y = -\varphi(x, y)$$

puisque  ${}^t A = -A$ .

2. Puisque  $\varphi$  est non nulle, il existe  $(x, y)$  tel que  $\varphi(x, y) = \alpha$  soit non nul. Si  $e_1 = \alpha^{-1} x$  et  $e_2 = y$ , il vient  $\varphi(e_1, e_2) = 1$ . Le couple  $(e_1, e_2)$  est libre, puisque  $e_2 = \lambda e_1$  ou  $e_1 = \lambda e_2$  entraîne  $\varphi(e_1, e_2) = 0$ .

Le sous-espace  $F$  noyau de l'application linéaire :

$$x \in E \mapsto (\varphi(e_1, x), \varphi(e_2, x)) \in \mathbf{K}^2$$

est de dimension supérieure ou égale à 2 par le théorème du rang. Considérons maintenant  $\alpha e_1 \in \mathbf{K}e_1$ ,  $\beta e_2 \in \mathbf{K}e_2$  et  $f \in F$  tels que :

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + f = 0.$$

On en déduit

$$0 = \varphi(e_2, \alpha e_1 + \beta e_2 + f) = \alpha \varphi(e_2, e_1) = -\alpha$$

soit  $\alpha = 0$  et, en considérant  $\varphi(e_1, \alpha e_1 + \beta e_2 + f)$ ,  $\beta = 0$ . Finalement  $\alpha e_1$ ,  $\beta e_2$  et  $f$  sont nuls. On en déduit que  $(\mathbf{K}e_1, \mathbf{K}e_2, F)$  est en somme directe et :

$$E = \mathbf{K}e_1 \oplus \mathbf{K}e_2 \oplus F$$

pour des raisons de dimension.

3. On raisonne par récurrence sur la dimension. Le résultat est trivial en dimension nulle. On le suppose acquis en dimension strictement inférieure à  $n$ .

Si  $\varphi$  est nulle, il existe une base dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est  $H_{n,0}$ . Sinon, la question précédente fournit  $(e_1, e_2)$  tels que  $\varphi(e_1, e_2) = 1$  et  $F = \{x \mid \varphi(e_1, x) = 0 \text{ et } \varphi(e_2, x) = 0\}$  tels que :

$$E = \mathbf{K}e_1 \oplus \mathbf{K}e_2 \oplus F.$$

La restriction de  $\varphi$  à  $F^2$  est évidemment alternée. Il existe donc une base  $(e_3, \dots, e_n)$  de  $F$  dans laquelle la matrice de cette restriction est  $H_{n-2,s}$ . Puisque la matrice de la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbf{K}e_1 \oplus \mathbf{K}e_2$  dans la base  $(e_1, e_2)$  est  $H$  et puisque l'on a  $\forall i \geq 3$ ,  $\varphi(e_1, e_i) = \varphi(e_2, e_i) = 0$ , la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est :

$$\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H_{n-2,s} \end{pmatrix} = H_{n,s+1}.$$

4. Si  $A$  est une matrice antisymétrique réelle, l'application :

$$\varphi(X, Y) = {}^t XAY$$

est une forme bilinéaire alternée sur  $\mathbb{R}^n$  et la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est  $A$ . La question précédente fournit alors une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est  $H_{n,r}$ . On en déduit :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi = {}^t P (\text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi) P = {}^t P H_{n,r} P$$

où  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$ . Comme  $\det H_{n,r}$  vaut 0 si  $2r < n$  et 1 si  $2r = n$ , on obtient :

$$\det A = 0 \quad \text{ou} \quad \det A = (\det P)^2.$$

## Chapitre 8

1. 1. Par l'opération élémentaire  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ , il vient :

$$C_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -2 & -2 & X+3 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -2 & X+3 \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne aux deux autres, il vient :

$$C_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)^2.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont 1 de multiplicité 1 et  $-1$  de multiplicité 2.

On détermine le sous-espace propre  $E_1$  en résolvant le système :

$$\begin{cases} 0x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 0y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à  $x = y = z$ . On a donc  $E_1 = \mathbb{R}f_1$  avec

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On détermine le sous-espace propre  $E_{-1}$  en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à  $2x + 2y - 2z = 0$ . On obtient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

il vient ainsi  $E_{-1} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathbb{R}f_3$  avec  $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Puisque  $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3$ , la matrice  $A$  est diagonalisable et  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de diagonalisation. Il vient alors :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $A$  est diagonalisable de spectre  $\{-1, 1\}$ , le polynôme minimal de  $A$  est  $M_A(X) = (X - 1)(X + 1)$ .

2. On obtient  $C_B(X) = (X + 1)^3$  On détermine  $E_{-1}$  en résolvant :

$$\begin{cases} 4x + 0y + 8z & = & 0 \\ 3x + 0y + 6z & = & 0 \\ -2x + 0y - 4z & = & 0 \end{cases}$$

soit  $x + 2z = 0$ . Puisque  $\dim E_{-1} = 2$ , la matrice  $B$  n'est pas diagonalisable Posons alors  $C = B + I_3$ . On a  $C \neq 0$  et  $C^2 = 0$ . Le polynôme minimal de  $B$  est donc  $M_B(X) = (X + 1)^2$ .

Le vecteur  $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  n'appartient pas à  $E_{-1}$ . Son image par l'endomorphisme  $u_C$  associé à  $C$  est  $f_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$  qui appartient à  $E_{-1}$ . Le vecteur

$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  appartient aussi à  $E_{-1}$  et  $(f_1, f_2)$  est une base de  $E_{-1}$ .

La famille  $C = (f_1, f_2, f_3)$  est alors une base dans laquelle l'endomorphisme  $u_B$  associé à  $B$  est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Un vecteur  $X = (x_i)$  est un vecteur propre de  $A$  associé au scalaire  $\lambda$  s'il est non nul et vérifie le système :

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 & = & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + x_n & = & 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n & = & 0 \end{cases}$$

Si l'on pose  $x_0 = 0$  et  $x_{n+1} = 0$ , la suite  $(x_k)_{k \in [0, n+1]}$  est le début d'une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$\forall k, \quad x_{k-2} - \lambda x_{k-1} + x_k = 0.$$

Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est  $X^2 - \lambda X + 1$  Supposons alors que  $\lambda$  soit de la forme  $2 \cos \theta$  avec  $\theta$  réel. Les racines de  $X^2 - \lambda X + 1$  étant  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$ , il existe des scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}.$$

La relation  $x_0 = 0$  entraîne  $\alpha + \beta = 0$  et :

$$x_k = \gamma \sin k\theta.$$

La relation  $x_{n+1} = 0$ , équivalente à  $\gamma \sin k\theta = 0$ , est vérifiée si  $\theta$  est de la forme  $\frac{l\pi}{n+1}$ .

On déduit de tout cela que, pour tout  $l$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , le vecteur :

$$X_l = \left( \sin \frac{kl\pi}{n+1} \right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_l = 2 \cos \frac{l\pi}{n+1}$ .

Les réels  $\lambda_l$  pour  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$  étant deux à deux distincts, la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  de spectre  $\left\{ 2 \cos \frac{l\pi}{n+1} \right\}_{l \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et la famille  $(X_l)_{l \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  en est une base de diagonalisation.

En fait, la matrice  $A$  est symétrique et le théorème spectral (voir le chapitre « endomorphismes des espaces euclidiens ou hermitiens ») prouve *a priori* qu'elle est diagonalisable et que la base  $(X_l)_{l \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  dont les vecteurs sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est orthogonale. Nous allons redémontrer cette propriété.

Notons  $\varphi = \frac{\pi}{n+1}$ . Pour tous  $l$  et  $l'$ , il vient :

$$\begin{aligned} (X_l | X_{l'}) &= \sum_{k=1}^n \sin kl\varphi \sin kl'\varphi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos(l-l')k\varphi - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(l+l')k\varphi. \end{aligned}$$

Pour  $d$  non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n \cos dk\varphi = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n e^{idk\varphi} = \operatorname{Re} \frac{e^{id\varphi(n+1)} - e^{id\varphi}}{e^{id\varphi} - 1} = \operatorname{Re} \frac{(-1)^d - e^{id\varphi}}{e^{id\varphi} - 1}.$$

Ainsi,  $l \neq l'$  entraîne  $(X_l | X_{l'}) = 0$  et  $l = l'$  l'égalité :

$$(X_l | X_l) = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1 - e^{id\varphi}}{e^{id\varphi} - 1} = \frac{1}{2}(n+1)$$

Finalement, la famille :

$$\left( \sqrt{\frac{2}{n+1}} X_l \right)_{l \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

est une base orthonormée de diagonalisation de  $A$ .

3. La matrice  $A$  est annulée par le polynôme :

$$P = X^3 - 3X + 4.$$

Une simple étude de la variation de la fonction  $x \mapsto x^3 - 3x + 4$  montre que  $P$  s'écrit :

$$P = (X - \alpha)(X - \omega)(X - \bar{\omega})$$

avec  $\alpha$  réel non nul et  $\omega$  complexe non réel.

Puisque  $P$  est scindé simple sur  $\mathbb{C}$ , la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et son polynôme caractéristique est de la forme :

$$C = (X - \alpha)^r (X - \omega)^s (X - \bar{\omega})^t.$$

Le polynôme  $C$  étant réel, on a  $s = t$ . Il vient ainsi :

$$\det A = \alpha^r |\omega|^{2s} > 0.$$

4. 1. L'application  $\varphi : P \mapsto P(u)(x_0)$  est une application linéaire de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $E$ .

L'image  $F_{\mathcal{I}} = \varphi(\mathcal{I})$  d'un idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathbb{K}[X]$  est un sous-espace de  $E$ . Si  $x = P(u)(x_0)$  avec  $P \in \mathcal{I}$  appartient à  $F_{\mathcal{I}}$ , on a :

$$u(x) = (XP)(u)(x_0) \in F_{\mathcal{I}}$$

puisque le polynôme  $XP$  appartient à l'idéal  $\mathcal{I}$ . Le sous-espace  $F_{\mathcal{I}}$  est donc stable par  $u$ .

Supposons que  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  soient deux idéaux contenant  $M$  vérifiant  $F_{\mathcal{I}} = F_{\mathcal{J}}$ . Pour tout  $P \in \mathcal{I}$ , le vecteur  $x = P(u)(x_0)$  appartient à  $F_{\mathcal{I}} = F_{\mathcal{J}}$ . Il existe donc un élément  $Q$  de  $\mathcal{J}$  tel que  $x = Q(u)(x_0)$ . On en déduit :

$$(P - Q)(u)(x_0) = 0$$

et  $M \mid P - Q$  puisque  $M$  est aussi le générateur de l'idéal des polynômes  $A$  tels que  $A(u)(x_0) = 0$ . Comme  $M$  appartient à  $\mathcal{J}$ , le polynôme  $P - Q$  appartient à  $\mathcal{J}$ . On obtient ainsi  $P \in \mathcal{J}$ . Finalement,  $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$  et, de même,  $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ .

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ , l'ensemble  $\mathcal{I}$  des polynômes  $P$  tels que  $P(u)(x_0)$  appartienne à  $F$  est le sous-espace vectoriel  $\varphi^{-1}(F)$  de  $\mathbb{K}[X]$ . Soient alors  $P \in \mathcal{I}$  et  $Q \in \mathbb{K}[X]$ . Le vecteur  $x = P(u)(x_0)$  appartient à  $F$ . Par stabilité de  $F$ ,  $R(u)(x)$  appartient à  $F$ . La relation :

$$R(u)(x) = (RP)(u)(x_0)$$

montre alors que  $RP$  appartient à  $\mathcal{I}$ . Finalement,  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . La relation  $M(u)(x_0) = 0$  montre que cet idéal contient  $M$ . Par définition,  $F_{\mathcal{I}} \subset F$ . Soit  $x \in F$ . Puisque  $E$  est cyclique engendré par  $x_0$ , il existe un polynôme  $P$  tel que  $x = P(u)(x_0)$ . on a alors  $P \in \mathcal{I}$  par définition. Cela prouve  $F_{\mathcal{I}} = F$ .

Puisque  $\mathbb{K}[X]$  est principal, tout idéal  $\mathcal{I}$  de cet anneau s'écrit  $\mathcal{I} = (P)$  pour un unique polynôme normalisé  $P$ . On a  $M \in \mathcal{I}$  si, et seulement si  $P \mid M$ . Les idéaux contenant  $M$  sont ainsi les idéaux de la forme  $(P)$  où  $P$  est un diviseur unitaire de  $M$ . Il n'existe donc qu'un nombre fini.

2. Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . On a bien sûr  $u(e_1) = 0$  et  $u(e_k) = e_{k-1}$  pour tout  $k$  de  $[[2, n]]$ . Ainsi  $\mathbb{K}^n$ , engendré par les  $u^k(e_n)$ , est cyclique engendré par  $e_n$ . La relation  $u^n(e_n) = 0$  montre que le polynôme minimal  $M$  de  $u$  divise  $X^n$ . Comme il est de degré  $n$ , on a  $M = X^n$ .

La question précédente montre que les sous-espaces stables sont de la forme  $F_{(X^k)}$  avec  $k \in [[0, n]]$ . La relation :

$$\begin{aligned} F_{(X^k)} &= \{R(u)(x_0) \mid R \in (X^k)\} \\ &= \{u^k(P(u)(x_0)) \mid P \in (X^k)\} \end{aligned}$$

montrent qu'il s'agit des sous-espaces  $\text{Im } u^k$  avec  $k \in [[0, n]]$ .

3. Supposons maintenant que  $E$  ne possède qu'un nombre fini de sous-espaces stables par  $u$  et notons  $F_1, \dots, F_r$  ceux qui sont différents de  $E$ . Puisque  $\mathbb{K}$  est infini,  $E$  n'est pas la réunion des  $F_i$  (voir exercice 3 page 106) et il existe un vecteur  $x_0$  de  $E$  n'appartenant à aucun des  $F_i$ . L'ensemble :

$$\{A(u)(x_0) \mid A \in \mathbb{K}[X]\}$$

est évidemment un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ . Comme il est différent de tous les  $F_i$ , il vaut  $E$  et  $x_0$  engendre  $E$  sous l'action de  $u$ .

5. Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre  $p$  dont le polynôme caractéristique est :

$$C(X) = X^p - \frac{1}{p}X^{p-1} - \frac{1}{p}X^{p-2} - \dots - \frac{1}{p}X - \frac{1}{p}.$$

Il est évident que 1 est racine de  $C(X)$ . C'est une racine simple puisque  $C'(1)$  est différent de 0. Un nombre complexe de module strictement supérieur à 1 n'est pas racine de  $C(X)$  puisqu'il vérifie :

$$\left| \frac{1}{p}\lambda^{p-1} + \dots + \frac{1}{p}\lambda + \frac{1}{p} \right| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |\lambda^k| \leq |\lambda^{p-1}| < \lambda^p.$$

Si  $\lambda = e^{i\theta}$  est une racine de module 1 de  $C(X)$ , il vient :

$$1 = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{i\theta(k-p)} \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \cos(p-k)\theta.$$

Puisque les  $\cos(p-k)\theta = 0$  sont inférieurs ou égaux à 1, on en déduit  $\cos \theta = 1$  et  $e^{i\theta} = 1$ .

Ainsi, les racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de  $C(X)$  autres que 1 sont de module strictement inférieur à 1. Note alors  $m_i$  leur multiplicité. D'après le cours, il existe un constante  $x$  et des polynômes  $P_i(X)$  de  $\mathbb{C}_{m_i-1}[X]$  tels que :

$$x_n = x1^n + \sum_{i=1}^r P_i(n)\lambda_i^n.$$

Par croissance comparée de  $n^k$  et de  $\lambda_i^n$  avec  $|\lambda_i| < 1$ , la suite  $(x_n)$  converge vers  $x$ .

Considérons alors la quantité :

$$y_n = x_n + 2x_{n+1} + \dots + px_{n+p-1}.$$

Pour tout  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} + 2x_{n+2} + \dots + (p-1)x_{n+p-1} + px_{n+p} \\ &= x_{n+1} + 2x_{n+2} + \dots + (p-1)x_{n+p-1} + x_n + x_{n+2} + \dots + x_{n+p-1} \\ &= x_n + 2x_{n+1} + \dots + px_{n+p-1} \\ &= y_n. \end{aligned}$$

La suite  $(y_n)$  est donc constante de valeur  $a_0 + 2a_1 + \dots + pa_{p-1}$ . En passant à la limite, on obtient :

$$x(1 + 2 + \dots + p) = a_0 + 2a_1 + \dots + pa_{p-1}.$$

Finalement, la suite  $(x_n)$  est convergente de limite :

$$\frac{2(a_0 + 2a_1 + \dots + pa_{p-1})}{p(p+1)}.$$

6. On peut, quitte à remplacer  $u$  par  $u - \lambda \text{Id}_E$ , supposer que la valeur propre  $\lambda$  est nulle. On notera alors :

$$k = \dim E_0(u) = \dim \text{Ker } u.$$

Supposons que l'assertion 1 soit vérifiée. Si  $x$  appartient à  $\text{Ker } u \cap \text{Im } u$ , on a  $u(x) = 0$  et il existe  $z$  tel que  $x = u(z)$ . Cela implique  $u^2(z) = 0$ , soit  $u(z) = 0$  par hypothèse. Les sous-espaces  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont donc en somme directe. Comme la somme de leurs dimensions est  $n$  par le théorème du rang, on a  $E_0(u) \oplus \text{Im } u = E$ .

Si l'assertion 2 est vérifiée,  $\text{Im } u$  est un supplémentaire stable par  $u$  de  $E_0(u)$ .

Si l'assertion 3 est vérifiée, on a  $E = E_0(u) \oplus F$  où  $F$  est un sous-espace stable par  $u$ . Le polynôme caractéristique de  $u$  est alors le produit du polynôme caractéristique  $X^k$  de endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_0(u)$  et du polynôme caractéristique  $C_{u'}(X)$  de endomorphisme  $u'$  induit par  $u$  sur  $F$ . Comme le



sous-espace  $F_0(u')$ , égal à  $F \cap E_0(u)$ , est nul, le polynôme  $C_{u'}(X)$  ne s'annule pas en 0. Finalement, la multiplicité de 0 dans :

$$C_u(X) = C_{u'}(X)X^k$$

est  $\dim E_0(u)$ .

Si l'assertion 4 est vérifiée, on a  $C_u(X) = X^k D(X)$  avec  $D(0) \neq 0$ . Le lemme des noyaux nous fournit la décomposition en somme directe :

$$E = \text{Ker } u^k \oplus \text{Ker } D(u).$$

On a donc  $C_u(X) = C_{u'}(X)C_{u''}(X)$  où  $u'$  et  $u''$  sont les endomorphismes induits par  $u$  sur  $\text{Ker } u^k$  et  $\text{Ker } D(u)$  respectivement. L'endomorphisme  $u'$  étant nilpotent, on a  $C_{u'}(X) = X^{\dim \text{Ker } u^k}$ . L'endomorphisme  $u''$  étant inversible puisqu'il est annulé par  $D$  premier avec  $X$ , le polynôme  $C_{u''}(X)$  ne s'annule pas en 0. On en déduit  $k = \dim \text{Ker } u^k$  et  $E_0(u) = \text{Ker } u^k$ . On a donc  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } D(u)$ . Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de  $u$  est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

où  $A''$  est la matrice de  $u''$  dans la base correspondante de  $\text{Ker } D(u)$ . Le polynôme minimal  $M(X)$  de  $A''$  ne s'annule pas en 0. Il est immédiat que  $XM(X)$  est un polynôme annulateur de  $u$ . Ainsi le polynôme minimal de  $u$  est de la forme  $XP(X)$  avec  $P(0) \neq 0$ .

Si l'assertion 5 est vérifiée, le polynôme minimal de  $u$  est de la forme  $M(X) = XN(X)$  avec  $N(0) \neq 0$ . Le lemme des noyaux nous fournit la décomposition en somme directe :

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } N(u).$$

Soit alors  $x \in \text{Ker } u^2$ . On peut écrire  $x = n + y$  avec  $n \in \text{Ker } u$  et  $y \in \text{Ker } N(u)$ . Notons  $u'$  et  $u''$  les endomorphismes induits par  $u$  sur  $\text{Ker } u$  et  $\text{Ker } N(u)$  respectivement. On a alors  $u'^2(n) = 0$  et  $u''^2(y) = 0$ . Comme  $u''$  est inversible puisqu'il possède  $N$  comme polynôme annulateur, on obtient  $y = 0$  et  $x = n$ . Cela entraîne  $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ .

Dans les conditions précédentes, nous avons vu que  $\text{Im } u$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$ . Si  $F$  est un tel supplémentaire, il est immédiat que l'on a  $\text{Im } u \subset F$ . Le théorème du rang montrant l'égalité des dimensions de ces espaces, on a  $\text{Im } u = F$ .

7. On note  $\|x\|$  la norme des éléments de  $E$  et  $\|u\|$  la norme subordonnée des endomorphismes de  $\mathcal{L}(E)$ .

1. Supposons que l'inclusion  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u - \text{Id}_E)^2$  soit stricte. Soit alors un vecteur  $x \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)^2$  n'appartenant pas à  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ . Notons  $y = (u - \text{Id}_E)(x)$ . On a  $y \neq 0$  et  $(u - \text{Id}_E)(y) = 0$ . Il vient  $u(x) = x + y$ , et par une récurrence immédiate :

$$u^k(x) = x + ky.$$

On obtient alors :

$$k\|y\| = \|u^k(x) - x\| \leq \|u\|^k \|x\| + \|x\| \leq 2\|x\|$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  puisque  $\|u\|$  est inférieure ou égale à 1. Cela contredit  $y \neq 0$ .

Par ce qui précède, on a  $E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ .

2. Notons  $u'$  et  $u''$  les endomorphismes induits par  $u$  sur  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ . L'endomorphisme  $v'_k$  induit par  $v_k$  sur  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  est l'identité puisque  $u'$  est l'identité. L'endomorphisme  $v''_k$  induit par  $v_k$  sur  $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$  est donnée par :

$$v''_k = \frac{1}{k} (u'' - \text{Id}_E)^{-1} (u''^k - \text{Id}_E)$$

puisque  $(u'' - \text{Id}_E)$  est inversible. Notons  $\|w\|''$  la norme de  $\mathcal{L}(\text{Im}(u - \text{Id}_E))$  subordonnée à la norme  $\|x\|_{\text{Im}(u - \text{Id}_E)}$ . On a évidemment  $\|w''\|'' \leq \|w\|$  pour tout endomorphisme  $w$  de  $E$  stabilisant  $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ . Il vient alors :

$$\|v''_k\| \leq \frac{1}{k} \left\| (u'' - \text{Id}_E)^{-1} \right\|'' (\|u\|^k + 1).$$

Ainsi, la suite  $v''_k$  tend vers 0.

Finalement, la suite  $v_k$  tend vers la projection sur  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ .

8 1. On calcule le déterminant de  $XI_{2n} - B$  en le transformant par des opérations élémentaires décrites par blocs. Il vient :

$$C_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix} = \frac{1}{X^n} \begin{vmatrix} X^2 I_n & -A \\ -XI_n & XI_n \end{vmatrix} = \frac{1}{X^n} \begin{vmatrix} X^2 I_n - A & -A \\ 0 & XI_n \end{vmatrix}$$

en multipliant les  $n$  premières colonnes par  $X$  pour la première égalité et en effectuant  $C_i \leftarrow C_i + C_{i+n}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  pour la seconde. On obtient finalement  $C_B(X) = C_A(X^2)$ .

Un scalaire  $\lambda$  est donc une valeur propre de  $B$  si, et seulement si, son carré est une valeur propre de  $A$ . On a de plus  $m_B(\lambda) = m_A(\lambda^2)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp } B \setminus \{0\}$  et, par contre  $m_B(0) = 2m_A(0)$  si  $0 \in \text{sp } B$ .

2. Soit  $\lambda \in \text{sp} B$ . Une colonne  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  appartient au sous-espace propre  $E_\lambda(B)$  si, et seulement si, on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

soit  $AY = \lambda X$  et  $X = \lambda Y$ . C'est évidemment équivalent à  $AY = \lambda^2 Y$  et  $X = \lambda Y$ . Le vecteur  $Y$  appartient donc au sous-espace propre  $E_{\lambda^2}(A)$ . On en déduit immédiatement que l'application :

$$Y \mapsto \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix}$$

induit un isomorphisme de  $E_{\lambda^2}(A)$  sur  $E_\lambda(B)$ . Finalement la dimension de  $E_\lambda(B)$  est égale à celle de  $E_{\lambda^2}(A)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp} B$ . Il faut alors distinguer deux situations :

- Si 0 est une valeur propre de  $A$ . Les relations  $0 < \dim E_0(A) \leq m_0(A)$ ,  $\dim E_0(B) = \dim E_0(A)$  et  $m_0(B) = 2m_0(A)$  montrent que l'on a  $\dim E_0(B) < m_0(B)$ . La matrice  $B$  n'est pas diagonalisable.
- Si 0 n'est pas une valeur propre de  $A$ . On a  $\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda^2}(A)$  et  $m_\lambda(B) = m_{\lambda^2}(A)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp} B$ . On a donc  $\dim E_\lambda(B) = m_\lambda(B)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp} B$  si, et seulement si,  $\dim E_\mu(A) = m_\mu(A)$  pour tout  $\mu \in \text{sp} A$ . Ainsi  $B$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  l'est.

9. Le polynôme caractéristique de la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

est  $X^2 - 3X + 2$ . Comme ce polynôme est simple de racines 1 et 2, la matrice  $A$  est diagonalisable. Les vecteurs  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres pour 1 et 2 respectivement. La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$  est la matrice de passage de la base canonique à une base de diagonalisation de  $U$ . Son inverse étant  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , il vient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est alors immédiat de vérifier en calculant par blocs que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}.$$

Comme  $\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}$  est l'inverse de  $\begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$ , la matrice  $B$  est semblable à  $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ .

Si  $B$  est diagonalisable la matrice  $C$  est diagonalisable et  $A$ , qui représente l'endomorphisme induit par l'endomorphisme canoniquement associé à  $C$  sur le sous-espace stable  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  l'est aussi. Si  $A$  est diagonalisable, il existe une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et une matrice diagonale  $D$  telle que :

$$A = PDP^{-1}.$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1}$$

Ainsi  $C$ , et par conséquent,  $B$  sont diagonalisables.

10. Notons  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et  $(A_1, \dots, A_n)$  les colonnes de  $A$ .

Par définition, on a :

$$C_A(X) = \det(XE_1 - A_1, \dots, XE_n - A_n).$$

Par développement multilinéaire, on obtient :

$$C_A(X) = \sum_{I \subset [1, n]} (-1)^k X^{n-k} \det(C_1^I, \dots, C_n^I)$$

où la colonne  $C_i^I$  est  $A_i$  lorsque  $i \in I$  et  $E_i$  lorsque  $i \notin I$ .

Si  $I$  est la partie à  $k$  éléments  $\{i_1, \dots, i_k\}$  de  $[1, n]$ , on transforme  $\det(C_1^I, \dots, C_n^I)$  en permutant ses colonnes puis ses lignes suivant une bijection vérifiant :

$$\forall l \in [1, k], \quad \sigma(i_l) = l.$$

Il vient ainsi :

$$\det(C_1^I, \dots, C_n^I) = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1, i_1} & \dots & \alpha_{i_1, i_k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_k, i_1} & \dots & \alpha_{i_k, i_k} & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \det(\alpha_{i,j})_{(i,j) \in I^2}.$$

11. On a :

$$C_C(X) = \begin{vmatrix} XI_n - A & -B \\ -B & XI_n - A \end{vmatrix}.$$

Par produit, on obtient :

$$\begin{vmatrix} XI_n - A & -B \\ -B & XI_n - A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n - A - B & -B \\ XI_n - A - B & XI_n - A \end{vmatrix}$$

et :

$$\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XI_n - A - B & -B \\ XI_n - A - B & XI_n - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n - A - B & -B \\ 0 & XI_n - A + B \end{vmatrix}.$$

On en déduit :

$$C_C(X) = C_{A+B}(X)C_{A-B}(X).$$

12. 1. Si  $A$  est inversible la relation  $C_{AB}(X) = C_{BA}(X)$  provient de la similitude :

$$AB = A(BA)A^{-1}.$$

2. On écrit  $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$  par blocs associés à la partition  $n = r + (n - r)$ .

Les matrices :

$$J_r B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$B J_r = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}$$

ont même polynôme caractéristique  $X^{n-r}C_{B_1}(X)$ .

3. Si  $A$  n'est pas inversible, il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $A = P J_r Q$  où  $J_r$  est la matrice canonique de rang  $r$  définie dans le cours. Il vient ainsi :

$$C_{AB}(X) = C_{P J_r Q B}(X) = C_{J_r Q B P}(X)$$

et :

$$C_{BA}(X) = C_{B P J_r Q}(X) = C_{Q B P J_r}(X).$$

On obtient  $C_{AB}(X) = C_{BA}(X)$  par la question précédente..

- 13.** Montrons tout d'abord l'implication directe. Si  $\lambda$  est une valeur propre commune à  $A$  et  $B$ , il est aussi une valeur propre commune à  $A$  et  ${}^tB$  puisqu'une matrice et sa transposée ont même spectre. Il existe donc deux vecteurs colonnes non nuls  $X$  et  $Y$  tels que l'on a  $AX = \lambda X$  et  ${}^tBY = \lambda Y$ . La matrice  $U = X{}^tY$  est une matrice non nulle (plus précisément de rang 1) de  $M_n(\mathbb{C})$ . Elle vérifie :

$$AU = AX{}^tY = \lambda X{}^tY \quad \text{et} \quad UB = X{}^tYB = \lambda X{}^tY$$

puisque l'on a  ${}^tYB = \lambda{}^tY$ . On a donc trouvé  $U$  non nulle de  $M_n(\mathbb{C})$  telle que  $AU = UB$ .

Supposons réciproquement qu'il existe une telle matrice  $U$ . La relation  $AU = UB$  implique  $A^kU = UB^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $P(A)U = UP(B)$  pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Le théorème de Hamilton-Cayley montre alors que l'on a :

$$C_B(A)U = UC_B(B) = 0.$$

Si  $\prod_{k=1}^n (X - \lambda_i)$  est la factorisation de  $C_B(X)$ , on obtient :

$$(A - \lambda_1 I_n) \circ \cdots \circ (A - \lambda_n I_n) \circ P$$

avec  $P$  non nul. Cela interdit évidemment au facteur  $(A - \lambda_i I_n)$  d'être inversible pour tout  $i$  et implique que l'une des valeurs propres de  $B$  est aussi une valeur propre de  $A$ .

- 14. 1.** Supposons  $AJ_r = BJ_r$ . En écrivant  $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$  par blocs associés à la partition  $n = r + (n - r)$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} = AJ_r = J_r B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit  $A_1 = B_1$ ,  $A_3 = 0$  et  $B_2 = 0$ . Les relations :

$$C_A(X) = C_{A_1}(X)C_{A_4}(X) \quad \text{et} \quad C_B(X) = C_{B_1}(X)C_{B_4}(X)$$

montrent finalement que  $C_{A_1}(X)$  est un facteur de degré  $r$  de  $C_A(X)$  et  $C_B(X)$ .

- 2.** On suppose donc  $AU = UB$  où  $U$  est de rang  $r$ . Il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $U = PJ_rQ$ . La relation  $APJ_rQ = PJ_rQB$  entraîne  $QAPJ_r = J_rQBP$ . Par ce qui précède, les polynômes caractéristiques de  $QAPJ_r$  et  $J_rQBP$  ont un facteur commun de degré  $r$ . Ces matrices étant respectivement semblables à  $AB$  et  $BA$ , les polynômes  $C_{AB}(X)$  et  $C_{BA}(X)$  ont un facteur commun de degré  $r$ .

15. On note  $\mathcal{E} = \mathbb{C}^n$  et  $u_A$  l'endomorphisme de  $\mathcal{E}$  canoniquement associé à  $A$ .

1. La matrice complexe  $A$  possède une valeur propre  $\lambda$ . Puisque  $A$  et  $B$  commutent, le sous-espace propre  $\mathcal{E}_\lambda(u_A)$  est alors stable par  $u_B$ . Puisque  $u_B$  est scindé, l'endomorphisme  $u'_B$  induit par  $u_B$  sur ce sous-espace possède un vecteur propre  $X$ . Il est alors évident que  $X$  est un vecteur propre de  $A$  et de  $B$ .
2. Supposons maintenant que l'on ait  $AB - BA = \alpha A$  avec  $\alpha \neq 0$ . Soit l'application  $\varphi_B : M \mapsto MB - BM$  de  $M_n(\mathbb{C})$  dans lui-même. Il est évident que  $\varphi_B$  est linéaire et la relation :

$$\begin{aligned} A^k B - B A^k &= A(A^{k-1} B - B A^{k-1}) + (AB - BA) A^{k-1} \\ &= A \varphi_B(A^k) + \alpha A^k \end{aligned}$$

prouve par récurrence que l'on a  $\varphi_B(A^k) = k\alpha A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Pour tout entier  $k$  tel que  $A^k$  est non nulle, le scalaire  $k\alpha$  est une valeur propre de  $\varphi_B$ . L'application  $k \mapsto k\alpha$  étant injective et le spectre de  $\varphi_B$  fini, il n'existe donc qu'un nombre fini de  $k$  tels que  $A^k$  soit non nulle. Il existe alors un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$ .

Ainsi  $A$  est nilpotente et le noyau  $\mathcal{N}$  de l'application linéaire  $u_A$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . La relation

$$\forall X \in \mathcal{N}, \quad ABX = BAX + \alpha AX = 0$$

montre que  $\mathcal{N}$  est aussi stable par  $u_B$ . L'endomorphisme induit par  $u_B$  sur  $\mathcal{N}$  possède alors un vecteur propre  $X$ . Il est immédiat que  $X$  est un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .

3. Dans le cas général, notons  $C$  la matrice  $AB - BA = \alpha A + \beta B$  avec  $\beta \neq 0$ . Par un simple calcul, on obtient  $AC - CA = \beta C$ . La question précédente montre alors que  $C$  est nilpotente et qu'il existe un vecteur non nul  $X$  tel que  $CX = 0$  et  $AX = \lambda X$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a alors :

$$(\alpha A + \beta B)X = 0 \quad \text{et} \quad AX = \lambda X,$$

soit  $BX = -\lambda\beta^{-1}X$ . Le vecteur  $X$  est donc un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .

16 Si  $u$  est diagonalisable, nous avons vu dans le cours que la relation (\*) est vérifiée où  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  est le spectre de  $u$  et  $(p_1, \dots, p_r)$  la famille des projecteurs associée à la décomposition en somme directe :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(u).$$

Supposons, réciproquement, qu'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  et  $(p_1, \dots, p_r)$  telles que (\*). Par combinaison linéaire, on a :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(u) = P(\lambda_1)p_1 + \dots + P(\lambda_r)p_r.$$

Notons  $M(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r)$  et :

$$L_i(X) = \frac{(X - \lambda_1) \cdots (\widehat{X - \lambda_i}) \cdots (X - \lambda_r)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\widehat{\lambda_i - \lambda_i}) \cdots (\lambda_i - \lambda_r)}$$

les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires deux à deux distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ .

Puisque  $M(\lambda_j) = 0$  pour tout  $i$ , on a  $M(u) = 0$ . Comme  $M$  est scindé à racine simple,  $u$  est donc diagonalisable. En utilisant  $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ , il vient  $p_i = L_i(u)$ . Puisque  $M$  divise les polynômes :

$$L_i^2 - L_i, \quad L_i L_j \quad (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_1 + \cdots + L_r - 1,$$

on a  $p_i^2 = p_i$ ,  $p_i p_j = 0$  ( $i \neq j$ ) et  $p_1 + \cdots + p_r = \text{Id}_E$ . La suite  $(p_1, \dots, p_r)$  est donc la suite des projecteurs associée à une décomposition en somme directe :

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$$

où  $F_i = \text{Im } p_i$ . La relation :

$$u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r$$

montre  $F_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ .

**17** On montre par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Il vient ainsi, pour tout polynôme  $P$  :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

La relation  $P(M) = 0$  entraîne donc  $P(A) = 0$  et  $P'(A)B = 0$ .

Si  $M$  est diagonalisable, elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples  $P$ . Comme  $P(A)$  est nulle, la matrice  $A$  est diagonalisable. De plus  $P'$  est premier avec  $P$ . Il existe donc des polynômes  $U$  et  $V$  tels que :

$$UP + VP' = 1.$$

On en déduit  $V(A)P'(A) = I_n$  et :

$$B = V(A)P'(A)B = 0.$$

Si  $A$  est diagonalisable et  $B = 0$ , la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

annulée par un polynôme annulateur scindé à racines simples de  $A$  est aussi diagonalisable.



**18.** Soit  $N$  la matrice compagnon dans  $M_n(\mathbb{C})$  du polynôme  $P$ .

La matrice  $N$  est à coefficients entiers et il existe une matrice inversible  $U$  tel que  $U^{-1}NU$  soit une matrice triangulaire supérieure  $T$  de diagonale  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . On en déduit alors que pour tout entier  $k$  la matrice  $N^k$  est à coefficients entiers et  $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$  est une liste des valeurs propres de  $N^k$ .

Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , le polynôme caractéristique  $P_k$  de  $N^k$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  à coefficients entiers dont le coefficient  $c_{k,\ell}$  de  $X^\ell$  vérifie :

$$|c_{k,\ell}| = \left| \sum_{i_1 < \dots < i_\ell} \alpha_{i_1}^k \cdots \alpha_{i_\ell}^k \right| \leq \sum_{i_1 < \dots < i_\ell} 1 = C_n^\ell.$$

Il n’y a donc qu’un nombre fini de valeurs possibles pour les polynômes  $P_k$  et, par conséquent, qu’un nombre fini de valeurs possibles pour les suites  $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$ . Il existe donc  $k < \ell = k + m$  tels que l’on ait :

$$(\alpha_1^{k+m}, \dots, \alpha_n^{k+m}) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$

Cela entraîne  $\alpha_i = 0$  ou  $\alpha_i^m = 1$  pour tout  $i$ .

**19.** 1. On a par définition  $h \circ u = u \circ h + 2u$ . La relation  $h(x) = \lambda x$  implique donc :

$$h(u(x)) = u(\lambda x) + 2u(x) = (\lambda + 2)u(x).$$

Soit  $\lambda_0$  une valeur propre de  $h$  de partie réelle maximale. Il existe donc un vecteur  $x_0$  tel que  $h(x_0) = \lambda_0 x_0$ . Le vecteur  $u(x_0)$  est alors nul ; sinon, la relation précédente prouverait que  $\lambda_0 + 2$  est une valeur propre de  $h$ .

2. On montre les relations proposées par récurrence sur  $k$ . Elles sont vérifiées pour  $k = 0$ . Supposons les acquises pour  $k$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} h(x_{k+1}) &= (h \circ v) \left( \frac{1}{k+1} x_k \right) \\ &= (v \circ h - 2v) \left( \frac{1}{k+1} x_k \right) \\ &= ((\lambda_0 - 2k) x_{k+1} - 2x_{k+1}) \\ &= (\lambda_0 - 2(k+1)) x_{k+1} \end{aligned}$$

et :

$$v(x_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!} v^{k+2}(x_0) = (k+2) x_{k+2}.$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned}
 u(x_{k+1}) &= (u \circ v) \left( \frac{1}{k+1} x_k \right) \\
 &= (v \circ u + h) \left( \frac{1}{k+1} x_k \right) \\
 &= \frac{(\lambda_0 - k + 1)}{k+1} v(x_{k-1}) + \frac{(\lambda_0 - 2k)}{k+1} x_k \\
 &= \frac{k(\lambda_0 - k + 1) + (\lambda_0 - 2k)}{k+1} x_k \\
 &= (\lambda_0 - k) x_k
 \end{aligned}$$

ce qui prouve ce que l'on voulait.

3. Les vecteurs  $x_k$  non nuls sont des vecteurs propres de  $h$  pour des valeurs propres deux à deux distinctes. Ils forment donc une famille libre et sont en nombre fini. Notons alors  $r$  le plus petit entier tel que  $x_r$  soit nul. La famille  $\mathcal{X} = (x_k)_{k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket}$  est une famille libre de  $E$ . Le sous-espace  $F$  qu'elle engendre est stable par  $h$ , par puisque  $u(x_0) = 0$  et aussi par  $v$  puisque  $v(x_{r-1}) = rx_r$  est nul. Par hypothèse,  $F$  qui n'est pas nul est égal à  $E$ . Ainsi  $\mathcal{X}$  est une base de  $E$ . On a évidemment  $r = n$ . De plus, les relations :

$$x_{r-1} \neq 0, \quad x_r = 0 \quad \text{et} \quad u(x_r) = (\lambda_0 - r + 1) x_{r-1}$$

montre que  $\lambda_0 - r + 1$  est nul. On a donc  $\lambda_0 = n - 1$ .

Les matrices de  $h$ ,  $u$ ,  $v$  dans la base  $\mathcal{X}$  sont :

$$H = \text{diag}(n-1, n-3, \dots, -n+3, -n+1)$$

ainsi que :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & 0 & & & \\ & 0 & n-2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & n-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soit  $\mathcal{B}_0 = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  une base de  $E$ . On vérifie immédiatement que les endomorphismes  $h_0, u_0$ , et  $v_0$  de matrices  $H, U$ , et  $V$  dans  $\mathcal{B}$  satisfont aux relations algébriques indiquées. Considérons alors un sous-espace  $F$  de  $E$  non réduit à  $\{0\}$  et stable par  $h, u$  et  $v$  ainsi qu'un élément  $f$  non nul de  $F$ . On peut écrire :

$$f = \alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_r e_r$$

avec  $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  et  $\alpha_r \neq 0$ . La relation

$$u_0^r(f) = (n - r) \cdots (n - 1) \alpha_r e_0$$

montre alors que  $e_0$  appartient à  $F$  et les relations  $v^k(e_0) = k!e_{k+1}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$  que  $F$  est égal à  $E$ .

5. Il est clair que tout triplet  $h, u, v$  vérifiant  $h = p \circ h_0 \circ p^{-1}$ ,  $u = p \circ u_0 \circ p^{-1}$  et  $v = p \circ v_0 \circ p^{-1}$  avec  $p \in \mathcal{GL}(E)$  (semblable à  $h_0, u_0$ , et  $v_0$ ) vérifie les conditions de l'exercice. Réciproquement, nous avons vu que pour tout triplet  $h, u, v$  vérifiant ces conditions, il existe une base  $\mathcal{X}$  dans laquelle leurs matrices sont respectivement  $H, U$  et  $V$ . Si  $p$  est l'automorphisme de  $E$  transformant  $\mathcal{B}_0$  en  $\mathcal{X}$ , on a  $h = p \circ h_0 \circ p^{-1}$ ,  $u = p \circ u_0 \circ p^{-1}$  et  $v = p \circ v_0 \circ p^{-1}$ .

20. 1. On suppose  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ . La matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

associée à  $(0, 1, 0, \dots, 0)$  est la transposée de la matrice compagnon du polynôme  $X^p - 1$ . Comme ce polynôme, qui est son polynôme minimal ainsi que son polynôme caractéristique, est scindé simple,  $U$  est diagonalisable et il existe une matrice inversible  $P$  telle que :

$$U = P^{-1} \text{diag}(1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-1})P$$

avec  $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{p}}$

Comme  $C$  est la somme  $\sum_{k=0}^{p-1} a_k U^k$ , on a :

$$C = P^{-1} \text{diag} \left( \sum_{k=0}^{p-1} a_k \zeta^{k0}, \sum_{k=0}^{p-1} a_k \zeta^{k1}, \dots, \sum_{k=0}^{p-1} a_k \zeta^{k(p-1)} \right) P.$$

On en déduit :

$$\det C = \prod_{l=0}^{p-1} \left( \sum_{k=0}^{p-1} a_k \zeta^{lk} \right).$$

2. On suppose  $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ . La matrice  $U$  associée à  $(0, 1, 0, \dots, 0)$  est la transposée de la matrice compagnon du polynôme  $X^p - 1$ . Son polynôme caractéristique est donc :

$$X^p - 1 = (X - 1)^p.$$

Notons alors  $N = U - I_p$ . La matrice  $N$  est nilpotente d'après le théorème de Hamilton-Cayley et il existe une matrice inversible  $P$  ainsi qu'une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle  $T$  telles que :

$$U = P^{-1}TP.$$

Comme  $C$  est la somme  $\sum_{k=0}^{p-1} a_k U^k$ , on a :

$$C = P^{-1} (sI_p + T') P$$

avec  $s = a_0 + \dots + a_{p-1}$  et  $T'$  triangulaire supérieure à diagonale nulle. On en déduit :

$$\det C = (a_0 + \dots + a_{p-1})^p = a_0 + \dots + a_{p-1}$$

d'après le petit théorème de Fermat.

**21. 1.** L'ensemble  $M_n(\mathbf{K}[X])$  est évidemment un sous-anneau de  $M_n(\mathbf{K}(X))$  stable par multiplication externe par des polynômes.

Soit  $A = (\alpha_{i,j}(X))$  un élément de  $M_n(\mathbf{K}[X])$ . Le  $(i, j)$ <sup>ième</sup> coefficient de  $A$  étant un polynôme, il existe une suite  $(\alpha_{i,j}^k)_{k \in \mathbf{N}}$  de  $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$  telle que  $\alpha_{i,j}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{i,j}^k X^k$ . Notons alors  $A_k$  la matrice  $(\alpha_{i,j}^k)_{i,j}$  de  $M_n(\mathbf{K})$ . La suite  $(A_k)_k$  est à support fini puisque les  $\alpha_{i,j}^k$  sont nuls dès que  $k$  dépasse strictement les degré des  $\alpha_{i,j}(X)$  et l'on a :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} X^k A_k.$$

L'unicité est évidente.

**2.** Notons  $P(X) = \sum_{k=0}^r p_k X^{r-k}$  avec  $p_0 \neq 0$ . L'unicité des coefficients vue dans

la première question montre qu'une matrice polynomiale  $R(X)$  de la forme

$$\sum_{k=0}^s X^{s-k} R_k \text{ avec } R_0 \neq 0 \text{ vérifie :}$$

$$P(X)I_n = (XI_n - A)R(X) + B$$

si, et seulement si, on a  $s = r - 1$  ainsi que le schéma de Horner :

$$R_0 = p_0 I_n, \quad \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket \quad R_k - AR_{k-1} = p_k I_k \quad \text{et} \quad B - AR_{r-1} = p_0 I_n.$$

Cela montre l'existence et l'unicité de  $(R(X), B)$ . On voit de plus que les coefficients  $R_k$  sont des polynômes en  $A$  et que  $B$  vaut  $p(A)$ . En particulier, les coefficients de  $R(X)$  appartiennent à  $\mathbf{K}[A]$ .

3. Si  $M(X)$  est la matrice complémentaire de  $(XI_n - A)$ , on a :

$$C_A(X)I_n = (XI_n - A)M(X) = (XI_n - A)M(X) + 0$$

L'unicité de cette décomposition montre que  $C_A(A)$  est nul. Elle montre aussi que  $M(X)$  est une matrice polynomiale à coefficients dans  $\mathbf{K}[A]$

4. Notons  $\mu'_{i,j}(X)$  le quotient de  $\mu_{i,j}(x)$  par  $D(X)$  pour tout  $(i, j)$ . L'égalité :

$$C_A(X)I_n = D(X)(XI_n - A)(\mu'_{i,j}(X))$$

montre alors que la matrice  $(XI_n - A)(\mu'_{i,j}(X))$  est de la forme  $P(X)I_n$  où le polynôme  $P(X)$  vérifie  $C_A(X) = D(X)P(X)$ . On en déduit  $P(A) = 0$  et  $D(X) \mid C_A(X)$ . Finalement, le polynôme minimal de  $A$  divise  $P(X)$

D'un autre coté, on peut écrire  $C_A(X) = E(X)M_A(X)$  Comme  $M_A(A)$  est nul, il existe une matrice  $N(X)$  de  $M_n(\mathbf{K}[X])$  telle que :

$$M_A(X)I_n = (XI_n - A)N(X).$$

Cela donne  $C_A(X)I_n = (XI_n - A)E(X)N(X)$  et, par unicité :

$$E(X)N(X) = M(X).$$

Ainsi  $E(X)$  divise tout les coefficients  $\mu_{i,j}(X)$ . On en déduit que  $E(X)$  divise  $D(X)$  et que  $P(X)$  divise  $M_A(X)$  en utilisant :

$$E(X)M_A(X) = D(X)P(X).$$

Finalement,  $P(X) = M_A(X)$  puisque  $P(X)$  est normalisé.

5. Soit  $\mathbf{L}$  le plus petit sous-corps de  $\mathbf{K}$  contenant les coefficients de  $A$ . Les polynômes  $C_A(X)$  et  $\mu_{i,j}(X)$  sont à coefficients dans  $\mathbf{L}$  puisqu'on les obtient par des calculs de déterminants de matrices à coefficients dans  $\mathbf{L}[X]$ . Il en est de même du PGCD  $D(X)$  des  $\mu_{i,j}(X)$  qui s'obtient suivant l'algorithme d'Euclide en effectuant des divisions euclidiennes. Finalement,  $M_A(X)$  appartient aussi à  $\mathbf{L}[X]$ .

22. 1. Cela provient, par unicité, de l'égalité des coefficients de  $X^n$ ,  $X^0$  et  $X^{n-k}$  de :

$$\sum_{k=1}^n c_k X^{n-k} I_n = (XI_n - A) \sum_{k=1}^{n-1} X^{n-1-k} M_k.$$

2. La formule donnant la dérivée d'un déterminant montre que  $C'_A(X)$  est la

somme des déterminants :

$$D_i = \begin{vmatrix} X - \alpha_{1,1} & \dots & -\alpha_{1,i-1} & 0 & -\alpha_{1,i+1} & \dots & -\alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{i-1,1} & \dots & -\alpha_{i-1,i-1} & 0 & -\alpha_{i-1,i+1} & \dots & -\alpha_{i-1,n} \\ -\alpha_{i,1} & \dots & -\alpha_{i,i-1} & 1 & -\alpha_{i,i+1} & \dots & -\alpha_{i,n} \\ -\alpha_{i+1,1} & \dots & -\alpha_{i+1,i-1} & 0 & -\alpha_{i+1,i+1} & \dots & -\alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{n,1} & \dots & -\alpha_{n,i-1} & 0 & -\alpha_{n,i+1} & \dots & X - \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Par développement suivant la  $i^{\text{ième}}$  colonne, on voit que  $D_i$  est le  $(i, i)^{\text{ième}}$  cofacteur de  $XI_n - A$ . Ainsi,  $C'_A(X)$  est la trace de  $M(X)$ .

On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^n (n-k) c_k X^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (\text{tr } M_k) X^{n-1-k},$$

soit  $(n-k)c_k = \text{tr } M_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . La question précédente montre que l'on a  $\text{tr } M_k - \text{tr}(AM_{k-1}) = nc_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Cela donne  $kc_k = -\text{tr}(AM_{k-1})$  pour les mêmes  $k$ .

3. On a évidemment  $c_0 = 1$  et  $M_0 = I_n$ . Si l'on connaît  $c_{k-1}$  et  $M_{k-1}$ , on obtient  $c_k$  et  $M_k$  par les relations :

$$c_k = -\frac{1}{k} \text{tr}(AM_{k-1})$$

et :

$$M_k = AM_{k-1} + c_k I_n = AM_{k-1} - \frac{1}{k} \text{tr}(AM_{k-1}) I_n$$

pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Cela fournit  $c_A(X)$  et  $M(X)$  sans calcul de déterminants.

23. Notons  $C_A$  la classe de similitude de  $A$ ,  $C_A(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$  ( $m_k > 0$ ) le polynôme caractéristique et  $M_A(X)$  le polynôme minimal de  $A$ .

Supposons que  $A$  soit diagonalisable. L'application  $B \mapsto M_A(B)$  de  $M_n(\mathbb{C})$  dans lui-même est évidemment continue. Il en est de même de l'application  $B \mapsto C_B(X)$  de  $M_n(\mathbb{C})$  dans l'espace des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à  $n$  puisque les coefficients de  $C_B(X)$  sont des polynômes en les coefficients de  $B$ . L'ensemble :

$$\mathcal{F}_A = \{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid C_B(X) = C_A(X) \text{ et } M_A(B) = 0\}$$

est donc une partie fermée de  $M_n(\mathbb{C})$ . Il contient évidemment  $C_A$ . Soit  $B$  de  $\mathcal{F}_A$ . La matrice  $B$  est diagonalisable puisqu'elle est annihilée par le polynôme

scindé simple  $M_A(X)$ . Elle a la même liste de valeurs propres que  $A$  puisque  $C_B(X) = C_A(X)$ . Elle est donc, comme  $A$ , semblable à la matrice :

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

où  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est une liste des racines de  $C_A(X)$ . Ainsi,  $B$  appartient à  $C_A$ . Finalement,  $C_A$ , égal à  $F_A$ , est fermé.

Supposons que  $A$  ne soit pas diagonalisable. Il existe de toute façon une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit une matrice triangulaire supérieure  $T = (\tau_{i,j})$  ( $\tau_{i,j} = 0$  pour tous  $i > j$ ). Pour tout  $p > 0$ , la matrice triangulaire supérieure :

$$T_p = \text{diag}(1, p, \dots, p^{n-1}) T \text{diag}(1, p, \dots, p^{n-1})^{-1}$$

appartient à  $C_A$ . Elle est égale à  $(\tau_{i,j}(p))$  avec  $\tau_{i,j}(p) = 0$  pour tous  $i > j$  et  $\tau_{i,j}(p) = p^{i-j}\tau_{i,j}$  pour tous  $i \leq j$ . Sa limite lorsque  $p$  tend vers l'infini est donc la matrice  $D = \text{diag}(\tau_{1,1}, \dots, \tau_{n,n})$ . Cette dernière n'appartient pas à  $C_A$  puisque  $A$  n'est pas diagonalisable. Finalement,  $C_A$  n'est pas fermé.

- 24.** 1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Puisque nous sommes sur  $\mathbb{C}$ , il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $T = P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure de diagonale  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Considérons alors pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , la matrice :

$$A_p = P \left( T + \frac{1}{p} \text{diag}(1, 2, \dots, n) \right) P^{-1}.$$

Il est évident que  $A_p$  tend vers  $A$  lorsque  $p$  tend vers l'infini. D'un autre côté, une liste de valeurs propres de  $A_p$ , ou de  $T_p$ , est :

$$\left( \alpha_1 + \frac{1}{p}, \dots, \alpha_n + \frac{n}{p} \right).$$

Choisissons  $p_0$  tel que l'on ait :

$$\frac{n}{p_0} < \min \left\{ |\alpha_j - \alpha_i| \mid (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ tel que } \alpha_i \neq \alpha_j \right\}.$$

Pour tout  $p \geq p_0$ , on a alors  $\alpha_i + \frac{i}{p} \neq \alpha_j + \frac{j}{p}$  pour tous  $i < j$  puisqu'autrement on aurait :

$$\frac{j-i}{p} = \alpha_j - \alpha_i = |\alpha_j - \alpha_i| \leq \frac{n}{p} \leq \frac{n}{p_0}$$

en contradiction du choix de  $p_0$ .

La suite  $(A_p)_{p \geq p_0}$  est donc formée de matrices diagonalisables à  $n$  valeurs propres. Nous avons vu qu'elle converge vers  $A$ . Cela prouve ce que l'on voulait.

2. La relation  $c_{P^{-1}AP}(X) = c_A(X)$  montre que l'on a  $c_k(P^{-1}AP)$  pour tous  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $k$ . Les applications  $A \mapsto c_k(A)$ , qui sont continues parce que polynomiales en les coefficients de  $A$ , sont donc invariantes par similitude.

Avant d'aborder la réciproque, remarquons que toute matrice diagonalisable à  $n$  valeurs propres distinctes est semblable à une matrice compagne puisque  $\mathbb{C}^n$  est cyclique sous l'action de l'endomorphisme associé.

Soit alors une application  $f$  de  $M_n(\mathbb{C})$  vers  $\mathbb{C}$  continue et invariante par similitude. Notons  $h$  l'application composée :

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \mapsto f \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \right).$$

Soit  $A$  une matrice diagonale à  $n$  valeurs propres distinctes. La matrice  $A$  est semblable à une matrice compagne  $C_P$  associée au polynôme

$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ . On a  $c_A(X) = c_{C_P}(X) = P$  et  $f(A) = f(C_P)$ . On obtient donc  $c_k(A) = \alpha_k$  pour tout  $k$  et, par conséquent :

$$f(A) = h(c_0(A), \dots, c_{n-1}(A)).$$

L'égalité précédente est réalisée lorsque  $A$  appartient à l'ensemble dense des matrices diagonalisables à  $n$  valeurs propres distinctes. Comme les fonctions mises en jeu sont continues, elle est vraie sur  $M_n(\mathbb{C})$  tout entier. L'unicité est immédiate.

25. Si  $u$  est nilpotent, il existe une base dans laquelle la matrice  $A$  de  $u$  est triangulaire supérieure stricte. Les matrices  $A^k$  étant triangulaires supérieures strictes pour tout  $k > 0$ , on a  $\text{tr } u^k = 0$  pour tout  $k > 0$ .

Nous prouverons la réciproque par récurrence sur  $n$ . Elle est évidente pour  $n = 1$ . Supposons le résultat acquis en dimension strictement inférieure à  $n$ . Si  $u$  vérifie  $\text{tr } u^k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la relation d'Hamilton-Cayley :

$$C(u) = u^n + \alpha_1 u^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} u + (\det u) \text{Id}_E = 0$$

montre que l'on a :

$$\text{tr } u^n + \alpha_1 \text{tr } u^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \text{tr } u + (\det u) \text{tr } \text{Id}_E = 0$$

c'est-à-dire  $\det u = 0$  puisque  $n = \text{tr } \text{Id}_E$  est inversible dans  $\mathbb{K}$ . L'endomorphisme  $u$  n'est donc pas inversible. Considérons alors le sous-espace  $F$  image



de  $u$  qui est de dimension  $p$  strictement inférieur à  $n$  et l'endomorphisme  $v$  induit par  $u$  sur  $F$ . Dans une base adaptée à  $F$ , la matrice de  $u^k$  est :

$$\begin{pmatrix} B^k & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si  $A'$  est la matrice de  $v$ . On en déduit que  $\text{tr } v^k$  est nulle pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  et, par récurrence, que  $v$  est nilpotent. Finalement  $u$  est nilpotent.

**26.** 1. Soit  $(g, h) \in G^2$  tels que  $\varphi(g) = \varphi(h)$ . On a  $\text{tr } gg_i = \text{tr } hg_i$  pour tout  $i$  et par combinaison linéaire  $\text{tr } gv = \text{tr } hv$  pour tout  $v \in V$ .

Cela implique  $\text{tr } gh^{-1}v = \text{tr } v$ , soit  $\text{tr } (gh^{-1} - I_n)v = 0$  pour tout  $v \in V$ .

Comme  $(gh^{-1} - I_n)^k$  appartient à  $V$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{tr } (gh^{-1} - I_n)^k = 0.$$

Cela prouve que  $(gh^{-1} - I_n)$  est nilpotent. Comme  $gh^{-1}$  est diagonalisable puisqu'il appartient à  $G$ , la matrice  $(gh^{-1} - I_n)$  est nulle (une matrice diagonalisable et nilpotente est nulle). On a donc  $(gh^{-1} - I_n) = 0$ , soit  $g = h$ . L'application  $\varphi$  est donc une injection de  $G$  dans l'ensemble fini  $\{\text{tr } g \mid g \in G\}^p$ . Le groupe  $G$  est donc fini.

2. Tout élément  $g$  de  $G$  est annulé par le polynôme scindé à racines simples  $X^m - 1$  de  $\mathbb{C}[X]$ . Il est donc diagonalisable. Comme de plus ses valeurs propres sont des racines  $m^{\text{ièmes}}$  de l'unité, l'ensemble  $\{\text{tr } g \mid g \in G\}$  contenu dans l'ensemble des sommes de  $n$  éléments de  $\mathbb{U}_m$  est fini. Par ce qui précède,  $G$  est fini.

**27.** 1. Il est évident que  $T(g)$  est un endomorphisme de  $E$ . Pour tous  $g, g'$  de  $G$ ,  $\varphi$  de  $E$  et  $x$  de  $G$ , il vient :

$$\begin{aligned} T(g + g')(\varphi)(x) &= \varphi(x + g + g') \\ &= T(g)(\varphi)(x + g') \\ &= (T(g) \circ T(g'))(\varphi)(x). \end{aligned}$$

Pour tout  $g, g'$  de  $G$ , on a  $T(g + g') = T(g) \circ T(g')$ . On en déduit  $T(0) = \text{Id}_E$  et, pour tout  $g$ ,  $T(g) \in \mathcal{GL}(E)$ .

Pour tout  $g$  de  $G$ , on a  $ng = 0$  puisque l'ordre de  $g$  divise le cardinal  $n$  de  $G$ . On en déduit  $T(g)^n - \text{Id}_E = 0$ . Puisque le polynôme est scindé à racines simples,  $T(g)$  est diagonalisable.

2. Puisque la famille  $(T(g))_{g \in G}$  est formée d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux, il existe une base  $\mathcal{B} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de diagonalisation simultanée des  $T(g)$ .

Pour tout  $g$ , la matrice de  $T(g)$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$\text{diag}(\chi_1(g), \dots, \chi_n(g))$$

avec  $\chi_i \in E$ . Puisque les  $T(g)$  sont inversibles, les  $\chi_i$  sont à valeurs non nulles. De plus, la relation  $T(g + g') = T(g)T(g')$  montre que l'on a pour tout  $i$  :

$$\forall (g, g') \in G^2, \quad \chi_i(g + g') = \chi_i(g)\chi_i(g').$$

Les  $\chi_i$  sont donc des caractères de  $G$ .

Par définition, on a :

$$\forall (g, x) \in G^2, \quad T(g)(\varphi_i)(x) = \varphi_i(x + g) = \chi_i(g)\varphi_i(x).$$

Puisque  $\varphi_i$  est non nulle, il existe  $x_i$  tel que  $\varphi_i(x_i) \neq 0$ . On en déduit

$$\forall g \in G, \quad \chi_i(g - x_i)\varphi_i(x_i) = \varphi_i(g)$$

et :

$$\forall g \in G, \quad \chi_i(g) = \chi_i(x_i)\varphi_i(x_i)^{-1}\varphi_i(g).$$

La suite de caractères  $\mathcal{C} = (\chi_1, \dots, \chi_n)$  est donc une base de diagonalisation simultanée des  $T(g)$ .

3. Il est évident que l'ensemble  $\widehat{G}$  des caractères est un sous-groupes du groupe multiplicatif de  $\mathcal{F}(G, \mathbb{C}^*)$ . Il contient évidemment les  $n$  éléments  $\chi_1, \dots, \chi_n$ .

Soit  $\chi$  un caractère de  $G$ . Puisque  $\mathcal{C}$  est une base, on peut écrire :

$$\chi = \alpha_1\chi_1 + \dots + \alpha_n\chi_n \quad (*)$$

avec  $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^n$ . On vérifie immédiatement  $T(g)(\chi) = \chi(g)\chi$ . En appliquant  $T(g)$  à la relation (\*), il vient :

$$\forall g \in G, \quad \chi(g)\chi = \alpha_1\chi_1(g)\chi_1 + \dots + \alpha_n\chi_n(g)\chi_n.$$

On en déduit :

$$\forall (g, i) \in G \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \chi(g)\alpha_i = \alpha_i\chi_i(g).$$

Il existe  $i$  tel que  $\alpha_i \neq 0$ . Cela entraîne :

$$\forall g \in G, \quad \chi(g) = \chi_i(g),$$

soit  $\chi = \chi_i$ .

Finalement  $\widehat{G}$  est égal à l'ensemble à  $n$  éléments  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ .

28. 1. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de diagonalisation de  $u$  telle que  $u(e_i) = \lambda_i e_i$  pour tout  $i$ . Notons  $u_{i,j}$  les endomorphismes vérifiant  $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$ .

On a alors, pour tout indice :

$$\begin{aligned} Ad(u)(u_{i,j})(e_k) &= u(u_{i,j}(e_k)) - u_{i,j}(u(e_k)) \\ &= u(\delta_{j,k}e_i) - u_{i,j}(\lambda_k e_k) \\ &= (\delta_{j,k}\lambda_i - \delta_{j,k}\lambda_k) e_i \\ &= (\lambda_i - \lambda_j) u_{i,j}(e_k) \end{aligned}$$

puisque  $\delta_{j,k}\lambda_k = \delta_{j,k}\lambda_j$ .

On a donc  $Ad(u)(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j) u_{i,j}$  pour tout  $i, j$ . La famille  $(u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  étant une base de  $\mathcal{L}(E)$ , l'endomorphisme  $Ad(u)$  est diagonalisable de liste de valeurs propres :

$$(\lambda_i - \lambda_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

lorsque  $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une liste de valeurs propres de  $u$ .

2. On montre immédiatement par récurrence :

$$Ad(u)^k(v) = \sum_{l=0}^k (-1)^{n-k} C_k^l u^l \circ v \circ u^{n-k}.$$

Si  $p$  vérifie  $u^p = 0$ , on a  $Ad(u)^{2p}(v) = 0$  pour tout  $v$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

3. Soit  $u = d + n$  la décomposition de Jordan de l'endomorphisme diagonalisable  $u$ . On a  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent et  $d \circ n = n \circ d$ .

On en déduit :

$$Ad(u) = Ad(d) + Ad(n)$$

avec, vu les questions précédentes,  $Ad(d)$  diagonalisable et  $Ad(n)$  nilpotente. Comme de plus :

$$\begin{aligned} (Ad(d) \circ Ad(n))(v) &= Ad(d)(n \circ v - v \circ n) \\ &= d \circ (n \circ v - v \circ n) - (n \circ v - v \circ n) \circ d \\ &= d \circ n \circ v - d \circ v \circ n - n \circ v \circ d - v \circ n \circ d \end{aligned}$$

et :

$$(Ad(v) \circ Ad(d))(v) = n \circ d \circ v - n \circ v \circ d - d \circ v \circ n - v \circ d \circ n$$

pour tout  $v$ , les endomorphismes  $Ad(v)$  et  $Ad(d)$  commutent. Ainsi, l'écriture :

$$Ad(u) = Ad(d) + Ad(n)$$

est la décomposition de Jordan de  $Ad(u)$ .

Si  $Ad(u)$  est diagonalisable, la partie nilpotente  $Ad(n)$  est nul. On a donc :

$$\forall v, \quad Ad(n)(v) = n \circ v - v \circ n$$

et, par un résultat classique,  $n = \lambda Id_E$ . Comme  $n$  est nilpotent, il vient  $n = 0$ . Finalement,  $u = d$  est diagonalisable.

## Chapitre 9

1. 1. Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln k/k} = 1$ , par sommation d'équivalents,  $\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k} \sim n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, et  $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Donc  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

2. Le développement asymptotique :

$$2 - e^{1/k} = 2 - \left(1 + \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

entraîne que :  $\ln(2 - e^{1/k}) = -\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ , et

$$\sum_{k=1}^n \ln(2 - e^{1/k}) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + S_n,$$

où  $S_n$  est la somme partielle d'une série convergente. Comme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + w_n,$$

où  $\lim_n w_n = 0$ , on voit que  $\ln u_n = -\ln n + z_n$ , où  $z_n$  est le terme général d'une suite convergente. Donc il existe  $\lambda > 0$  tel que  $u_n \sim \lambda/n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, et  $\sum u_n$  diverge.

3. Il est inutile de chercher à montrer une décroissance de  $(v_n)$  pour tenter d'appliquer le théorème des séries alternées, puisqu'un développement asymptotique de  $u_n$  donnera la réponse plus directement. Ainsi,

$$\frac{1}{p(n-p)} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{n-p} \right), \text{ donc } v_n = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}.$$

Or  $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$  donc  $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n} + \gamma \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , et  $\sum u_n$  est la somme de trois séries convergentes, les deux premières grâce justement au théorème des séries alternées.

4. Comme  $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{k}$  est la somme d'une série alternée à terme général décroissant en valeur absolue,  $0 < u_n < 1/n$ . Donc  $u_n^{\ln n} \leq \frac{1}{n^2}$  et  $\sum w_n$  converge.

2. Un développement limité donne :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{na + b} - \alpha (\ln n - \ln(n-1)) = \frac{1}{na} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

de sorte que la suite  $(u_n)$  converge si, et seulement si la série  $\sum(u_n - u_{n-1})$  converge, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\alpha = \frac{1}{a}$ .

3. 1. Pour  $\varepsilon = \pm 1$ , lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ ,

$$\sqrt{n + \varepsilon} = \sqrt{n} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

donc  $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha} \sim \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1/2}}$ , de sorte que le terme général  $u_n$  de la série tend vers 0 si, et seulement si,  $\alpha > -\frac{1}{2}$ .

Dans ce cas, un développement asymptotique (dont les coefficients explicites importent peu, mais qui commence avec un exposant  $k = 1$  et non 0) :

$$\sqrt{n + \varepsilon} = \sqrt{n} \left( \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^p}\right) \right)$$

permet d'écrire  $u_n$  sous la forme :

$$u_n = (-1)^n \left( \sum_{k=1}^p \frac{\mu_k}{n^{\alpha+k-1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+p-1/2}}\right) \right),$$

(où les coefficients  $\mu_k$  d'indice impair sont nuls, mais, ici encore, peu importe).

Si l'on choisit  $p$  assez grand pour que  $\alpha + p - 1/2 > 1$  la série  $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha+p-1/2}}$  converge absolument, tandis que, pour  $k \leq p$ , la série  $\sum_n \frac{(-1)^n \mu_k}{n^{\alpha+k-1/2}}$  est alternée à terme général tendant vers 0 en décroissant. Donc  $\sum_n u_n$  converge dès que son terme général tend vers 0, c'est-à-dire lorsque  $\alpha > -1/2$ .

2. Notons  $u_n$  le terme général. Si  $\alpha = 0$ ,  $u_n = \int_1^n 1 dt = n - 1$  et la série diverge.

Si  $\alpha > 0$ , une intégration par parties donne :

$$e^{n\alpha} u_n = \int_1^n e^{t\alpha} dt = \left[ \frac{e^{t\alpha}}{\alpha t^{\alpha-1}} \right]_1^n + \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_1^n \frac{e^{t\alpha}}{t^\alpha} dt$$

Or,  $\frac{e^{t^\alpha}}{t^\alpha} = o(e^{t^\alpha})$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $e^{n^\alpha} u_n$  est équivalent au terme entre crochets, et  $u_n \sim \frac{1}{\alpha n^{\alpha-1}}$ . Dans ce cas,  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha - 1 > 1$ , soit  $\alpha > 2$ .

Si  $\alpha < 0$ ,  $t^\alpha$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , et  $e^{t^\alpha}$  tend vers 1 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi, par intégration des équivalents  $\int_1^n e^{t^\alpha} dt \sim n$ . Par ailleurs,  $e^{n^\alpha}$  tend vers 1, donc  $u_n \sim n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, donc  $\sum u_n$  diverge dans ce cas.

3. La fonction  $u \mapsto (1+u)^{1/3}$  admet le développement asymptotique au voisinage de 0 :

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \sum_{k=1}^p \binom{1/3}{k} u^k + o(u^p) = 1 + \sum_{k=1}^p \alpha_k u^k + o(u^p).$$

Dans le cas où  $\alpha < 2$ , nous allons voir que la valeur précise des coefficients  $a_k$  non nuls importera peu. En effet, dans ce cas :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^3 + \lambda n^\alpha} &= n \sqrt[3]{1 + \lambda n^{\alpha-3}} = n \left( 1 + \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k \lambda^k}{n^{k(3-\alpha)}} + o\left(\frac{1}{n^{p(3-\alpha)}}\right) \right) \\ &= n + \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k \lambda^k}{n^{k(3-\alpha)-1}} + o\left(\frac{1}{n^{p(3-\alpha)-1}}\right) = n + w_n. \end{aligned}$$

Il suffit de retenir que c'est là un développement asymptotique dont *tous les exposants* (mis à part le premier terme  $n$ ) sont en progression arithmétique de raison  $\rho = 3 - \alpha$  strictement positive, et de valeur initiale  $\beta = 3 - \alpha - 1 = 2 - \alpha > 0$ . Notons que  $u_n = (-1)^n \sin w_n$  tend alors vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Il en résulte que  $\sin w_n$  admet aussi un *développement asymptotique* dont tous les exposants sont de la forme  $p\beta + q\rho$ , avec  $p \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  et l'un des deux nombres  $p$  et  $q$  n'est pas nul. On peut pousser ce développement aussi loin qu'on veut, et il n'y a qu'un nombre fini d'exposants dans tout intervalle  $[0, N]$  de  $\mathbb{R}$ . Si l'on le pousse assez loin pour que l'exposant  $\gamma$  dans le terme résiduel  $o(n^{-\gamma})$  soit strictement supérieur à 1,  $u_n$  est alors somme d'un nombre fini de termes généraux de séries alternées à terme général tendant vers 0 en décroissant et du terme général d'une série absolument convergente. Donc si  $\alpha < 2$ ,  $\sum u_n$  converge.

Il reste le cas  $\alpha = 2$ , pour lequel :

$$\sqrt[3]{n^3 + \lambda n^\alpha} = n + \frac{\pi\lambda}{3} - \frac{\pi\lambda^2}{9n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si  $\frac{\pi\lambda}{3} \notin \pi\mathbb{Z}$ ,  $\sum u_n$  diverge car  $|u_n|$  tend vers  $\sin \frac{\pi\lambda}{3}$ . Si  $\frac{\pi\lambda}{3} \in \pi\mathbb{Z}$ ,  $u_n = \pm(-1)^n \frac{\pi\lambda^2}{9n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  qui permet de conclure à la convergence de  $\sum u_n$ .

Lorsque  $\alpha > 1$ , on voit immédiatement que  $\sum u_n$  converge absolument.

4. Si  $n$  est un entier de la forme  $n = p(p+1)$ ,  $\sqrt{n} = p\sqrt{1 + \frac{1}{p}} = p + \frac{1}{2} + o(1)$  lorsque  $p$  tend vers l'infini, donc  $|\sin \pi\sqrt{p(p+1)}|$  tend vers 1 lorsque  $p$  tend vers l'infini. Ainsi le terme général  $u_n = \frac{\sin \pi\sqrt{n}}{n^\alpha}$  tend vers 0 si, et seulement si,  $\alpha > 0$ , ce que nous supposons désormais.

Pour  $f(t) = \frac{\sin \pi\sqrt{t}}{t^\alpha}$ , on a vu dans le cours que :

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt,$$

Or :

$$f'(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{t}} \frac{\cos \pi\sqrt{t}}{t^\alpha} - \frac{\alpha \sin \pi\sqrt{t}}{t^{\alpha+1}},$$

qui est intégrable si, et seulement si,  $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ , c'est-à-dire  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Poursuivons donc l'exploitation de cette comparaison entre série et intégrale dans le cas où  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Dans ce cas, justement :

$$\int_1^n \frac{\sin \pi\sqrt{t}}{t^\alpha} dt = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{2 \sin \pi u}{u^{2\alpha-1}} du,$$

qui admet une limite finie lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ainsi, si  $\alpha > \frac{1}{2}$ ,  $\sum u_n$  converge.

Lorsque  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ , nous allons montrer que le critère de Cauchy de convergence des séries n'est pas vérifié. La convergence lente de  $\sqrt{n}$  vers l'infini entraîne en effet l'accumulation de termes voisins de 1 en nombre trop grand pour la croissance du dénominateur. Pour le voir, si  $p$  et  $n$  sont des entiers positifs tels que  $\frac{\pi}{6} + 2\pi p \leq \pi\sqrt{n} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi p$ , alors  $\sin \pi\sqrt{n} > \frac{1}{2}$ . Le nombre de valeurs de  $n$  vérifiant ces inégalités est équivalent à :

$$\left(\frac{5}{6} + 2p\right)^2 - \left(\frac{1}{6} + 2p\right)^2 \sim \frac{8p}{3} \sim \frac{4\sqrt{n}}{3}.$$

Cela entraîne que  $\sum_{\frac{\pi}{6} + 2\pi p \leq \pi \sqrt{n} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi p} u_n$  ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  (ou  $p$ ) tend vers l'infini, et la série  $\sum u_n$  diverge.

4. 1. La somme partielle de la série est :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{4} \left( \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n} + \sum_{n=5}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=5}^{N+4} \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} \sum_{n=N+1}^{N+4} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

qui tend vers  $\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$  lorsque  $N$  tend vers l'infini.

2. La somme partielle est :

$$S_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right) = 2 \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

qui converge vers

$$S = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = 2 \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) \right) = 2(\ln 2 - 1).$$

3. Le développement limité  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  entraîne immédiatement que  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $a - b < -1$ .

Or  $(n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n \implies (n+a+1)u_{n+1} + (b-a-1)u_{n+1} = (n+a)u_n$ , c'est-à-dire que, si  $v_n = (n+a)u_n$ , alors  $(b-a-1)u_{n+1} = v_n - v_{n+1}$ .

Supposons maintenant que  $b - a - 1 > 0$ . La suite  $(v_n)$  est donc décroissante positive. Si elle admettait une limite non nulle cela entraînerait que

$u_n \sim \frac{\lambda}{n+a}$ ,  $\lambda$  constante non nulle, et la série  $\sum u_n$  divergerait, ce qui n'est pas. Donc  $\lim_n v_n = 0$ . Cela résultera d'ailleurs de l'exercice 23, mais ici, c'était immédiat.

Dès lors, en sommant de 1 à  $N$  la relation :

$$(n+1)u_{n+1} - nu_n = (1-b)u_{n+1} + au_n,$$

on voit que  $(N+1)u_{N+1} = (1-b)(S_{N+1} - u_0) + aS_N$ , où  $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ .

Comme  $nu_n$  tend vers 0, finalement :  $(1+a-b)S = (1-b)u_0$ , où  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .



4. Si l'on pose  $f(n) = \frac{\sqrt{n!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{n})}$ , on voit rapidement que  $f(n-1) - f(n) = u_n$ , où  $u_n$  est le terme général de la série que nous devons étudier. Mais alors  $\sum_{n=1}^N u_n = f(1) - f(N) = 1 - f(N)$ . Comme  $\ln f(N) = \sum_{k=1}^N \ln \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$ , et  $\ln \frac{1 + \sqrt{k}}{\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$  lorsque  $k$  tend vers l'infini  $\ln f(N)$  tend vers  $-\infty$ , et  $f(N)$  tend vers 0. La somme demandée est donc 1.

5. Supposons  $a \neq 1$ . L'hypothèse sur  $a_n$  équivaut à  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln a_n) = \ln a$ , soit à  $\ln a_n \sim \frac{\ln a}{n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Donc  $a_n$  tend vers 1, et  $\ln a_n \sim a_n - 1$ , de sorte que  $\frac{1 - a_n}{n} \sim \frac{\ln a}{n^2}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, donc la série considérée converge.

Si  $a = 1$  on voit de la même manière que  $\frac{1 - a_n}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

6. Un développement asymptotique donne :

$$\frac{\ln n}{\ln(n+p)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(1+p/n)}{\ln n}} \sim \frac{p}{n \ln n}, \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers l'infini}$$

Donc la série  $\sum \frac{\ln n}{\ln(n+p)}$  diverge. Par sommation des équivalents :

$$\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{\ln(k+p)} \sim p \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim p \ln \ln n,$$

car  $\int \frac{dt}{t \ln t} = \ln \ln t$ . Donc  $u_n \sim pn^\alpha \ln \ln n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, et  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

7. 1. Le changement de variable  $x = n + t$  donne :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2n+t} dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{2n+t} dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{2n+1} dt = \frac{1}{2n+1},$$

donc  $\sum I_n$  diverge.

2. Le changement de variable  $u = nt^2$  donne :

$$J_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \int_0^n \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du - \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du,$$

et cette écriture est légitime, car la fonction  $u \mapsto \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}$  admet une intégrale impropre de 0 à l'infini. Le premier terme  $J_n''$  de la somme est le terme général d'une série alternée convergente.

Pour le second noté  $J_n''$ , deux intégrations par parties successives donnent :

$$J_n'' = -\frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{\cos n}{2n\sqrt{n}} - \frac{3}{4} \int_n^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{5/2}} du$$

Cette dernière intégrande est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , et l'intégrale est majorée en valeur absolue par  $\int_n^{+\infty} \frac{du}{u^{5/2}}$ , terme général d'une série convergente. D'autre part, par une transformation d'Abel, on voit que les deux autres termes de la somme sont termes généraux de séries convergentes. Donc  $\sum J_n$  converge.

3. Le changement de variable  $u = (\ln t)^n$  transforme l'intégrale en

$$H_n = \frac{1}{n} \int_{(\ln a)^n}^{+\infty} e^{-u+u^{1/n}} u^{(1/n)-1} du.$$

Si  $\ln a > 1$  (c'est-à-dire  $a > e$ ),  $(\ln a)^n$  tend vers l'infini avec  $n$ . Dans ce cas, pour  $n \geq 2$  et  $u \geq 4$ ,  $u - u^{1/n} \geq u/2$ , et  $0 < e^{-u+u^{1/n}} u^{(1/n)-1} < e^{-u+u^{1/n}} \leq e^{-u/2}$ , d'où :

$$H_n \leq \frac{1}{n} \int_{(\ln a)^n}^{+\infty} e^{-u/2} du = \frac{2}{n} e^{-(\ln a)^n/2},$$

terme général d'une série (confortablement) convergente.

Si  $\ln a < 1$ , on voit immédiatement, à l'aide du théorème de convergence monotone, que  $\int_1^{+\infty} e^{-u+u^{1/n}} u^{(1/n)-1} du$  tend vers  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. En effet, la suite de fonctions  $f_n : u \mapsto e^{-u+u^{1/n}} u^{(1/n)-1}$ , toutes intégrables, converge simplement et en décroissant vers la fonction continue  $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ .

Mais alors  $H_n \sim \frac{\lambda}{n}$ ,  $\lambda$  constante non nulle, lorsque  $n$  tend vers l'infini, et la série  $\sum H_n$  diverge.

8. On observe que c'est la taille de  $a^n$  qui gouverne tout.

- Si  $a > 1$ . Comme  $f$  est continue et n'est pas identiquement nulle sur  $[1, a]$ , on peut trouver  $p$  et  $q$  tels que  $1 \leq p < q \leq a$  et :

$$\forall t \in [p, q], f(t) \geq m > 0.$$

Alors :

$$u_n \geq \alpha \int_p^q t^n dt = \alpha \frac{q^{n+1} - p^{n+1}}{n+1}$$

qui est le terme général d'une série grossièrement divergente

- Si  $a < 1$ . La série  $\sum t^n$  converge uniformément vers  $1/(1-t)$  sur  $[0, a]$  et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a t^n f(t) dt = \int_0^a \frac{f(t)}{1-t} dt$$

- Si  $a = 1$  et  $f(1) \neq 0$ . Quitte à considérer  $-f$ , supposons  $f(1) > 0$  et prenons  $\eta \in ]0, 1[$  tel que :

$$\forall t \in [1-\eta, 1], f(t) \geq \frac{f(1)}{2}.$$

La série  $\sum \int_0^{1-\eta} t^n f(t) dt$  converge, mais :

$$\int_{1-\eta}^1 t^n f(t) dt \geq \frac{f(1)}{2} \frac{1 - (1-\eta)^{n+1}}{n+1}$$

qui est le terme général d'une série divergente

- Si  $a = 1$  et  $f(1) = 0$ .

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , l'inégalité des accroissements finis nous fournit une constante  $A$  telle que  $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq A(1-t)$  et alors :

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \leq A \int_0^1 t^n (1-t) dt = A \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente.

9. L'exponentielle est convexe, donc la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{*+}$ . Elle admet 1 pour limite en 1, et le développement limité :  $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0. Elle est donc bijective de  $\mathbb{R}^{*+}$  sur  $]1, +\infty[$ . D'où l'existence et l'unicité de  $x_n$ . De plus, la réciproque  $g$  de  $f$  admet à droite de 1 le développement limité  $g(1+y) = 2y + o(y)$  lorsque  $y$  tend vers 0 dans  $\mathbb{R}^{*+}$ . D'où  $g\left(1 + \frac{1}{n}\right) = x_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, et la série  $\sum x_n$  diverge.

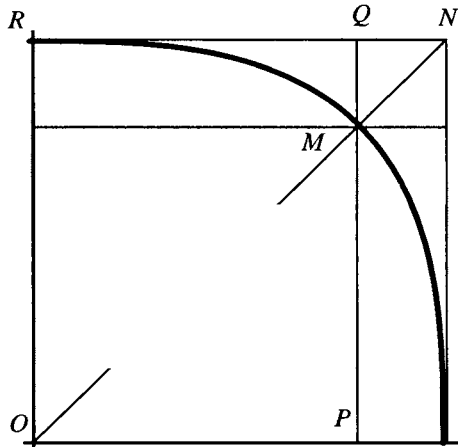
10. Le reste  $(r_n)$  est du signe de  $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ , car la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est alternée à terme décroissant vers 0 en valeur absolue. De plus,  $0 < |r_n| < \frac{1}{n^\alpha}$ , donc  $r_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Si  $\alpha > 1$ ,  $\sum r_n$  converge absolument.

D'autre part,  $|r_n| = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \dots$  et  $|r_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots$   
donc :

$$|r_n| - |r_{n+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(n+2k)^\alpha} - \frac{2}{(n+2k+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2k+2)^\alpha} \right).$$

Pour  $\alpha \in ]0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto \frac{1}{(x)^\alpha} - \frac{2}{(x+1)^\alpha} + \frac{1}{(x+2)^\alpha}$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{*+}$ , donc  $|r_n| - |r_{n+1}| \geq 0$ , et la série  $\sum r_n$  est alternée, la valeur absolue de son terme général tendant en décroissant vers 0. Elle converge donc.

- 11 Pour  $f(x) = y = (1-x^n)^{1/n}$ , comme  $y^n + x^n = 1$ , le graphe de  $f$  est symétrique



par rapport à la diagonale. Il passe par le point  $M = ((1/2)^{1/n}, (1/2)^{1/n})$ . Soit  $N = (1, 1)$ ,  $Q = ((1/2)^{1/n}, 1)$  et  $R = (0, 1)$ . La fonction  $f$  est concave, et il faut majorer  $u_n = A'_n + 2A''_n$ , où  $A'_n$  est l'aire du petit carré  $K$  de diagonale  $[M, N]$ , et  $A''_n$  est l'aire du triangle curviligne délimité par les segments  $[M, Q]$ ,  $[Q, R]$ , et l'arc de courbe entre  $M$  et  $R$ .

Or  $A'_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)^2 \sim \frac{(\ln 2)^2}{n^2}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini c'est donc le terme général d'une série convergente

Pour l'autre aire, si  $0 \leq t \leq (1/2)^{1/n}$ ,  $t^n \leq 1/2$ , et  $\ln(1 - t^n) \geq -2t^n$  (car pour  $0 \leq u \leq 1/2$ ,  $\ln(1 - u) \geq -2u$ ). Donc :

$$(1 - t^n)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1 - t^n)\right) \geq \exp\left(\frac{-2t^n}{n}\right) \geq 1 - \frac{2t^n}{n},$$

d'où :

$$\int_0^{(1/2)^{1/n}} (1 - t^n)^{1/n} dt \geq \int_0^{(1/2)^{1/n}} dt - 2 \int_0^{(1/2)^{1/n}} \frac{t^n}{n} dt \geq \mathcal{A}(OPQR) - \frac{2}{n^2},$$

où  $\mathcal{A}(OPQR)$  est l'aire du rectangle  $OPQR$ , avec  $P = ((1/2)^{1/n}, 0)$ . Donc  $A_n'' \leq \frac{2}{n^2}$ , et  $\sum u_n$  converge (et même aussi bien qu'une série de Riemann)

12. Les développements en série de  $e$  et de  $e^{-1}$  entraînent l'existence de constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que, pour tout  $n$ ,  $|e - A_n| \leq \frac{\lambda}{n!}$  et  $|e^{-1} - B_n| \leq \frac{\mu}{n!}$ . Donc  $A_n B_n - 1 = (A_n - e)B_n + (B_n - e^{-1})e = O\left(\frac{1}{n!}\right)$ . Donc la série de terme général  $A_n B_n - 1$  converge (très vite).

13. Supposons  $\alpha > 0$ . Pour tout  $n > 1$ ,  $u_n > 0$ . Donc  $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n^\alpha}$  est compris entre 0 et  $1/n^\alpha$ , et tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Mais alors  $e^{-u_n}$  tend vers 1, et  $u_{n+1} \sim \frac{1}{n^\alpha}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. La série  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

Si  $\alpha = 0$ ,  $u_{n+1} = e^{-u_n}$ , et  $u_n \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$  donc la série  $\sum u_n$  diverge.

Enfin, si  $\alpha < 0$ , et si  $(u_n)$  était bornée supérieurement,  $e^{-u_n}$  serait bornée inférieurement, et  $u_{n+1}$  tendrait vers l'infini. Donc  $\sum u_n$  diverge.

14. La suite de terme général  $V_n = \ln u_n$  vérifie la récurrence linéaire :

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}(-2V_{n-1} + 2V_{n-1} + 2V_{n-3} + V_{n-4}).$$

de polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^4 + \frac{2}{3}X^3 - \frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{2}{3} \\ &= (X - 1)(X + 1) \left(X + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Pour n'importe quelles conditions initiales (strictement positives),  $V_n$  est de la forme :

$$V_n = \alpha(-1)^n + \beta + \gamma \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \delta \left( \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^n$$

et reste borné. Donc  $u_n$  ne tend pas vers 0, et  $\sum u_n$  diverge toujours.

15. Posons  $t_n = u_n^2$ . Alors :

$$t_{n+1} = u_{n+1}^2 = \left( u_n + \frac{1}{u_n} \right)^2 = u_n^2 + \frac{1}{u_n^2} + 2 = t_n + \frac{1}{t_n} + 2 \geq t_n + 2.$$

Donc  $t_n$  tend vers l'infini avec  $n$ . De plus,  $t_n \geq t_0 + 2n$ , d'où  $\frac{1}{t_n} \leq \frac{1}{t_0 + 2n}$ , et

$t_{n+1} \leq t_n + \frac{1}{t_0 + 2n} + 2$ , de sorte que, pour  $n \geq 1$  :

$$t_n \leq t_0 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t_0 + 2k}.$$

L'application  $x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{t_0 + 2x}$  est décroissante, donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k) \leq \varphi(0) + \int_0^{n-1} \varphi(x) dx = \frac{1}{t_0} + \int_0^{n-1} \frac{dx}{t_0 + 2x}.$$

Ainsi,  $t_0 + 2n \leq t_n \leq t_0 + 2n + \frac{1}{t_0} + \frac{1}{2} (\ln(t_0 + 2(n-1)) - \ln(t_0))$

Pour  $n \leq 1000$ ,  $t_n \leq t_0 + 2n + \frac{1}{t_0} + \frac{1}{2} (\ln(t_0 + 1998) - \ln(t_0)) = T_0 + 2n$ , avec

$T_0 = t_0 + \frac{1}{t_0} + \frac{1}{2} (\ln(t_0 + 1998) - \ln(t_0)) = 27,23673\dots$ . La même récurrence que

ci-dessus donne cette fois-ci :  $t_n \geq t_0 + 2n + \int_0^n \frac{dx}{T_0 + 2x}$ . Donc, si  $n \leq 1000$  :

$$t_0 + 2n + \frac{1}{2} (\ln(T_0 + 2n) - \ln(T_0)) \leq t_n.$$

D'où l'encadrement numérique, pour  $n = 1000$  :

$$2025 + \frac{1}{2} (\ln(T_0 + 2000) - \ln T_0) \leq t_{1000} \leq 2025 + \frac{1}{25} + \frac{1}{2} (\ln 2023 - \ln 25),$$

d'où :

$$45,02393\dots \leq u_{1000} \leq 45,02484\dots,$$

et l'écart entre ces deux valeurs est nettement inférieur à 1 pour mille ! En fait,  $u_{1000} = 45,02452\dots$

Pour la suite, comme  $t_n \sim 2n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $\frac{1}{t_n} \sim \frac{1}{2n}$ , et, par sommation d'équivalents :

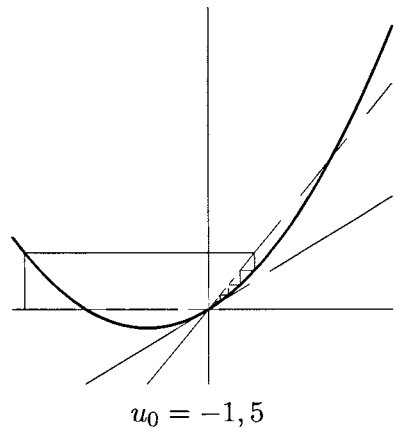
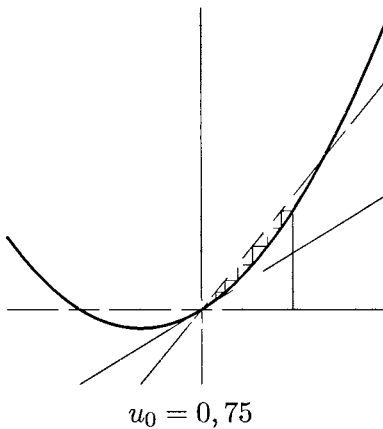
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k} \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \sim \frac{\ln n}{2},$$

lorsque  $n$  tend vers l'infini. Donc  $t_n - t_0 - 2n \sim \frac{\ln n}{2}$ , et  $t_n = 2n + \frac{\ln n}{2} + o(\ln n)$ .

D'où immédiatement le développement asymptotique de  $u_n = \sqrt{t_n}$  à deux termes :

$$u_n = \sqrt{2n + \frac{\ln n}{2} + o(\ln n)} = \sqrt{2n} \left( 1 + \frac{\ln n}{8n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right)$$

16.



1. (a) Si  $u_0 = 1$  ou  $0$ , la suite  $(u_n)$  est constante.
- (b) Si  $u_0 \in ]0, 1[$ , par récurrence, pour tout  $n$ ,  $0 < u_{n+1} < u_n$ , et la suite  $(u_n)$ , décroissante minorée, converge vers un point fixe de  $f$  qui ne peut être que  $0$ .
- (c) Si  $u_0 \in ]-1, 0[$ , de même  $u_n < u_{n+1} < 0$  et  $u_n$  tend vers  $0$ .
- (d) Si  $u_0 \in ]-2, -1[$ ,  $u_1 \in ]0, 1[$  et on est ramené à un cas déjà vu
- (e) Si  $u_0 > 1$ ,  $u_{n+1} > U_n$ , et la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .
- (f) Enfin, si  $u_0 < -2$ ,  $u_1 > 1$ .

Enfin, si  $u_0 \in \{-2, 1\}$ , la suite stationne en  $1$  ; si  $u_0 \in ]-2, 1[$ , elle tend vers  $0$  en étant monotone au moins à partir de  $n = 1$ , et si  $u_n \notin [-2, 1]$ ,  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .

Voyons pour quelles valeurs de  $u_0$  la série  $\sum u_n$  converge. Ce ne peut être que pour  $u_0 \in ]-2, 1[$ . Dans ce cas, dès que  $n \geq 1$ ,  $|u_n| \leq |u_1| < 1$ , et

$$|u_{n+1}| \leq \frac{1 + |u_1|}{2} |u_n|, \text{ avec } \frac{1 + |u_1|}{2} < 1, \text{ donc la série } \sum u_n \text{ converge.}$$

2. Nous nous bornerons ici au cas où  $u_0 \in ]0, 1[$ , les autres étant similaires. Si  $v_n = 2^n u_n$ , alors  $\ln v_n = n \ln 2 + \ln u_n$ . Or  $\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln(1 + u_n) - \ln 2$ , donc  $\ln v_{n+1} = n \ln 2 + \ln u_n + \ln(1 + u_n) = \ln v_n + \ln(1 + u_n)$ . Nous avons vu que  $\sum u_n$  était absolument convergente, donc  $\sum \ln(1 + u_n)$  converge, et la suite  $(v_n)_n$  converge vers une limite  $\ell$  non nulle. Mais alors  $u_n \sim \frac{\ell}{2^n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Pour un second terme du développement de  $u_n$ , observons que :

$$L - \ln v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \ln(1 + u_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ell}{2^k} = \frac{\ell}{2^{n-1}},$$

par sommation des équivalents. Donc  $\ln v_n = L - \frac{\ell}{2^{n-1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ , et :

$$v_n = \ell \exp\left(-\frac{\ell}{2^{n-1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \ell - \frac{\ell^2}{2^{n-1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

$$\text{d'où } u_n = \frac{\ell}{2^n} - \frac{\ell^2}{2^{2n-1}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right).$$

17. 1. Pour tout  $n$ ,  $u_n \geq 0$ , donc l'expression sous le radical est positive et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie. De plus, la suite  $(x_n)_n$  est positive croissante, car  $x_0 \geq 0$ , et, par récurrence, si  $x_n \geq 0$  :

$$x_{n+1} \geq ax_n + (1-a)\sqrt{x_n^2} = ax_n + (1-a)x_n = x_n.$$

2. On en tire que  $\frac{x_{n+1} - ax_n}{1-a} = \sqrt{u_n + x_n^2}$ . Si  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - ax_n}{1-a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{u_n + x_n^2} = \ell = \lim_n \sqrt{x_n^2},$$

donc  $u_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. De plus :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(x_{n+1} - ax_n)^2}{(1-a)^2} - x_n^2 = \frac{(x_{n+1} - x_n + x_n - ax_n)^2}{(1-a)^2} - x_n^2 \\ &= \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{(1-a)^2} + \frac{2(x_{n+1} - x_n) \cdot x_n \cdot (1-a)}{(1-a)^2} \\ &= \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{(1-a)^2} + \frac{2(x_{n+1} - x_n) \cdot x_n}{(1-a)}. \end{aligned}$$

Or  $x_{n+1} - x_n \geq 0$ , donc  $\sum_n |x_{n+1} - x_n| = \sum_n (x_{n+1} - x_n)$ , et la convergence de la suite  $(x_n)$  entraîne celle de la série  $\sum_n |x_{n+1} - x_n|$ . Comme  $(x_n)$  est bornée par un réel  $M$ ,  $(x_{n+1} - x_n)^2 \leq |x_{n+1} - x_n| \cdot M$ , et :

$$0 \leq u_n \leq |x_{n+1} - x_n| \frac{M}{(1-a)^2} + 2 \frac{|x_{n+1} - x_n|}{(1-a)} M,$$

donc  $\sum_n u_n$  converge.



Réciproquement, si la suite  $(x_n)$  diverge, il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $x_n \geq 1$ , et l'expression donnée plus haut de  $u_n$  entraîne que :

$$u_n \geq \frac{2(x_{n+1} - x_n)}{1 - a}, \text{ et } u_N + u_{N+1} + \dots + u_n \geq \frac{2(x_{n+1} - x_N)}{1 - a}.$$

Donc  $\sum u_n$  diverge, puisque  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$ .

18. 1 La suite  $(u_n)$  est décroissante minorée, donc converge, et sa limite est, par continuité de  $f$  l'unique point fixe de  $f$ , à savoir 0. Ainsi, en observant que  $u_n^{\alpha-1}$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta (1 - \lambda u_n^{\alpha-1} + o(u_n^{\alpha-1}))^\beta - u_n^\beta \\ &= u_n^\beta (1 - \beta \lambda u_n^{\alpha-1} + o(u_n^{\alpha-1})) - u_n^\beta = -\beta \lambda u_n^{\alpha-1+\beta} + o(u_n^{\alpha-1+\beta}) \end{aligned}$$

Comme  $\alpha - 1 > 0$ , nous pouvons prendre  $\beta = 1 - \alpha$ , strictement négatif, ce qui entraîne que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\beta \lambda > 0$ . Par sommation des équivalents, ou le théorème de Cesàro :

$$u_n^\beta = u_0^\beta + \sum_{k=1}^n (u_k^\beta - u_{k-1}^\beta) \sim -n\beta\lambda,$$

donc  $u_n \sim \frac{1}{(|\alpha - 1|\lambda n)^{1/(\alpha-1)}}$ .

2. La série  $\sum n^\gamma u_n$  converge donc si, et seulement si,  $\gamma - \frac{1}{\alpha - 1} < -1$ , ce qui ne dépend pas de la valeur de  $\lambda$ .
3. Ici,  $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , donc  $\alpha - 1 = 2$ , et la série  $\sum u_n$  diverge, car  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge.

19. La série est à termes positifs, et il suffit donc de montrer qu'une sous-suite de la suite des sommes partielles converge pour prouver qu'elle converge. Pour tout  $N$ , soit  $A_N$  l'ensemble des éléments  $k$  de  $A$  tels que  $10^N \leq k < 10^{N+1}$ . Ainsi,  $A_0 = \{1, 2, \dots, 8\}$ , et :

$$A_1 = \{10, 11, \dots, 18, 20, \dots, 28, 30, \dots, 38, \dots, 80, \dots, 88\}.$$

Pour tout  $k \in A_N$ , notons  $A_{k,N} = \{10k, 10k + 1, \dots, 10k + 8\} \subset A_{N+1}$ . Ces parties  $A_{k,N}$  forment une partition de  $A_{N+1}$  lorsque  $k$  décrit  $A_N$ . De plus,

$$\sum_{\ell \in A_{k,N}} \frac{1}{\ell} \leq \frac{9}{10k}, \text{ donc } \sum_{k \in A_{N+1}} \frac{1}{k} \leq \frac{9}{10} \sum_{k \in A_N} \frac{1}{k}. \text{ Il en résulte que :}$$

$$\sum_{k \in A_N} \frac{1}{k} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^N \sum_{k \in A_0} \frac{1}{k},$$

et :

$$\sum_{k \in \bigcup_{p \leq N} A_p} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{1 - 9/10} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} \right).$$

D où la convergence désirée, et une majoration de  $\sum_{k \in A} \frac{1}{k}$ .

- 20** Les nombres dans l'intervalle  $[[10^k, 10^{k+1} - 1]]$  sont exactement ceux qui s'écrivent avec  $k + 1$  chiffres décimaux, dont le dernier à gauche ne soit pas un 0. Si  $n$  est écrit avec  $k + 1$  chiffres où figurent  $p$  zéros, il est déterminé par la position de ses zéros, repérée par une partie à  $p$  éléments de  $[[0, k - 1]]$ , et le choix de ses  $k + 1 - p$  autres décimales, qui ne prennent pas la valeur 0. Donc il y a  $C_k^p 9^{k+1-p}$  nombres dans  $[[10^k, 10^{k+1} - 1]]$  comprenant  $p$  zéros dans leur écriture.

Or  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{f(n)}}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} \frac{\alpha^{f(n)}}{n^2}$ , et :

$$\frac{1}{(10^{k+1})^2} \sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} \alpha^{f(n)} \leq \sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} \frac{\alpha^{f(n)}}{n^2} \leq \frac{1}{10^{2k}} \sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} \alpha^{f(n)},$$

d'où :

$$\frac{1}{10^{2k+2}} \sum_{p=0}^k C_k^p \alpha^p 9^{k+1-p} \leq u_n \leq \frac{1}{10^{2k}} \sum_{p=0}^k C_k^p \alpha^p 9^{k+1-p}.$$

Donc  $\sum u_n$  converge si, et seulement si la série de terme général

$$v_k = \frac{9}{10^{2k}} \sum_{p=0}^k C_k^p \alpha^p 9^{k+1-p} = \frac{9}{10^{2k}} (\alpha + 9)^k$$

converge. Cela équivaut évidemment à  $\frac{\alpha + 9}{100} < 1$ , soit  $\alpha < 100 - 9 = 91$ .

- 21** Leur nature est la même, en raison des inégalités :

$$(n+1)u_{(n+1)^2} \leq (2n+1)u_{(n+1)^2} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq (2n+1)u_{n^2}.$$

En effet, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $(2n+1)u_{n^2} \sim 2nu_{n^2} = 2v_n$ , de sorte que :

$$\sum_{p=1}^n v_p \leq \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} u_k = O\left(\sum_{p=1}^n v_p\right).$$

22. On sait que  $\alpha_n \geq \log_{10} n - 1$ , pour  $n \geq 10$ , donc :

$$\frac{1}{\alpha_n^{\alpha_n}} \leq \frac{1}{(\log_{10} n - 1)^{\log_{10} n - 1}} = \frac{1}{\left(\frac{\ln n}{\ln 10} - 1\right)^{\frac{\ln n}{\ln 10} - 1}} = \frac{1}{\beta_n^{\beta_n}}, \quad \text{avec } \beta_n = \frac{\ln n}{\ln 10} - 1$$

Mais ;

$$\ln(\beta_n^{\beta_n}) = \beta_n \ln \beta_n = \left(\frac{\ln n}{\ln 10} - 1\right) \ln \left(\frac{\ln n - \ln 10}{\ln 10}\right) \sim \frac{\ln n}{\ln 10} \ln \ln n,$$

donc il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$  :

$$\ln(\beta_n^{\beta_n}) \geq \frac{(\ln n)(\ln \ln n)}{2 \ln 10} \geq 2 \ln n,$$

et  $\frac{1}{\beta_n^{\beta_n}} \leq n^2$ , ce qui assure la convergence de  $\sum \alpha_n^{-\alpha_n}$

23. 1. La transformation d'Abel :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) + na_{n+1}$$

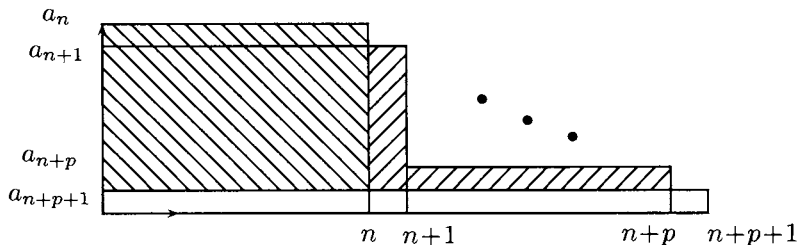
entraîne que, si  $\sum a_n$  converge, la série à termes positifs  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  converge (puisque sa suite des sommes partielles est croissante majorée). Mais dans ce cas,  $(na_{n+1})$  est la différence de deux suites convergentes, donc converge. Si sa limite n'était pas nulle,  $a_n$  serait équivalent à  $\frac{\lambda}{n}$  pour une constante  $\lambda$  non nulle, ce qui entraînerait la divergence de la série  $\sum a_n$ . Donc  $(na_{n+1})_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il en est de même de  $(na_n)$ .

2. Réciproquement, si  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  converge, soit  $\ell$  la limite de la suite décroissante  $(a_n)$ . Lorsque  $\ell \neq 0$ , évidemment  $\sum a_n$  diverge. Lorsque  $\ell = 0$ , la majoration (avec  $p \geq 0$ ) :

$$0 \leq n(a_n - a_{n+p+1}) = \sum_{k=n}^{n+p} n(a_k - a_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{n+p} k(a_k - a_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} k(a_k - a_{k+1})$$

entraîne que  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ , d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1}).$$



3. C'est le cas chaque fois que, lorsque  $\lim_n a_n = \ell$ , la série  $\sum (a_n - \ell)$  converge, mais  $\ell \neq 0$ . Par exemple  $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ .

24. Comme  $a_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, pour tout  $x > 0$ , il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $a_n < x$ , donc  $N(x)$  est bien défini (et inférieur ou égal à  $N$ ).

On peut remplacer la suite  $(a_n)$  par une suite décroissante. En effet, si  $\lambda_0 = \sup a_n$ ,  $\lambda_0 = \max a_n$  et ce maximum est atteint en un nombre fini  $n_0$  de valeurs de  $n$ . On définit  $b_m = \lambda_0$  pour  $m < n_0$ . Puis, soit  $\lambda_1$  le maximum des autres valeurs de la suite, valeur prise  $n_1$  fois. On définit  $b_m = \lambda_1$  pour  $n_0 < m \leq n_0 + n_1$ , et ainsi de suite. La suite  $(b_m)$  prend les mêmes valeurs que  $(a_n)$ , et le même nombre de fois, mais elle est décroissante. La série  $\sum b_m$  converge si, et seulement si,  $\sum a_n$  converge. La fonction  $N$  associée à  $(b_m)_m$  est la même que celle que l'énoncé a associée à  $(a_n)$ .

Nous supposons donc maintenant que la suite  $(a_n)$  est décroissante. Mais alors, si  $a_{p+1} < x \leq a_p$ , il est clair que  $N(x) = p$ . Donc :

$$\int_{a_{p+1}}^{a_p} N(x) dx = p(a_p - a_{p+1}), \quad \text{et} \quad \int_{]a_{p+1}, a_1]} N(x) dx = \sum_{k=1}^p k(a_k - a_{k+1}).$$

Nous sommes exactement ramenés à l'exercice 23, ce qui permet de conclure.

25. Comme  $1/f$  est décroissante, la convergence de  $\sum \frac{1}{f(n)}$  équivaut à l'intégrabilité de  $f$  sur un intervalle  $[a, +\infty[$ , où  $a$  est un réel strictement positif de notre choix.

Il en est de même de la convergence de  $\sum \frac{g(m)}{m^2}$  et de l'intégrabilité de  $y \mapsto \frac{g(y)}{y^2}$  sur  $[b, +\infty[$ , grâce aux encadrements et équivalents suivants lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$\frac{g(m)}{m^2} \sim \frac{g(m)}{(m+1)^2} \leq \int_m^{m+1} \frac{g(y)}{y^2} dy \leq \frac{g(m+1)}{m^2} \sim \frac{g(m+1)}{(m+1)^2}.$$

La fonction  $y \mapsto g(y)/y^2$  n'est pas nécessairement monotone, aussi les encadrements ci-dessus ne peuvent être remplacés par un simple argument de monotonie de la fonction à intégrer.

Le changement de variable  $y \mapsto g(y)$  permet alors d'écrire, pour  $a = g(b)$  et des borne supérieures d'intégration  $Y$  et  $X = g(Y)$  :

$$\int_a^X \frac{dx}{f(x)} = \int_b^Y \frac{g'(y)}{y} dy = \frac{g(Y)}{Y} - \frac{g(b)}{b} + \int_b^Y \frac{g(y)}{y^2} dy.$$

Si  $\frac{1}{f(x)}$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , les deux fonctions positives  $Y \mapsto \frac{g(Y)}{Y}$  et  $Y \mapsto \int_b^Y \frac{g(y)}{y^2} dy$  sont bornées supérieurement, et en particulier  $\frac{g(y)}{y^2}$  est intégrable sur  $[b, +\infty[$ .

Réciproquement, si  $\frac{g(y)}{y^2}$  est intégrable sur  $[b, +\infty[$ , alors, pour  $Y' \geq Y$  :

$$\int_Y^{Y'} \frac{g(y)}{y^2} dy \geq g(Y) \int_Y^{Y'} \frac{dy}{y^2} = g(Y) \left( \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right),$$

qui tend vers  $\frac{g(Y)}{Y}$  lorsque  $Y'$  tend vers l'infini. Donc la fonction positive  $Y \mapsto \frac{g(Y)}{Y}$  est bornée, et  $1/f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

Finalement,  $1/f$  est intégrable si, et seulement si, la fonction  $y \mapsto g(y)/y^2$  l'est.

- 26** Pour  $\alpha = 2$ , nous allons montrer que  $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$  diverge. Pour  $N$  donné si l'on réordonne la suite finie  $(\sigma(n))_{1 \leq n \leq N}$ , ce qui donne la suite finie  $(\theta(n))_{n \leq N}$  alors, pour  $n \leq N$ ,  $\theta(n) \geq n$ . Ainsi :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\theta(n)} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n},$$

et l'inégalité de Schwarz (pour une somme finie) donne :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^2 &= \left( \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{\sigma(n)}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(n)}} \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N \frac{\sigma(n)}{n^2} \right) \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma(n)} \right) \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^N \frac{\sigma(n)}{n^2} \right) \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

On simplifie par  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$  à gauche et à droite, d'où :  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^N \frac{\sigma(n)}{n^2}$ .

La divergence de la série harmonique entraîne le résultat cherché.

Pour  $\alpha < 2$ , comme  $\frac{\sigma(n)}{n^\alpha} > \frac{\sigma(n)}{n^2}$  la série  $\sum_n \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$  diverge « encore plus ».

Pour  $\alpha > 2$ , on ne peut pas conclure, car il y a des cas de convergence, et des cas de divergence. Par exemple, pour  $\sigma(n) = n$ , la série  $\sum n^{1-\alpha}$  converge. Mais choisissons une suite  $(\rho_n)$  strictement croissante d'entiers telle que  $\rho_n > n^\alpha$ , et  $\rho_{n+1} \geq \rho_n + 2$ ; définissons une permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  par  $\sigma(2p) = \rho_p$ , et la suite des  $\sigma(2p+1)$  décrit le complémentaire (infini) de l'ensemble des  $\rho_p$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

La suite des  $\frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$  ne tend même pas vers 0, donc  $\sum \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$  diverge.

27. On définit par récurrence une suite d'indices  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $p_0 = 0$ , et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} a_k \geq n$ , ce qui est possible vue la divergence de  $\sum a_n$ . Puis, pour  $p_{n-1} < k \leq p_n$ , on pose  $b_k = \frac{1}{n}$ . Cela répond évidemment à la question, car  $\sum_{k=1}^{p_n} a_k b_k \geq n$ .

28. Lorsque  $\sum u_n$  converge,  $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{u_n}{u_0}$ , donc la série  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  converge.

Lorsque  $\sum u_n$  diverge, voyons d'abord le cas  $\alpha = 1$ . Pour  $q \geq p + 1$ ,

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{u_n}{S_n} \geq \sum_{n=p+1}^q \frac{u_n}{S_q} = \frac{S_q - S_p}{S_q} = 1 - \frac{S_p}{S_q}.$$

Comme  $\sum u_n$  diverge, pour tout  $p$  il existe  $q > p$  tel que  $\frac{S_p}{S_q} < \frac{1}{2}$  donc la série  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  ne satisfait pas au critère de Cauchy pour les séries, et diverge.

Il en résulte que, pour  $\alpha < 1$ ,  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  diverge aussi.

Enfin, pour  $\alpha > 1$  et  $n > 0$ ,

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha},$$

terme général d'une série convergente, puisque la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Donc  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  converge.

29. 1. Posons  $A_{-1} = 0$ . La transformation d'Abel :

$$S_n = a_0u_0 + \dots + a_nu_n = \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1})u_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(u_k - u_{k+1}) + A_nu_n$$

entraîne que, pour  $n \geq N > 0$  :

$$\frac{S_n}{A_n} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} A_k(u_k - u_{k+1})}{A_n} + \frac{\sum_{k=N}^{n-1} A_k(u_k - u_{k+1})}{A_n} + u_n.$$

Par hypothèse, il existe  $M$  tel que, pour tout  $n$ ,  $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} A_k}{A_n} \leq M$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que, pour tout  $k \geq N$ ,  $|u_k - u_{k+1}| \leq \varepsilon u_k \leq \varepsilon u_{k+1} \leq \varepsilon u_n$ , car  $(u_k)$  est croissante. Fixons donc  $N$ . Pour tout  $n \geq N$  :

$$\left| \frac{\sum_{k=N}^{n-1} A_k(u_k - u_{k+1})}{A_n} \right| \leq \varepsilon u_n \frac{\sum_{k=N}^{n-1} A_k}{A_n} \leq \varepsilon u_n M.$$

Comme  $n$  peut encore varier, il existe  $N' > N$  tel que, pour tout  $n \geq N'$  :

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{N-1} A_k(u_k - u_{k+1})}{A_n} \right| \leq \varepsilon,$$

auquel cas,  $\left| \frac{S_n}{A_n} - u_n \right| \leq \varepsilon + \varepsilon u_n M$ . D'où l'équivalent cherché.

2. Ici, on pose  $a_n = 2^n$  et  $u_n = \ln n$ , de sorte que  $A_n = \sum_{k=0}^n 2^k \sim 2^{n+1}$ , et

$\sum_{k=0}^n A_k \sim 2^{k+2}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On applique la première question,

et cela donne :  $S_n \sim (\ln n) \sum_{p=1}^n 2^p \sim 2^{n+1} \ln n$  si  $n$  tend vers l'infini.

3. Il suffit de considérer  $a_n = n$  et  $u_n = \sqrt{n}$ . Dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^n a_k u_k \sim \int_0^n t^{3/2} dt = \frac{2}{5} n^{5/2},$$

tandis que  $\left( \sum_{k=1}^n a_k \right) u_n \sim \frac{1}{2} n^{5/2}$ .

30. Soit  $U_n = \sum_{p=0}^{\alpha(n)} u_p$ . Montrons que la suite  $(U_n)_n$  diverge. Elle a même nature que la série  $\sum a_n$  où  $a_n = U_n - U_{n-1}$ . La décroissance de  $(u_n)$  entraîne que :

$$a_n = \sum_{p=\alpha(n)+1}^{\alpha(n+1)} u_p \geq (\alpha(n+1) - \alpha(n)) u_{\alpha(n+1)} \geq \frac{\alpha(n+1) - \alpha(n)}{\alpha(n+1)} = v_n > 0.$$

Si la suite  $(a_n)$  ne tend pas vers 0,  $\sum a_n$  diverge et  $\sum u_n$  aussi.

Si la suite  $(a_n)$  tend vers 0, il en est de même de la suite  $(v_n)$ . Cela entraîne que  $\alpha(n+1) \sim \alpha(n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, et  $v_n \sim \frac{\alpha(n+1) - \alpha(n)}{\alpha(n)} = w_n$ .

Les séries  $\sum v_n$  et  $\sum w_n$  ont même nature. Or  $w_n \geq \int_{\alpha(n)}^{\alpha(n+1)} \frac{dt}{t} = t_n > 0$ , et

$$\sum_{k=1}^{p-1} t_k = \int_{\alpha(1)}^{\alpha(p)} \frac{dt}{t} = \ln \alpha(p) - \ln \alpha(1) \text{ tend vers l'infini avec } n.$$

31. 1. Si  $u_n$  ne tend pas vers 0,  $\frac{u_n}{1+u_n}$  non plus. Sinon,  $\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$ . Donc dans tous les cas  $\sum v_n$  diverge.
2. Soit  $v_n = \frac{u_n}{1+nu_n}$ . Ici, il y a des cas de convergence de  $\sum v_n$ , et des cas de divergence.

Par exemple, si  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $v_n = \frac{1}{2n}$  et  $\sum v_n$  diverge.

En revanche, si l'on pose  $u_{2^p} = 1$ , et  $u_n = 0$  si  $n$  n'est pas une puissance de 2, la série  $\sum u_n$  diverge, car son terme général ne tend pas vers 0, mais  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{1+2^p}$ , et  $\sum v_n$  converge.

Il en va de même pour les séries  $\sum \frac{u_n}{1+n^\alpha u_n}$  lorsque  $0 < \alpha \leq 1$ , les exemples pour les deux situations sont les mêmes.

3. Ici,  $v_n - \frac{1}{n^\alpha} = -\frac{1}{n^\alpha(1+n^\alpha u_n)} < 0$  donc la série à termes positifs  $\sum v_n$  converge.
4. Ici encore, il y a des cas de convergence et des cas de divergence de  $\sum v_n$ , où  $v_n = \frac{1}{1+u_n^2}$ . Si  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $\sum v_n$  diverge, car  $v_n \sim u_n$ . En revanche, si l'on pose  $u_{2^p} = 2^p$  et  $u_n$  est nul lorsque  $n$  n'est pas une puissance de 2 alors  $v_{2^p} = \frac{2^p}{1+2^{2p}} < \frac{1}{2^p}$ , et  $\sum v_n$  converge.



- 32** 1. Il suffit de prendre  $u_{2p} = 0, u_{2p+1} = 1, v_{2p} = 1, v_{2p+1} = 0$ , car  $\min(u_n, v_n) = 0$  alors que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent.
2. Ici encore, la série  $\sum \min(u_n, v_n)$  ne diverge pas nécessairement. Nous allons construire une partition de  $\mathbb{N}$  en intervalles  $I_0, J_0, I_1, J_1, \dots, I_p, J_p, \dots, p \in \mathbb{N}$ , rangés dans cet ordre c'est-à-dire que, pour tout  $p$ ,  $\min J_p = \max I_p + 1$ , et  $\max J_p + 1 = \min I_{p+1}$ . Les longueurs  $\ell_p = \text{card } I_p$  et  $\ell'_p = \text{card } J_p$ , et les suites décroissantes  $(a_p)_p$  et  $(b_p)_p$  vont être choisies de telle sorte que :
- pour tout  $p, a_p \geq b_p \geq a_{p+1}$  ;
  - les séries  $\sum a_p \ell_p$  et  $\sum b_p \ell'_p$  divergent ;
  - les séries  $\sum b_p \ell_p$  et  $\sum a_{p+1} \ell'_p$  convergent.

Dans ce cas, il suffira de poser : pour  $n \in I_p, u_n = a_p, v_n = b_p$ , et pour  $n \in J_p, u_n = a_{p+1}, v_n = b_p$ , pour que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, tandis que  $\sum \min(u_n, v_n)$  converge. En effet, si  $I = \bigcup_p I_p$  et  $J = \bigcup_p J_p$  :

$$\sum_{n \in I} u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \ell_p, \quad \sum_{n \in J} v_n = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \ell'_p$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \min(u_n, v_n) = \sum_{p=0}^{+\infty} (b_p \ell_p + a_{p+1} \ell'_p) < +\infty.$$

Un exemple de suites qui conviennent évidemment est donné par :

$$a_p = \frac{1}{2^{p^2}}, \quad b_p = \frac{1}{2^{p+p^2}}, \quad \ell_p = 2^{p^2}, \quad \ell'_p = 2^{p+p^2}.$$

L'exercice suivant montre essentiellement qu'on ne peut prendre pour l'une des deux suites cherchées  $(u_n)$  et  $(v_n)$  une suite qui tend trop lentement vers 0, ce qui impose des suites à augmentation rapides comme l'exemple proposé.

- 33** 1. Si, pour tout  $n \geq n_0$  à partir d'un certain rang,  $u_n \geq 1/n$ , alors  $\min(u_n, 1/n) = 1/n$  si  $n \geq n_0$ , et  $\sum \min(u_n, 1/n)$  diverge. De même si, pour  $n \geq n_0, u_n \leq 1/n$ , car  $\min(u_n, 1/n) = u_n$  pour  $n \geq n_0$ . Nous pouvons donc supposer que, pour tout  $n$ , il existe  $m \geq n$  tel que  $u_m \geq u_n$ , et il existe  $m' > n$  tel que  $u_{m'} < u_n$ .

Il existe donc une suite d'intervalles  $(I_p)_p, p \in \mathbb{N}$ , non vides telle que, pour tout  $p, \min I_{p+1} \geq \max I_p + 2$ , et :

$$\forall n \in I_p, u_n < \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \forall n \notin I_p, u_n \geq \frac{1}{n}.$$

Notons  $\alpha_p = \max I_p + 1$ . La suite  $(v_n)_n$  constante égale à  $1/\alpha_p$  sur chaque intervalle  $I_p \cup \{\alpha_p\}$ , et telle que  $v_n = 1/N$  si  $n$  n'est pas dans l'un des  $I_p$ , minore à la fois  $(u_n)_n$  et la suite  $(1/n)$ . Montrons qu'elle diverge.

Soit  $(N_p)_p$  la suite croissante des indices  $n$  tels que  $v_n = 1/n$ . Sur  $[[N_{p-1} + 1, N_p]] \subset \mathbb{N}$ ,  $v_n$  est constante égale à  $1/N_p$ , de sorte que :

$$\sum_{n=N_0+1}^{N_p} v_n = \sum_{q=1}^p \frac{N_q - N_{q-1}}{N_q}.$$

Posons enfin,  $w_0 = N_0$  et, pour  $p \geq 1$ ,  $w_p = N_p - N_{p-1}$ . Nous savons avec l'exercice 28 que la série  $\sum_{q=0}^p \frac{w_p}{w_q}$  diverge, ce qui permet de conclure.

2. Il suffit de remarquer que  $u_n$  n'est jamais nul, et que :

$$\frac{u_n}{1 + nu_n} = \frac{1}{n + 1/u_n} \geq \frac{1}{2 \max(n, 1/u_n)} = \min\left(\frac{1}{n}, u_n\right),$$

puis on applique la première question.

34 La valeur absolue  $|c_n|$  tend vers l'infini. En effet

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt[3]{(n-k)+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Mais la fonction  $t \mapsto (t+1)(n-t+1) = -t^2 + nt + n+1$  atteint son maximum en  $t = n/2$ , où elle prend la valeur  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2$ , donc  $|c_n| \geq \frac{n+1}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{2/3}}$ , et  $|c_n|$

tend vers l'infini lorsque  $n$  tend vers l'infini.

35. 1. D'abord, soit  $E$  l'espace vectoriel des séries absolument convergentes de réels. Si  $\sum a_n \in E$ , alors, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\sum a_n^k \in E$ , car dès que  $|a_n| \leq 1$ ,  $|a_n|^k \leq 1$ . En particulier,  $E \subset \ell^2$ , espace des suites de carré sommable. Mais alors :

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_{k+2}} - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = \frac{\alpha_{k+1}^2 - \alpha_k \alpha_{k+2}}{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2}}, \quad \text{avec :}$$

$$\alpha_{k+1}^2 - \alpha_k \alpha_{k+2} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{k+1} \right)^2 - \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{k+2} \right).$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ , où  $u_n = a_n^{k/2}$  et  $v_n = a_n^{(k+2)/2}$ , car alors  $u_n v_n = a_n^{k+1}$ , et  $\alpha_{k+1}^2 - \alpha_k \alpha_{k+2} \leq 0$ .

2. Une série à termes positifs est commutativement convergente. On peut réordonner ses termes et supposer qu'elle est décroissante. Plus précisément, soit  $p$  le nombre de termes égaux à  $a_0$ , de sorte que  $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1}$ , et, pour tout  $n \geq p$ ,  $a_n < a_0$ . Ainsi :

$$\alpha_k = pa_0^k + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n^k = pa_0^k \left( 1 + \sum_{n=p}^{+\infty} \left( \frac{a_n}{a_0} \right)^k \right).$$

Montrons que  $\alpha_k \sim pa_0^k$  lorsque  $k$  tend vers l'infini (ce qui permet de conclure que  $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$  tend vers  $a_0$  lorsque  $k$  tend vers l'infini). Cela revient à prouver que si  $\sum \mu_n$  converge et si, pour tout  $n$ ,  $|\mu_n| < 1$ , alors

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |\mu_n|^k = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que  $\sum_{n=N}^{+\infty} |\mu_n| \leq \varepsilon$ , d'où  $\sum_{n=N}^{+\infty} |\mu_n|^k \leq \varepsilon$  pour  $k \geq 1$ . Mais en faisant varier  $k$ , on voit que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu_n|^k = 0.$$

36. 1. Le produit infini  $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$  converge si, et seulement si,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \ell \neq 0$ ,

où  $p_n = \prod_{k=n_0}^n (1 + u_k)$ . Par continuité de l'exponentielle (et du logarithme),

cela équivaut à  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln p_n = \ln \ell$ . Or  $\ln p_n = \sum_{k=n_0}^n \ln(1 + u_k)$ .

On notera que lorsque  $\lim_n p_n = 0$ , on dit bien que le produit infini *diverge* !

2. Cela va résulter aisément de l'encadrement :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[ , \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{4},$$

lui-même obtenue en intégrant entre 0 et  $x$  les inégalités vérifiées sur

$$\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[ : \quad 1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - 2x.$$

Comme  $\lim_n u_n = 0$ , il existe  $n_1$  tel que, pour  $n \geq n_1$ ,  $|u_n| \leq 1/2$ , et donc :

$$-u_n^2 \leq \ln(1 + u_n) - u_n \leq -\frac{u_n^2}{4}.$$

Ainsi, si  $\sum |u_n|^2$  converge, on voit que  $\sum \ln(1 + u_n)$  converge si et seulement si  $\sum u_n$  converge.

3. Si  $\sum |u_n|$  converge,  $\sum |u_n|^2$  converge, donc  $\prod(1 + u_n)$  converge d'après la question précédente.

4. Conséquence immédiate de la question précédente.

5. Il faut montrer que  $\sum \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$  diverge. Or :

$$\ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \right).$$

Les termes extrêmes de la somme sont termes généraux de séries convergentes, mais pas le terme central, d'où la divergence.

37. 1. La série  $\sum \frac{-t^2}{n^2\pi^2}$  est absolument convergente, et l'on peut appliquer la troisième question de l'exercice 36.

2. Il existe un polynôme  $P_n$  de degré  $n$  tel que, pour tout  $t$  réel,  $\sin nt = P_n(\sin t)$ . Pour  $n = 2p + 1$ , ses racines sont les  $2p + 1$  réels  $\sin \frac{k\pi}{n}$ , pour  $-p \leq k \leq p$  (rangés dans cet ordre) Donc il existe une constante  $\lambda_n$  telle que, pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned} \sin nt = P_n(\sin t) &= \lambda_n \sin t \prod_{k=1}^p \left( \sin t - \sin \frac{k\pi}{n} \right) \left( \sin t + \sin \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= \lambda_n \sin t \prod_{k=1}^p \left( \sin^2 t - \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

Avec  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin nt}{\sin t} = n$ , on voit que :  $\lambda_n \prod_{k=1}^p \left( -\sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) = n$ , d'où :

$$\sin nt = n \sin t \prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2(k\pi/n)} \right).$$

La seconde formule découle de la première, car si  $\varphi \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$ ,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 \varphi} &= 1 - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t \tan^2 \varphi} = \frac{(1 - \sin^2 t) \tan^2 \varphi - \sin^2 t}{\cos^2 t \tan^2 \varphi} \\ &= \frac{\tan^2 \varphi - (1 + \tan^2 \varphi) \sin^2 t}{\cos^2 t \tan^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 t} \left( 1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \varphi} \right). \end{aligned}$$

3. Les inégalités demandées sont conséquences de la concavité du sinus et de la convexité de la tangente sur  $[0, \pi/2[$ .

4. Pour  $n = 2p + 1$  pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq p$  et tout réel  $t$  tel que  $0 < t < k\pi$ , on voit que  $t/n < k\pi/n$ , et  $0 < \frac{\tan(t/n)}{t/n} < \frac{\tan(k\pi/n)}{k\pi/n}$ .

Appliquons les égalités de la deuxième question à  $t/n$  à la place de  $t$ .  
Compte tenu des inégalités de la troisième question cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{\sin t}{n \sin(t/n)} &= \prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{\sin^2(t/n)}{\sin^2(k\pi/n)} \right) \\ &\leq \prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{(t/n)^2}{(k\pi/n)^2} \right) = \prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2} \right) \\ &\leq \prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{\tan^2(t/n)}{\tan^2(k\pi/n)} \right) = \frac{\sin t}{n \cos^n(t/n) \tan(t/n)}. \end{aligned}$$

Lorsque  $n$  tend vers l’infini,  $n \sin(t/n)$  et  $n \tan(t/n)$  tendent vers 1. D’autre part,  $1 \geq \cos^n(t/n) \geq \left( 1 - \frac{(t/n)^2}{2} \right)^n$ , qui tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l’infini. Les deux termes extrêmes de la chaîne d’inégalités ci-dessus tendent donc vers  $\frac{\sin t}{t}$ , d’où le résultat.

**38** Pour  $n \geq 1$ , notons  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . Alors la relation de récurrence qui définit  $(u_n)_n$  s’écrit :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} S_{n-1},$$

soit  $S_1 = u_1$ , et :

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = S_{n-1} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right).$$

Pour tout  $n \geq 2$ ,  $S_n > -1$ . Comme dans l’exercice 36, posons  $\ell_n = \ln S_n$ , et étudions la nature de la série  $\sum \ell_n$ .

Développons asymptotiquement  $\ell_n$  en :

$$\ell_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o \left( \frac{1}{n^{2\alpha}} \right).$$

Le premier terme  $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est celui d’une série convergente. La somme des deux autres est équivalente à  $\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ , et la série  $\sum \ell_n$  a donc même nature que  $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ . Elle converge si, et seulement si,  $\alpha > 1/2$ .

Si  $\alpha \leq 1/2$ ,  $\ell_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$  lorsque  $n$  tend vers l’infini, donc  $\sum \ell_n$  diverge vers  $-\infty$ , ce qui signifie que la suite  $S_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l’infini.

39. 1. D'après l'exercice 36, l'existence d'une limite  $L$  strictement positive équivaut à la convergence de la série  $\sum_n \ln \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$ , et résulte de l'absolue convergence de  $\sum_n \left(-\frac{1}{p_n^\alpha}\right)$ . Mais, pour  $\alpha > 1$ ,  $\sum_m \frac{1}{m^\alpha}$  converge, donc, *a fortiori*,  $\sum_n \frac{1}{p_n^\alpha}$  converge. D'où le résultat.

2. Le quotient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)} &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{p_n^\alpha} + \frac{1}{p_n^{2\alpha}} + \dots\right) \\ &= \sum_{i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, \dots, i_N \geq 0} \frac{1}{(p_1)^{i_1 \alpha} (p_2)^{i_2 \alpha} \dots (p_N)^{i_N \alpha}} \end{aligned}$$

est la somme de tous les  $\frac{1}{m^\alpha}$ ,  $m$  entier n'ayant que des puissances de  $p_1, p_2, \dots, p_N$  dans sa décomposition en facteurs premiers. Les inégalités demandées sont alors évidentes, car si  $k \leq p_N$ ,  $k$  n'a pas de facteur premier strictement supérieur à  $p_N$ .

3. Comme la suite  $(p_N)$  tend vers l'infini le résultat est immédiat par passage à la limite dans les inégalités.
4. La relation :

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)} = \sum_{i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, \dots, i_N \geq 0} \frac{1}{(p_1)^{i_1 \alpha} (p_2)^{i_2 \alpha} \dots (p_N)^{i_N \alpha}}$$

est vraie pour tout  $\alpha > 0$ , donc l'inégalité de gauche de la deuxième question demeure pour tout  $\alpha > 0$ , en particulier pour  $\alpha = 1$ . Comme

$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p_N} \frac{1}{k} = +\infty$ , cela entraîne que  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = 0$ . Donc pour  $u_n = -\frac{1}{p_n}$ , le produit infini  $\prod_n (1 + u_n)$  diverge.

Or nous avons vu à la première question que  $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{p_n^2}$  converge.

D'après la deuxième question de l'exercice 36, cela entraîne que  $\sum u_n$  diverge, d'où le résultat.

- 40 1. Observons que  $\sigma_{0,p} = \sigma_{p-1} = (s_0 + \dots + s_{p-1})/p$ . De :

$$\begin{aligned} k\sigma_{N,k} - (k+N)\sigma_{N+k-1} &= (s_N + \dots + s_{N+k-1}) - (s_0 + \dots + s_{N+k-1}) \\ &= -(s_0 + \dots + s_{N-1}) = -N\sigma_{N-1} \end{aligned}$$

il résulte que :

$$\sigma_{N,k} - \left(1 + \frac{N}{k}\right) \sigma_{N+k-1} + \frac{N}{k} \sigma_{N-1} = 0.$$

Mais alors  $\sigma_{N,k_N} = \left(1 + \frac{N}{k_N}\right) \sigma_{N+k_N-1} - \frac{N}{k_N} \sigma_{N-1}$ , et si  $(N/k_N)_N$  tend vers  $\ell$  et  $(\sigma_N)_N$  vers  $s$ , le second membre tend vers  $(1 + \ell)s - \ell s = \ell$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{N,k_N} = s$ .

2. Un regroupement d'indices donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{N,k} - s_N &= \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} (s_{N+p} - s_N) = \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{n=N+1}^{N+p} c_n = \frac{1}{k} \sum_{\substack{0 \leq p \leq k-1 \\ N+1 \leq n \leq N+p}} c_n \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\substack{N < n \leq N+k-1 \\ n-N \leq p \leq k-1}} c_n = \frac{1}{k} \sum_{N < n \leq N+k-1} (k - (n - N)) c_n, \end{aligned}$$

d'où la formule demandée :

$$\sigma_{N,k} - s_N = \sum_{N < n < N+k} \left(1 + \frac{N-n}{k}\right) c_n.$$

L'hypothèse  $|nc_n| \leq M$  entraîne alors que :

$$\begin{aligned} |\sigma_{N,k} - s_N| &\leq \sum_{N < n < N+k} \left(1 + \frac{N-n}{k}\right) \frac{M}{n} \\ &\leq \frac{M}{kN} \sum_{N < n < N+k} (k + N - n) = \frac{M}{kN} \sum_{q=1}^{k-1} (k - q) = \frac{M(k-1)}{2N}, \end{aligned}$$

d'où la majoration demandée.

3. Fixons  $\varepsilon > 0$ . La suite d'entiers  $k_N = \left\lceil \frac{N\varepsilon}{M} \right\rceil + 1 \geq 1$  (où les crochets désignent la partie entière) vérifie  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_N}{N} = \frac{\varepsilon}{M}$ . Il existe donc  $N_0$  tel que, pour  $N \geq N_0$ ,  $k_N/N \leq 2\varepsilon/M$ , et d'après la deuxième question,  $|\sigma_{N,k_N} - s_N| \leq M k_N / 2N \leq \varepsilon$ . Or d'après la première question, si  $\lim_N \sigma_N = \ell$ ,  $\lim_N \sigma_{N,k_N} = \ell$  aussi, et il existe  $N'_0 \geq N_0$  tel que, pour tout  $N \geq N'_0$ ,  $|\sigma_{N,k_N} - \ell| \leq \varepsilon$ , d'où  $|s_N - \ell| \leq 2\varepsilon$ . Ainsi,  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \ell$ .

41. Les trois premiers cas rentrent dans le cadre d'une série  $\sum \frac{a_n}{n}$  où la suite  $(a_n)_n$  est périodique, ce qui (l'ensemble de définition étant  $\mathbb{N}$  et non  $\mathbb{Z}$ ) signifie qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+p} = a_n$ . Or il est facile de voir qu'une telle série  $\sum \frac{a_n}{n}$  converge si, et seulement si,  $\sum_{i=0}^{p-1} a_i = 0$ . En effet, comme  $u_n = \frac{a_n}{n}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, le théorème de regroupement par tranches entraîne que la série  $\sum u_n$  converge si, et seulement si, la série  $\sum w_n$  converge, où  $w_n = \sum_{i=0}^{p-1} u_{pn+i}$ .

Ici, si  $\sum_{i=0}^{p-1} a_i = 0$ , alors  $w_n = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_i}{pn+i} = O(1/n^2)$ ; sinon,  $w_n$  est équivalent à

$$\frac{\sum_{i=0}^{p-1} a_i}{n}.$$

Dans le premier cas,  $a_n = \cos(\pi L_n)$ , et la liste des restes modulo 2 de  $(L_n)$  est 0, 1, 1, 0, 1, 1, ... de période 3, et leurs cosinus sont respectivement 1, -1, -1, 1, -1, -1, ... de période 3, donc la suite de terme général  $a_n = \cos(\pi L_n)$  est 3-périodique, avec pour premières valeurs 1, -1, -1. Donc  $\sum \frac{a_n}{n}$  diverge.

Dans le second cas, la suite des restes modulo 4 de  $L_n$  est 2, 1, 3, 0, 3, 3, 2, 1, ... La suite de leurs cosinus est aussi 6-périodique, et prend les valeurs -1, 0, 0, 1, 0, 0, donc  $\sum \frac{a_n}{n}$  converge.

Nous laissons au lecteur le troisième cas.

La série  $\sum \cos \pi \alpha_n$  ne relève pas de ces calculs, mais la suite récurrente linéaire  $(L_n)$  va nous être utile. En effet,  $L_n$  est de la forme :

$$L_n = \alpha \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  se trouvent en examinant  $L_0$  et  $L_1$ , et  $\alpha = \beta = 1$ . Donc :

$$\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n = L_n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$ ,  $\cos \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \sim (-1)^{L_n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Vu la 3-périodicité de la suite  $(-1)^{L_n}$ , la série envisagée diverge.



42. 1. La suite de terme général  $u_n = \frac{\ln n}{n}$  est décroissante à partir d'un certain rang. La série  $\sum u_n$  diverge, tandis que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Donc, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $s_n \sim \int_1^n \frac{\ln t dt}{t} = \frac{1}{2}(\ln n)^2$ .

2. Notons :  $r_n = (-1)^n(u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \dots)$ , de sorte que :

$$r_{n+1} = (-1)^n(-u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + u_{n+4} - \dots).$$

Or, par hypothèse,  $u_n - u_{n+1} \sim u_{n+1} - u_{n+2}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini donc les deux séries à termes positifs  $\sum_p (u_{2p} - u_{2p+1})$  et  $\sum_p (u_{2p+1} - u_{2p+2})$  sont convergentes ont des restes équivalents, et :  $|r_n| \sim |r_{n+1}|$ . Vu leurs signes,  $r_{n+1} \sim -r_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, d'où :

$$(-1)^n u_n = r_n + (-r_{n+1}) = r_n - r_{n+1} \sim 2r_n.$$

Il en résulte que  $r_n \sim \frac{(-1)^n u_n}{2}$ .

3. Immédiat avec la question précédente :  $r_n \sim \frac{(-1)^n}{4} (\ln n)^2$ .

43. 1. Comme  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^\beta$ , et :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^\beta &= \left( \frac{\ln n + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln n} \right)^\beta = \left( 1 + \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln n} \right)^\beta \\ &= 1 + \frac{\beta}{n \ln n} + o\left( \frac{1}{n \ln n} \right), \end{aligned}$$

on voit que :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left( 1 - \frac{1}{n} + o\left( \frac{1}{n^2} \right) \right) \left( 1 - \frac{\beta}{n \ln n} + o\left( \frac{1}{n \ln n} \right) \right),$$

d'où le résultat en extrayant de cela les termes dominants

2 On considère  $\beta = \frac{1+\delta}{2}$ , et la suite  $(v_n)$  de la première question. Dans le cas où  $\delta > 1$ , si  $n$  est assez grand,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{\delta - \beta}{n \ln n} + o\left( \frac{1}{n \ln n} \right) > 0$ .

La suite est claire, puisque la règle de Bertrand dit que  $\sum v_n$  converge si, et seulement si,  $\beta > 1$ .

3. Immédiat en prenant  $\delta = 0$  dans la question précédente.

44. Notons  $b_n = a_{p_n}$ .

1. La suite  $(a_n)$  décroît, donc, pour tout  $N \geq 1$  :

$$\sum_{n=1}^N (p_n - p_{n-1})b_n = \sum_{n=1}^N (p_n - p_{n-1})a_{p_n} \leq \sum_{m=p_0+1}^{p_N} a_m,$$

et si  $\sum a_m$  converge, la série  $\sum (p_n - p_{n-1})b_n$  converge.

Réciproquement, pour tout  $N \geq 2$  :

$$\sum_{m=p_0+1}^{p_N} a_m = \sum_{n=1}^N \sum_{p_{n-1} < m \leq p_n} a_m \leq \sum_{n=1}^N (p_n - p_{n-1})a_{p_{n-1}} \leq \alpha \sum_{n=1}^N (p_{n-1} - p_{n-2})b_n -$$

donc si  $\sum (p_n - p_{n-1})b_n$  converge,  $\sum a_m$  converge.

2. Il suffit de poser  $p_n = p^n$  et  $\alpha = p$  dans la question précédente puisque

$$p^n a_{p^n} = \frac{p}{p-1} (p^n - p^{n-1})a_{p^n}, \text{ et } p^n - p^{n-1} = p(p^{n-1} - p^{n-2}).$$

3. Une suite naturelle d'indices  $p_n$  ne vérifiant pas la condition de la première

question est  $p_n = 1 + 2^{n^2}$ . On définit alors  $(a_m)_m$  par :  $a_m = \frac{1}{2^{n^2}}$  pour tous

les  $m$  tels que  $2^{(n-1)^2} < m \leq 2^{n^2}$ .

Ainsi, si  $N \geq 1$  :

$$\sum_{m=2}^{2^{N^2}} a_m = \sum_{n=1}^N \frac{2^{n^2} - 2^{(n-1)^2}}{2^{n^2}},$$

qui diverge manifestement puisque c'est la somme partielle d'une série indexée par  $n$  dont le terme général tend vers 1. Mais

$$(p_n - p_{n-1})a_{p_n} = \frac{2^{n^2} - 2^{(n-1)^2}}{2^{(n+1)^2}}, \text{ équivalent à } \frac{1}{2^{2n+1}} \text{ lorsque } n \text{ tend vers}$$

l'infini, terme général d'une série convergente.

45. Posons  $S_p = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{n^\alpha}$ . Alors :

$$\frac{(p+1)^2 - p^2}{(p+1)^{2\alpha}} \leq S_p \leq \frac{(p+1)^2 - p^2}{p^{2\alpha}},$$

donc  $S_p \sim \frac{2}{p^{2\alpha-1}}$  lorsque  $p$  tend vers l'infini. Si  $\sum_n a_n$  converge,  $\sum_p (-1)^p S_p$

converge, donc nécessairement  $2\alpha - 1 > 0$ , c'est-à-dire que  $\alpha > 1/2$ .

Dans ce cas montrons que la série  $\sum (-1)^p S_p$  converge. Il est inutile de chercher à prouver que la suite  $(S_p)_p$  décroît (auquel cas on pourrait appliquer le théorème des séries alternées), car l'équivalent que nous avons trouvé va

fournir une série alternée de terme général suffisamment proche de  $S_p$  pour conclure à la convergence de  $\sum (-1)^p S_p$ . En effet :

$$\left| S_p - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{(p^2)^\alpha} \right| = u_p = \left| \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{(p^2 + k)^\alpha} - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{(p^2)^\alpha} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{2p} \left( \frac{1}{p^{2\alpha}} - \frac{1}{(p+1)^{2\alpha}} \right) = (2p+1) \left( \frac{1}{p^{2\alpha}} - \frac{1}{(p+1)^{2\alpha}} \right).$$

Or  $\frac{1}{(p+1)^{2\alpha}} = \frac{1}{p^{2\alpha}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right)$ , donc  $u_p = O\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right)$  lorsque  $p$  tend vers l'infini. Donc  $\sum u_p$  converge absolument. La série  $\sum \frac{(-1)^p (2p+1)}{p^{2\alpha}}$  converge, d'après le théorème des séries alternées (en partant de  $p$  assez grand). Donc  $\sum (-1)^p S_p$  converge. Le théorème de regroupement des termes par tranches entraîne que  $\sum a_n$  converge.

46. Malgré ces hypothèses très restrictives, montrons sur un exemple qu'il se peut que  $\sum t_n a_n$  diverge. Pour  $p \geq 1$ , si  $n \in I_p = \llbracket 2^{p-1}, 2^p - 1 \rrbracket$ , posons  $a_n = \frac{(-1)^{p-1}}{p 2^{p-1}}$ . Les premiers termes sont :

$$1, -\frac{1}{2 \cdot 2}, -\frac{1}{2 \cdot 2}, +\frac{1}{3 \cdot 4}, +\frac{1}{3 \cdot 4}, +\frac{1}{3 \cdot 4}, +\frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$$

La série  $\sum a_n$  converge, car  $\sum_{n \in I_p} a_n = \frac{(-1)^{p-1}}{p}$ , terme général d'une série alternée convergente, et l'on peut appliquer le théorème de regroupement par tranches.

Mais définissons  $b_n = t_n a_n$  comme ceci : si  $p$  est impair et  $n \in I_p$ ,  $b_n = a_n$  ; si  $p$  est pair et  $n \in I_p$ , on pose  $b_n = \frac{(-1)^p}{(p+1)2^p}$ .

La série  $\sum b_n$  vérifie bien nos hypothèses, mais si  $p$  est pair,

$$\sum_{n \in I_p \cup I_{p+1}} b_n = \frac{1}{2} \sum_{n \in I_{p+1}} a_n,$$

et la série  $\sum b_n$  diverge. Ainsi, si l'on remplace les termes d'une série convergente par des termes plus petits, variant dans le même sens et de même signe, cela n'assure pas la convergence de la nouvelle série.

47. 1. La suite  $(a_n)$  tend vers 0, et  $a_n$  est positif pour tout  $n$ . On peut évidemment supposer que  $a_n$  ne s'annule pas (sinon, il n'y a rien à prouver).

En posant  $S_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k$ , on a :  $\varepsilon_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{a_n}$ .

Donc, avec une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n) a_n &= \frac{1}{1/a_n} \left( \frac{S_1 - S_0}{a_1} + \frac{S_2 - S_1}{a_2} + \dots + \frac{S_n - S_{n-1}}{a_n} \right) \\ &= S_n - \frac{1}{1/a_n} \left( \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) S_1 + \dots + \left( \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right) S_{n-1} \right). \end{aligned}$$

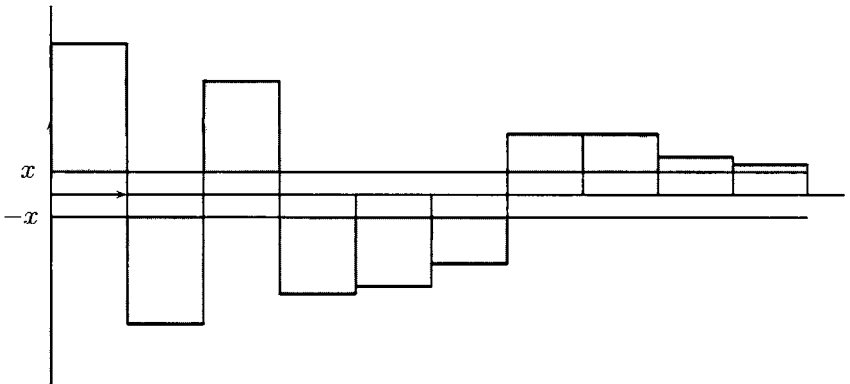
La suite de terme général  $\beta_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}$  tend vers l'infini avec  $n$ ,

donc  $\frac{\sum_{k=2}^n \beta_k S_{k-1}}{\sum_{k=2}^n \beta_k}$  admet la même limite que  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Comme,  $\beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1}$  cela entraîne que  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n) a_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

2. L'existence de  $N(x)$  est évidente. Supposons maintenant que  $b_n = \varepsilon_n a_n$ , où la suite  $(a_n)$  tend en décroissant vers 0, et  $\varepsilon_n = \pm 1$  pour tout  $n$ . On montre comme dans l'exercice 24 que :

$$\int_{-\infty}^{-a_n} N(t) dt + \int_{a_n}^{+\infty} N(t) dt = \left( \sum_{k=0}^n \varepsilon_k a_k \right) - \left( \sum_{k=0}^n \varepsilon_k \right) a_n.$$



En effet, si les valeurs positives prises par  $b_n$  sont  $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$  :

$$\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k-1}} N(t) dt = \text{card}\{n / b_n \geq \lambda_k\} (\lambda_{k-1} - \lambda_k),$$

donc  $\int_{\lambda_k}^{+\infty} N(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \max(b_n - \lambda_k, 0)$ , avec une formule analogue pour les valeurs négatives prises par la suite  $(b_n)$ . La réponse résulte alors de la première question.

3. Une série alternée à terme général tendant vers 0 en valeur absolue, mais non absolument convergente peut être permutée de manière à diverger. Or, par construction, la fonction  $N$  ne change pas quand on permute les termes d'une série. La limite de la somme des deux intégrales lorsque  $x$  tend vers 0 n'est plus la somme de la série permutée, car cette somme n'existe pas !

48. Il existe  $n_0$  et  $A > 0$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$  et tout  $p > 0$ ,  $\sum_{k=1}^p \frac{1}{a_{n+k}} \leq \frac{A}{a_n}$ ,

donc  $\frac{p}{a_{n+p}} \leq \frac{A}{a_n}$ , soit  $\forall n \geq n_0, a_n \leq \frac{A}{p} a_{n+p}$ .

Fixons  $p$  tel que  $A/p \leq 1/2$ , de sorte que, pour  $n \geq n_0$ ,  $a_n \leq a_{n+p}/2$ . Sommons alors par tranches de  $p$  termes, en fixant  $n_1 = m_1 p \geq n_0$  et posons, pour  $m \geq m_1$  :

$$S_m = a_{mp} + a_{mp+1} + a_{mp+2} + \dots + a_{mp+p-1}.$$

Ainsi,  $S_m \leq \frac{1}{2} S_{m+1}$ , et :

$$S_{m_1} + S_{m_1+1} + \dots + S_m \leq \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) S_{m+1} \leq S_{m+1}.$$

Si  $n \geq m_1 p$ , par division euclidienne,  $n$  s'écrit  $n = mp + q$ , et :

$$\begin{aligned} S_{m_1 p, n} &= a_{m_1 p} + \dots + a_{mp} + \dots + a_n \\ &\leq S_{m_1} + S_{m_1+1} + \dots + S_{m-1} + a_{mp} + \dots + a_n \\ &\leq 2S_{m-1} + a_{mp} + \dots + a_n \leq 2pa_{n+1} + pa_{n+1} \leq 3pa_{n+1}, \end{aligned}$$

car  $S_{m-1} \leq pa_{mp} \leq pa_{n+1}$ .

## Chapitre 10

1. Soit  $a$  un vecteur de l'intérieur de  $F$ . Une boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  est contenue dans  $F$ , donc si  $\|v - a\| < \varepsilon, v \in F$ . Mais alors  $v - a$  aussi est dans  $F$ , et  $F$  contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ .

Pour tout  $v \in E$  il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda v \in B(0, \varepsilon) \subset F$ , donc  $v = \frac{1}{\lambda} \lambda v$  est aussi dans  $F$ .

2. La réponse aux trois questions repose sur la continuité de l'application  $d(\cdot, F)$ , vue dans le cours, car  $|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y)$ .

1. L'ensemble  $U_n = \{x \in E / d(x, F) < 1/n\}$  est ouvert, et

$$\bigcap_n U_n = \{x \in E / d(x, F) = 0\} = \overline{F} = F$$

2. On peut poser :

$$U = \{x \in E / d(x, F) < d(x, G)\} \quad \text{et} \quad V = \{x \in E / d(x, G) < d(x, F)\}.$$

Ces deux ensembles sont évidemment disjoints. Notons que  $F \subset U$ , car si  $x \in F$ ,  $d(x, G) > 0$ , puisque  $F$  ne rencontre pas  $\overline{G} = G$ .

3. La fonction  $x \mapsto f(x) = \frac{d(x, G)}{d(x, F) + d(x, G)}$  fait l'affaire, car le dénominateur ne s'annule jamais, puisque  $\overline{F} \cap \overline{G} = F \cap G = \emptyset$ . De plus,  $f(x) = 1 \iff d(x, F) = 0$ , et  $f(x) = 0 \iff d(x, G) = 0$ .

3. 1. Il suffit de prendre  $A = [0, 1[$ ,  $B = [1, 2]$ . Alors  $\text{Fr}(A \cup B) = \{0, 2\}$ ,  $\text{Fr}(A \cap B) = \emptyset$ ,  $\text{Fr}(A) = \{0, 1\}$ , et  $\text{Fr}(B) = \{1, 2\}$ .

2. Revenons au cas général, et montrons les deux inclusions :

(a)  $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$ . Soit  $x \in \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  tel que  $x \notin A \overset{\circ}{\cup} B$ .

On peut admettre que  $x \in \overline{A}$ . Comme  $\overset{\circ}{A} \subset A \overset{\circ}{\cup} B$ , si  $x \notin A \overset{\circ}{\cup} B$ , a fortiori,  $x \notin \overset{\circ}{A}$ , et donc  $x \in \text{Fr}(A)$ .

(b)  $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$ . Soit  $x \in \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ , tel que

$$x \notin A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \overset{\circ}{\cap} \overset{\circ}{B}.$$

Si  $x \notin \overset{\circ}{B}$ , alors  $x \notin \overset{\circ}{A}$ , et  $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \text{Fr}(A)$ . Sinon, on échange les rôles de  $A$  et  $B$ .

3. Supposons maintenant que  $A$  et  $B$  sont fermés. Alors,  $A \cap B \subset A$ , donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ , donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B$ . Mais d'autre part  $A \cap B \subset \overline{A \cap B}$ . Donc  $\overline{A \cap B} = A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B}$ .

4. Dans ce cas, il reste à montrer que :  $\text{Fr}(A) \subset \text{Fr}(A \cup B) \cup \text{Fr}(A \cap B)$ .

Soit  $x \in \overline{A}$ , avec  $x \notin \overset{\circ}{A}$ . On a déjà :  $x \in \overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$ . Si  $x \notin A \overset{\circ}{\cup} B$ , c'est terminé. Sinon,  $x \in A \overset{\circ}{\cup} B$ , et il existe un ouvert  $U$  contenant  $x$  et contenu dans  $A \cup B$ . Comme  $x \notin \overset{\circ}{A}$  tout ouvert  $V$  contenant  $x$ , et qu'on peut supposer dans  $U \subset A \cup B$ , doit donc rencontrer  $B$ . Ainsi,  $x \in \overline{B}$ .

Comme  $x$  est aussi adhérent à  $A$ ,  $x \in \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  d'après la question précédente.

Pour finir,  $x \notin A \overset{\circ}{\cap} B$ , car  $x \notin \overset{\circ}{A}$ . Donc  $x \in \text{Fr}(A \cap B)$ .

4. Montrons que cette adhérence est l'ensemble  $\ell_0$  des suites tendant vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Si  $a = (a_n)_n$  est adhérent à  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ , alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite presque nulle  $b = (b_n)_n$  telle que  $\|a - b\| = \|(a_n - b_n)_n\| \leq \varepsilon$ . Il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $b_n = 0$ , donc  $|a_n| \leq \varepsilon$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Réciproquement, soit  $a = (a_n)_n$  une suite tendant vers 0 à l'infini. Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|a_n| \leq \varepsilon$ . On définit alors une suite  $b = (b_n)_n$  par : lorsque  $n < N$ ,  $b_n = a_n$ , et lorsque  $n \geq N$ ,  $b_n = 0$ . Il est immédiat que  $\|b - a\| = \sup_{n \geq N} |a_n| \leq \varepsilon$ .

**Remarque** Ainsi,  $\ell_0$  est fermé dans l'espace  $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  des suites bornées, donc en particulier complet. On retrouve ainsi qu'une limite uniforme d'une suite de suites tendant vers 0 à l'infini tend vers 0 à l'infini.

5. 1. Evidemment,  $U$  est ouvert, puisque  $H$  est continue. Voyons sa densité. Soit  $(z_1, \dots, z_p)$  un zéro de  $H$ . Il faut montrer qu'aussi près de ce point qu'on veut, il existe un point où ne s'annule pas le polynôme  $H$ . Soit  $(z'_1, \dots, z'_p) \in \mathbb{C}^p$  un point tel que  $H(z'_1, \dots, z'_p) \neq 0$ . La fonction polynomiale à une variable :

$$t \mapsto \rho(t) = H(z_1 + t(z'_1 - z_1), \dots, z_p + t(z'_p - z_p))$$

n'est pas identiquement nulle, car  $\rho(1) = H(z'_1, \dots, z'_p) \neq 0$ , donc sa racine 0 est isolée, et si  $t$  est assez petit non nul,  $\rho(t) \neq 0$ .

2. Montrons que  $P$  et  $Q$  ont une racine commune si, et seulement si :

$$\det(Q(M_P)) = 0.$$

En effet, il existe une matrice inversible  $S$  telle que  $S^{-1}M_P S$  soit triangulaire, de diagonale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  où  $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ . Mais alors  $S^{-1}Q(M_P)S$  est triangulaire de diagonale  $(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p))$ , donc  $P$  et  $Q$  ont une racine commune si, et seulement si,  $\det(Q(M_P)) = \prod_i Q(\lambda_i) = 0$ .

Mais l'application qui associe à  $(P, Q)$  le nombre  $\text{Res}(P, Q) = \det(Q(M_P))$  est polynomiale en fonction des coefficients des deux polynômes donc est continue.

3. Il suffit d'appliquer la question précédente à  $P$  et à  $P'$  normalisé

6. La matrice  $M$  de la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  dans une base de  $E$  est de rang  $p$  si, et seulement si, la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est libre. Nous devons donc montrer que l'ensemble des matrices  $M \in M_{n,p}(\mathbf{K})$  de rang  $p$  est un ouvert de  $M_{n,p}(\mathbf{K})$ . Or cet ensemble de matrices est l'ensemble  $\mathcal{U}$  des matrices  $M \in M_{n,p}(\mathbf{K})$  dont l'un au moins des mineurs de taille  $p$  soit non nul. Les mineurs étant des fonctions continues des coefficients de la matrice,  $\mathcal{U}$  est réunion d'ouverts, et est donc ouvert.

7. 1. 2. et 3. Le rang de  $M$  est inférieur ou égal à  $p$  si, et seulement si, les mineurs de  $M$  de taille au moins  $p + 1$  sont tous nuls. Donc  $\mathcal{R}_p$  est intersection de fermés, et est fermé. Son complémentaire  $\mathcal{R}'_p$  est donc ouvert. Pour  $p = n - 1$ , on retrouve que  $GL_n(\mathbf{K})$  est ouvert (ensemble des matrices de déterminant non nul).

Montrons que  $GL_n(\mathbf{K})$  est dense. Si  $M$  est une matrice non inversible  $0$  est valeur propre de  $M$ , isolée dans l'ensemble des valeurs propres, puisque ce sont les racines du polynôme caractéristique. Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $M - \varepsilon \text{Id}$  est inversible, et comme  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (M - \varepsilon \text{Id}) = M$ , cela entraîne que  $M$  est adhérent à  $GL_n(\mathbf{K})$ . En particulier l'intérieur de l'ensemble des matrices non inversibles est vide, et l'intérieur de  $\mathcal{R}_p$  est vide si  $p < n$ . Donc  $\mathcal{R}'_p$  est dense pour  $p < n$ .

Aucun des ensembles  $\mathcal{R}_p, \mathcal{R}'_p, GL_n(\mathbf{K})$  n'est borné, donc aucun n'est compact.

4. L'ensemble des matrices de projecteur est fermé, car c'est l'ensemble des  $P \in M_n(\mathbf{K})$  telles que  $P^2 - P = 0$ , or l'application  $P \mapsto P^2 - P$  est continue de  $M_n(\mathbf{K})$  dans lui-même. Il n'est pas compact, car pour tout  $n$  entier

$P_n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice de projecteur (le projecteur sur la droite

$\mathbb{R}.(1, 0)$  dans la direction de la droite  $\mathbb{R}.(1, 1/n)$ ), et cette suite de projecteurs n'est pas bornée. Comme le seul projecteur inversible est l'identité, tous les autres sont dans le fermé d'intérieur vide des matrices non inversibles, donc l'intérieur de l'ensemble des projecteurs est d'intérieur vide.

5. Les matrices nilpotentes dans  $M_n(\mathbf{K})$  sont exactement les matrices  $M$  telles que  $M^n = 0$ . Elles forment donc un fermé de  $M_n(\mathbf{K})$ , contenu dans le fermé d'intérieur vide des matrices non inversibles. La suite non bornée des matrices nilpotentes  $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  montre que  $\mathcal{N}$  ne saurait être compact.

6. Nous supposons que  $n \geq 2$ . L'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas ouvert car la suite des matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  non diagonalisables converge vers la matrice nulle, diagonalisable. Il n'est pas non plus fermé



car la suite des matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}$  diagonalisables converge vers un nilpotent non diagonalisable.

Montrons que l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables est exactement l'ensemble des matrices diagonalisables ayant  $n$  valeurs propres *distinctes*. Si une matrice  $M$  diagonalisable a une valeur propre au moins double, elle est semblable à une matrice diagonale  $D$  dont les deux premiers termes diagonaux sont égaux à un même nombre  $\lambda$ . La matrice  $D_\varepsilon$  obtenue en remplaçant dans  $D$  le coefficient d'indice  $(1, 2)$  (qui est un zéro) par  $\varepsilon$  n'est pas diagonalisable. Si  $M = PDP^{-1}$ , la matrice  $PD_\varepsilon P^{-1}$  tend vers  $M$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, donc  $M$  n'est pas dans l'intérieur de  $\mathcal{D}$ .

Pour prouver que l'ensemble  $\mathcal{D}_n$  des matrices diagonalisables à  $n$  valeurs propres distinctes est ouvert dans  $M_n(\mathbb{C})$ , il suffit de trouver une fonction continue  $\Phi$  de  $M_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $\Phi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathcal{D}_n$ . Dans le cas de  $n = 2$ , le polynôme caractéristique  $\chi_M$  de  $M$  est de degré 2, et a deux racines distinctes si, et seulement si, le discriminant de  $\chi_M$  est *non nul*, donc

pour  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on peut prendre  $\Phi(M) = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$ . En

dimension plus grande, on peut utiliser le résultat de l'exercice 5. En effet,  $\chi_M \in \mathbb{C}[X]$  a  $n$  racines distinctes si, et seulement si,  $\text{Res}(\chi_M, \chi_M') \neq 0$ . Ainsi, on peut prendre  $\Phi(M) = \text{Res}(\chi_M, \chi_M')$ .

Montrons maintenant que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables complexes, et même l'adhérence de  $\mathcal{D}_n$ , est  $M_n(\mathbb{C})$ . En effet, toute matrice  $M \in M_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable, et il existe  $P$  inversible et  $T$  triangulaire supérieure telles que  $M = PTP^{-1}$ . La diagonale de  $T$  étant  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  (les  $\lambda_i$  distincts ou non), pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite finie  $(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$ , telle que  $\max_i (|\lambda_i - \lambda'_i|) < \varepsilon$ , et les  $\lambda'_i$  tous distincts. En remplaçant la diagonale de  $T$  par  $(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$ , ce qui donne une matrice  $T' \in \mathcal{D}_n$ , et en considérant  $PT'P^{-1}$ , on voit qu'aussi près de  $M$  que l'on veut, il existe une matrice ayant  $n$  valeurs propres (complexes) distinctes.

8. 1. Supposons que, sur l'intervalle  $[0, 1 - 1/n]$ , la fonction  $h : t \mapsto f(t+1/n) - f(t)$  ne s'annule pas. Alors, par exemple pour  $h(0) = f(1/n) - f(0) > 0$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $h(1/n) = f(2/n) - f(1/n) > 0$  aussi. Puis, par récurrence, pour  $k \leq n - 1$ ,  $h(k/n) = f((k + 1)/n) - f(k/n) > 0$ , et finalement :

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} (f((k + 1)/n) - f(k/n)) > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse  $f(1) = f(0)$ . On procède de même si  $h(0) < 0$ . Donc  $h$  s'annule sur  $[0, (n - 1)/n]$ .

2. Il suffit d'appliquer la question précédente à l'application  $f(t) = g(r \cos 2\pi t), r \sin 2\pi t$ .

9. D'abord, cette fonction est bien définie, car  $\|a_n \mathbb{I}_{[\alpha_n, +\infty[} \|_{\infty} = a_n$ , donc la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbb{I}_{[\alpha_n, +\infty[}$  est normalement convergente. On notera que  $f$  est décroissante.

Le cas où l'ensemble des  $\alpha_n$  est fini est immédiat. On supposera donc qu'il est infini, et, en regroupant les termes de la série  $\sum a_n$  correspondant à une même valeur de  $\alpha_n$ , on peut supposer que la suite  $(\alpha_n)_n$  est injective.

Soit  $x$  un réel. S'il existe  $p$  tel que  $x = \alpha_p$ , alors pour tout  $y > x$ ,  $f(x) - f(y) \geq a_p$ , puisque  $p$  ne figure pas dans l'ensemble des  $n$  tels que  $y \in [\alpha_n, +\infty[$ . Donc  $f$  n'est pas continue à droite en  $x$ .

Si  $x$  n'est pas élément de  $E = \{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ , deux cas se présentent. Si  $x$  n'est pas adhérent à  $E$ , il existe un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  centré en  $x$  qui ne rencontre pas  $E$ , et  $f$  est constante sur cet intervalle, ce qui assure la continuité de  $f$  en  $x$ .

Si  $x$  est adhérent à  $E$ , soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que  $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n < \varepsilon$ . Soit  $\eta$  la distance de  $x$  à  $\{\alpha_q, q < N\}$ . Pour tout  $y \in ]x - \eta, x + \eta[$ , les indices  $n$  éventuels tels que  $\alpha_n \in [x, y]$  sont au moins égaux à  $N$ , de sorte que  $|f(y) - f(x)| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} a_n \leq \varepsilon$ . Donc  $f$  est continue en  $x$ .

10. L'application qui associe à toute famille  $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels la forme linéaire  $\theta_\lambda$  sur  $E$  définie par :

$$\forall x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \quad \theta_\lambda(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n x_n$$

est bijective de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  sur le dual de  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ .

Il s'agit donc de déterminer pour quelles familles  $\lambda = (\lambda_n)$  la forme linéaire correspondante est continue pour la norme infinie. Or :

$$\sup_{\|x\|_{\infty} \leq 1} |\theta_\lambda(x)| = \sup_n \left( \sup_{\max_i |x_i| \leq 1} \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \right| \right) = \sup_n \sum_{k=0}^n |\lambda_k| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|.$$

Donc  $\theta_\lambda$  est continue si, et seulement si,  $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$ .

11. 1. Comme  $f$  et  $g$  sont continues, si, pour tout  $x$ ,  $f(x) > g(x)$ , alors il existe  $K > 0$  tel que, pour tout  $x$ ,  $f(x) \geq g(x) + K$ . Supposons, par récurrence, que pour  $p < n$ ,  $f^p \geq Kp + g^p$ . Alors pour tout  $x$  :

$$\begin{aligned} f^n(x) - g^n(x) &= f(f^{n-1}(x)) - g(f^{n-1}(x)) + g(f^{n-1}(x)) - g(g^{n-1}(x)) \\ &= f(f^{n-1}(x)) - g(f^{n-1}(x)) + f^{n-1}(g(x)) - g^{n-1}(g(x)). \end{aligned}$$

Or  $f(f^{n-1}(x)) - g(f^{n-1}(x)) \geq K$ , et  $f^{n-1}(g(x)) - g^{n-1}(g(x)) \geq K(n-1)$ . D'où le résultat.

2. Mais alors  $f$  n'est pas bornée ! Donc il est faux que, pour tout  $x$ ,  $f(x) > g(x)$ . On voit de même qu'il est faux que  $f(x) < g(x)$  pour tout  $x$ . Cela signifie que la fonction  $x \mapsto f(x) - g(x)$  change de signe sur  $[a, b]$ , et s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

12. 1. On écrit  $P = \prod_{i=1}^p (X - z_i)$ , avec  $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_p|$ . De même, on peut trier les racines de chaque  $P_n$  par module croissant :  $|z_{1,n}| \leq |z_{2,n}| \leq \dots \leq |z_{p,n}|$ . La relation  $P(0) = 0$  équivaut à  $a_0 = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{0,n} = 0$ . Or :

$$a_{0,n} = (-1)^p \prod_{i=1}^p z_{i,n},$$

donc :  $|z_{0,n}|^p \leq \left| \prod_{i=1}^p z_{i,n} \right| = |a_{0,n}|$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_{0,n}| = 0$ .

2. L'algorithme de la division euclidienne fournit un à un les coefficients du quotient comme fonctions polynomiales (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) explicites des coefficients de  $P$  et de  $Q$ , car  $Q$  est normalisé. Ces fonctions polynomiales sont continues.

3. La condition de convergence (\*) s'écrit aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_i |a_{i,n} - a_i| = 0$  ce qui équivaut à la convergence de la suite  $(P_n)$  vers  $P$  dans l'espace affine  $E_p$  muni de la topologie d'une de ses normes (elles sont toutes équivalentes).

Nous avons donc prouvé à la première question que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P$ , et si 0 est racine de  $P$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (X - z_{0,n}) = X - z_0 = X$ . La continuité du

quotient euclidien établie ci-dessus entraîne que, pour  $T_n = \frac{P_n}{X - z_{0,n}}$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_{p,1}(P_n, X - z_{0,n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \theta_{p,1}(P, X) = \frac{P}{X} = T.$$

Or  $T_n = \prod_{i=2}^p (X - z_{i,n})$ . Si le polynôme  $\frac{P}{X}$  admet encore 0 pour racine d'après la première question :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (X - z_{2,n}) = X - z_2 = X.$$

La continuité de  $\theta_{p-1,1}$  entraîne à son tour que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_{p-1,1}(T_n, X - z_{1,n}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_n}{(X - z_{0,n})(X - z_{1,n})} \\ &= \theta_{p-1,1}(T, X) = \frac{P}{X^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, de proche en proche, on voit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (X - z_{0,n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (X - z_{1,n}) = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} (X - z_{m,n}) = X.$$

Donc, pour  $1 \leq k \leq m$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{k,n} = 0$ .

- 4 Les coefficients de  $P(X + a)$  sont fonctions polynomiales de ceux de  $P(X)$ , d'où la continuité demandée. Soit alors  $z$  une racine quelconque, de multiplicité  $m$ , de  $P = \lim_{p \rightarrow +\infty} P_n$  (limite dans  $E_p$ ). Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(X + z) = P(X + z)$ , et  $P(X + z)$  admet 0 comme racine de multiplicité  $m$ , il existe, pour tout  $n$ , un facteur  $S_n$  normalisé de degré  $m$  de  $P_n(X + z)$  dont toutes les racines tendent vers 0. Dans ce cas, les racines de  $D_n = S_n(X - z)$  tendent toutes vers  $z$ .

On peut alors décrire le comportement des racines des  $P_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini comme ceci. Avec une réindexation, soient  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , les racines *distinctes* de  $P$  de multiplicités respectives  $n_1, n_2, \dots, n_p$ . Choisissons des disques *disjoints*  $D_1, D_2, \dots, D_p$  de même rayon centrés en ces racines. En sélectionnant les racines de  $P_n$  dans chaque  $D_k$ , on peut alors écrire chaque  $P_n$  sous la forme  $P_n = P_{1,n} P_{2,n} \dots P_{p,n}$ , où chaque polynôme  $P_{k,n}$  est normalisé de degré  $n_k$ , toutes ses racines tendant vers  $z_k$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

13. 1. Soit  $(\beta_n)_n$  une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 lorsque  $n$  tend l'infini.

On munit  $E$  du produit scalaire :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} x_n a_n \mid \sum_{n=0}^{+\infty} y_n a_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x_n y_n,$$

où les sommes sont en fait finies, car  $(a_n)_n$  est une base (au sens algébrique usuel) de  $E$ . Pour la norme associée,  $\|a_n\|^2 = \beta_n$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

2. Si  $a = 0$ , c'est déjà vu. Si  $a \neq 0$ , on peut remplacer l'un des vecteurs, disons  $a_k$ , de la base par  $a$ , de sorte qu'une base de  $E$  est

$$\mathcal{B} = (a, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \dots).$$

Mais alors  $\mathcal{B}' = (a, a_0 - a, a_1 - a, \dots, a_{k-1} - a, a_{k+1} - a, a_{k+2} - a, \dots, a_n - a, \dots)$  est aussi une base de  $E$ . De la même manière qu'à la première question, on munit  $E$  de la structure préhilbertienne pour laquelle les vecteurs de  $\mathcal{B}'$  sont orthogonaux deux à deux, et leurs carrés scalaires respectifs sont :  $(a | a) = 1$ ,  $(a_0 - a | a_0 - a) = \beta_0$ ,  $(a_1 - a | a_1 - a) = \beta_1$ , et ainsi de suite. Pour la norme associée,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ , donc  $\lim_n a_n = a$ .

14. 1. Pour tout couple  $(x, y)$  de réels, la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} : t \mapsto \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$  est bornée, donc  $N(x, y)$  est bien défini.

Pour tout couple  $(a, b)$  de réels, l'application  $(x, y) \mapsto |ax + by|$  est une semi-norme. La borne supérieure d'une famille de semi-normes, lorsqu'elle est finie en tout point, est une semi-norme. Donc  $N$  est une semi-norme. Pour deux valeurs distinctes  $t_1$  et  $t_2$  de  $t$ , les formes linéaires  $(x, y) \mapsto x + t_1 y$  et  $(x, y) \mapsto x + t_2 y$  sont linéairement indépendantes, ce qui entraîne que si  $|x + t_1 y| = |x + t_2 y| = 0$ , alors  $x = y = 0$ . Donc  $N$  est une norme

2. D'après la relation de Cauchy-Schwarz, pour tout  $t$  réel, et tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|x + ty| \leq \sqrt{1 + t^2} \sqrt{x^2 + y^2}$ , donc :

$$N(x, y) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si l'on note  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , on a donc :

$$\forall x, y, \quad N(x, y) \leq \|(x, y)\|.$$

Pour minorer  $N(x, y)$  à l'aide de  $\|(x, y)\|$ , il suffit de donner la valeur 1 et la valeur  $-1$  au paramètre  $t$  de la définition de  $N$ . Ainsi :

$$N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2} \geq \max \left( \frac{|x + y|}{2}, \frac{|x - y|}{2} \right) = \frac{|x| + |y|}{2} \geq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

Donc, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $N(x, y) \geq \frac{\|(x, y)\|}{2}$ .

L'égalité  $N(x, y) = \|(x, y)\|$  est obtenue pour  $(x, y) = (1, 0)$ .

L'égalité  $N(x, y) = \frac{\|(x, y)\|}{2}$  est obtenue pour  $(x, y) = (0, 1)$ .

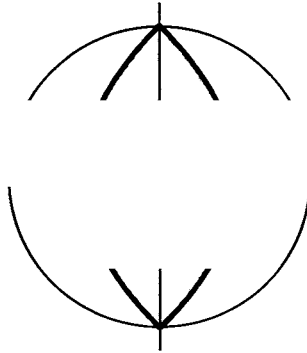
3. D'abord,  $N(x, y) = N(-x, -y)$ . De plus, en changeant le signe de  $t$ , on voit que  $N(x, -y) = N(x, y)$ . Donc on peut, pour calculer  $N(x, y)$ , se limiter à considérer  $x \geq 0$ , et  $y \geq 0$ .

D autre part, si  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , pour tout  $t$  reel,  $|x + ty| \leq x + |t|y$ , et dans ce cas :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \sup_{t \geq 0} \frac{x + ty}{1 + t^2} = \sup_{\theta \in [0, \pi/2[} \frac{x + y \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \sup_{\theta \in [0, \pi/2]} \cos \theta (x \cos \theta + y \sin \theta) = \sup_{\theta \in [0, \pi/2]} \left( x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + y \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \\ &= \sup_{\varphi \in [0, \pi]} \left( x \frac{1 + \cos \varphi}{2} + y \frac{\sin \varphi}{2} \right) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $N(x, y) = \frac{1}{2} (|x| + \sqrt{x^2 + y^2})$ .

La sphère unité pour la norme  $N$ , a donc pour équation :  $|x| + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$ , équivalente à  $y^2 = 4 - 4|x|$  ou encore à :  $|y| \leq 2$  et  $x = \pm \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$ . Cette sphère est la réunion de deux arcs de paraboles de même foyer  $(0, 0)$  et de directrices respectives les droites  $x = 2$  et  $x = -2$



Mais alors, on voit tout-de-suite que la boule unité pour  $N$  est contenue dans la boule fermée (i.e. le disque fermé) de centre 0 et de rayon 2 pour la norme euclidienne, c'est-à-dire que :  $N(x, y) \leq 1 \implies \|(x, y)\| \leq 2$ .

On retrouve ainsi le résultat de la question précédente.

15. 1. La direction du sous-espace affine  $E'$  est le noyau  $E'_0$  de l'application linéaire continue  $\varphi$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}^3$  :  $f \mapsto \left(f(0), f(1), \int_0^1 f\right)$ . Il est donc fermé, et son translaté  $E'$  aussi.

Sa codimension est 3 si, et seulement si,  $\varphi$  est surjective. La restriction de  $\varphi$  à l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 admet pour matrice, dans les bases respectives  $(1, x, x^2)$  et la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ manifestement inversible, donc } \varphi \text{ est surjective.}$$

2. Montrons que la distance de 0 à  $E'$  est 1. En effet, si  $\|f\|_\infty < 1$ , alors

$$\left| \int_0^1 f \right| < 1. \text{ Donc } d(0, E') \geq 1.$$

De plus, pour  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $f \in E'$  telle que  $d(0, f) < 1 + \varepsilon$ . Cherchons  $f \in E'$  affine sur  $[0, \theta]$ , constante sur  $[\theta, 1 - \theta]$  égale à  $\beta$ , et affine sur  $[1 - \theta, 1]$ . Comme  $\int_0^1 f = \theta\beta + (1 - 2\theta)\beta = (1 - \theta)\beta$ , il suffit de choisir  $\beta = \varepsilon$  et  $\theta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$ .

Cette distance n'est pas atteinte, car si  $\|f\|_\infty \leq 1$  et s'il existe  $x$  dans  $[0, 1]$  tel que  $|f(x)| < 1$ , alors, par continuité de  $f$ ,  $\left| \int_0^1 f \right| < 1$ . Cela interdit à  $f$  d'être dans  $E'$ .

**16** 1. L'inégalité des accroissements finis entraîne que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f(x) - f(0)| \leq \max_{t \in [0, x]} |f'(t)|$ , donc  $N_\infty(f) \leq N_d(f)$ .

On a vu dans le cours que  $N_1(f) \leq N_\infty(f)$ .

La suite de fonctions  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_\infty(f_n) = 0$  tandis que  $N_d(f_n) = 1$ . Donc ces deux normes ne sont pas équivalentes, et la topologie associée à  $N_d$  est strictement plus fine que celle associée à  $N_\infty$ .

La suite de fonctions  $g_n(x) = x^n$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_1(g_n) = 0$  alors que  $N_\infty(g_n) = 1$ , donc ces deux normes ne sont pas non plus équivalentes, et la topologie associée à  $N_\infty$  est strictement plus fine que celle associée à  $N_1$ . Par définition, une topologie  $\mathcal{T}_1$  est plus fine qu'une topologie  $\mathcal{T}_2$  sur un même ensemble  $E$  si, et seulement si, tout ouvert de  $\mathcal{T}_2$  est un ouvert de  $\mathcal{T}_1$ . Montrons que l'ensemble  $\Omega$  n'est pas ouvert pour la topologie de  $N_1$ . Soit  $f \in \Omega$ , et  $f_n(x) = (1 - x^n)f(x)$ . La suite des fonctions continues  $f_n \in E$  est dominée en valeur absolue par  $f$  et converge partout, sauf peut-être en 1, vers  $f$ . Par convergence dominée,  $N_1(f - f_n)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Mais aucune des  $f_n$  n'est dans  $\Omega$ , car  $f_n(1) = 0$ .

Montrons que  $\Omega$  est ouvert pour la norme  $N_\infty$  (et donc aussi pour  $N_d$ ). Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f \in \Omega$  est continue,  $\theta = \inf_{t \in [0, 1]} |f(t)|$  est atteint, et donc strictement positif. La boule ouverte de centre  $f$  et de rayon  $\min(\varepsilon, \theta)$  est contenue dans  $\Omega$ , car si  $\|g - f\|_\infty < \min(\varepsilon, \theta)$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $g(x) \neq 0$ .

## Chapitre 11

1. 1. Soit  $y \in F$ . La boule  $B = B_f(x, d(x, y))$  est fermée donc compacte par hypothèse. Mais alors  $d(x, F) = d(x, F \cap B)$ . Comme  $F \cap B$  est fermé borné dans un espace de dimension finie, il est compact, et on a vu dans le cours que la distance de  $x$  au compact  $F \cap B$  est atteinte en un point  $z$ , qui réalise la distance de  $x$  à  $F$  lui-même.
2. La fonction définie sur  $K$  par  $x \mapsto d(x, F)$  est continue, et atteint donc, sur le compact  $K$ , sa borne inférieure en un point  $x_0$ . Il reste à appliquer le résultat de 1. à  $x_0$  pour trouver  $y_0 \in F$  tel que  $d(K, F) = d(x_0, F) = d(x_0, y_0)$ . En revanche, la distance entre deux fermés n'est pas nécessairement atteinte, comme le montre l'exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , de l'axe des abscisses, et de l'hyperbole d'équation  $xy - 1 = 0$ , fermée dans  $\mathbb{R}^2$ .
3. Il suffit de montrer que le graphe  $\Gamma$  de  $f$  est fermé. Ce graphe est l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $y - f(x) = 0$ , et l'application  $(x, y) \mapsto y - f(x)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  est continue.

2. 1. Soit  $\ell \in \overline{A + B}$ . Il existe donc une suite  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $\ell$ , avec, pour tout  $n$ ,  $a_n \in A$  et  $b_n \in B$ . On peut extraire de  $(b_n)$  une sous-suite  $(b_{\varphi(n)})$  qui converge vers un élément  $b$  de  $B$ . Mais alors  $a_{\varphi(n)}$  converge vers  $\ell - b = a$ , et comme  $A$  est fermé,  $a \in A$ . Donc  $\ell = a + b \in A + B$ .
2. Si  $\theta$  est irrationnel, le sous-groupe  $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{R}$  est somme de deux sous-groupes fermés, et l'on sait qu'il est pourtant dense, et donc non fermé. Un exemple plus géométrique est fourni par la somme de :

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = -1\},$$

tous deux fermés de  $\mathbb{R}^2$  euclidien. Le point  $(0, 0)$  ne saurait être dans leur somme  $H_1 + H_2$ , puisque chacune de ces hyperboles est symétrique par rapport à l'origine et qu'elles sont disjointes. Mais la suite de terme général  $(n, 1/n) + (-n, 1/n) = (0, 2/n)$  montre que  $(0, 0)$  est adhérent à  $H_1 + H_2$ .

3. 1. Soit  $y$  adhérent à  $F$ , et  $(\lambda_n x_n)_n$ , où  $\lambda_n > 0$  et  $x_n \in K$ , une suite d'éléments de  $F$  convergent vers  $y$ . De  $(x_n)$  on peut extraire une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})_n$  convergent dans  $K$  compact vers un élément  $x$  de  $K$ . Comme  $0$  n'est pas dans  $K$ ,  $x \neq 0$ . Donc la suite  $(\|x_{\varphi(n)}\|)_n$  converge dans  $\mathbb{R}^{*+}$ , et la suite de terme général  $\frac{\|\lambda_{\varphi(n)} x_{\varphi(n)}\|}{\|x_{\varphi(n)}\|} = \lambda_{\varphi(n)}$  converge dans  $E$  vers un réel  $\lambda$ . Mais alors  $\lambda_{\varphi(n)} x_{\varphi(n)}$  tend vers  $\lambda x \in F$ . Donc  $F$  est fermé.



2. Donnons des contre-exemples dans  $\mathbb{R}^2$  euclidien.

Si  $K$  est l'hyperbole d'équation  $xy = 1$  (donc fermée, car  $(x, y) \mapsto xy - 1$  est continue),  $F$  est la réunion des quatre quadrants *ouverts* déterminés par les axes, et du singleton  $\{0\}$ , qui n'est pas fermée.

Si  $K$  est le disque  $D$  (compact) des  $(x, y)$  tels que  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ ,  $F$  est la réunion du demi-plan ouvert  $x > 0$  et du singleton  $\{0\}$  non fermée dans  $\mathbb{R}^2$ .

4. 1. Soit  $(U_n)_n \in \mathbb{N}$  une suite d'ouverts denses dans  $E$ . Soit  $x \in E$ , et  $\varepsilon > 0$  donné. Par densité de  $U_0$  appliquée au point  $x$ , il existe un point  $\omega_0$  dans  $U_0 \cap B(x, \varepsilon/2)$ , et comme  $U_0$  est ouvert, il existe  $r_0 \in ]0, \varepsilon/2]$  tel que la boule fermée  $B_f(\omega_0, r_0)$  soit contenue dans  $U_0$ , et donc dans  $B(x, \varepsilon) \cap U_0$ . De même, par densité de  $U_1$  appliquée au point  $\omega_0$  et comme  $U_1$  est ouvert, il existe une boule fermée  $B_f(\omega_1, r_1)$  de rayon  $r_1 \in ]0, r_0/2]$  contenue dans  $B_f(\omega_0, r_0) \cap U_1$ . Par récurrence, pour tout  $n \geq 1$ ,  $U_n$  étant dense et ouvert, il existe une boule fermée  $B_f(\omega_n, r_n)$  de rayon  $r_n \in ]0, r_{n-1}/2]$ , contenue dans  $B_f(\omega_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$ . Notons que la suite  $(r_n)$  tend vers 0.

Les  $B_n$  sont des fermés emboîtés dont les diamètres tendent vers 0. Comme  $E$  est complet, leur intersection est non vide. Or tout point de leur intersection est contenue dans  $B(x, \varepsilon)$ .

Le théorème est donc démontré.

L'intersection  $\bigcap_n U_n$  peut n'être pas ouverte, malgré la densité de chaque  $U_n$ . Par exemple, on numérote les rationnels  $\rho_n, n \in \mathbb{N}$ , et soit  $U_n = \mathbb{R} \setminus \{\rho_k / k \leq n\}$ . L'intersection  $\bigcap_n U_n$  est l'ensemble des irrationnels, non ouvert.

2. Immédiat en passant aux complémentaires d'une famille dénombrable d'ouverts denses.

5. 1. Si  $\mathbb{Q}$  était intersection dénombrable d'ouverts  $U_n, n \in \mathbb{N}$ , chacun de ces ouverts serait dense. Mais en numérotant les rationnels  $\rho_n, n \in \mathbb{N}$ , les ouverts  $V_n = U_n \setminus \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n\}$  seraient aussi denses, et leur intersection serait  $\bigcap_n U_n \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$ , ce qui contredirait le théorème de Baire vu dans l'exercice 4, car elle devrait rester dense.

2. Observons que la fonction qui associe à  $r$  le diamètre  $\text{diam}(f(]x - r, x + r[))$  est croissante, de limite  $\text{osc}_x(f)$  en 0. Montrons alors que, pour tout  $\lambda > 0$ , l'ensemble  $F$  des  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $\text{osc}_x(f) \geq \lambda$  est fermé. Soit  $x \in \overline{F}$ . Pour tout  $r > 0$ , il existe  $y \in ]x - r/2, x + r/2[$  tel que  $\text{osc}_y(f) \geq \lambda$ . Donc :

$$\text{diam}(f(]x - r, x + r[)) \geq \text{diam}(f(]y - r/2, y + r/2[)) \geq \lambda.$$

C'est vrai pour tout  $r > 0$ , donc  $\text{osc}_x(f) \geq \lambda$ , et  $x \in F$ .

La réunion des  $F_n$  est l'ensemble des points de discontinuité de  $f$ . Il suffit de passer aux complémentaires pour conclure.

3. Si l'ensemble des points de continuité de  $f$  était exactement  $\mathbb{Q}$ , d'après la question précédente,  $\mathbb{Q}$  serait intersection dénombrable d'ouverts, ce qui n'est pas. Donc une telle fonction  $f$  n'existe pas
4. Tout rationnel  $\rho = \frac{p}{q}$  est un point de discontinuité de  $f$ , car si  $f(\rho) = \frac{p}{q}$ , aussi près qu'on veut de  $\rho$  se trouve un irrationnel  $x$ , tel que  $f(x) = 0$ . Si maintenant  $x \notin \mathbb{Q}$ , soit  $\varepsilon > 0$ ,  $N$  un entier supérieur à  $1/\varepsilon$ , et  $M$  le plus petit multiple commun des entiers  $n \leq N$ . La distance  $\eta = d\left(x, \frac{1}{M}\mathbb{Z}\right)$  est non nulle, et, pour tout rationnel  $\rho = \frac{p}{q} \in ]x - \eta, x + \eta[$ ,  $q > N$ , donc  $f(\rho) = \frac{1}{q} < \varepsilon$ . Cela prouve la continuité de  $f$  en  $x$ .

6. 1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que  $|x' - x''| \leq \eta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ . Soit  $N \geq 1$  un entier tel que  $1/N \leq \eta$ . En appliquant l'hypothèse à  $x = n\eta$ , il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|f(n\eta)| < \varepsilon$ . Mais alors, pour tout  $t \geq N\eta$ , il existe  $n = E(t/\eta) \geq N$  tel que  $n\eta \leq t < (n+1)\eta$ . Alors,  $|f(t) - f(n\eta)| \leq \varepsilon$ , donc  $|f(t)| \leq 2\varepsilon$ .
2. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $n$ ,  $F_n(\varepsilon)$  est une intersection de fermés donc est fermée. L'hypothèse :  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{p \rightarrow \infty} f(px) = 0$ , se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n / x \in F_n(\varepsilon).$$

Ainsi,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(\varepsilon) = \mathbb{R}$ . Fixons donc  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Baire, et précisément la deuxième question de l'exercice 4, si chaque  $F_n(\varepsilon)$  était d'intérieur vide,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(\varepsilon)$  serait d'intérieur vide, ce qui n'est pas car cette réunion est  $\mathbb{R}$ . Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n$  tel que l'intérieur de  $F_n(\varepsilon)$  soit *non vide*, autrement dit, il existe un intervalle  $[a, b] \subset F_n(\varepsilon)$ , avec  $a < b$ . Cela entraîne que, pour tout  $t \in \bigcup_{p \geq n} [pa, pb]$ ,  $|f(t)| \leq \varepsilon$ . Or la réunion  $\bigcup_{p \geq n} [pa, pb]$  contient un intervalle  $[A, +\infty[$  de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t \geq A$ ,  $|f(t)| \leq \varepsilon$ .

7. 1. Soit  $r$  la borne inférieure des rayons des boules fermées contenant  $K$ . Il existe une suite  $(B_f(O_n, r_n))$  de boules fermées contenant  $K$  telle que  $\inf_n r_n = r$ , et l'on peut choisir la suite des rayons  $r_n$  décroissante. Rien

ne dit *a priori* qu'on puisse choisir la suite des boules décroissante pour l'inclusion. Mais comme  $K$  est compact, les centres  $O_n$  demeurent dans un domaine borné du plan. On peut donc extraire de la suite  $(O_n)_n$  des centres une sous-suite convergente, et quitte à prendre cette sous-suite on considérera d'emblée que  $(O_n)_n$  converge vers le point  $O$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous allons montrer que la boule  $B_f(O, r)$  contient  $K$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n$  tel que  $r_n - r \leq \varepsilon/2$  et  $d(O, O_n) \leq \varepsilon/2$ . Mais alors,  $K \subset B_f(O_n, r_n) \subset B_f(O, r + \varepsilon)$ , car, pour tout  $m \in \mathbb{R}^p$  :

$$d(O_n, m) \leq r_n \implies d(O, m) \leq d(O, O_n) + d(O_n, m) \leq r + \varepsilon.$$

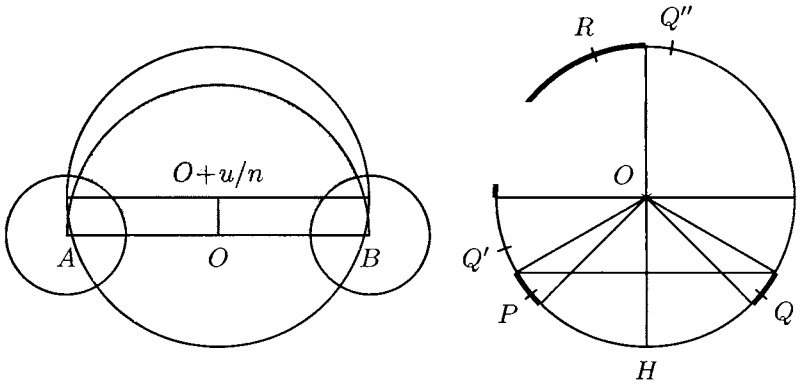
Ainsi,  $K$  est contenu dans  $B_f(O, r + \varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc :

$$K \subset B_f(O, r) = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_f(O, r + \varepsilon).$$

Bien-sûr, vu la définition de  $r$ ,  $K$  n'est contenu dans aucune boule de rayon strictement plus petit.

En général, cette boule n'est pas unique. Pour le voir, considérons la norme  $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , dont les « boules » sont en fait des carrés à côtés parallèles aux axes. On peut prendre pour  $K$  le segment  $[-1, 1] \times \{0\}$ , contenu dans toutes les « boules » centrées en un point de  $\{0\} \times [-1, 1]$  et de « rayon » 1.

2. Il suffit de remarquer que si  $B_1$  et  $B_2$  sont deux boules euclidiennes *distinctes* de même rayon  $r$ , de centres respectifs  $O_1$  et  $O_2$  et d'intersection non vide, la demi-distance  $d$  entre leurs centres est inférieure ou égale à  $r$ , et si  $O$  est le milieu du segment  $[O_1, O_2]$ , la sphère de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{r^2 - d^2} < r$  contient  $B_1 \cap B_2$ . Si  $K \subset B_1 \cap B_2$ , il existe donc une sphère de rayon strictement plus petit contenant  $K$ .
3. Si aucun point  $x$  de  $K$  ne vérifie  $\|x\| = r$  et  $(u|x) \leq 0$ , en particulier, les points  $A = O + u'$  et  $B = O + u''$  images de  $C = O + u$  par rotation de centre  $O$  et respectivement d'angle  $\pi/2$  et  $-\pi/2$  ne sont pas sur  $K$ . Donc il existe  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < r$  et tel qu'aucun point de  $K$  ne soit à une distance inférieure à  $\varepsilon$  de  $A$  ou  $B$ . Or  $K$  est contenu dans le demi-disque de diamètre  $[A, B]$  contenant  $C$ , et ne rencontre pas  $B(A, \varepsilon)$  et  $B(B, \varepsilon)$ . On en déduit aisément que si  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , le disque fermé de centre  $O + u/n$  et de rayon  $r$  contient  $K$ . On voit comme en b) que  $K$  serait contenu dans un disque de rayon strictement plus petit que  $r$ .



Nous allons alors montrer qu'il existe, sur le cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ , deux points de  $K$  de distance au moins  $r\sqrt{3}$ . Si  $K' = K \cap C$ , pour tout point  $P$  de  $C$ , il existe un point de  $K'$  sur le demi-cercle de  $C$  opposé à  $P$ . Soit donc  $P$  un point de  $K'$ , non vide comme on vient de le voir, et soit  $Q$  un point de  $K'$  sur le demi-cercle opposé à  $P$ . Si  $Q$  est diametralement opposé à  $P$ ,  $d = 2r$ . Sinon, soit, sur  $C$ ,  $H$  le milieu du plus petit des deux arcs de  $C$  délimités par  $P$  et  $Q$ . Sur le demi-cercle opposé à  $H$ , se trouve un troisième point  $R$  de  $K'$ . Si  $d(P, Q) > r\sqrt{3}$ , il n'y a plus rien à prouver. Sinon, nous savons que l'angle  $\widehat{POQ}$  est compris entre  $\pi/2$  et  $2\pi/3$ . Si  $R$  est du côté de  $P$  par rapport à la droite  $OH$ , on voit tout de suite que  $d(Q, R) \geq r\sqrt{3}$ , car le cercle de centre  $Q$  et de rayon  $r\sqrt{3}$  coupe  $C$  en deux points  $Q'$  et  $Q''$  qui forment avec  $Q$  un triangle équilatéral, et l'angle  $\widehat{ROQ}$  est toujours compris entre  $2\pi/3$  et  $4\pi/3$ , donc  $R$  est sur l'arc  $Q'Q''$ . Le cas d'un triangle équilatéral (comme les points  $Q$ ,  $Q'$  et  $Q''$  vus ci-dessus justement) montre qu'on ne peut espérer trouver une constante  $\lambda > \sqrt{3}$  telle que, pour tout compact non réduit à un point dans le plan, le diamètre de  $K$  soit supérieur ou égal à  $\lambda r$ , où  $r$  est le rayon minimal d'un disque contenant  $K$ .

8. 1. Si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \ell$ , on a vu dans le cours que, pour toute suite  $(s_n)$  d'éléments de  $A$  convergeant vers  $a$ ,  $f(s_n)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, et *a fortiori*, pour toute sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$ ,  $f(x_{\varphi(n)})$  tend vers  $\ell$ .  
Supposons maintenant que  $f(x)$  ne tende pas vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  en restant dans  $A$ . Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $x_n \in A$  vérifiant  $d(x_n, a) < 1/n$  mais  $d(f(x_n), \ell) > \varepsilon$ . Choisissons un tel  $x_n$  pour tout  $n$ . Cela définit une suite dont aucune sous-suite ne tend vers  $\ell$ .

**Remarque** La faiblesse de la condition donnée pour que  $f(x)$  tende vers  $\ell$  n'est qu'apparente. Il n'est pas étonnant qu'elle suffise, car on peut voir aisément que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si pour toute partie  $A' \subset A$  à laquelle  $a$  reste adhérent,  $\ell$  est adhérent à  $f(A')$ . Mais c'est bien sous la forme séquentielle de l'énoncé qu'elle va nous être utile maintenant.

2. Comme une composée d'applications continues est continue, nous avons juste à prouver que, réciproquement, si  $h \circ f$  est continue, alors  $h$  est continue. Soit  $(y_n)$  une suite de  $B$  tendant vers  $y \in B$ . Par surjectivité de  $f$ , nous pouvons choisir, pour tout  $n$ , un élément  $x_n \in A$  tel que  $f(x_n) = y_n$ . Il n'y a, bien-sûr, pas de raison pour que la suite  $(x_n)$  soit convergente. Mais comme  $K = \{y_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$  est compact et  $f$  est propre,  $f^{-1}(K)$  est compact, et l'on peut extraire de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})_n$  convergeant dans  $A$ . Notons  $x$  sa limite. Par continuité de  $f$   $f(x) = \lim_n f(x_{\varphi(n)}) = \lim_n y_{\varphi(n)} = y$ . Mais comme  $h \circ f$  est continue :

$$h \circ f(x) = h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} h \circ f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(y_{\varphi(n)}).$$

D'après la première question, cela entraîne que  $h$  est continue en  $y$ .

3. Il suffit de noter  $h = f^{-1}$  et de remarquer que  $h \circ f = \text{Id}_A$  est continue.

9. 1. La surjectivité est due au théorème de d'Alembert. Les composantes de  $\sigma$  sont polynomiales, donc  $\sigma$  est continue.

Pour prouver que  $\sigma$  est propre, il suffit de montrer que lorsque  $(a_0, \dots, a_{p-1})$  décrit un compact de  $\mathbb{C}^p$ , l'ensemble des  $(z_1, \dots, z_p)$  tels que :

$$X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0 = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$$

est borné, car il est fermé par continuité de  $\sigma$ . Si  $z$  est l'une des racines de ce polynôme, et si  $|z| > 1$ , alors  $|z|^p \leq |a_{p-1}||z|^{p-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|$  donc :

$$\begin{aligned} |z| &\leq |a_{p-1}| + \frac{|a_{p-2}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_1|}{|z|^{p-2}} + \frac{|a_0|}{|z|^{p-1}} \\ &\leq |a_{p-1}| + |a_{p-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|. \end{aligned}$$

Or, lorsque  $(a_0, \dots, a_{p-1})$  décrit un compact, le membre de droite de cette dernière inégalité reste borné.

2. Si deux  $p$ -uplets  $Z$  et  $Z'$  vérifient  $\sigma(Z) = \sigma(Z')$  :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (X - z_k) &= X^p - \sigma_1(Z)X^{p-1} + \sigma_2(Z)X^{p-2} - \dots + (-1)^p \sigma_p(Z) \\ &= X^p - \sigma_1(Z')X^{p-1} + \sigma_2(Z')X^{p-2} - \dots + (-1)^p \sigma_p(Z') \\ &= \prod_{k=1}^n (X - z'_k) \end{aligned}$$

et il existe une permutation  $\omega$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  telle que :

$$(z'_1, \dots, z'_p) = (z_{\omega(1)}, \dots, z_{\omega(p)}).$$

Donc  $H(Z) = H(Z')$ . Cela permet de définir  $h$  de manière unique. Comme  $\sigma$  est surjective et propre, la continuité de  $h$  résulte de l'exercice 8.

10. 1. L'application  $H$  de  $\mathbb{C}^p$  dans  $\mathbb{R}$  :  $(z_1, \dots, z_p) \mapsto \max_i d(z_i, F)$  est continue et invariante par permutation des variables. La fonction  $h$  qui s'en déduit par l'exercice 9 est continue. Le polynôme caractéristique de  $M$  étant noté  $X^p - \sigma_1(M)X^{p-1} + \sigma_2(M)X^{p-2} - \dots + (-1)^p \sigma_p(M)$ , les fonctions  $M \mapsto \sigma_k(M)$  sont polynomiales en fonction des coefficients de  $M$  et sont donc continues. Les fonctions notées ici  $\sigma_k$  sont liées aux fonctions  $\sigma_i$  de l'exercice précédent (notées de la même manière pour alléger les notations) par ceci :  $\sigma_k(M)$  est la  $k^{\text{ème}}$  fonction symétrique des valeurs propres de  $M$ . Donc l'application  $\Phi$  qui associe à  $M$  le réel  $\Phi(M) = h(\sigma_1(M), \dots, \sigma_p(M)) = \max_i d(z_i, F)$ , où les  $z_i$  sont les valeurs propres complexes de  $M$ , est continue. L'ensemble des matrices  $M$  telles que  $\Phi(M) = 0$  est donc fermé.
2. Si  $M^n = \text{Id}_p$ , toutes les valeurs propres de  $M$  sont de module 1, et sont sur le cercle unité  $S^1$  de  $\mathbb{C}$ , qui est fermé. Compte tenu du résultat de la première question, il reste à prouver que l'adhérence  $C$  est précisément l'ensemble  $C'$  des matrices dont le spectre est sur ce cercle unité. Si  $M \in C'$ , trigonalisons-la, et fixons  $P \in GL_p(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}MP = T$  soit triangulaire supérieure de diagonale  $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour chaque  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on peut trouver un nombre complexe  $\lambda'_j$  tel que  $|\lambda'_j - \lambda_j| < \varepsilon$ , et de la forme  $\lambda'_j = e^{2i\pi p_j/q_j}$ ,  $p_j$  et  $q_j$  entiers. On peut choisir les  $\lambda'_j$  tous distincts, de sorte que la matrice  $T'$  obtenue à partir de  $T$  en remplaçant sa diagonale par  $(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_p)$  soit diagonalisable. Mais alors  $T'^m = \text{Id}$ , où  $m$  est le p.p.c.m. des dénominateurs  $q_j$ . La conjugaison matricielle  $Q \mapsto PQP^{-1}$  est linéaire, donc continue, et, aussi près qu'on veut de  $M$ , il existe donc une matrice  $M' = PT'P^{-1}$  vérifiant une relation  $M'^m = \text{Id}_p$ .

11.

**Remarque préliminaire** Rappelons qu'un espace *semi-normé*  $E$  muni de la semi-norme  $N$  est complet pour  $N$  lorsque, pour toute suite de Cauchy  $(x_n)$  de  $E$ , il existe  $x \in E$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x - x_n) = 0$ . Dans un espace semi-normé il n'y a pas nécessairement unicité de la limite, mais si  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} N(x' - x_n) = 0$ , alors  $N(x - x') = 0$ .

Passons à l'exercice.

1. Nous supposons que  $[a, b] = [0, 1]$ . Plongeons l'espace  $E$  des fonctions continues par morceaux dans un espace semi-normé de fonctions strictement plus gros  $E'$  dont la semi-norme  $N'$  ait  $N$  pour restriction à  $E$ , et cherchons une suite de Cauchy  $(f_n)$  de  $E$  admettant dans  $E'$  une limite  $f$  pour  $N'$  telle que, pour tout  $g \in E$ ,  $N'(f - g) > 0$ , ce qui entraînera que  $E$  n'est pas complet d'après la remarque préliminaire.

Il suffit de considérer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  continue qui vaut  $1/\sqrt{x}$  sur  $[1/n, 1]$  et  $\sqrt{n}$  sur  $[0, 1/n]$ . L'espace  $E'$  semi-normé choisi est celui des fonctions sur  $[0, 1]$  (fermé) intégrables sur  $]0, 1[$  (ouvert, c'est important), en prenant pour semi-norme

$$N'(f) = \int_{]0, 1[} |f(t)| dt. \text{ La fonction } f \text{ nulle en } 0 \text{ et qui vaut } 1/\sqrt{x}$$

$$\text{sur } ]0, 1] \text{ est dans } E', \text{ et } N'(f - f_n) = \int_{]0, 1/n]} \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc  $f$  est une limite de  $(f_n)$  dans  $E'$  pour  $N'$ . Mais si  $g \in E$ ,  $g$  est bornée, et si  $M = \max(1, \sup\{|g(t)| / t \in [0, 1]\})$ , alors

$$N'(f - g) \geq \int_{]0, 1/M^2]} \frac{dt}{\sqrt{t}} - M = M > 0, \text{ d'où le résultat.}$$

2. Nous supposons ici aussi que  $[a, b] = [0, 1]$ . L'espace  $E$  des fonctions continues par morceaux sur  $[0, 1]$  est contenu dans l'espace  $E'$  des fonctions bornées sur ce même intervalle, normé par  $N_\infty$  définie comme dans  $E$ . Pour  $n \geq 2$ , soit  $f_n$  la fonction en escalier nulle sur  $[0, 1/n]$ , et constante égale à  $\frac{1}{p}$  sur  $\left] \frac{1}{p}, \frac{1}{p-1} \right]$  pour tout  $p$  compris entre 2 et  $n$ . Dans  $E'$  et pour la norme  $N_\infty$  de  $E'$ , la suite  $(f_n)$  converge vers la fonction  $f$  nulle en 0 et constante égale à  $\frac{1}{p}$  sur  $\left] \frac{1}{p}, \frac{1}{p-1} \right]$  pour tout  $p \geq 2$ . En effet  $f - f_n$  est nulle sur  $]1/n, 1]$ , et prend des valeurs inférieures à  $1/n$  sur  $[0, 1/n]$ . En particulier,  $(f_n)$  est de Cauchy dans  $E$ . Mais  $f$  admet une infinité de points de discontinuité et n'est donc pas continue par morceaux.

12. 1. L'ensemble  $K_n = u^{(n)}(K)$  est compact image d'un compact par une application continue. De plus,  $K_n \subset K$ , car, pour tout  $j$ ,  $u^j(K) \subset K$  et si  $x \in K$ ,  $u^{(n)}(x)$  est barycentre à masses positives de points du convexe  $K$ . En particulier,  $K_n$  est fermé dans le compact  $K$ . Montrons que, pour  $n, m \geq 1$ ,  $K_{nm} \subset K_n$ . En effet, si  $x \in K$  :

$$\begin{aligned} u^{(nm)}(x) &= \frac{1}{nm} (x + \dots + u^{n-1}(x) + u^n(x) + \dots + u^{2n-1}(x) + \dots + u^{nm-1}(x)) \\ &= \frac{1}{n} (y + u(y) + \dots + u^{n-1}(y)) = u^{(n)}(y), \end{aligned}$$

$$\text{avec } y = \frac{1}{m} (x + u^n(x) + u^{2n}(x) + \dots + u^{(m-1)n}(x)).$$

La suite  $(K_n)$  de fermés dans le compact  $K$  a toutes ses intersections finies non vides, car si  $n_1, n_2, \dots, n_p$  sont entiers non nuls, pour tout  $i$ ,  $K_{n_1 n_2 \dots n_p} \subset K_i$ . Leur intersection est donc non vide.

Soit maintenant  $x \in \bigcap_n K_n$ . Pour tout  $n$ , il existe  $y_n \in K$  tel que  $x = u^{(n)}(y_n)$ . Mais alors :

$$\begin{aligned} x - u(x) &= u^{(n)}(y_n) - u(u^{(n)}(y_n)) \\ &= \frac{1}{n} (\text{Id} - u) \circ (\text{Id} + u + \dots + u^{n-1})(y_n) = \frac{1}{n} (\text{Id} - u^n)(y_n). \end{aligned}$$

Comme  $(\text{Id} - u^n)(y_n) \in 2K$  borné,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\text{Id} - u^n)(y_n) = 0 = x - u(x)$ .

2. Pour toute famille finie d'indices  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ , l'intersection de compacts  $u_{i_1}(K) \cap u_{i_2}(K) \cap \dots \cap u_{i_p}(K)$  est non vide, car pour toute permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , elle contient  $u_{i_{\sigma(1)}} \circ u_{i_{\sigma(2)}} \circ \dots \circ u_{i_{\sigma(p)}}(K)$ , les  $u_j$  commutant entre eux. Comme les  $u_i(K)$  sont des fermés dans  $K$ , par compacité de  $K$  leur intersection est non vide. Notons-la :  $K_1 = \bigcap_i u_i(K)$ . De même, pour tout  $n \geq 1$ , on note  $K_n$  le compact  $\bigcap_i u_i^{(n)}(K)$ , non vide pour la même raison.

Pour tout  $i \in I$  et tous entiers non nuls  $n$  et  $m$ ,  $u_i^{(nm)}(K) \subset u_i^{(n)}(K)$ . Donc  $\bigcap_j u_j^{(nm)}(K) \subset \bigcap_i u_i^{(n)}(K)$ . Comme c'est vrai pour tout  $i$ ,  $\bigcap_j u_j^{(nm)}(K) \subset \bigcap_i u_i^{(n)}(K)$ . Comme dans la première question, il en résulte de  $\bigcap_n K_n$  est non vide.

Si  $x \in \bigcap_n K_n$ , on fixe un indice  $i$  quelconque et on reprend pour  $u = u_i$  la preuve de la première question du fait que  $x = u_i(x)$ .



13. 1.  $O(n)$  est l'ensemble des matrices  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  ${}^tMM = \text{Id}$ , c'est donc l'image réciproque d'un singleton par une application continue, et il est fermé. Si  $v_1, \dots, v_n$  sont les vecteurs colonnes de  $M \in O(n)$ , pour tout  $i$ ,  $\|v_i\| = 1$  pour la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ , donc  $O(n)$  est borné. Précisément, pour la norme sur  $M_n(\mathbb{R})$  associée au produit scalaire  $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ , le groupe  $O(n)$  est contenu dans la sphère unité de rayon  $\sqrt{n}$ .

Donc  $O(n)$  est compact.

2. L'ensemble  $T^+$  des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs, muni de la topologie induite de celle de  $M_n(\mathbb{R})$ , est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ , puisque  $\mathbb{R}^{*+}$  est, par le logarithme, homéomorphe à  $\mathbb{R}$ . Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt entraîne que l'application de  $T^+ \times O(n)$  qui associe à  $(T, O)$  leur produit  $TO$  est bijective de  $T^+ \times O(n)$  sur  $GL_n(\mathbb{R})$ . Cela n'entraîne pas automatiquement que c'est un homéomorphisme, car aucun des deux espaces en jeu n'est compact

Mais un examen attentif du procédé de Schmidt entraîne que l'application réciproque est continue. En effet, rappelons que, partant d'une famille libre  $(v_1, \dots, v_n)$ , on commence par construire par récurrence la famille orthogonale (pas encore normée)  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , où  $e'_k$  est le projeté orthogonal de  $v_k$  sur l'orthogonal, dans  $\text{Vect}(e'_1, \dots, e'_{k-1}, v_k)$  de  $\text{Vect}(e'_1, \dots, e'_{k-1})$ . Ces vecteurs  $e'_k$  sont calculés explicitement par  $e'_1 = v_1$ , puis :

$$e'_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e'_i | v_k)}{(e'_i | e'_i)} e'_i,$$

et pour finir on pose  $e_i = \frac{1}{\|e'_i\|} e'_i$ , la famille orthonormée voulue étant  $(e_1, \dots, e_n)$ . Cette construction explicite montre bien que l'application :

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto (e_1, \dots, e_n),$$

définie sur l'ensemble des familles libres de  $\mathbb{R}^n$ , est continue. Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est la famille des colonnes de  $M$ , et si l'on définit  $O$  par sa famille de colonnes  $(e_1, \dots, e_n)$ , on sait que pour  $T = MO^{-1}$ , l'application  $M \mapsto (T, O)$  est bien la réciproque cherchée.

**Remarque** Cela donne une vision topologique concrète de  $GL_2(\mathbb{R})$ . En effet,  $\mathbb{R}^3$  est homéomorphe à une boule ouverte  $B$  de  $\mathbb{R}^3$ , et l'on pourrait appeler « hypertore plein ouvert » le produit  $B \times S_1$  ( $S_1$  est le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ ), puisqu'un « tore plein ouvert » (l'espace dans une chambre à air) est homéomorphe au produit d'un disque ouvert et de  $S^1$ . Mais nous venons de prouver que  $GL_2(\mathbb{R})$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3 \times O(2)$ , et  $O(2)$  est lui-même homéomorphe à la réunion disjointe de deux cercles (pourquoi?).

Ainsi,  $GL_2(\mathbb{R})$  est réunion disjointe de deux « hypertores pleins ouverts » ! Malheureusement, expliciter ainsi la « forme » de  $GL_2(\mathbb{R})$  ne donne pas le lien avec sa structure de groupe, car le groupe additif  $\mathbb{R}^3$  n'est pas isomorphe au groupe non commutatif  $T^+ \subset GL_2(\mathbb{R})$ .

14. 1. Toute matrice  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  est le produit

$$M = D(\lambda) \prod_{k=1}^p E_{i_k, j_k}(\mu_k)$$

d'une matrice diagonale  $D(\lambda) = \text{Diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$ ,  $\lambda \neq 0$ , et d'un nombre fini de matrices élémentaires  $E_{i_k, j_k}(\mu_k) = \text{Id}_n + \mu_k \varepsilon_{i_k, j_k}$ , où, pour  $k = 1, \dots, p$ ,  $i_k \neq j_k$ ,  $\mu_k \in \mathbb{C}$ , et  $\varepsilon_{i_k, j_k}$  est la matrice ayant un 1 en position  $(i_k, j_k)$  et des 0 ailleurs.

Écrivons  $\lambda = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . L'application de  $[0, 1]$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$  :

$$t \mapsto M(t) = D(e^{t(\ln \rho + i\theta)}) \prod_{k=1}^p E_{i_k, j_k}(t\mu_k)$$

est un chemin continu allant de  $\text{Id}_n$  à  $M$ .

2. Si  $M \in O^+(n)$  il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que  $P^{-1}MP$  soit diagonale par blocs  $\text{Diag}(M_1, \dots, M_k, \dots, M_p)$ , où chaque bloc est soit un  $(1) \in M_1(\mathbb{R})$ , soit  $\begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \in O^+(2)$ . On définit alors un chemin continu dans  $O^+(n)$  allant de  $\text{Id}_n$  à  $M$  en posant :

$$M(t) = P \text{Diag}(M_1(t), \dots, M_k(t), \dots, M_p(t)) P^{-1},$$

où  $M_k(t)$  est  $(1)$  ou  $\begin{pmatrix} \cos t\theta_k & -\sin t\theta_k \\ \sin t\theta_k & \cos t\theta_k \end{pmatrix}$  selon le cas.

15. 1. La fonction  $x \mapsto \Phi(x) = d(x, f(x))$  est continue sur le compact  $K$ , et atteint sa borne inférieure en un point  $\alpha$ . Mais si  $f(\alpha) \neq \alpha$ , alors :

$$d(f(\alpha), f(f(\alpha))) < d(\alpha, f(\alpha)),$$

et  $\Phi(f(\alpha)) < \Phi(\alpha)$ , ce qui contredit la minimalité de  $\Phi$  en  $\alpha$ . Donc  $f$  admet au moins un point fixe.

De plus, si  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont deux points fixes de  $f$  distincts :

$$d(\alpha, \alpha') = d(f(\alpha), f(\alpha')) < d(\alpha, \alpha'),$$

ce qui est impossible. D'où l'unicité du point fixe de  $f$ .

2. Comme  $K$  est compact, la suite  $(x_n)_n$  admet une sous-suite  $(x_{p_n})_n$  convergente. Montrons alors que, pour toute sous-suite  $(x_{p_n})$  convergente vers un élément  $\beta$  de  $K$ , la limite  $\beta$  est nécessairement  $\alpha$ , ce qui entraînera que  $(x_n)$  admet  $\alpha$  comme seule valeur d'adhérence. Comme  $K$  est compact, c'est sa limite.

Supposons donc que  $\beta \neq \alpha$ . La suite  $(\lambda_n)$  définie par  $\lambda_n = d(\alpha, x_n)$  est décroissante minorée, donc converge vers un réel  $\ell \geq 0$ . Mais la sous-suite  $(\lambda_{p_n})$  converge vers  $d(\alpha, \beta)$  aussi égal à  $\ell$ . Par continuité de  $f$ , la sous-suite  $(\lambda_{p_{n+1}}) = (d(\alpha, f(x_{p_{n+1}})))$  converge vers  $d(\alpha, f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = \ell$ , ce qui est impossible car les sous-suites de  $(\lambda_n)$  ont même limite que  $(\lambda_n)$ . D'où le résultat.

3. Notons  $f^n$  la composée  $n$  fois de  $f$  avec elle-même. La suite des fonctions  $g_n$  sur  $K$  définie par  $g_n(x) = d(f^n(x), \alpha)$  est décroissante, et de limite la fonction constante égale à  $\alpha$ , qui est donc continue. Comme  $K$  est compact, on peut appliquer le théorème de DINI pour conclure que la convergence est uniforme.

16 Considérons les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  suggérées. La suite  $(x_n, y_n)$  du compact  $K \times K$  admet une sous-suite  $(x_{\theta(n)}, y_{\theta(n)})$  convergente. On peut choisir la suite  $(\theta(n))$  d'indices de telle sorte que la suite  $\varphi(n) = \theta(n+1) - \theta(n)$  soit elle-même strictement croissante, en veillant par récurrence à ce que :

$$\theta(n+1) \geq \theta(n) + (\theta(n) - \theta(n-1)) + 1.$$

Nous savons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{\theta(n+1)}, x_{\theta(n)}) = 0$ . Or :

$$\begin{aligned} d(x_{\theta(n+1)}, x_{\theta(n)}) &= d(f^{\theta(n)}(x_{\theta(n+1)-\theta(n)}), f^{\theta(n)}(x)) \\ &= d(f^{\theta(n)}(x_{\varphi(n)}), f^{\theta(n)}(x)) \geq d(x_{\varphi(n)}, x) \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{\varphi(n)}, x) = 0$ , et de même  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{\varphi(n)}, y) = 0$ , d'où, par continuité de la distance :  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) = d(x, y)$ . Mais, pour tout  $n$  :

$$d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq \dots \leq d(f^{\varphi(n)}(x), f^{\varphi(n)}(y)) = d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}).$$

Par passage à la limite,  $d(x, y) = d(f(x), f(y))$  et  $f$  est isométrique.

Il reste à voir sa surjectivité. Notons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)-1}) = x$ .

Extrayons de la suite  $(x_{\varphi(n)-1})$  une sous-suite  $(x_{\varphi(\psi(n))-1})$  qui converge vers un élément  $z$  de  $K$ . Mais on sait maintenant que  $f$  est continue, donc :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(\psi(n))-1}) = f(z).$$

## 17. 1. Immédiat.

2. On suppose qu'il existe  $(x_i)_{i=0, \dots, p}$ , avec  $p > n$ , tel que, pour tout  $i$ ,  $x_i > 0$ , et  $\sum_{i=0}^p x_i \overrightarrow{MA_i} = 0$ . Il s'agit de montrer qu'il existe  $q$  tel que  $M$  soit encore barycentre à masses positives des points  $A_i$  d'indice différent de  $q$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{A_0A_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sont linéairement liés, donc il existe  $\lambda_1, \dots$

$\lambda_p$  non tous nuls tels que :  $\sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = 0$ . On pose alors  $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^p \lambda_i$ ,

et si  $O \in E$  :

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i \right) \overrightarrow{OA_0} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = 0.$$

En particulier,  $\sum_{i=0}^p \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0$ .

Tous les  $\lambda_i$  ne sont pas nuls, donc l'un au moins des coefficients  $\lambda_i$  est strictement positif, et l'un d'entre eux au moins est strictement négatif, puisque leur somme est nulle. Quitte à réindexer les  $A_i$ , on peut supposer qu'il existe  $k$  tel que, pour  $i < k$ ,  $\lambda_i > 0$ , et pour  $i \geq k$ ,  $\lambda_i \leq 0$ .

Pour tout  $t$  réel,  $\sum_{i=0}^{k-1} (x_i - t\lambda_i) \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=k}^p (x_i - t\lambda_i) \overrightarrow{MA_i} = 0$ .

Observons que, pour  $t \geq 0$ , et pour tout  $i \geq k$ ,  $x_i - t\lambda_i > 0$  (strictement). On cherche donc  $t \geq 0$  pour que, pour tous les  $i \leq k-1$ ,  $x_i - t\lambda_i$  soit positif ou nul, et l'un d'entre eux soit nul. Il suffit évidemment de poser :

$$t = \min \left\{ \frac{x_i}{\lambda_i} / i \leq k-1 \right\}.$$

3. Fixons une origine  $O$  dans  $E$  affine de dimension  $n$ . Ainsi, dans l'espace affine  $E$  de dimension  $n$ , l'enveloppe convexe du compact  $K \subset E$  est l'ensemble des  $M$  tels que  $\overrightarrow{OM}$  soit de la forme :  $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{OA_i}$ , où, pour tout  $i$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $A_i \in K$ , et  $\sum_i x_i = 1$ . Dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , l'ensemble  $S_n$  des  $(x_0, \dots, x_n)$  tels que  $x_i \geq 0$ , et  $\sum_{i=0}^n x_i = 1$  est compact, et, pour tout compact  $L$  de l'espace vectoriel sous-jacent à  $E$ , l'image du compact  $S_n \times L^{n+1}$  par l'application  $(x_0, x_1, \dots, x_n, v_0, v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum_{i=0}^n x_i v_i$  est compacte, d'où le résultat.

- 18.** 1. Dans tout espace métrique, si  $(x_n)$  est une suite convergente de limite  $\ell$ , la réunion  $A$  de  $\{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$  est compacte, car pour tout recouvrement par ouverts de  $A$ , un seul des ouverts du recouvrement suffit à recouvrir tous les  $x_i, i \geq N$ , pour un certain  $N$ .

Ici,  $x_n = \frac{1}{n}e_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

2. La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}e_n$  converge absolument, et  $E$  est complet, donc elle converge.

Le vecteur somme  $v$  est adhérent à l'enveloppe convexe de  $A$ , car :

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n 2^{-k}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 2^{-n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} e_k.$$

Si  $v$  était barycentre à masses positives des  $\frac{1}{n2^n}e_n$ , il existerait  $N \geq 1$

tel que  $v = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k e_k$ , et  $(e_N | v)$  serait nul, ce qui n'est pas le cas, car

$$(e_N | v) = \frac{1}{N2^N}.$$

- 19.** 1. Le rang d'un projecteur est égal à sa trace, donc la restriction de l'application « rang » à  $\mathcal{P}_r$  est continue, et  $t \mapsto \text{rg}(p(t))$  est une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{N}$  donc constante.

2. Notons  $P$  (resp.  $P_0$ ) la matrice du projecteur  $p$  (resp.  $p_0$ ) dans la base canonique. Dans la suite de cette solution, les matrices d'applications linéaires ou de familles de vecteurs seront toujours sous-entendues *dans la base canonique*.

Il existe une matrice carrée  $(P_0)_{I,J}$  inversible de taille  $r$  extraite de  $P_0$ , correspondant aux indices de lignes  $i \in I$  et aux indices de colonnes  $j \in J$  (où  $\text{card } I = \text{card } J = r$ ). L'application  $\mu_{I,J}$ , qui associe à une matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$  le déterminant de la matrice  $M_{I,J}$  extraite avec ces indices est polynomiale, donc continue sur  $M_n(\mathbb{R})$ . Donc il existe un ouvert  $U(P_0)$  de  $M_n(\mathbb{R})$  tel que, pour toute  $M \in U(p_0)$ ,  $\mu_{I,J}(M) \neq 0$ . En particulier, pour toute matrice  $P \in U(P_0)$  de projecteur, les colonnes d'indice  $j \in J$  de  $P$  forment une base de  $\text{Im}(p)$ , ce qui définit l'application  $\varphi_{p_0}$  voulue.

3. En revenant aux endomorphismes, pour tout  $t \in [0, 1]$ , choisissons un ouvert  $U(p(t)) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  et une application  $\varphi_{p(t)}$  de  $U(p(t)) \cap \mathcal{P}_r$  dans  $\mathcal{E}_r$  qui associe à tout projecteur  $\pi \in U(p(t)) \cap \mathcal{P}_r$  une base de  $\text{Im}(\pi)$ .

Par continuité de  $p$ , pour ce même  $t$ , il existe  $\varepsilon_t > 0$  tel que, pour tout  $u \in [0, 1] \cap ]t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t[$ ,  $p(u) \in U(p(t))$ . On pose alors  $W_t(u) = \varphi_{p(t)}(p(u))$ , qui est une base de  $\text{Im}(p(u))$  dépendant continûment de  $u$ .

Extrayons de la famille des  $]t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t[$  un sous-recouvrement fini de  $[0, 1]$  par les intervalles  $] \theta_k - \varepsilon_{\theta_k}, \theta_k + \varepsilon_{\theta_k}[$ ,  $k = 1, \dots, q$ , sur lesquels sont définies respectivement les applications  $W_{\theta_k}$ .

En triant leurs bornes supérieures par ordre croissant, on construit un partage  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots, t_q = 1$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , il existe  $k$  vérifiant  $[t_{i-1}, t_i] \subset ] \theta - \varepsilon_{\theta_k}, \theta + \varepsilon_{\theta_k}[$ . Pour tout  $i$ , on choisit un tel  $k$ , et l'on pose :

$$\forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad V_i(t) = W_{\theta_k}(t).$$

Cela répond à la question.

4. Nous allons remplacer successivement les fonctions  $V_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathcal{E}_r$  par des fonctions  $V'_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathcal{E}_r$  telles que, pour tout  $i$ ,  $\text{Vect}(V_i(t)) = \text{Vect}(V'_i(t))$ , mais telles que les  $V'_i$  se raccordent pour donner une fonction continue  $[0, 1] \rightarrow \mathcal{E}_r$ .

On peut garder  $V_1$ , et poser  $V'_1(t) = V_1(t)$  pour tout  $t \in [0, t_1] = [t_0, t_1]$ . Par récurrence, on suppose construits  $V'_1, V'_2, \dots, V'_i$ , avec

$$\text{Vect}(V'_j(t)) = \text{Vect}(V_j(t)) = \text{Im}(p(t))$$

sur  $[t_{j-1}, t_j]$ , pour  $j \leq i$ . Comme :

$$\text{Vect}(V'_i(t_i)) = \text{Vect}(V_i(t_i)) = \text{Im}(p(t_i)) = \text{Vect}(V_{i+1}(t_i)),$$

il existe une matrice  $A_i \in GL_r(\mathbb{R})$  telle que :

$$\text{Mat}(V'_i(t_i)) = \text{Mat}(V_{i+1}(t_i)) \cdot A_i.$$

On définit alors  $V'_{i+1}(t)$ , pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , de sorte que :

$$\text{Mat}(V'_{i+1}(t)) = \text{Mat}(V_{i+1}(t)) \cdot A_i.$$

Les  $V'_i$  répondent à la question.

- 20 1. Rappelons que le rang d'un projecteur est égal à sa trace, et donc le rang est continu (et localement constant) sur l'ensemble des projecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . Si  $\theta$  était continue, le rang serait localement constant sur  $E$ . Mais pour n'importe quel endomorphisme  $f \in E$  non nul, les endomorphismes  $tf$ ,  $t \in \mathbb{R}$  sont aussi dans  $E$ , y compris pour  $t = 0$ , alors que les  $tf$  n'ont même rang que  $f$  que si  $t \neq 0$ .
2. Si  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ , comme  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  ont une dimension complémentaire, leur somme est directe égale à  $\mathbb{K}^n$ . De plus, la multiplicité de 0 comme valeur propre de  $f \in E$  est exactement  $n - r$  où  $r = \text{rg } f$ . Le polynôme caractéristique de  $f$  est de la forme :

$$\chi_f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_{n-r}X^{n-r} = X^{n-r}Q(X),$$

où  $a_{n-r} \neq 0$ . Notons tout de suite que les coefficients  $a_{n-1}, \dots, a_{n-r}$  dépendent continûment de  $f$ . La condition  $a_{n-r} \neq 0$  exprime que  $Q$  est premier avec  $X$ , et donc avec  $X^{n-r}$ . D'après le théorème de Bézout, il existe donc deux polynômes  $A$  et  $B$  tels que :

$$X^{n-r}A(X) + Q(X)B(X) = 1.$$

D'après le théorème des noyaux,  $\mathbb{R}^n = \text{Ker } f^{n-r} \oplus \text{Ker } Q(f)$ , et comme ici  $\text{Ker } f^{n-r} = \text{Ker } f$ , et  $\text{Ker } Q(f) = \text{Im } f^{n-r} = \text{Im } f$ , cela donne :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

De plus, un couple de polynômes  $(A, B)$  "de Bézout" comme ci-dessus donne le projecteur  $\pi$  sur  $\text{Im } f$  dans la direction de  $\text{Ker } f$ , qui n'est autre que  $\pi = f^{n-r} \circ A(f) = f - B(f) \circ Q(f)$ .

La continuité de ce projecteur  $\pi$  en fonction de  $f$  variant dans  $E_r$  résultera du résultat polynomial suggéré dans l'énoncé. Étant donné  $Q$  tel que  $Q(0) \neq 0$  il existe précisément un et un seul couple de polynômes  $(A, B)$  tel que  $\deg(A) < n - r$  et  $\deg(B) < n$  vérifiant la relation de Bézout. Le polynôme  $B(X)$  que nous cherchons est précisément celui-là. En effet, le développement de Taylor de  $\frac{1}{Q(t)}$  lorsque  $t$  est voisin de 0 s'écrit, à l'ordre  $n$  :

$$\frac{1}{Q(t)} = C(t) + t^n R_n(t) = B(t) + \frac{t^n A(t)}{Q(t)},$$

où  $\deg C(X) < n$  et  $R_n(t)$  est borné au voisinage de 0. Donc  $B(t) = C(t)$ , et les coefficients de  $C(t)$  s'obtiennent par une récurrence explicite facile à partir de ceux de  $Q$  (ou de  $1/Q(t)$  et ses dérivées appliquées en 0).

3. Si  $p$  est un projecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{Im } p = \text{Im}(p \circ p^*)$ , et en particulier,  $\text{rg } p = \text{rg}(p \circ p^*)$ . Mais  $q = p \circ p^*$  est diagonalisable en base orthonormée, et le projecteur orthogonal sur  $\text{Im } q$  n'est autre que le projecteur sur  $\text{Im } q$  dans la direction de  $\text{Ker } q$  considérée dans la question précédente, d'où la continuité désirée.

**Remarque** On peut aussi montrer le résultat demandé dans la question 3. à l'aide du résultat de la deuxième question de l'exercice 19. En effet, au point  $p_0$  de  $\mathcal{P}_r$ , le relèvement  $p \mapsto \varphi_{p_0}(p)$  fournit, au voisinage de  $p_0$ , une base de  $\text{Im } p$  dépendant continûment de  $p$ . Son orthonormalisée de Schmidt dépend aussi continûment de  $p$  grâce à l'exercice 13. Cela donne, pour  $p$  voisin de  $p_0$ , une base  $(e_1(p), e_2(p), \dots, e_r(p))$  de  $\text{Im } p$  dépendant continûment de  $p$ . Mais le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par ces vecteurs est :  $v \mapsto \sum_{i=1}^r (e_i(p) | v) e_i(p)$ , dont la matrice est donc fonction continue de  $p$ . La méthode explicite du présent exercice donne néanmoins une expression *globale* et non locale de ce projecteur orthogonal en fonction de  $p$ .

21. 1. Ce premier point est conséquence immédiate du cours, et est laissé au lecteur.

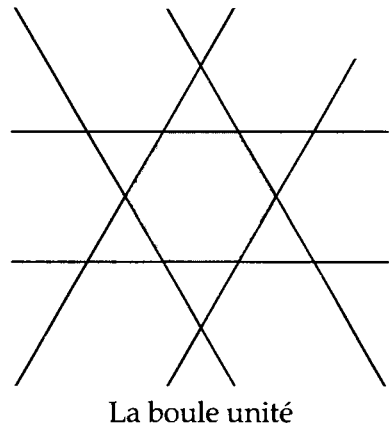
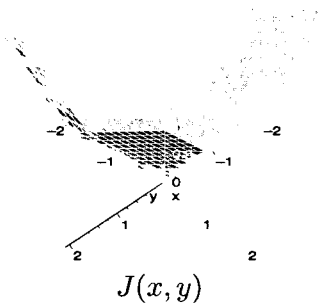
2. On voit aisément que, si  $x \in E \setminus \{0\}$ , alors  $I_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^{*+} / x \in \lambda K\}$  est un intervalle non vide et non borné supérieurement. Il peut, *a priori*, être fermé ou ouvert. Naturellement, pour tout réel  $\mu > 0$ ,  $I_{\mu x} = \mu I_x$ . On doit prouver l'inégalité triangulaire pour  $J$ .

Soit  $\lambda = J(x)$ ,  $\mu = J(y)$ , et  $\varepsilon > 0$  donné. Alors  $x \in (\lambda + \varepsilon)K$ ,  $y \in (\mu + \varepsilon)K$ , ce qui signifie qu'il existe  $x' \in K$  et  $y' \in K$  tels que  $x = (\lambda + \varepsilon)x'$ ,  $y = (\mu + \varepsilon)y'$ . Donc  $x + y = (\lambda + \mu + 2\varepsilon)z$ , avec  $z = \frac{(\lambda + \varepsilon)x' + (\mu + \varepsilon)y'}{\lambda + \mu + 2\varepsilon} \in K$  par convexité de  $K$ . Donc  $x + y \in (\lambda + \mu + 2\varepsilon)K$ , et, par passage à la limite sur  $\varepsilon$ ,  $J(x + y) \leq J(x) + J(y)$ .

Ainsi,  $J$  est bien une semi-norme sur  $E$ . Il reste à établir les encadrements de  $K$  par les boules unités ouverte et fermée.

- Si  $x \in K$ ,  $1 \cdot x \in K$  et  $J(x) \leq 1$ , donc  $K$  est dans la boule unité fermée.
- Si  $x \notin K$ ,  $1 \notin I_x$ , et  $J(x) \geq 1$ , donc  $K$  contient la boule unité ouverte.

3. Un polygone plein convexe ne peut être la boule unité d'une norme que s'il est symétrique, et il doit comporter nombre pair de sommets. C'est impossible pour un pentagone.



En revanche, par exemple, l'enveloppe convexe  $K$  de l'ensemble des racines sixièmes de 1 dans  $\mathbb{C}$  est la boule unité d'une norme de  $\mathbb{R}^2$  (identifié à  $\mathbb{C}$ ) fournie par la jauge correspondante. Pour une expression simple de cette jauge, remarquons que  $K$  est l'intersection de trois bandes  $B_1, B_2, B_3$  du



plan définies respectivement, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , par :

$$B_1 = \{(x, y) / |y| \leq \sqrt{3}/2\},$$

$$B_2 = \{(x, y) / |y - \sqrt{3}x| \leq \sqrt{3}\},$$

$$B_3 = \{(x, y) / |y + \sqrt{3}x| \leq \sqrt{3}\}.$$

Donc :

$$J(x, y) = \max \left( \left| \frac{2|y|}{\sqrt{3}} \right|, \left| \frac{y}{\sqrt{3}} - x \right|, \left| \frac{y}{\sqrt{3}} + x \right| \right).$$

22. 1. On choisit *arbitrairement*  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , tous deux non nuls. Il nous sera commode, on va le voir bientôt, de choisir  $\mu_2$  de telle sorte que  $\|\mu_2 a_2\| \leq \frac{1}{3} \|\mu_1 a_1\|$ . Par récurrence sur  $n \geq 1$  supposons définis les  $\mu_j$  pour  $j \leq n + 1$ , reels non nuls. Comme  $\mu_{n+1} a_{n+1} \notin V_n$ ,  $d(\mu_{n+1} a_{n+1}, V_n) > 0$ , car  $V_n$  est fermé puisque complet (de dimension finie). On peut choisir un réel  $\mu_{n+2}$  strictement positif assez petit pour que  $\|\mu_{n+2} a_{n+2}\| \leq \frac{1}{3} d(\mu_{n+1} a_{n+1}, V_n)$ . D'où l'existence de la suite  $(\mu_n)$ .

Mais alors, pour tout  $n \geq 0$ ,  $d(\mu_{n+1} a_{n+1}, V_n) \leq \|\mu_{n+1} a_{n+1}\|$ , donc :

$$\|\mu_{n+2} a_{n+2}\| \leq \frac{1}{3} \|\mu_{n+1} a_{n+1}\|,$$

puisque  $\mu_2$  a été choisi pour que cette relation soit vraie dès  $n = 0$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|\mu_n a_n\| \leq \frac{1}{3^{n-1}} \|\mu_1 a_1\|$ , et la série  $\sum_{n \geq 1} \mu_n a_n$  est absolument

convergente. Soit  $s$  sa somme. Le reste  $R_{n+2} = \sum_{p=n+2}^{+\infty} \mu_p a_p$  vérifie :

$$\|R_{n+2}\| \leq \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \right) d(\mu_{n+1} a_{n+1}, V_n) = \frac{1}{2} d(\mu_{n+1} a_{n+1}, V_n).$$

Si la somme  $s = \sum_{p=1}^{+\infty} \mu_p a_p$  était élément de  $V_n$  pour une certaine valeur de  $n$ , alors  $s - \sum_{p=1}^n \mu_p a_p = \mu_{n+1} a_{n+1} + R_{n+2}$  serait aussi dans  $V_n$ , ce qui est impossible, puisque  $\|R_{n+2}\| \leq \frac{1}{2} d(\mu_{n+1} a_{n+1}, V_n)$ .

**Remarque** L'exercice 13 montre qu'il n'est pas toujours vrai que la somme d'une série de vecteurs indépendants soit hors de l'espace vectoriel qu'ils engendrent, puisque cette somme (infinie) peut très bien être nulle ! La preuve ci-dessus n'est donc pas rendue inutile par un argument d'algèbre.

2. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une base de  $E$  supposé complet. D'après la première question, il existe alors dans  $E$  un vecteur qui n'est dans aucun des  $V_n = \text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$ , ce qui est contradictoire, car  $E$  est leur réunion.
3. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une base de  $E$  supposé complet, et notons  $E_n$  le sous-espace engendré par  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Les  $E_n$  sont tous fermés, car ils sont de dimension finie, donc complets. De plus, la réunion des  $E_n$  est  $E$  tout entier. L'intérieur de chacun d'eux est vide, car pour la norme induite sur  $E_n$  par celle de  $E$ , le sous-espace  $E_{n-1}$  est d'intérieur vide dans  $E_n$ , donc  $E_{n-1}$  est *a fortiori* d'intérieur vide dans  $E$ . Cela contredit le théorème de BAIRE, car dans un espace complet, une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
23. 1. Si  $(V_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}_c(E)$ , pour tout  $x \in E$ ,  $V_n(x)$  est une suite de Cauchy de  $E$  complet, donc elle converge vers un vecteur de  $E$  qu'on note  $V(x)$ . Il est immédiat que  $V$  est linéaire. Montrons que  $V \in \mathcal{L}_c(E)$ . Pour tout  $x \in E$  pour tous  $n$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\|V_n(x) - V_m(x)\| \leq \|V_n - V_m\| \cdot \|x\|$ , de sorte que la suite des restrictions des  $V_n$  à la boule unité de  $E$  est uniformément de Cauchy, et converge uniformément. La limite de ces restrictions est donc continue sur la boule unité de  $E$ , comme limite uniforme d'une suite d'applications continues. Cela entraîne que  $V$  elle-même est continue.
2. L'application  $T$  est évidemment linéaire. Elle s'écrit :  $T = \text{Id} - aU$ , où  $U$  est l'application linéaire de  $E$  dans  $E$  qui associe à  $f$  la fonction  $x \mapsto f(bx)$ . Lorsque  $b = 0$ ,  $U(f)$  est la fonction constante  $x \mapsto f(0)$ , donc  $\|U(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , avec  $\|U(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$  si par hasard  $\|f\|_\infty = |f(0)|$ . Lorsque  $b \neq 0$ ,  $\|U(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ , et  $U$  est une isométrie linéaire. Dans tous les cas, la norme d'opérateur de  $U$  est 1, et  $U$  et  $T$  sont continues. Mais de plus, la norme d'opérateur de  $aU$  est  $|a| < 1$ . Comme  $\mathcal{L}_c(E)$  est une algèbre de Banach, on a vu dans le cours que  $T = \text{Id} - aU$  admet pour inverse dans cette algèbre :  $V = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n U^n$ . L'application réciproque de  $T$  s'explique donc en :
- $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T^{-1}(g)(x) = V(g)(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a^n g(b^n x).$$
24. 1. On peut dire, par exemple, que la norme  $\|\cdot\|$  est la restriction au sous-espace des suites presque nulles de la norme  $\|\cdot\|_1$  de l'espace des familles sommables.
2. Montrons que la suite des polynômes  $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} X^k$  est de Cauchy mais ne converge pas vers un polynôme. Elle est de Cauchy, car si  $m > n$ ,

$P_m - P_n = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2}$ , et comme la série  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge, elle est de Cauchy, et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que, pour  $n, m \geq N$ ,  $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} < \varepsilon$ .

D'autre part, pour tout  $m$ , le projecteur  $\pi_m$  de  $E$  sur  $\mathbb{R}_{m-1}[X]$  dans la direction de  $X^m \cdot E$  (qui n'est autre que le reste de la division euclidienne par  $X^m$ ) est continu pour  $\|\cdot\|$  de norme 1, car :

$$\left\| \pi_m \left( \sum a_n X^n \right) \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \right\| = \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

Donc si  $(P_n)_n$  convergerait vers un certain polynôme  $Q$ , alors  $\pi_m(P_n)$  convergerait vers  $\pi_m(Q)$ . Mais pour  $n \geq m$ ,  $\pi_m(P_n) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} X^k$ , de sorte que  $\pi_m(Q) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} X^k$  aussi. Donc  $\deg(Q)$  est au moins égal à  $m - 1$ . Comme c'est vrai pour tout  $m$ , cela contredit le fait que  $Q$  soit un polynôme.

**Remarque** On a vu deux autres preuves de ce que  $E$  n'est pas complet dans l'exercice 22.

3. L'application  $P \mapsto a_{n_0} X^{n_0} = (\pi_{n_0} - \pi_{n_0-1})(P)$  est continue (mais c'est immédiat directement). Évidemment,  $|a_{n_0}| \leq \|P\|$  et la norme de cette forme linéaire  $P \mapsto a_{n_0}$  est inférieure ou égale à 1. En l'appliquant à  $X^{n_0}$ , on voit qu'elle est de norme exactement 1.
4. La suite des polynômes  $\frac{1}{n} X^n$  tend vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|$ , mais la suite de leurs dérivées  $X^{n-1}$  ne tend pas vers 0 pour cette norme, car  $\|X^{n-1}\| = 1$ . Donc la dérivation n'est pas continue.
5. Il est immédiat que c'est un ordre. Considérons deux polynômes  $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$  et  $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$  tels que  $A \leq B$ . Alors, pour tout  $P = \sum \alpha_n X^n$  tel que  $A \leq P \leq B$ , et pour tout  $n > N = \max(\deg A, \deg B)$ , on a  $\alpha_n = 0$ . Donc tous les polynômes  $P$  tels que  $A \leq P \leq B$  sont en réalité dans le sous-espace de dimension finie  $\mathbb{R}_N[X]$  de  $E$ , qui est complet, donc fermé dans  $E$ . De plus, dans  $\mathbb{R}_N[X]$ , l'ensemble des  $P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$  tels que, pour tout  $k \leq N$ ,  $a_k \leq \alpha_k \leq b_k$  est l'image réciproque du fermé  $\prod_{k=0}^N [a_k, b_k]$  par l'application continue  $P \mapsto (\alpha_k)_{0 \leq k \leq N}$ . Il est donc fermé. De plus, il est manifestement borné dans  $\mathbb{R}_N[X]$  de dimension finie. Donc l'intervalle  $[A, B]$  est compact.

## Chapitre 12

1. 1. La convergence simple des deux fonctions vers 0 est évidente. Comme  $f$  n'est pas constante, il existe  $x$  tel que  $f(x) \neq 0$ . Pour  $x_n = \frac{x}{n}$ ,  $f_n(x_n) = f(x)$ , qui ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Donc la convergence de  $(f_n)$  vers 0 n'est pas uniforme.

De même pour  $(g_n)$ , avec  $y$  tel que  $g(y) \neq 0$  et  $y_n = ny$ .

Soit  $a > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $A > 0$  tel que, pour tout  $x \geq A$ ,  $|f(x)| \leq \varepsilon$ . Soit alors  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $aN \geq A$ . Pour tout  $x \geq a$ , et pour tout  $n \geq N$ ,  $nx \geq A$  et  $|f(nx)| \leq \varepsilon$ . Donc  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[a, +\infty[$ .

Comme  $g$  est continue en 0, il existe  $\eta > 0$  tel que, si  $x \leq \eta$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $|g(x)| \leq \varepsilon$ . Fixons  $N$  tel que  $a/N \leq \eta$ . Alors, pour tout  $n \geq N$  et tout  $x \leq a$ ,  $|g(x/n)| \leq \varepsilon$ , ce qui prouve la convergence uniforme de  $g$  vers 0 sur  $]0, a]$ .

2. Les fonctions  $|f|$  et  $|g|$ , de limites nulles aux bornes, sont bornées respectivement par des réels positifs  $M$  et  $M'$ . Soit  $a > 0$ . Sur  $]0, a]$ ,  $|h_n| \leq M|g_n|$  et  $(g_n)$  converge uniformément vers 0. Sur  $[a, +\infty[$ ,  $|h_n| \leq |f_n|M'$  et  $(f_n)$  converge uniformément vers 0. Donc  $(h_n)$  converge uniformément vers 0.

2. 1. Pour tout  $A$  fixé,  $\frac{x}{n}$  converge uniformément vers 0 sur  $[-A, A]$ . La fonction  $t \mapsto \exp(-\sin t)$  est continue en 0, ce qui suffit pour en déduire que, sur  $[-A, A]$ , la suite de fonctions  $\exp\left(-\sin \frac{x}{n}\right)$  converge uniformément vers 1.

Par multiplication par la fonction  $x \mapsto x^2$  continue,  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$  vers  $f(x) = x^2$ .

Pour  $x_n = n \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \frac{x_n}{n} = 1$ , et  $f_n(x_n) - x_n^2 = \left(n \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{e} - 1\right)$ , qui ne tend pas vers 0 si  $n$  tend vers l'infini. La convergence n'est donc pas uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrons que  $(g_n)$  converge uniformément vers 0. Si  $x > 0$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|\sin nx| \leq n|x|$ , et  $|g_n(x)| \leq \frac{nx}{n\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ . Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, si  $x < \varepsilon^2$ ,  $|g_n(x)| \leq \varepsilon$ , et, sur  $[\varepsilon^2, +\infty[$ ,  $(g_n)$  converge uniformément car :

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq \frac{1}{n\varepsilon},$$

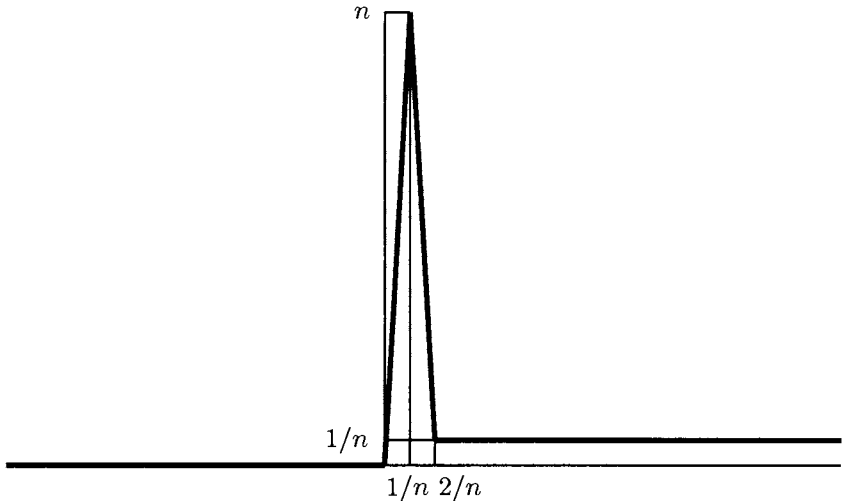
d'où le résultat.

3. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f(x) - \frac{1}{n}f'(x) \right| \leq \frac{1}{2n^2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|, \quad \text{d'où :}$$

$$\left| n\left(f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) - f'(x) \right| \leq \frac{1}{2n} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|.$$

4. 1. Il se peut que la suite  $(g_n)$  ne converge pas. Par exemple, soit  $f_n$  continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle sur  $\mathbb{R}^-$ , affine sur  $[0, 1/n]$ , sur  $[1/n, 2/n]$ , et constante sur  $[2/n, +\infty[$  telle que  $f(0) = 0$ ,  $f(1/n) = n$  et  $f(2/n) = 1/n$ .



La suite  $(f_n)$  converge simplement vers 0 sur  $\mathbb{R}$ . En effet, sur  $\mathbb{R}^-$  les  $f_n$  sont toutes nulles, et pour tout  $x > 0$ , il existe  $N$  tel que  $2/N < x$ , donc pour tout  $n \geq N$ ,  $f_n(x) = 1/n$  qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Mais si  $x > 0$  et  $2/N < x$ , alors pour  $n \geq N$ ,  $f_n \circ f_n(x) = n$  qui tend vers l'infini avec  $n$ .

2. Montrons que, dans ce cas,  $f_n \circ f_n$  converge simplement vers  $f \circ f$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Pour tout  $x$  et tout  $n$  :

$$\begin{aligned} \left| f_n(f_n(x)) - f(f(x)) \right| &= \left| f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) + f(f_n(x)) - f(f(x)) \right| \\ &\leq \left| f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) \right| + \left| f(f_n(x)) - f(f(x)) \right|. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , et tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $|f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon$ . On applique cela à  $y = f_n(x)$ . Comme  $f$  est continue,  $\lim_n f_n(x) = f(x) \implies \lim_n f(f_n(x)) = f(f(x))$ , et il existe  $N' > N$  tel

que, pour tout  $n \geq N'$ ,  $\left| f(f_n(x)) - f(f(x)) \right| \leq \varepsilon$ . Alors, pour tout  $n \geq N'$ ,  $\left| f_n(f_n(x)) - f(f(x)) \right| \leq 2\varepsilon$ . D'où le résultat.

La convergence de  $f_n \circ f_n$  n'est pas en général uniforme, comme le montre l'exemple de  $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ . En effet,  $(f_n)$  converge uniformément vers  $x \mapsto x^2 = f(x)$ , mais :

$$f_n \circ f_n(x) - f \circ f(x) = \left( x^2 + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} - x^4 = \frac{2x^2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}.$$

En fait, un peu plus généralement, soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites de fonctions continues, telles que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , et  $(g_n)$  converge simplement vers  $g$ . Alors l'inégalité suivante, qui étend légèrement celle qu'on vient de voir :

$$\left| f_n(g_n(x)) - f(g(x)) \right| \leq \left| f_n(g_n(x)) - f(g_n(x)) \right| + \left| f(g_n(x)) - f(g(x)) \right|$$

entraîne que  $f_n \circ g_n$  converge simplement vers  $f \circ g$ . Si, de plus,  $g_n$  converge uniformément vers  $g$ , et  $f$  est uniformément continue on voit sur la même inégalité que  $f_n \circ g_n$  converge uniformément vers  $f \circ g$ . L'exemple de  $f_n$  donné à la première question, et  $g_n(x) = 1/n$  pour tout  $x$  et tout  $n$ , montre que les convergences uniformes de  $f_n$  et  $g_n$  et la continuité uniforme de  $g$  ne suffisent pas.

5. 1. Le cas de  $g$  constante sur un voisinage de  $a$  et nulle ailleurs nous indique la limite à trouver, à savoir  $g(a)$ . Montrons donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n g = g(a)$ .

L'application  $g \mapsto g(a)$  est souvent appelée *une distribution de Dirac en  $a$* , et le noyau positif  $f_n$ , une *approximation de l'unité en  $a$* .

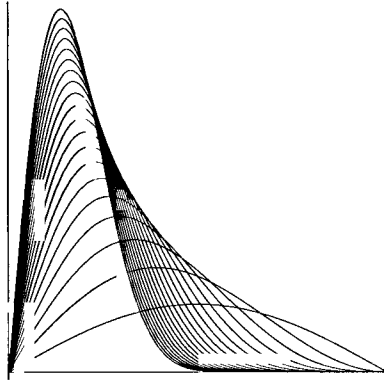
Notons  $M$  un majorant de  $|g|$  :  $M \geq \|g\|_\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$ , que nous allons fixer, tel que, si  $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$ ,  $|g(x) - g(a)| \leq \varepsilon$ . Alors :

$$\begin{aligned} & \left| \int_I f_n(t)g(t) dt - g(a) \right| \\ &= \left| \int_I f_n(t)g(t) dt - \int_I f_n(t)g(a) dt + g(a) \left( \int_I f_n(t) dt - 1 \right) \right| \\ &\leq \int_I f_n |g - g(a)| + |g(a)| \left| \int_I f_n - 1 \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{I_\theta} f_n + M \int_{I_\theta^+} f_n + M \int_{I_\theta^-} f_n + M \left| \int_I f_n - 1 \right| \\ &\leq \varepsilon \int_I f_n + M \int_{I_\theta^+} f_n + M \int_{I_\theta^-} f_n + M \left| \int_I f_n - 1 \right|. \end{aligned}$$

Comme à ce stade,  $n$  peut encore varier, il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on ait à la fois :  $\int_I f_n \leq 2$  (car  $\lim_n \int_I f_n = 1$ ) ;  $\int_{I_n^+} f_n \leq \varepsilon$  ;  $\int_{I_n^-} f_n \leq \varepsilon$  ;  $\left| \int_I f_n - 1 \right| \leq \varepsilon$ , de sorte que, pour tout  $n$ ,  $\left| \int_I f_n g - g(0) \right| \leq 2\varepsilon + 3M\varepsilon$ . D'où le résultat.

**Remarque** Nous laissons au lecteur le soin de repérer dans les inégalités ci-dessus à quels endroits précis a été utilisée la *positivité* des fonctions  $f_n$ . Dans le cours sur les séries de Fourier, on rencontrera le *noyau de Fejér*, qui est un noyau positif, alors que le *noyau de Dirichlet* ne l'est pas ce qui explique les hypothèses notablement plus fortes pour le théorème de Dirichlet par rapport au théorème de Fejér. Les deux questions suivantes sont deux autres exemples de noyaux positifs.

2. Pour  $a \in ]0, \pi/2]$ , et  $x \geq a$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq n \cos^n(a) \sin(x)$ , qui tend évidemment vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.



Pour montrer que la convergence n est pas uniforme, il suffit d'intégrer la fonction  $f_n$  sur  $[0, \pi/2]$ , car :

$$\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = -\frac{n}{n+1} [\cos^{n+1} x]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1},$$

qui tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Or, si  $f_n$  tendait uniformément vers sa limite 0, la suite des intégrales tendrait vers 0.

La convergence *uniforme* de  $(f_n)$  vers 0 sur tout intervalle de la forme  $[\theta, \pi/2]$ , avec  $\theta \in ]0, \pi/2]$ , résulte de la majoration sur cet intervalle :

$$0 \leq f(x) \leq n \cos^n \theta.$$

Cette convergence uniforme sur  $[\theta, \pi/2]$  donne à  $(f_n)$  la première propriété des noyaux positifs et la seconde résulte de la relation  $\int_0^{\pi/2} f_n = \frac{n}{n+1}$  vue en cours de route. Donc  $(f_n)$  est une approximation de l'unité en 0, et  $\lim_n \int f_n g = g(0)$ .

3. D'après la formule de STIRLING, il existe une suite  $\mu_n$  tendant vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini, telle que :

$$(n-1)! = (n-1)^{n-1} e^{n-1} \sqrt{2\pi(n-1)} \mu_n.$$

Ainsi, pour  $x \geq 0$  et  $n \geq 1$  :

$$f_n(x) = \frac{n^n (xe^{-x})^n}{(n-1)^{n-1} e^{-(n-1)} \sqrt{2\pi(n-1)} \mu_n} = \frac{1}{e \mu_n \sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{n-1}}{(1-1/n)^n} \cdot (exe^{-x})^n$$

d'où la discussion :

- (a) Si  $x \in [0, 1[$  ou  $x \in ]1, +\infty[$ , alors  $0 \leq exe^{-x} < 1$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .  
 (b) Si  $x = 1$ ,  $exe^{-x} = 1$ , et  $\lim_n f_n(x) = +\infty$ .

Donc la suite converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ , mais ne converge pas simplement sur  $\mathbb{R}^+$ .

Comme la fonction  $x \mapsto xe^{-x}$  croît strictement sur  $[0, 1[$ , et décroît strictement sur  $]1, +\infty[$ , pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\sup_{x \in [0, \alpha]} f_n(x) \leq f_n(\alpha)$ . Le résultat

analogue sur  $[\beta, +\infty[$ , pour  $\beta > 1$ , entraîne que  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur tout intervalle  $[0, \alpha]$  ou  $[\beta, +\infty[$  ne contenant pas 1.

L'intégrabilité de  $f_n$  résulte de celle de  $x \mapsto x^n e^{-nx}$ , due elle-même à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-nx} = 0.$$

Le changement de variable  $u = nx$  donne alors :

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx} (nx)^n}{(n-1)!} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du = 1.$$

Montrons alors que  $(f_n)$  est une approximation de l'unité en 1. La première condition résulte du calcul de  $\int_{\mathbb{R}^+} f_n$ .

La convergence uniforme de  $(f_n)$  vers 0 sur  $[0, 1-\theta]$ , pour tout  $\theta \in ]0, 1[$  entraîne que  $\int_{[0, 1-\theta]} f_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Pour  $\theta > 0$  :

$$0 \leq \int_{1+\theta}^{+\infty} f_n = \int_{1+\theta}^{+\infty} \frac{e^{-(n-1)x} (nx)^{n-1}}{(n-2)!} \frac{nx e^{-x}}{n-1} dx \leq f_{n-1}(1+\theta) \int_{1+\theta}^{+\infty} 2xe^{-x} dx,$$



dès que  $n \geq 2$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n-1}(1 + \theta) = 0$ . Donc  $(f_n)$  vérifie la seconde relation des noyaux positifs, et la limite demandée est  $g(0)$ .

**6** Notons  $d$  la distance dans les espaces normés où se trouvent  $A$  et  $B$ .

1. Soit  $x \in A$ . Pour tout  $n$ , prenons  $x_n = x$ . Alors  $(f_n(x))$  converge, d'où la convergence simple.
2. Supposons  $f$  non continue en un certain  $x \in A$ . Il existe alors une suite  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $x$ , et  $\varepsilon > 0$  tels que  $\forall m, d(f(u_m), f(x)) \geq \varepsilon$ .  
 Pour chaque valeur de  $m$ , la suite  $(f_n(u_m))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(u_m)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il existe donc  $p_m$  tel que  $d(f_{p_m}(u_m), f(u_m)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , et donc :

$$d(f_{p_m}(u_m), f(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut même choisir, par récurrence,  $p_m > p_{m-1} + 1$  pour tout  $m$ , pour laisser un trou entre  $p_{m-1}$  et  $p_m$ .

Maintenant, construisons une suite  $(x_n)$  comme ceci :

- (a) si  $n \notin \Gamma = \{p_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ , posons  $x_n = x$ ;
- (b) sinon (autrement dit s'il existe  $m$  tel que  $n = p_m$ ), posons  $x_n = u_m$ .

La suite  $(x_n)$  converge vers  $x$ . Si  $n$  tend vers l'infini en restant hors de  $\Gamma$  (c'est possible car  $p_m \geq p_{m-1} + 2$ ),  $f_n(x_n) = f_n(x) \rightarrow f(x)$ . Cependant, si  $n \in \Gamma$ ,  $d(f_n(x_n), f(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ , ce qui contredit la convergence de  $(f_n(x_n))$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

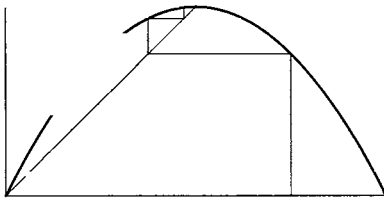
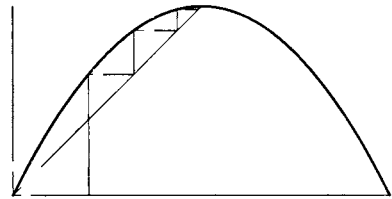
3. On suppose que  $A$  est compact, et, par l'absurde, supposons que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  et une suite  $(x_n)$  telle que, pour tout  $n$ ,  $d(f_n(x_n), f(x_n)) \geq \varepsilon$ . On en extrait une sous-suite  $(x_{n_p})_p$  qui converge vers un certain  $x$ . On définit alors la suite  $(x'_n)$  qui coïncide avec  $(x_n)$  pour les indices  $n_p$ , et est constamment égale à  $x$  pour les autres indices. Elle converge vers  $x$ , et comme  $f$  est continue,  $f(x_n)$  converge vers  $f(x)$ , d'où la contradiction voulue puisque  $d(f_{n_p}(x_{n_p}), f(x_{n_p})) \geq \varepsilon$ .

7. Si  $K'$  est le compact  $\text{Im}(g) = g(K)$  la condition donnée entraîne l'existence d'une application  $h : K' \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in K, f(x) = h(g(x))$ . Elle est continue, car si  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(F)$  est un fermé de  $K$ , donc compact, et  $h^{-1}(F) = g(f^{-1}(F))$ , est compact, donc ferme.

Construisons une fonction  $H$  continue de  $[a, b] = [\min K', \max K']$  dans  $\mathbb{R}$  dont la restriction à  $K'$  soit  $h$ . L'ouvert  $[a, b] \setminus K'$  est réunion disjointe d'intervalles ouverts  $I_p = ]a_p, b_p[$ , et sur chaque  $[a_p, b_p]$ ,  $H$  sera affine avec  $H(a_p) = h(a_p)$  et  $H(b_p) = h(b_p)$ . Si  $\alpha, \beta \in K$ ,  $H([\alpha, \beta])$  est, par construction, contenu dans  $[\min h(K \cap [\alpha, \beta]), \max h(K \cap [\alpha, \beta])]$ , ce qui assure la continuité de  $H$ . D'après le théorème d'approximation de Weierstrass  $H$  est limite d'une suite de polynômes  $p_n$  qui répondent à la question.

Lorsque  $K$  est un intervalle,  $K'$  en est un aussi, et la construction de  $H$  est inutile.

8.

 $x_0 = 0,75$  $x_0 = 0,25$ 

1. La suite  $(\varphi_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $f$  définie par  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(x) = 1/2$  si  $x \in ]0, 1[$ . En effet soit  $x_0 \in [0, 1]$ , et  $x_n = \varphi_n(x_0)$ .

Si  $x_0 \in ]0, 1/2]$ ,  $(x_n)$  est croissante majorée par  $1/2$ , donc elle converge, et c'est nécessairement vers un point fixe de  $f$ . Le seul candidat possible est dans ce cas  $1/2$ .

Si  $x_0 \in ]1/2, 1[$ ,  $x_1 \in ]0, 1/2]$ , et l'on est ramené au cas précédent.

La convergence n'est pas uniforme, car la fonction limite n'est pas continue.

En revanche, la convergence est uniforme sur  $[a, 1 - a]$ . En effet,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, 1-a]} |\varphi_n(x) - 1/2| &= \sup_{x \in [a, 1-a]} |\varphi_{n-1}(\varphi(x)) - 1/2| \\ &= \sup_{y \in [\varphi(a), 1/2]} |\varphi_{n-1}(y) - 1/2| = |\varphi_n(a) - 1/2|, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Il y a *a fortiori* convergence uniforme sur tout intervalle  $[a, b] \subset ]0, 1[$ .

2. Notons  $A$  l'anneau des fonctions polynomiales à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Il est clair que  $\varphi_n \in A$ . Donc la fonction constante  $1/2$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions dans  $A$ . Par produit d'applications (au sens du produit des valeurs *et non* de la composition), pour tout entier  $k \geq 1$ , la constante  $1/2^k$  sur  $[a, b]$  est elle-même limite uniforme d'applications toutes dans  $A$ . De même, pour  $p \in \mathbb{Z}$ , la constante  $p/2^k$  est limite uniforme de

fonctions dans  $A$ . Par multiplication par  $x^n$ ,  $\frac{px^n}{2^k}$  est aussi limite d'une suite de fonctions dans  $A$ .

Soit alors  $\varepsilon > 0$  et  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Le théorème de Weierstrass entraîne l'existence d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ . Fixons  $P = a_mx^m + \dots + a_1x + a_0$ .

Pour chaque  $i$ , dans la boule de centre  $a_ix^i$  et de rayon  $\varepsilon/(m+1)$  (pour la norme "infini"), on trouve  $Q_i \in A$  tel que  $\|a_ix^i - Q_i\|_\infty \leq \varepsilon/(m+1)$ . Il suffit alors de poser  $h = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m$ , pour que :

$$\|f - (Q_0 + Q_1 + \dots + Q_m)\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

9. 1. D'abord, si  $y' \in A$ ,  $g(\cdot, y')$  est bornée sur  $I$  car  $\forall x \in I :$

$$|g(x, y') - g(x, y)| \leq K|y' - y|$$

et  $g(\cdot, y)$  est bornée. De plus, si  $f$  est bornée,  $F$  l'est aussi, car, en fixant  $x_0 :$

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |g(x, f(h(x)))| \leq |g(x, f(h(x))) - g(x, f(h(x_0)))| + |g(x, f(h(x_0)))| \\ &\leq K|f(h(x)) - f(h(x_0))| + |g(x, f(h(x_0)))|, \end{aligned}$$

et  $f$  et  $g(\cdot, f(h(x_0)))$  sont bornées sur  $I$ .

L'application  $G$  de  $\mathcal{E}$  dans lui-même est contractante. En effet, si  $f_1, f_2 \in \mathcal{E} :$

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad |F_1(x) - F_2(x)| &= |g(x, f_1(h(x))) - g(x, f_2(h(x)))| \\ &\leq K|f_1(h(x)) - f_2(h(x))| \leq K\|f_1 - f_2\|_\infty. \end{aligned}$$

L'unique point fixe de  $G$  répond à la question par complétude de  $\mathcal{E}$ .

2. Si  $f \in \mathcal{H}$ , évidemment  $F(0) = 0$  et  $F(1) = 1$ . Pour montrer que  $F \in \mathcal{H}$  il suffit de montrer la continuité de  $F$  en  $1/3$  et en  $2/3$ . Si  $x = 1/3 :$

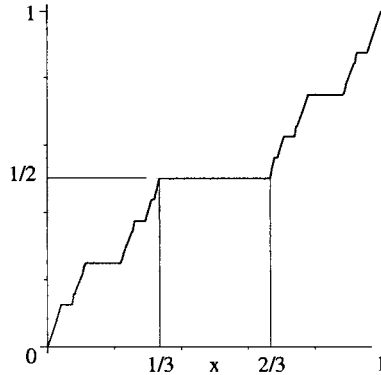
$$\frac{1}{2}f(3x) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}.$$

La continuité en  $2/3$  s'établit de même.

Pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\mathcal{H}$  est fermé dans  $\mathcal{E}$ , car les applications  $f \mapsto f(0)$  et  $f \mapsto f(1)$  sont continues, et  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  est fermé dans  $\mathcal{E}$ . Pour appliquer 1. et conclure, il suffit de remarquer que  $F(x) = g(x, f(h(x)))$ , où  $g$  et  $h$  sont définies sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  et  $[0, 1]$  par :

- (a) si  $x < \frac{1}{3}$ ,  $g(x, y) = \frac{1}{2}y$  et  $h(x) = 3x$ ;
- (b) si  $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ ,  $g(x, y) = \frac{1}{2}$  et  $h(x) = \frac{1}{2}$ ;
- (c) si  $\frac{2}{3} \leq x$ ,  $g(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y$  et  $h(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)$ .

car alors les  $g(x, \cdot)$  sont contractantes de rapport  $\frac{1}{2}$  et l'on voit que  $F = G(f)$ , i.e.  $\Gamma$  est la restriction de  $G$  à  $\mathcal{H}$ .



On applique le théorème du point fixe à  $G$ , et comme  $\mathcal{H}$  est ferme dans  $\mathcal{E}$ , le point fixe  $f_\infty$  de  $G$  est dans  $\mathcal{H}$ , et  $f_n \rightarrow f_\infty \in \mathcal{H}$ , uniformément par rapport à  $x$ . La figure ci-dessus représente  $f_\infty$ .

3. Soient  $h_{-1}$  et  $h_{+1}$  les homothéties de  $\mathbb{R}$  de rapport 3 et de centres respectifs 0 et 1. Pour tout point  $x$  de  $[0, 1]$  pour lequel il existe une suite finie  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ ,  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ , telle que  $h_{\varepsilon_1} \circ h_{\varepsilon_2} \circ \dots \circ h_{\varepsilon_p}(x) \in [1/3, 2/3]$ , et pour tout  $n \geq p$  :

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \dots + \frac{\varepsilon_p}{2^{p-1}}.$$

L'ensemble  $X$  de ces  $x$  contient le complémentaire dans  $[0, 1]$  de l'ensemble triadique de Cantor. On peut voir aussi  $X$  comme l'ensemble des images de  $[1/3, 2/3]$  par des homothéties de la forme :  $h_{\varepsilon_1}^{-1} \circ h_{\varepsilon_2}^{-1} \circ \dots \circ h_{\varepsilon_p}^{-1}$ .

La restriction de  $f$  à chacun des intervalles ainsi définis par un choix de  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$  est constante. Pourtant  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Mais l'ensemble des points où  $f$  est dérivable et de dérivée nulle admet un complémentaire dans  $[0, 1]$  non dénombrable, et la formule des accroissements finis ne s'étend pas à ce cas, même pour une fonction continue : la fonction  $f$  construite ici est un contre-exemple.

10. 1. La convergence simple est évidente. Pour la convergence normale, la dérivée  $(xe^{-nx})' = e^{-nx} - nxe^{-nx}$  est positive puis négative, et nulle en  $x = \frac{1}{n}$ , où  $u_n$  prend son maximum. La série  $\sum \frac{1}{n \ln n} e^{-1}$  diverge, il n'y a donc pas de convergence normale. Pour la convergence uniforme :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln n} \leq \frac{x}{\ln N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-nx} \leq \frac{x}{\ln N} \int_N^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{e^{-Nx}}{\ln N} \leq \frac{1}{\ln N}$$

qui tend vers 0 indépendamment de  $x$  lorsque  $N$  tend vers  $\infty$ , donc  $\sum u_n$  converge uniformément.

2. La fonction  $x \mapsto x \ln x$  admet un prolongement continu sur  $[0, 1]$ , donc chaque  $u_n$  est continue. De plus,  $u_n(x) = x^{n-1} (1-x) x \ln x$ , et la série de fonctions de terme général  $v_n(x) = x^{n-1} (1-x)$  converge normalement sur  $[0, 1/2]$ , car  $|v_n(x)| \leq (1/2)^{n-1}$ , donc  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[0, 1/2]$ .

La concavité du logarithme entraîne que, pour tout  $x \in [1/2, 1[$  :

$$\frac{-\ln x}{1-x} \leq \frac{-\ln 1/2}{1-1/2} = 2 \ln 2,$$

et  $|u_n(x)| \leq 2(\ln 2) x^n (1-x)^2$ . La convergence normale de  $\sum u_n$  résultera donc de celle de  $\sum x^n (1-x)^2$ . Or :

$$(x^n (1-x)^2)' = x^{n-1} (n - 2(n+1)x + (n+2)x^2)$$

est positive sur  $\left[0, \frac{n}{n+2}\right]$ , négative sur  $\left[\frac{n}{n+2}, 1\right]$ , et si  $x = \frac{n}{n+2}$  :

$$x^n (1-x)^2 = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sim \frac{1}{e^2} \left(\frac{2}{n}\right)^2$$

La convergence de  $\sum \frac{1}{n^2}$  permet de conclure.

11. 1. Soit  $N$  la partie entière de  $\omega$ . Alors, par monotonie :

$$\left| \int_a^N f - \sum_{n=a}^{N-1} f(n) \right| \leq f(N) \quad \text{et} \quad \left| \int_{N+1}^{+\infty} f - \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \right| \leq f(N+1).$$

D'après la formule de la moyenne :

$$\begin{aligned} \left| \int_N^{N+1} f - f(N) \right| &\leq \sup_{t,u \in [N, N+1]} |f(t) - f(u)| \\ &\leq (f(\omega) - f(N)) + (f(\omega) - f(N+1)) \end{aligned}$$

2. La série de fonctions converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{R}^+$ , d'après la règle de BERTRAND. Pour comparer la série à l'intégrale appliquons la première question à  $f_x(t) = \frac{(\ln t)^x}{t^2} = e^{x \ln \ln t - 2 \ln t}$  sur  $[1, +\infty[$ . Sa dérivée  $f'_x(t) = \frac{x}{t \ln t} - \frac{2}{t} = \frac{1}{t} \left( \frac{x}{\ln t} - 2 \right)$  est positive, puis négative, s'annule en  $\omega = e^{x/2}$ , et  $f_x(\omega) = \left(\frac{x}{2e}\right)^x$ .

Or le changement de variable  $u = \ln t$  donne :

$$\int_1^{+\infty} f_x(t) dt = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du = \Gamma(x+1).$$

D'après la formule admise (formule de STIRLING étendue à  $x \in \mathbb{R}$ )

$f_x(\omega) = o(\Gamma(x+1))$ , et d'après la première question, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f_x$

est équivalente à  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_x(n)$  si  $x$  tend vers l'infini.

3. Lorsque  $x \neq 0$ ,  $\frac{n^{\beta-\alpha}}{1+n^{\beta}x^2} \sim \frac{1}{x^2 n^\alpha}$ , et la série converge. Comparons sa somme à l'intégrale  $I(x) = \int_1^{+\infty} g(t) dt$ , avec  $g(t) = \frac{t^{\beta-\alpha}}{1+t^{\beta}x^2}$ .

Avec le changement de variable  $u^\beta = t^\beta x^2$  :

$$I(x) = x^{\frac{2(\alpha-\beta-1)}{\beta}} \int_{x^{2/\beta}}^{+\infty} \frac{u^{\beta-\alpha}}{1+u^\beta} du.$$

Lorsque  $\beta - \alpha > -1$  :

$$I(x) \sim x^{\frac{2(\alpha-\beta-1)}{\beta}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\beta-\alpha}}{1+u^\beta} du,$$

et lorsque  $\beta - \alpha = -1$  :

$$I(x) \sim x^{\frac{2(\alpha-\beta-1)}{\beta}} \ln(x^{2/\beta}).$$

Pour comparer la série à l'intégrale, si  $\beta - \alpha \leq 0$ ,  $g$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$ , et  $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g(n) - \int_1^{+\infty} g \leq g(1) = \frac{1}{1+x^2}$  borné lorsque  $x$  tend vers 0, donc  $f(x)$  est équivalent à  $I(x)$  si  $x$  tend vers 0.

Si  $\beta - \alpha > 0$ ,  $g'(t) = \frac{t^{\beta-\alpha-1}(\beta-\alpha-\alpha t^\beta x^2)}{(1+t^\beta x^2)^2}$ , et, pour  $x$  assez grand,  $g$

est croissante puis décroissante, son maximum, atteint en  $\omega = \left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha x^2}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ ,

étant majoré par  $\lambda x^{\frac{2(\alpha-\beta)}{\beta}}$ ,  $\lambda$  constante. On voit, grâce à la première question que  $f(x)$  est encore équivalent à  $I(x)$  dans ce cas.

- 12 Nous allons d'abord chercher un équivalent lorsque  $x$  tend vers l'infini de :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Comme la fonction  $t \mapsto \varphi_x(t) = \ln \left( 1 + \frac{x^2}{t^2 \pi^2} \right)$  est décroissante continue et intégrable sur  $[1, +\infty[$ ,  $\left| \int_1^{+\infty} \varphi_x - \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n) \right| \leq \varphi_x(1)$ .

Mais d'une part, le changement de variable  $t = \frac{x}{\pi u}$  donne :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \frac{x}{\pi} \int_0^{x/\pi} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2} du \sim \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2} du = x$$

puisque  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2} du = \left[ -\frac{\ln(1+u^2)}{u} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 du}{1+u^2} = \pi$ .

Et d'autre part,  $\varphi_x(1) = \ln \left( 1 + \frac{x^2}{\pi^2} \right) \sim 2 \ln x = o(x)$  si  $x$  tend vers l'infini

Donc  $h(x) \sim x$  lorsque  $x$  tend vers l'infini.

Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$  :

$$n^2 \pi^2 (1 - \varepsilon)^2 \leq a_n \leq n^2 \pi^2 (1 + \varepsilon)^2.$$

Alors,  $h(x(1 - \varepsilon)) - B_{N,x} \leq g(x) \leq h(x(1 + \varepsilon)) + A_{N,x}$ , avec :

$$A_{N,x} = \sum_{n=1}^N \left( \ln \left( 1 + \frac{x^2}{a_n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2 (1 - \varepsilon)^2} \right) \right),$$

$$B_{N,x} = \sum_{n=1}^N \left( \ln \left( 1 + \frac{x^2}{a_n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2 (1 + \varepsilon)^2} \right) \right)$$

Fixons maintenant  $N$  entier. Lorsque  $x$  tend vers l'infini,  $A_{N,x}$  est un  $O(\ln(x))$ , donc, si  $x$  est assez grand,  $A_{N,x} \leq \varepsilon x$ , et  $h(x(1 + \varepsilon)) \leq x(1 + 2\varepsilon)$ , d'où  $g(x) \leq x(1 + 3\varepsilon)$ . De même pour  $B_{N,x}$ , et, si  $x$  est assez grand,  $g(x) \geq x(1 - 3\varepsilon)$ . Finalement,  $g(x) \sim x$  si  $x$  tend vers l'infini.

- 13.** La convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}$  est conséquence facile du théorème de convergence uniforme des séries alternées, selon lequel, si  $(v_n(x))$  est une suite décroissante de fonctions tendant uniformément vers 0, et si  $u_n(x) = (-1)^n v_n(x)$ , alors la série  $\sum u_n(x)$  converge uniformément.

En effet, si  $A$  est fini, pour  $n$  assez grand, la suite de fonctions sur  $[-A, A]$

$$x \mapsto \frac{n}{n^2 + x^2} \text{ est décroissante, car l'application } t \mapsto \frac{t}{t^2 + x^2} \text{ a pour dérivée}$$

$$t \mapsto \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2}, \text{ négative si } t \geq A, \text{ quel que soit } x \in [-A, A].$$

Pour la convergence uniforme sur tout  $\mathbb{R}$ , la suite de fonctions  $x \mapsto \frac{n}{n^2 + x^2}$  n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}$ , même en se limitant à  $n \geq n_0$ . Il faut lui retrancher le terme général d'une série connue. Posons :

$$w_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{n}{n^2 + x^2} = \frac{x^2}{n(n^2 + x^2)}.$$

Cette fois-ci,  $(w_n(x))$  est décroissante et tend uniformément vers 0 sur tout  $\mathbb{R}$  car  $w_n(x) \leq \frac{1}{n}$ . Il ne reste qu'à appliquer le théorème à  $u_n(x) = (-1)^n w_n(x)$ .

14. 1. La convergence simple est immédiate, car  $\forall x, u_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Montrons que cette convergence n'est pas uniforme, en infirmant le critère de Cauchy uniforme. Trouvons pour cela une suite  $(x_n)$  de réels telle que  $\left| \sum_{p=n}^{2n} u_p(x_n) \right|$  soit minoré par une constante strictement positive. Pour  $x_n = n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{p=n}^{2n} u_p(n) &= \sum_{p=n}^{2n} \frac{2n}{n^2 + p^2} = \sum_{k=0}^n \frac{2n}{n^2 + (n+k)^2} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2n}{2n^2 + 2nk + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{2}{2 + 2\frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2}, \end{aligned}$$

où l'on reconnaît une somme de Riemann qui tend vers  $\int_0^1 \frac{2dx}{2 + 2x + x^2} > 0$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini.

2. Pour  $A > 0$ , sur l'intervalle compact  $[-A, A]$ , la série de fonctions converge normalement, car si  $x \in A$ ,  $\frac{2|x|}{x^2 + n^2} \leq \frac{2A}{n^2}$ .

Ainsi la somme de la série est continue sur tout compact, donc sur  $\mathbb{R}$ .

3. On peut penser à comparer la série à une intégrale dont la variable d'intégration prenne la place de  $n$ . Pour tout  $x \neq 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{2x}{x^2 + t^2}$  est décroissante et intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . De plus, pour tout  $N > 0$ , on a l'encadrement :

$$0 \leq \sum_{n=1}^N \frac{2x}{x^2 + n^2} - \int_1^{N+1} \frac{2x}{x^2 + t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{2}{x}.$$

Donc  $0 \leq S(x) - \int_1^{N+1} \frac{2x}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{2}{x}$ . Comme ces inégalités sont vérifiées



pour tout  $N$ , on peut faire tendre  $N$  vers l'infini. Mais :

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + t^2} dt = 2 \int_{1/x}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2},$$

qui tend vers  $\pi$  lorsque  $x$  tend vers l'infini. Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \pi$ .

15. 1. La série  $\sum u_n$  est nulle en 0. Pour  $x > 0$ ,  $u_n(x) \sim \frac{\ln n}{n^2 \sqrt{x}}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, donc la série  $\sum u_n$  converge sur  $\mathbb{R}^+$ .  
 2. Si  $x \geq a > 0$  :

$$u_n(x) \leq \frac{\sqrt{x} \ln n}{xn^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{x}n^2} \leq \frac{\ln n}{\sqrt{an^2}},$$

et la série converge normalement sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .  
 Mais pour  $x_n = 1/n^2$ ,

$$\sum_{p=1}^n u_p(x_n) = \sum_{p=1}^n \frac{n \ln p}{1 + \frac{p^2}{n^2}} \geq \sum_{p=1}^n \frac{n \ln p}{2} \sim \int_1^n \ln t dt \sim n \ln n$$

lorsque  $n$  tend vers l'infini. Donc la série ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$  (et c'est l'accumulation des graphes des  $u_n$  au voisinage de 0 qui en est responsable).

3. Ici, on peut penser à la comparaison de série et d'intégrale comme dans l'exercice 14, mais, pour  $x$  fixé, la fonction  $t \mapsto f_x(t) = \frac{\sqrt{x} \ln t}{1 + xt^2}$  n'est pas monotone. Néanmoins, définissant  $f_x$  sur  $[2, +\infty[$ , on a :

$$f'_x(t) = \sqrt{x} \frac{(1 + xt^2) - 2xt^2 \ln t}{t(1 + xt^2)^2}.$$

Il est clair que  $f'_x$  est intégrable sur  $[2, +\infty[$ . En reprenant les calculs pour  $x > 0$  fixé :

$$\left| S(x) - \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln t}{1 + xt^2} dt \right| \leq \int_2^{+\infty} |f'_x(t)| dt.$$

Or :

$$\int_2^{+\infty} |f'_x(t)| dt \leq \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{xt^3} dt + \int_2^{+\infty} \frac{2\sqrt{x} xt^2}{x^2 t^4} dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

D autre part, en posant  $u = t\sqrt{x}$  :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln t}{1 + xt^2} dt = - \int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln u - \ln \sqrt{x}}{1 + u^2} du.$$

Comme d'une part, lorsque  $x$  tend vers l'infini :

$$\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du \sim \int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2} du \sim \frac{\ln 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \sim \frac{\ln x}{4\sqrt{x}},$$

et d'autre part :

$$\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{1+u^2} du \sim \frac{\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{4\sqrt{x}},$$

cela entraîne que  $S(x)$  est un  $o\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$ , et tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini.

**Remarque** En poussant le développement asymptotique de ces deux intégrales plus loin, par intégration par parties, on trouve aisément que :

$$\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du = \frac{\ln x}{4\sqrt{x}} + \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

tandis que :

$$\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{1+u^2} du = \frac{\ln x}{4\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, nous voyons que  $S(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ . L'usage fait ici de l'intégrale de  $|f'_x|$  ne permet pas d'en dire plus, et il faudrait utiliser de la même manière l'intégrale de  $|f''_x|$  pour préciser le comportement de  $S(x)$  à l'infini.

16. 1. Pour  $x$  fixé et  $n_0 > |x|$ , la suite  $(|u_n(x)|)_{n \geq n_0}$  est décroissante et tend vers 0. D'après le théorème de convergence des séries alternées, la série  $\sum u_n$  converge simplement. Elle converge uniformément sur toute partie de  $\mathcal{D}$  de la forme  $\mathcal{D} \cap [-|a|, +\infty[$ , car son reste est majoré en valeur absolue par  $\frac{1}{n-|a|}$  pour  $n > |a|$ .
2. Si  $x > -1$ , la série  $\sum f_n$  définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(t) = (-1)^n t^{x+n-1}$  converge simplement vers la fonction continue  $f : t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ .

Par le critère des séries alternées, les sommes partielles sont dominées par la première d'entre elles, la fonction  $t \mapsto t^x$  intégrable sur  $]0, 1]$ . D'après le théorème de convergence dominée, on peut intervertir intégration et som-

mation, et écrire :

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1} dt \\ &= - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = - \int_0^1 \frac{e^{-x|\ln t|}}{1+t} dt. \end{aligned}$$

Or la série de fonctions  $\sum \varphi_n$  sur  $]0, 1[ : t \mapsto \varphi_n(t) = \frac{(-x)^n |\ln t|^n}{n!(1+t)}$  converge simplement vers la fonction continue  $t \mapsto \frac{e^{-x|\ln t|}}{1+t}$ .

Par le critère des séries alternées, la somme partielle est dominée par la première fonction  $\varphi_0(t) = \frac{1}{1+t}$ .

D'après le théorème de convergence dominée, on peut intervertir intégration et sommation, et écrire (avec le changement de variable  $t = e^{-u}$ ) :

$$H(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{1+t} dt = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{1+e^{-u}} du$$

Comme

$$n! = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du \geq \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{1+e^{-u}} du \geq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{2},$$

le rayon de convergence de cette série entière est 1.

**17** Pour que  $u_1(x)$  soit défini, il faut que  $x > -1$ . Réciproquement, si  $x > -1$  :

$$u_n(x) = x \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left( \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et  $\sum u_n(x)$  converge. Donc  $D = ]-1, +\infty[$ .

Nous allons montrer que  $\sum u_n$  converge normalement sur tout intervalle de la forme  $I_p = \left[-1 + \frac{1}{p}, p\right]$ ,  $p \geq 2$ , à l'aide du théorème sur les suites de fonctions dérivées. Pour tout  $n$ , et tout  $x$  :

$$u'_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + v_n(x),$$

avec  $v_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$ .

Or  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}$ , et  $|v_n(x)| \leq \frac{p}{n\left(n-1 + \frac{1}{p}\right)}$  lorsque  $x \in I_p$ .

Donc la série  $\sum u'_n$  converge normalement sur  $I_p$ . La convergence de

$\sum u_n(0)$  assure alors la convergence normale de  $\sum u_n$  sur le compact  $I_p$ , et  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$ .

De plus, pour  $k \geq 2$ ,  $u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{(n+x)^k}$ , de valeur absolue majorée par  $\frac{(k-1)!}{(n-1+\frac{1}{p})^k}$  sur  $[-1+\frac{1}{p}, +\infty[$ , d'où la convergence normale de  $\sum u_n^{(k)}$  sur cet intervalle (et l'on peut dériver terme à terme).

On peut intégrer terme à terme  $\sum u'_n$  sur chaque  $I_p$ , donc

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \int_0^x (f'(t+1) - f'(t)) dt \\ &= \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+t} - \frac{1}{n+1+t} \right) \right) dt \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x). \end{aligned}$$

**18.** 1. Les fonctions  $f$  qui vérifient la relation (\*) sont entièrement déterminées, par leur restriction  $f_0$  à  $[0, 1[$ , par récurrence sur  $[n, n+1[$  :  $f_0$  peut être n'importe quelle fonction, et  $f$  sera continue si, et seulement si,  $f_0$  a pour limite  $f_0(0) + \varphi(0)$  à gauche en 1. Toutes les fonctions vérifiant la relation (\*) se déduisent de l'une d'elles en lui ajoutant une fonction  $g$  arbitraire telle que  $\forall x, g(x+1) = g(x)$ .

2. Pour tout  $x \geq 0$ ,  $\varphi(x+n) \geq \int_{x+n}^{x+n+1} \varphi \geq \varphi(x+n+1)$ , donc :

$$0 \leq u_n(x) = \varphi(x+n) - \int_{x+n}^{x+n+1} \varphi \leq \varphi(x+n) - \varphi(x+n+1),$$

et  $\sum_{k=0}^n u_k(x) \leq \varphi(x) - \varphi(x+n+1)$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $\varphi(x+n+1)$  tend vers  $L = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ , donc la série  $\sum u_n(x)$  converge. Soit  $I(x)$  sa somme. La suite de terme général :

$$\sum_{k=0}^n (u_k(x) - u_k(0)) = \sum_{k=0}^n (\varphi(x+k) - \varphi(k)) - \int_x^{x+n+1} \varphi + \int_0^{n+1} \varphi$$

converge. Comme :

$$-\int_x^{x+n+1} \varphi + \int_0^{n+1} \varphi = -\int_{n+1}^{x+n+1} \varphi + \int_0^x \varphi,$$

et comme  $\int_{n+1}^{x+n+1} \varphi$  tend vers  $Lx$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, la série

$$\sum_k (\varphi(x+k) - \varphi(k)) \text{ converge de somme } S(x) = I(x) - I(0) + Lx - \int_0^x \varphi.$$

La continuité de  $S$  résultera de celle de  $I$ . Fixons  $x \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n$ , et tout  $z \geq 0$  :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(z) \leq \varphi(z+n) - L$$

qui tend vers 0 si  $n$  tend vers  $+\infty$ . Il existe donc  $N$  tel que, pour tout

$$t \in ]-1, 1[, \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} (u_k(x+t) - u_k(x)) \right| \leq \varepsilon. \text{ Chaque } u_k \text{ est continue, et}$$

il existe  $\eta$  tel que, si  $|t-x| \leq \eta$ ,  $\left| \sum_{k=0}^N (u_k(x+t) - u_k(x)) \right| \leq \varepsilon$ , d'où la continuité de  $I$ .

On peut enfin écrire :

$$\begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (\varphi(x+1+k) - \varphi(x+k) - \varphi(k) + \varphi(k)) \\ &= L - \varphi(x) \end{aligned}$$

et  $f$  vérifie la relation (\*).

19. 1. La série  $\sum_p \frac{2x}{x^2 - p^2}$  converge et  $f_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{p=1}^n \frac{2x}{x^2 - p^2}$ , donc  $f(x)$  est bien défini. De plus, si  $x$  et  $x + \frac{1}{2}$  ne sont pas entiers :

$$f_n(x) + f_n\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-2n}^{2n+1} \frac{2}{2x+k} = 2f_{2n}(2x) + \frac{2}{2x+2n+1}.$$

d'où la relation demandée. Comme  $f_n(x+1) = f_n(x) + \frac{1}{x+1+n} - \frac{1}{x-n}$ ,  $f$  est 1-périodique.

2. La fonction  $x \mapsto h(x) = \pi \cotan \pi x$  est aussi 1-périodique, et si  $t$  et  $t + \frac{\pi}{2}$  ne sont pas dans  $\pi \mathbb{Z}$  :

$$\cotan(t) + \cotan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{2 \cos 2t}{\sin 2t} = 2 \cotan 2t,$$

donc  $h$  vérifie la même équation fonctionnelle que  $f$ .

Or, lorsque  $x \neq 0$  tend vers 0  $\frac{1}{\tan \pi x} = \frac{1}{\pi x} (1 + O(x^2))$  donc  $h(x) - \frac{1}{x}$  tend vers 0. Par ailleurs, la convergence normale de la série  $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{x^2 - p^2}$

sur  $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$  (où  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ) entraîne que  $f(x) - \frac{1}{x}$  tend vers 0 si  $x \neq 0$  tend vers 0. Donc  $g$  admet un prolongement continu en 0, et, par périodicité, sur tout  $\mathbb{R}$ . Ce prolongement continu, noté encore  $g$ , vaut 0 en 0, et comme tout réel est limite d'une suite de réels  $x_n$  tels que ni  $x_n$  ni  $x_n + \frac{1}{2}$  ne soit entier, la relation fonctionnelle de la première question est vérifiée par continuité par  $g$ .

3. Comme  $g$  est continue,  $|g(x_0)| = M_A$ . Mais  $x_0 \leq 2A - 1$ , donc  $\frac{x_0}{2} + \frac{1}{2} \leq A$ ,

$$\left| g\left(\frac{x_0}{2} + \frac{1}{2}\right) \right| \leq M_A, \quad \text{et} \quad M_A = |g(x_0)| \leq \frac{1}{2} \left( \left| g\left(\frac{x_0}{2}\right) \right| + M_A \right),$$

d'où  $\left| g\left(\frac{x_0}{2}\right) \right| \geq M_A$ . Ce n'est possible que si  $x_0 = 0$ , autrement dit  $M_A = g(0) = 0$ . Donc  $g = 0$ .

20. 1. Si  $x > 0$ ,  $|\varphi(x, t)| \leq \frac{1}{e^{x+t} - 1}$ , intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . donc  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Si  $x_0 > 0$  et  $\eta > 0$  vérifie  $x_0 - \eta > 0$ , pour tout  $x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  :

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{-e^{x+t} \sin t}{(e^{x+t} - 1)^2} \right| \leq \frac{e^{t+x_0+\eta}}{(e^{t+x_0-\eta} - 1)^2}$$

intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc on peut dériver  $F$  sous le signe  $\int$ . On montre de la même manière que :

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{2e^{2(x+t)} \sin t}{(e^{x+t} - 1)^3} - \frac{e^{x+t} \sin t}{(e^{x+t} - 1)^2} \right) dt.$$

Deux intégrations par parties successives, en dérivant la première fois  $\sin t$ , puis la seconde fois  $\cos t$ , donnent  $F''(x) = \frac{1}{e^x - 1} + F(x)$ .

De plus, si  $x \geq \ln 2$ ,  $e^{x+t} - 1 \geq e^{x+t}/2$ , et  $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{e^{x+t}} = 2e^{-x}$ , donc

$F(x)$  tend vers 0 si  $x$  tend vers l'infini. On montre de même que  $F'(x)$  tend vers 0 si  $x$  tend vers l'infini. Comme les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation dif-

férentielle  $f'' + f = \frac{1}{e^x - 1}$  sont les fonctions  $x \mapsto F(x) + a \cos x + b \sin x$ ,  $F$  est la seule qui tende vers 0 ainsi que sa dérivée lorsque  $x$  tend vers l'infini.

2. Les séries  $\sum \frac{n^k e^{-nx}}{1 + n^2}$  ( $k$  entier) convergent normalement sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$ , donc on peut dériver deux fois terme à terme la

série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ , dont la somme  $G(x)$  vérifie alors :

$$G''(x) + G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Comme  $G(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ , et  $G'(x)$  aussi, qui tendent alors vers 0 si  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $G = F$  d'après la remarque de la fin de le réponse à la première question.

**Remarque** On pouvait déduire  $G = F$  du développement en série de  $\varphi(x, t)$ , car le théorème d'interversion de  $\int$  et  $\sum$  s'applique pour  $x > 0$  fixé, et :

$$F(x) = e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{1 - e^{-(t+x)}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(1+n)x} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} \sin t dt,$$

or  $\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} \sin t dt = \frac{1}{1 + (n+1)^2}$ .

21.  $f_n$  est la  $n^{\text{ème}}$  intégrale itérée de  $f_0$ , et, grâce à la formule de Taylor avec reste intégral,  $f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_0(t) dt$ . Comme  $\|f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \|f_0\|_\infty$ , la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, b]$ . Pour  $x$  fixé, la série de fonctions de  $t$  :  $\sum \frac{(x-t)^k}{k!} f_0(t)$  converge normalement sur  $[0, b]$ , et l'on peut intervertir sommation et intégration :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \int_0^x e^{x-t} f_0(t) dt,$$

où l'on reconnaît l'expression intégrale de l'unique solution nulle en 0 de l'équation différentielle  $F' - F = f_0$ .

22. Si  $|x| < 1$ , pour tout  $n \geq 1$ ,  $|x|^n \leq |x|$ , et :

$$|1 - x^n| \geq 1 - |x|^n \geq 1 - |x|,$$

d'où la convergence simple de  $\sum \frac{a_n x^n}{1 - x^n}$  et de  $\sum \frac{|a_n| |x|^n}{1 - |x|^n}$ , car  $\sum |a_n| |x|^n$  converge dans ce cas.

La série double  $\sum_{n \geq 1, m \geq 0} |a_n| \cdot |x|^n \cdot |x|^{mn}$  est sommable puisque :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} |a_n| \cdot |x|^n \cdot |x|^{mn} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( |a_n| \cdot |x|^n \sum_{m=0}^{+\infty} |x|^{mn} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n| |x|^n}{1 - |x|^n}.$$

On peut intervertir l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_n x^n x^{mn} \right) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{(1+m)n} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} f(x^{m+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(x^k) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier proposé,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ , et :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(1+x+\dots+x^{k-1})^2}.$$

Or la concavité du logarithme entraîne que, pour tout  $x \geq 0$  :

$$\frac{1+x+\dots+x^{k-1}}{k} \geq \sqrt[k]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \dots \cdot x^{k-1}} = \sqrt[k]{x^{k(k-1)/2}} = x^{(k-1)/2},$$

$$\text{donc } \frac{x^k}{(1+x+\dots+x^{k-1})^2} \leq \frac{x^{k-(k-1)}}{k^2} = \frac{x}{k^2}.$$

Ainsi, la série de fonctions  $\sum \frac{x^k}{(1+x+\dots+x^{k-1})^2}$  converge normalement sur  $[0, 1]$ , et sa somme  $h(x)$  vérifie  $h(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} h(x)$ . Finalement, lorsque  $x$  tend vers 1 :

$$f(x) = g(x) \sim \frac{1}{(1-x)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6(1-x)^2}.$$

- 23 1.** Pour simplifier l'écriture, considérons une suite  $(a_n)$  de nombres complexes, et  $(b_n)$  une suite de réels positifs décroissante. Si  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , une transformation simple appelée *transformation d'ABEL*, donne :

$$a_0 b_0 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n,$$

et :

$$|a_0 b_0 + \dots + a_n b_n| \leq \left( \max_{k \leq n-1} |A_k| \right) \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + |A_n| \cdot b_n \leq \left( \max_{k \leq n} |A_k| \right) b_0,$$

$$\text{car } b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + b_n.$$



Revenant à nos suites de fonctions, ces majorations appliquées à partir du rang  $p$  à  $\sum a_q(x)b_q(x)$  s'écrivent pour tout  $p$  entier, et tout  $n \geq 0$  :

$$|a_p b_p + \dots + a_{p+n} b_{p+n}|(x) \leq \left( \max_{0 \leq k \leq n} |A_{p,k}(x)| \right) b_p(x),$$

où  $A_{p,k}(x) = a_p(x) + a_{p+1}(x) + \dots + a_{p+k}(x)$ . Chacune des hypothèses ((1)) et ((2)) entraîne alors immédiatement que  $\sum a_q b_q$  vérifie le critère de Cauchy uniforme pour les séries.

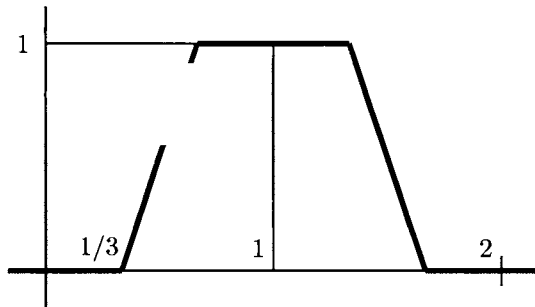
2. Pour les deux exemples, posons  $a_n(x) = \alpha_n$ . Pour le premier, il faut prouver la convergence uniforme séparément sur  $]0, 1]$ , et sur  $[1, +\infty[$ . Sur  $]0, 1]$ , la suite de fonctions  $b_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$  est décroissante majorée par  $\frac{1}{2}$ , et l'on peut appliquer les hypothèses ((1)) pour conclure.

Sur  $[1, +\infty[$ , la suite de fonctions  $b_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$  décroît, et les hypothèses ((1)) entraînent que  $\sum a_n(x)b_n(x)$  converge uniformément vers :

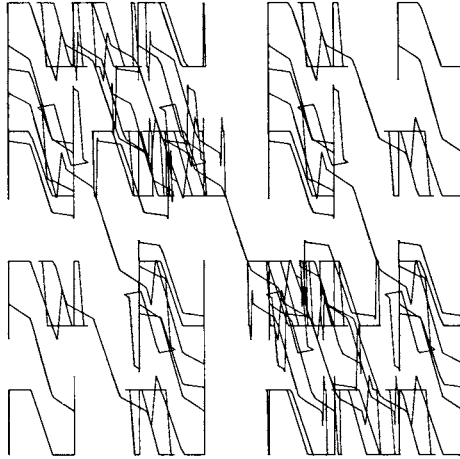
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{1+x^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n x^n}{1+x^n}.$$

Pour le second exemple, les variations de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t} + t$  entraînent immédiatement que la suite de fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x^n} + x^n$  est croissante et minorée par 1 sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc on peut appliquer les hypothèses ((1)) à  $b_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ .

24.



1. La fonction  $f$  prend ses valeurs dans  $[0, 1]$ , et la convergence normale des deux séries de fonctions est immédiate



2. Si  $x \in [0, 1]$ , on peut l'écrire  $x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_{2p}}{2^{p+1}}$ , où  $\forall p, a_{2p} \in \{0, 1\}$ . Lorsque  $x = 1$ , il suffit de considérer son développement impropre, où tous les  $a_{2p}$  sont égaux à 1. De même,  $y = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_{2p+1}}{2^{p+1}}$ . On pose alors  $t = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_p}{3^{p+1}}$ .

Si  $k$  est un entier positif ou nul,  $3^k t = N_k + \frac{2a_k}{3} + v_k$ , où  $N_k = 2 \sum_{p=0}^{k-1} \frac{a_p 3^k}{3^{p+1}}$  est un entier pair, et  $v_k = \frac{2}{3} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a_{k+q}}{3^q}$  est majoré par  $\frac{2}{3} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{3^q} = \frac{1}{3}$ .

Donc si  $a_k = 0$ ,  $3^k t \in \left[ N_k, N_k + \frac{1}{3} \right]$  et  $f(3^k t) = 0$ ; si  $a_k = 1$ ,  $3^k t \in \left[ N_k + \frac{2}{3}, N_k + 1 \right]$ , et  $f(3^k t) = 1$ . Dans tous les cas  $f(3^k t) = a_k$ , et  $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} a_{2n} = x$ . De même,  $v(t) = y$ .

25. 1. La fonction  $f_n$  prend ses valeurs dans  $[0, 1]$ , donc la série qui définit chaque  $g_n$  converge normalement, et  $g_n$  est continue.
2. Montrons que  $(g_n)$  converge simplement vers la fonction  $g = 0$ . En effet, soit  $x$  un réel quelconque, et  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $M$ , que nous fixerons, tel que  $\frac{1}{2^M} \leq \varepsilon$ , de sorte que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{m=M+1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} f_n(t - r_m) \leq \varepsilon.$$

Soit  $A_M$  l'ensemble (fini) des  $r_m$  tels que  $m \leq M$ .

Si  $x \notin A_M$ , et si  $2/n$  est inférieur à la distance de  $x$  à  $A_M$ ,  $f_n(x - r_m)$  est nul pour tout  $m \leq M$ , et  $g_n(x) \leq \varepsilon$ .

S'il existe  $m_0$  tel que  $x = r_{m_0}$ , alors  $\frac{1}{2^{m_0}} f_n(x - r_{m_0}) = 0$  pour tout  $n$ ; de plus, si  $2/n$  est inférieur à la distance de  $x$  à  $A_M - \{x\}$ ,  $f_n(x - r_m) = 0$  pour tout  $m \leq M$  distinct de  $m_0$ , de sorte qu'ici encore  $g_n(x) \leq \varepsilon$ . Donc  $(g_n)$  tend vers 0.

Soit maintenant  $I$  un intervalle quelconque de longueur strictement positive, et  $r = r_m$  un rationnel dans son intérieur. Si  $t_n = r + \frac{1}{n} = r_m + \frac{1}{n}$  :

$$g_n(t_n) - g(t_n) \geq \frac{1}{2^m} f_n(t_n - r_m) = \frac{1}{2^m} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^m}$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

- 26** 1. Définissons la "fonction en cloche"  $\varphi$  par :  $\varphi(x) = e^{-1/(1-x^2)}$  si  $x \in ]-1, 1[$ , et  $\varphi(x) = 0$  ailleurs. Elle est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi$ , l'application  $x \mapsto \Psi(x) = \Phi\left(3\left(x - \frac{2}{3}\right)\right)$  est  $C^\infty$ , croissante, nulle sur  $]-\infty, \frac{1}{3}]$ , et constante égale à un réel  $L > 0$  sur  $[1, +\infty[$ . Il suffit d'en retourner le graphe, de poser  $g(x) = \frac{L - \Psi(x)}{L}$  sur  $\mathbb{R}^+$  complétée en une fonction paire sur  $\mathbb{R}$ , et  $g$  conviendra, avec  $\theta = 1/3$ .
2. Si  $|x| \geq \lambda_n$ ,  $g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) = 0$ . Si  $|x| \leq \lambda_n$ ,  $\left|a_n \frac{x^n}{n!} g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right| \leq |a_n| \frac{\lambda_n^n}{n!}$ . Une condition suffisante est donc : (1)  $\sum |a_n| \frac{\lambda_n^n}{n!}$  converge.
3. La formule de Leibniz, pour des  $n$  éventuellement inférieurs à  $k$ , donne :

$$u_n^{(k)}(x) = a_n \sum_{\substack{i \geq k-n \\ 0 \leq i \leq k}} C_k^i \frac{x^{n-k+i}}{(n-k+i)!} \frac{1}{\lambda_n^i} g^{(i)}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right).$$

Supposons que  $n \geq k$ . Si  $|x| \geq \lambda_n$ ,  $u_n^{(k)}(x) = 0$ , et si  $|x| \leq \lambda_n$  :

$$|u_n^{(k)}(x)| \leq |a_n| \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\lambda_n^{n-k+i}}{(n-k+i)!} \frac{1}{\lambda_n^i} \|g^{(i)}\|_\infty,$$

et la condition suffisante qui vient naturellement est que pour tout  $i \leq k$  :

$$\sum_{n \geq k} |a_n| \frac{\lambda_n^{n-k}}{(n-k+i)!} \text{ converge.}$$

Pour que cela soit vrai pour toutes les valeurs de  $i \leq k$ , il suffit que :

$$(2) \quad \forall k, \sum_{n \geq k} |a_n| \frac{\lambda_n^{n-k}}{(n-k)!} \text{ converge.}$$

4. Il est facile de trouver une infinité de suite  $(\lambda_n)$  vérifiant ((1)) et ((2)) : il suffit de choisir  $\lambda_n$  tel que  $|a_n \lambda_n| \leq 1$  et  $\lambda_n \leq 1$ . Dans ce cas, pour tout  $k$ , et  $\forall n \geq k+1$ ,  $|a_n \lambda_n^{n-k}| \leq |a_n \lambda_n| \leq 1$  et  $\sum_{n \geq k+1} \frac{1}{(n-k)!}$  converge.
5. Si  $n > k$ ,  $u_n^{(k)}(0) = 0$ , car  $n-k+i \geq 1 \implies x^{n-k+i} = 0$  et chacun des termes de la somme est nul. Si  $n < k$ ,  $i \geq n-k$  et  $g^{(i)}(0) = 0$ . Enfin, si  $n = k$ ,  $u_n^{(k)}(0) = a_n = f^{(n)}(0)$ .

27. 1. En effet, soit :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{F(b_n) - F(x) + F(x) - F(a_n)}{b_n - x + x - a_n} \\ &= \frac{(b_n - x) \frac{F(b_n) - F(x)}{b_n - x} + (x - a_n) \frac{F(x) - F(a_n)}{x - a_n}}{b_n - x + x - a_n}, \end{aligned}$$

en convenant de ne pas écrire celui des deux termes de la somme du numérateur dont le facteur  $b_n - x$  (resp.  $x - a_n$ ) est nul. Alors,  $A_n$  est le barycentre à masses positives de deux suites réelles de même limite  $F'(x)$

2. La série de fonctions  $\sum 10^{-n} f(10^n x)$  converge normalement, car  $f$  est bornée par 1, et  $0 \leq 10^{-n} f(10^n x) \leq 10^{-n}$ . La somme  $F(x)$  est donc fonction continue de  $x$ , manifestement 1-périodique.

Soit alors  $x \in [0, 1[$ , de développement décimal propre :  $x = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x_p}{10^p}$ , où tous

les  $x_p$  sont dans  $[[0, 9]]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$a_n = \sum_{p=1}^n \frac{x_p}{10^p}, \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Nous allons montrer que  $\frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = 10^n (F(b_n) - F(a_n))$  n a pas de limite lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Lorsque  $k \geq n$ ,  $10^k a_n = \sum_{p=1}^n 10^{k-p} x_p \in \mathbb{Z}$  et de même  $10^k b_n \in \mathbb{Z}$ , donc

$$f(10^k a_n) = f(10^k b_n) = 0.$$

Si  $k < n$ , il existe un entier  $M_{k,n}$  tel que :

$$10^k a_n = M_{k,n} + \lambda_{k,n}, \quad \text{avec} \quad \lambda_{k,n} = \frac{x_{k+1}}{10} + \frac{x_{k+2}}{100} + \cdots + \frac{x_n}{10^{n-k}},$$

de sorte que  $10^k b_n = M_{k,n} + \lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}}$ , et :

$$\begin{aligned} \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} &= 10^n \sum_{k=0}^{n-1} 10^{-k} (f(10^k b_n) - f(10^k a_n)) \\ &= 10^n \sum_{k=0}^{n-1} 10^{-k} \left( f \left( \lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}} \right) - f(\lambda_{k,n}) \right). \end{aligned}$$

Montrons que  $f \left( \lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}} \right) - f(\lambda_{k,n}) = \frac{1}{10^{n-k}} \varepsilon_k$ , où  $\varepsilon_k = \pm 1$  est indépendante de  $n$  (et ne dépend que de  $k$ ). Cette valeur  $\pm 1$  repose sur la remarque simple que  $\lambda_{k,n}$  et  $\lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}}$  sont tous deux dans  $\frac{1}{10^{n-k}} \mathbb{Z}$  et du même côté de  $1/2$ . Mais il faut voir aussi pourquoi  $\varepsilon_k$  ne dépend pas de  $n$ . Pour cela, si  $x_{k+1} \leq 4$ , alors :

$$\lambda_{k,n} \leq \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^{n-k}} = \frac{5}{10} - \frac{1}{10^{n-k}},$$

donc  $\lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}} \leq \frac{5}{10}$  lui aussi, de sorte que :

$$f \left( \lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}} \right) - f(\lambda_{k,n}) = \lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}} - \lambda_{k,n} = + \frac{1}{10^{n-k}}.$$

De même, si  $x_{k+1} \geq 5$ , alors  $\frac{5}{10} \leq \lambda_{k,n}$ , et :

$$f \left( \lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}} \right) - f(\lambda_{k,n}) = 1 - \left( \lambda_{k,n} + \frac{1}{10^{n-k}} \right) - (1 - \lambda_{k,n}) = - \frac{1}{10^{n-k}}.$$

D'où les résultats annoncés sur  $\varepsilon_k$  qui ne dépend que de  $x_{k+1}$ , et vaut 1 si  $x_{k+1} \leq 4$  et  $-1$  si  $x_{k+1} \geq 5$ .

Mais alors :

$$\frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = 10^n \sum_{k=0}^{n-1} 10^{-k} \cdot \frac{\varepsilon_k}{10^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k,$$

somme partielle de la série  $\sum \varepsilon_k$  dont le terme général ne tend pas vers 0.

On peut alors conclure à l'aide de la première question.

## Chapitre 13

**Avertissement** Dans ce chapitre, afin de mieux faire ressortir les méthodes employées, nous avons limité la rédaction des solutions aux points fondamentaux de celles-ci. En particulier, la justification de l'existence des intégrales manipulées dans les exercices qui suivent est laissée au lecteur, qui devra donc, dans chacun des cas, vérifier au préalable que les fonctions à intégrer sont bien continues par morceaux sur le segment considéré.

1. La fonction  $f$  étant non nulle, on a  $M > 0$ .

1. Soit  $\varepsilon > 0$ .

• On a immédiatement :

$$u_n = \sqrt[n]{\int_{[a,b]} f^n} \leq M \sqrt[n]{b-a}.$$

• Pour la minoration, considérons un point  $c$  où le maximum de  $f$  est atteint (fonction continue sur un segment). Par continuité en  $c$ , il existe un segment  $[\alpha, \beta]$  inclus dans  $[a, b]$ , contenant  $c$ , de longueur strictement positive sur lequel  $f$  est minorée par  $M(1 - \varepsilon)$ .

On obtient alors :

$$\int_{[a,b]} f^n \geq \int_{[\alpha,\beta]} f^n$$

ce qui donne :

$$u_n \geq M(1 - \varepsilon) \sqrt[n]{\beta - \alpha}.$$

• La suite  $(u_n)$  est ainsi encadrée par deux suites convergeant respectivement vers  $M(1 - \varepsilon)$  et  $M$ , donc il existe un rang  $n_0$  à partir duquel on a :

$$M(1 - 2\varepsilon) \leq u_n \leq M(1 + \varepsilon)$$

ce qui prouve le résultat.

2. On a  $I_n > 0$  puisque la fonction  $f^n$  est continue positive et non nulle.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions  $f^{(n-1)/2}$  et  $f^{(n+1)/2}$ , on obtient :

$$\left( \int_{[a,b]} f^n \right)^2 \leq \left( \int_{[a,b]} f^{n-1} \right) \left( \int_{[a,b]} f^{n+1} \right)$$

ce qui prouve que la suite  $I_{n+1}/I_n$  est croissante. Soit  $\ell$  sa limite strictement positive.

Comme on a aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{I_n} = M$ , les règles de Cauchy et de d'Alembert montrent que le rayon de convergence de la série entière  $\sum I_n z^n$  est égal à  $1/M$  et à  $1/\ell$ , et donc que  $\ell = M$ .

2. 1. La fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et strictement croissante sur  $[a, b]$ . Elle définit donc une bijection de  $[a, b]$  sur son image  $[0, \alpha]$ , avec  $\alpha = F(b)$ . Il est clair que l'unique subdivision répondant à la question est définie par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_k = F^{-1} \left( \frac{k \alpha}{n} \right).$$

2. Par le changement de variable  $y = F(x)$ , on obtient :

$$\int_a^b g(x) F'(x) dx = \int_0^\alpha (g \circ F^{-1})(y) dy$$

et les sommes de Riemann :

$$\frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^n g(x_k) = \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^n (g \circ F^{-1}) \left( \frac{k \alpha}{n} \right)$$

convergent vers l'intégrale de  $g \circ F^{-1}$  sur  $[0, \alpha]$ , ce qui prouve :

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(x_k).$$

3. 1. Si  $P = X^n - 1 = \prod_{\omega^n=1} (X - \omega)$ , on a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{\omega^n=1} \frac{1}{X - \omega} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - e^{2ik\pi/n}}$$

et en utilisant des sommes de Riemann :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - e^{2ik\pi/n}} = 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n-1}}{x^n - 1}$$

ce qui donne :

$$I = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{2\pi}{x} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

2. • Pour  $|x| < 1$  :

$$\frac{1}{x - e^{it}} = -\frac{e^{-it}}{1 - x e^{-it}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-i(n+1)t}$$

avec convergence normale sur  $[0, 2\pi]$  de la série de fonctions de  $t$  puisque  $\forall t \in [0, 2\pi]$ ,  $|x^n e^{-i(n+1)t}| \leq |x|^n$ . D'où :

$$I = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)t} dt = 0.$$

- Pour  $|x| > 1$  :

$$\frac{1}{x - e^{it}} = \frac{1/x}{1 - \frac{e^{it}}{x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} e^{int}$$

la convergence étant normale sur  $[0, 2\pi]$  puisque :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \left| \frac{1}{x^{n+1}} e^{int} \right| \leq \frac{1}{|x|^{n+1}}.$$

On en déduit :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \frac{2\pi}{x}.$$

- 4 1. La fonction  $\varphi(t) = f(t) \cot(\pi t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$  et se prolonge en une fonction continue sur  $[0, 1]$  puisque :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \frac{f'(0)}{\pi} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t) = \frac{f'(1)}{\pi},$$

ce qui prouve l'existence de  $I_1$  et  $I_2$ .

Par une intégration par parties sur  $] -1, 1[$ , on a :

$$2 \int f(t) f'(t) \cot(\pi t) dt = f(t)^2 \cot(\pi t) + \pi \int f(t)^2 (1 + \cot^2(\pi t)) dt$$

et comme  $f(t)^2 \cot(\pi t) = \varphi(t) f(t)$  tend vers 0 en 0 et 1 on en déduit  $2I_1 = \pi I_2$  c'est-à-dire :

$$\pi \int_{[0,1]} \varphi^2 + \pi \int_{[0,1]} f^2 = 2 \int_{[0,1]} \varphi f'.$$

2. En prenant le produit scalaire  $(u | v) = \int_{[0,1]} uv$ , cela s'écrit :

$$\pi (\varphi | \varphi) - 2 (\varphi | f') + \pi (f | f) = 0,$$

soit :

$$(\pi\varphi | \pi\varphi) - 2(\pi\varphi | f') + \pi^2 (f | f) = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$(\pi\varphi - f' | \pi\varphi - f') + \pi^2 (f | f) - (f' | f') = 0$$

d'où l'inégalité  $(f' | f') \geq \pi^2 (f | f)$  demandée.

Les cas d'égalité correspondent aux fonctions  $f$  telles que  $\pi\varphi - f' = 0$ , c'est-à-dire aux fonctions  $f$  vérifiant l'équation différentielle  $\pi \cos(\pi t) y - \sin(\pi t) y' = 0$  dont les solutions sont :

$$f(t) = \lambda \sin(\pi t) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Remarque** Nous retrouverons plus tard ce résultat à l'aide de la théorie des séries de Fourier.



- 5 Comme  $f$  est continue sur  $[0, 2\pi]$  et que la valeur moyenne de  $f$  est comprise entre ses bornes, et il existe un réel  $x_0 \in [0, 2\pi]$  tel que :

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f.$$

Alors, pour tout  $x \in [0, 2\pi]$  :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x_0)| + \left| \int_{[x, x_0]} f' \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} |f| + \int_{[0, 2\pi]} |f'|. \end{aligned}$$

Si  $f = g + ih$ , avec  $g$  et  $h$  réelles, en appliquant ce qui précède aux fonctions  $g$  et  $h$ , il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{R}} |f| &\leq \sup_{\mathbf{R}} |g| + \sup_{\mathbf{R}} |h| \\ &\leq A \int_{[0, 2\pi]} (|g'| + |h'|) + B \int_{[0, 2\pi]} (|g| + |h|) \\ &\leq 2A \int_{[0, 2\pi]} |f'| + 2B \int_{[0, 2\pi]} |f|. \end{aligned}$$

6. Soit  $\varphi$  en escalier telle que  $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$  et  $\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ . On peut trouver une fonction  $\gamma$  en escalier telle que  $\varphi\gamma = |\varphi|$  et  $\|\gamma\|_\infty \leq 1$  : il suffit de prendre  $\gamma(x) = 1$  lorsque  $\varphi(x) \geq 0$  et  $\gamma(x) = -1$  sinon. On peut ensuite trouver  $g$  continue telle que  $\|g - \gamma\|_1 \leq \varepsilon$  et  $\|g\|_\infty \leq \|\gamma\|_\infty \leq 1$  (voir page 490). Alors :

$$\begin{aligned} \||f| - fg\|_1 &\leq \||f| - |\varphi|\|_1 + \|\varphi\gamma - \varphi g\|_1 + \|\varphi g - fg\|_1 \\ &\leq (b-a) \||f| - |\varphi|\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \|\gamma - g\|_1 + (b-a) \|\varphi - f\|_\infty \|g\|_\infty \\ &\leq 2(b-a) \|f - \varphi\|_\infty + \|f\|_\infty \|\gamma - g\|_1 \\ &\leq (2(b-a) + \|f\|_\infty) \varepsilon. \end{aligned}$$

7. On commence par écrire :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt.$$

Si  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  avec  $\lambda \in [0, 1]$ , alors  $z + t = \lambda(x + t) + (1 - \lambda)(y + t)$   
ce qui donne :

$$f(z + t) \leq \lambda f(x + t) + (1 - \lambda) f(y + t)$$

puis en intégrant entre  $-h$  et  $h$  :

$$\varphi(z) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(y)$$

ce qui prouve la convexité de  $\varphi$ .

**8.** Par Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_{[0,1]} f' \right| \leq \left( \int_{[0,1]} 1^2 \right) \left( \int_{[0,1]} |f'|^2 \right)$$

soit :

$$|b - a|^2 \leq \int_{[0,1]} |f'|^2.$$

Ce minorant  $|b - a|^2$  est la borne inférieure puisqu'il est atteint pour les fonctions qui réalisent l'égalité dans Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire les fonctions qui ont une dérivée constante, ce qui, compte tenu de  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$  donne l'unique fonction :

$$t \mapsto tb + (1 - t)a.$$

**9** Évidemment, il suffit de se limiter à  $\mu \in [f(a), f(b)]$ , c'est-à-dire à  $\mu = f(x)$  avec  $x \in [a, b]$ . Posons donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{[a,b]} |f - f(x)| \\ &= \int_{[a,x]} (f(x) - f) + \int_{[x,b]} (f - f(x)) \\ &= (2x - a - b) f(x) - \int_{[a,x]} f + \int_{[x,b]} f \end{aligned}$$

Donc, pour  $c = \frac{a+b}{2}$  :

$$\varphi(x) - \varphi(c) = 2 \left( (x - c) f(x) - \int_c^x f(t) dt \right) = 2 \int_c^x (f(x) - f(t)) dt$$

- Si  $x \geq c$ , alors  $f \leq f(x)$  sur  $[c, x]$  et donc  $\varphi(x) - \varphi(c) \geq 0$ .
- Si  $x \leq c$ , alors  $f \geq f(x)$  sur  $[x, c]$  et donc  $\varphi(x) - \varphi(c) \geq 0$ .

10. L'inégalité de droite découle immédiatement de la relation, évidente par élévation au carré :

$$\sqrt{1 + f(t)^2} \leq 1 + f(t).$$

L'autre inégalité est une conséquence de l'inégalité de la moyenne :

$$\left\| \int_{[0,1]} \varphi \right\| \leq \int_{[0,1]} \|\varphi\|$$

appliquée à la fonction  $\varphi = (1, f)$  pour la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ .

Lorsque  $f = F'$ , on considère la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = F(x)$ . Elle est contenue dans le rectangle  $[0, 1] \times [F(0), F(1)]$ . Comme la fonction  $F$  est croissante, la longueur de  $\Gamma$  est comprise entre la longueur de la diagonale et le demi-périmètre du rectangle.

11. On remarque que pour  $n$  suffisamment grand,  $\sin(k/n^2)$  n'est pas très différent de  $k/n^2$ . En posant :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2}$$

on reconnaît une somme de Riemann de  $t \sin t$  sur  $[0, 1]$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_0^1 t \sin t \, dt = \sin 1 - \cos 1.$$

Montrons donc que  $S_n$  a la même limite en évaluant la différence :

$$S_n - T_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \left( \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right).$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2}$$

permet d'obtenir :

$$|S_n - T_n| \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k^2}{2n^4} \leq \frac{1}{2n} T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve le résultat.

12. 1. Vérifions le résultat si  $f$  est affine. Pour  $f(x) = 1 + ax$ , on a :

$$\int_0^1 x f(x) \, dx = \frac{1}{2} + \frac{a}{3} \quad \text{et} \quad \left( \int_0^1 f(x) \, dx \right)^2 = \left( 1 + \frac{a}{2} \right)^2$$

ce qui fait que l'inéquation (\*) est équivalente à :

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{3} \leq \frac{2}{3} \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2$$

soit à  $(a + 1)^2 \geq 0$ , ce qui est toujours vérifié.

On remarque au passage, que l'égalité a lieu si, et seulement si,  $a = -1$ .

2. Posons  $f = \varphi + g$ , où  $\varphi(x) = 1 - x$  est la fonction affine qui réalise l'égalité comme nous venons de le voir, et  $g$  une fonction concave nulle en 0. L'inégalité (\*) est équivalente à :

$$\int_0^1 x g(x) dx \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 g(x) dx + \left( \int_0^1 g(x) dx \right)^2 \right)$$

c'est-à-dire à :

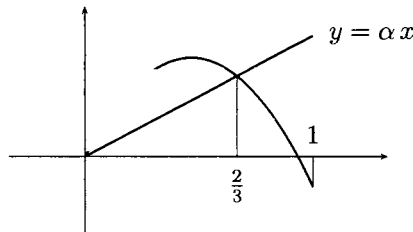
$$\int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right) g(x) dx \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 g(x) dx \right)^2 \quad (**)$$

3. Cette inégalité (\*\*) ne peut avoir lieu pour toute fonction  $g$  concave nulle en 0 que si le membre de gauche est toujours négatif ou nul, car s'il était strictement positif pour une certaine fonction  $g$ , en multipliant  $g$  par un réel  $\lambda > 0$  suffisamment petit, l'inégalité ne serait plus satisfaite (la fonction  $\lambda g$  est toujours concave et nulle en 0).

Il ne reste donc plus qu'à montrer que si  $g$  est concave nulle en 0 alors :

$$\int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right) g(x) dx \leq 0.$$

Pour cela, on considère la corde passant par les deux points du graphe de  $g$  d'abscisses 0 et  $2/3$ . Sa pente est un certain réel  $\alpha$ .



Par concavité de  $g$ , on a :

$$\begin{cases} g(x) \geq \alpha x & \text{si } x \leq 2/3 \\ g(x) \leq \alpha x & \text{si } x \geq 2/3 \end{cases}$$

et donc :

$$\forall x \in [0, 1], \left(x - \frac{2}{3}\right) g(x) \leq \alpha x \left(x - \frac{2}{3}\right).$$

On a ainsi :

$$\int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right) g(x) dx \leq \alpha \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) dx = 0.$$

## Chapitre 14

**Avertissement** Comme dans le chapitre précédent, afin de mieux faire ressortir les méthodes employées, nous avons limité la rédaction des solutions aux points fondamentaux de celles-ci. En particulier, lorsque l'on parle d'une intégrale, il est laissé au lecteur le soin de justifier son existence en vérifiant que la fonction à intégrer est bien continue par morceaux sur le segment considéré.

1. Soit  $\varepsilon > 0$ . L'ensemble  $A$  est un intervalle contenant  $a$ , fermé puisque  $f$  et  $g$  sont continues. Supposons  $c = \sup A < b$ . Alors  $c \in A$  puisque  $A$  est fermé. Comme :

$$\lim_{t \rightarrow c} \left( \left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| - \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right) = \|f'(c)\| - g'(c) \leq 0$$

on a au voisinage de  $c$  :

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| - \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \leq \varepsilon$$

Pour  $t > c$  suffisamment proche de  $c$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(a)\| &\leq \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) \\ &= g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) \end{aligned}$$

ce qui contredit de fait que  $c$  est la borne supérieure de  $A$

Donc  $c = b$  et :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a).$$

En passant à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on en déduit l'inégalité des accroissements finis.

- 2 La fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$  et a pour dérivée :

$$F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x - 1}{\ln x}.$$

D'autre part elle admet 0 pour limite en 0 puisque :

$$\forall x \in ]0, 1[ \quad |F(x)| \leq \frac{x - x^2}{2 \ln x},$$

et on a :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \ln t} dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt.$$

Lorsque  $x$  tend vers 1, la première intégrale tend vers 0, puisque la fonction  $t \mapsto (t-1)/t \ln t$  est prolongeable par continuité en 1, et :

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln 2.$$

Donc  $\lim_1 F = \ln 2$ .

Ainsi la fonction  $F$  est prolongeable par continuité sur  $[0, 1]$ , et comme sa dérivée admet des limites finies en 0 et 1 (respectivement 0 et 1), le corollaire 20 page 513 montre que ce prolongement est de classe  $C^1$ .

On a donc :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \int_0^1 F'(x) dx = F(1) - F(0) = \ln 2.$$

3. 1. • Si  $f'(x_0) = 0$  il suffit de prendre  $x_1 = x_0$ .
- Si  $f(x_0) = 0$ , le théorème de Rolle généralisé sur  $[x_0, +\infty[$  donne l'existence de  $x_1 > x_0$  tel que  $f'(x_1) = 0$ .
  - Si  $f(x_0) f'(x_0) > 0$ , quitte à changer  $f$  en  $-f$  supposons  $f(x_0) > 0$  et  $f'(x_0) > 0$ . La fonction  $f$  étant continue et tendant vers  $0 < f(x_0)$  en  $+\infty$ , elle admet un maximum en  $x_1 \in [x_0, +\infty[$ . Ce maximum ne peut pas être atteint en  $x_0$  puisque  $f'(x_0) > 0$ , donc  $f'(x_1) = 0$ .
2. Supposons, pour  $k \geq 1$ , l'existence de  $x_k$  tel que  $f^{(k)}(x_k) = 0$ . Si la fonction  $f^{(k+1)}$  ne s'annulait pas sur  $]x_k, +\infty[$ , elle garderait un signe constant puisqu'elle est continue. La fonction  $f^{(k)}$  serait alors strictement monotone sur  $]x_k, +\infty[$ , et comme elle est nulle en  $x_k$  elle aurait une limite (éventuellement infinie) non nulle en  $+\infty$ . Alors :

$$f^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x_k) + \int_{x_k}^x f^{(k)}(t) dt$$

tendrait vers  $\pm\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , et par récurrence  $f$  tendrait vers  $\pm\infty$  en  $+\infty$ , ce qui est contradictoire.

Donc il existe  $x_{k+1} > x_k$  tel que  $f^{(k+1)}(x_{k+1}) = 0$ .

4 Posons  $g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}$  pour  $t \in ]0, 1]$ .

La fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, 1]$  et sa dérivée :

$$g'(t) = \frac{t f'(t) - f(t) + f(0)}{t^2}$$

est bornée au voisinage de 0 par hypothèse.

La fonction  $g'$  est donc bornée sur  $]0, 1]$  puisqu'elle y est continue, et  $g$  est ainsi lipschitzienne. La proposition 18 page 393 permet alors de prolonger  $g$  par continuité sur  $[0, 1]$ .

Donc  $f$  est dérivable en 0. De plus :

$$f'(t) - \frac{f(t) - f(0)}{t} = t g'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

ce qui prouve que  $f'$  est continue en 0.

5 La fonction  $f$  est paire et  $\pi$ -périodique. Il reste à l'étudier sur  $[0, \pi/2]$ .

Par le changement de variable  $u = \arcsin \sqrt{t}$ , ou  $t = \sin^2 u$ , on obtient sachant que pour  $x \in [0, \pi/2]$ , on a  $\arcsin(\sin x) = x$  :

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt = \int_0^x 2u \sin u \cos u du.$$

De la même façon, en posant  $v = \arccos \sqrt{t}$ , soit  $t = \cos^2 v$ , on obtient :

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = - \int_{\pi/2}^x 2v \cos v \sin v dv$$

ce qui donne :

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} 2u \sin u \cos u du = \int_0^{\pi/2} u \sin 2u du = \frac{\pi}{4}$$

par une intégration par parties.

**Remarque** On peut aussi dériver  $f$  pour montrer qu'elle est constante puis calculer  $f(0)$ .

6. 1. Par le changement de variable  $x = a + b - t$ , on obtient :

$$I = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b (a + b - t) f(t) dt = (a + b) \int_a^b f(t) dt - I$$

ce qui donne le résultat.

2. Donc :

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

et :

$$I = \int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

En posant  $t = \tan(x/2)$ , on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \sin x} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^2} = 2$$

soit  $I = \pi$ .

7. Une primitive  $F$  de  $f$  est de classe  $C^2$  et on peut donc lui appliquer l'inégalité des accroissements finis entre  $a$  et  $c = \frac{a+b}{2}$  :

$$\|F(c) - F(a) - (c-a)F'(a)\| \leq \frac{(c-a)^2}{2} M$$

avec  $M = \sup_{[a,b]} \|f'\|$ . Comme  $F'(a) = 0$ , on obtient :

$$\|F(c) - F(a)\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M$$

De même :

$$\|F(b) - F(c)\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M$$

ce qui donne :

$$\|F(b) - F(a)\| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M$$

c'est-à-dire ce que l'on voulait démontrer.

8. 1. Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on a  $F(x + \varepsilon) \sim e^{x+\varepsilon} = e^\varepsilon e^x$ . Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{e^x} = e^\varepsilon - 1 \quad \text{et} \quad \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \sim \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} e^x$$

De même :

$$\frac{F(x) - F(x - \varepsilon)}{\varepsilon} \sim \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{\varepsilon} e^x.$$

Comme  $F'$  est croissante, on a :

$$\frac{F(x) - F(x - \varepsilon)}{\varepsilon} \leq F'(x) \leq \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon}$$



donc il existe  $X$  tel que :

$$\forall x \geq X, (1 - \varepsilon) \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{\varepsilon} e^x \leq F'(x) \leq (1 + \varepsilon) \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} e^x$$

ce qui prouve le résultat puisque :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon) \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon) \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1.$$

2. En faisant le changement de variable  $t = e^\tau$  :

$$F(u) = G(e^u) = \int_1^{e^u} \frac{g(t)}{t} dt = \int_0^u g(e^\tau) d\tau.$$

Par hypothèse  $G(e^u) \sim e^u$ , donc  $g(e^u) = F'(u) \sim e^u$ , soit  $g(x) \sim x$ .

- 9 1. En écrivant l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leq \frac{h^2}{2} M_2,$$

on obtient :

$$\|f'(x)\| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

2. Le minimum de  $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$  est atteint pour  $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$  et l'inégalité ci-dessus donne alors :

$$\|f'(x)\| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

3. On a immédiatement :

$$m_0 = \max_{[0,1]} |f| = 1 \quad m_1 = \max_{[0,1]} |f'| = 4 \quad \text{et} \quad m_2 = \max_{[0,1]} |f''| = 4.$$

On remarque que l'on a  $m_1 = 2\sqrt{m_0 m_2}$ . Il suffit donc prolonger  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  de façon à conserver ces bornes ce que l'on peut réaliser en posant :

$$\forall x > 1, f(x) = -\cos(2(x-1)).$$

10. Nous améliorons la méthode de l'exercice précédent en utilisant le fait que la fonction est définie de part et d'autre de tout réel  $x$ .

1. Ecrivons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre  $x$  et  $x+h$  puis entre  $x-h$  et  $x$  :

$$\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$

$$\|f(x) - f(x-h) - hf'(x)\| \leq \frac{h^2}{2} M_2.$$

Par somme, on obtient :

$$\|f(x+h) + f(x-h) - 2hf'(x)\| \leq h^2 M_2.$$

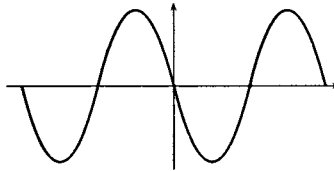
ce qui donne :

$$\|f'(x)\| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

- Même méthode que dans l'exercice précédent.
- Linéarité de Taylor-Lagrange est valable aussi pour les fonctions de classe  $C^1$  et de classe  $C^2$  par morceaux.

Prenons  $f$  impaire et 2-périodique définie par :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = (x-1)^2 - 1.$$

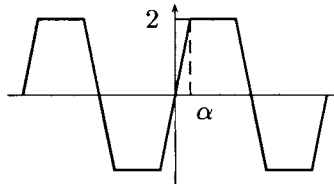


Elle est évidemment de classe  $C^1$  et de classe  $C^2$  par morceaux, avec :

$$M_0 = 1 \quad M_1 = 2 \quad \text{et} \quad M_2 = 2$$

ce qui donne  $M_1 = \sqrt{2M_0M_2}$ .

- La dérivée seconde de la fonction ci-dessus est en escalier valant alternativement 2 et  $-2$ . Modifions-la pour obtenir une fonction continue de la façon suivante (avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ) :



On a donc sur  $[0, 1]$  (ce qui suffit par imparité et 2-périodicité) :

$$f''(x) = \begin{cases} -2x/\alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ -2 & \text{si } \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ce qui donne, en intégrant deux fois avec les conditions  $f(0) = f'(1) = 0$  :

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - \alpha - x^2/\alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 2(1-x) & \text{si } \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et :

$$f(x) = \begin{cases} (2-\alpha)x - x^3/3\alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 - \alpha^2/3 - (x-1)^2 & \text{si } \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La fonction  $f$  ainsi obtenue est de classe  $\mathcal{C}^2$ , et en notant  $M_i$  la borne de  $f^{(i)}$  (avec  $0 \leq i \leq 2$ ), on a  $M_2 = 2$ ,  $M_1 = 2 - \alpha$  (la fonction  $f'$  est croissante sur  $[0, 1]$  puisque  $f''$  est positive) et  $M_0 = 1 - \alpha^2/3$  (car  $f$  est décroissante). En prenant  $\alpha$  suffisamment petit, on peut obtenir  $(M_0, M_1, M_2)$  aussi proche que l'on veut de  $(1, 2, 2)$ , triplet qui réalise l'égalité  $M_1 = \sqrt{2M_0 M_2}$ . La majoration est donc optimale

11 En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange on obtient pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$f(x) \leq M \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad f(x) \geq 1 - M \frac{(1-x)^2}{2}$$

ce qui donne :

$$1 \leq \frac{M}{2} (x^2 + (1-x)^2)$$

soit  $M \geq 4$  en prenant  $x = 1/2$ .

Les inégalités ci-dessus proviennent de la majoration par 4 de  $D^2 f$  dans la formule de Taylor :

$$f(x) = \int_0^x (x-t) D^2 f(t) dt$$

et de la minoration par  $-4$  dans :

$$f(x) = f(1) + \int_1^x (x-t) D^2 f(t) dt.$$

Pour avoir l'égalité il faut que pour  $x = 1/2$  on ait :

$$\int_0^x (x-t) (D^2 f(t) - 4) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_x^1 (x-t) (D^2 f(t) + 4) dt = 0.$$

On en déduit donc que la fonction continue par morceaux  $D^2 f$  est égal à 4 sur  $[0, 1/2[$  et à  $-4$  sur  $]1/2, 1]$ , sauf éventuellement sur une partie finie de  $[0, 1]$ .

Donc :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leq 1/2 \\ 1 - 2(1-x)^2 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

Réciproquement, cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  par morceaux et vérifie :

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1$$

ainsi que  $\sup |D^2 f| = 4$ .

**Remarque** Il n'y a donc pas de fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  répondant à la question.

12. 1. Prenons  $x \in [a, b]$  et  $y \in [c, d]$  tels que :

$$f(x) = m_0([a, b]) \quad \text{et} \quad f(y) = m_0([c, d]).$$

La formule des accroissements finis entre  $x$  et  $y$  nous donne un élément  $z \in [x, y]$  tel que :

$$f(y) - f(x) = (y - x) f'(z)$$

ce qui donne :

$$m_1([a, d]) \leq |f'(z)| \leq \frac{|f(y) - f(x)|}{y - x} \leq \frac{m_0([a, b]) + m_0([c, d])}{c - b}.$$

En appliquant cela à chaque dérivée de  $f$ , on obtient le résultat.

2. Le résultat est évident pour  $k = 0$ .

Supposons-le vrai pour  $k - 1$ . Soit  $J = [a, d]$  un segment de longueur  $\lambda$  et posons  $M = \sup_J |f|$ . En prenant  $b = a + \alpha$  et  $c = d - \alpha$  pour  $\alpha < \lambda/2$  par hypothèse de récurrence les nombres  $m_{k-1}([a, b])$  et  $m_{k-1}([c, d])$  sont majorés par :

$$M \left( \frac{k-1}{\alpha} \right)^{k-1} 2^{k(k-1)/2}$$

et donc :

$$m_k(J) \leq \frac{2M}{\lambda - 2\alpha} \left( \frac{k-1}{\alpha} \right)^{k-1} 2^{k(k-1)/2}.$$

Choisissons alors  $\alpha$  de telle sorte que  $\varphi(\alpha) = (\lambda - 2\alpha) \alpha^{k-1}$  soit le plus grand possible.

Comme :

$$\varphi'(\alpha) = \alpha^{k-2} ((k-1)(\lambda - 2\alpha) - 2\alpha) = \alpha^{k-2} ((k-1)\lambda - 2k\alpha)$$

le maximum de  $\varphi$  est atteint pour  $\alpha = 0$  si  $k = 1$ , et sinon lorsque :

$$\frac{k-1}{\alpha} = \frac{2k}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \lambda - 2\alpha = \frac{2\alpha}{k-1} = \frac{\lambda}{k}.$$

On obtient alors :

$$m_k(J) \leq M \left( \frac{k}{\lambda} \right)^k 2^{k(k+1)/2}.$$

13. Le polynôme  $P$  étant réel de degré impair, il possède une racine  $\alpha$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(\alpha) = 0$ .

Pour  $\beta \in \mathbb{R}$ , l'inégalité de Taylor-Lagrange donne en posant  $M = \sup_{[\alpha, \beta]} |P|$  :

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{|\beta - \alpha|^n}{n!} \sup_{[\alpha, \beta]} |f^{(n)}| \leq M \frac{|\beta - \alpha|^n}{n!}.$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on en déduit  $f(\beta) = f(\alpha) = 0$ .

Le résultat est évidemment faux si  $P$  est de degré pair comme le prouve l'exemple de la fonction sinus et de  $P = 1$ .

- 14. 1.** Posons  $\Phi(x, h) = g_2(x) + \varphi(x, h)$ . Par hypothèse,  $\Phi(x, h)$  tend vers  $g_2(x)$  uniformément par rapport à  $x \in K$  lorsque  $h$  tend vers 0  
Or, pour  $h \neq 0$  fixé, on a :

$$F_h(x) = 2\Phi(x, 2h) - \Phi(x, h)$$

et on en déduit que  $F_h(x)$  tend vers  $\Phi(x, 0) = g_2(x)$  uniformément par rapport à  $x \in K$  lorsque  $h$  tend vers 0.

Comme la fonction  $F_h : x \mapsto \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$  est continue, on en déduit que  $g_2$  est continue comme limite uniforme sur tout compact d'applications continues.

Posons maintenant pour  $h \neq 0$  :

$$G_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g_1(x) + \frac{h}{2}(g_2(x) + \varphi(x, h)).$$

La fonction  $g_2$  étant continue, elle est bornée sur tout compact  $K$ , ce qui prouve que  $hg_2(x)$  tend vers 0 uniformément par rapport à  $x \in K$  lorsque  $h$  tend vers 0.

Donc  $G_h$  converge uniformément sur tout compact vers  $g_1$  lorsque  $h$  tend vers 0, ce qui prouve que  $g_1$  est continue. Mais alors :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g_1(x)$$

et donc  $f'$  est continue.

En écrivant :

$$f(x+h) = f(x) + hg_1(x) + \frac{h^2}{2}\Phi(x, h)$$

$$f(x+2h) = f(x+h) + hg_1(x+h) + \frac{h^2}{2}\Phi(x+h, h)$$

on obtient :

$$\frac{g_1(x+h) - g_1(x)}{h} = F_h(x) - \frac{1}{2}(\Phi(x+h, h) - \Phi(x, h))$$

Soit  $(h_n)$  une suite tendant vers 0 telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, x + h_n \in I$ . La convergence uniforme sur le compact  $K = \{x\} \cup \{x + h_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  de  $\Phi(x, h)$  vers  $g_2(x)$  entraîne également celle de  $\Phi(x + h_n, h_n)$  vers  $g_2(x)$ . On en déduit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_1(x+h) - g_1(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} F_h(x) = g_2(x)$$

ce qui prouve que  $f' = g_1$  est dérivable de dérivée  $g_2$  continue. Donc  $f$  est de classe  $C^2$ .

2. La fonction  $f(x) = x^3 \sin(1/x^2)$  prolongée par continuité en 0 admet un développement limité à l'ordre 2 :

- en tout point de  $\mathbb{R}^*$  puisque  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ ,
- en 0 puisque  $f(h) = o(h^2)$ ,

mais n'est pas de classe  $C^1$  puisque sa dérivée n'est pas bornée au voisinage de 0.

15. Supposons par l'absurde que  $f$  ne soit pas convexe. Il existe donc  $a < b$  dans  $I$  et  $\lambda \in [0, 1]$  tels que  $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) > \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ .

En retranchant une fonction affine à  $f$ , on peut supposer  $f(a) = f(b) = 0$  et  $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) > 0$ . Prenons alors  $M = \sup_{[a,b]} f > 0$ . La fonction  $f$  étant continue sur le segment  $[a, b]$ , elle atteint sa borne  $M$ , et l'on peut poser :

$$c = \inf \{x \in [a, b] \mid f(x) = M\}.$$

Par continuité, on a  $f(c) = M$  et donc  $a < c < b$ . En prenant  $\eta = \min(c - a, b - c)$ , on peut trouver  $h \in ]0, \eta]$  tel que :

$$f(c) \leq \frac{f(c+h) + f(c-h)}{2}$$

ce qui donne  $f(c) < M$  puisque  $f(c-h) < M$  et  $f(c+h) \leq M$ , et conduit ainsi à une contradiction.

16 Par le théorème du relèvement, on peut écrire :

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = \rho(u) e^{i\theta(u)}$$

où les fonctions  $\rho = |f|$  et  $\theta$  sont de classe  $C^1$

Alors  $\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{\rho'(u)}{\rho(u)} + i\theta'(u)$  et :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{f(u)} du = [\ln \rho(u)]_0^{2\pi} + i [\theta(u)]_0^{2\pi}.$$

Comme  $f$  est  $2\pi$  périodique, on a  $\rho(2\pi) = \rho(0)$  et  $\theta(2\pi) \equiv \theta(0) \pmod{2\pi}$  ce qui prouve le résultat.

17. La formule de Taylor donne :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t) dt$$

soit :

$$\int_0^1 (1-t) f''(t) dt = -a.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit :

$$a^2 \leq \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_0^1 f''(t)^2 dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f''(t)^2 dt$$

ce qui donne  $m \geq 3a^2$ .

Pour montrer que cette borne inférieure est atteinte, il suffit de trouver une fonction  $f \in E$  pour laquelle on a l'égalité. Pour cela, il faut l'égalité dans Cauchy-Schwarz, ce qui entraîne  $f''(t) = \lambda(1-t)$ .

Par une double intégration, et avec les conditions imposées, on trouve  $f(t) = \frac{a}{2} t(t-1)(t-2)$  qui est bien telle que :

$$\int_0^1 f''(t)^2 dt = 3a^2.$$

18 La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1 [$  puisque  $(x, u) \mapsto \ln(1 + x \cos u)$  est de classe  $C^1$  sur  $] -1, 1 [ \times [0, \pi]$ , et l'on a :

$$f'(x) = \int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + x \cos u} du.$$

Avant de faire le changement de variable  $t = \tan(u/2)$  pour calculer  $f'(x)$  il est plus astucieux de transformer un peu l'intégrale.

On a évidemment  $f'(0) = 0$ , et pour  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \int_0^\pi \left( 1 - \frac{1}{1 + x \cos u} \right) du \\ &= \frac{\pi}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi}{x} - \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x) + (1-x)t^2} \\ &= \frac{\pi}{x} - \frac{2}{x \sqrt{1-x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} \end{aligned}$$

par le changement de variable  $s = t \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , d'où l'on déduit :

$$f'(x) = \frac{\pi}{x} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\pi \frac{x}{\sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})}.$$

Par le changement de variable  $y = \sqrt{1-x^2}$ , on a :

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})} = -\ln(1 + \sqrt{1-x^2}) + C^{te}$$

ce qui, compte tenu de l'égalité  $f(0) = 0$  donne :

$$f(x) = \pi \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{2} \right).$$

19. 1. La quantité :

$$r^2 - 2r \cos t + 1 = (r - \cos t)^2 + \sin^2 t$$

est strictement positive pour  $t \in ]0, \pi[$  et pour  $t = 0$  ou  $t = \pi$  puisque  $r \neq \pm 1$ .

La fonction  $t \mapsto \ln(1 - 2r \cos t + r^2)$  est donc continue sur  $[0, \pi]$  ce qui prouve l'existence de  $F(r)$ .

2. On a immédiatement  $F(r) = F(-r)$  par le changement de variable  $u = \pi - t$ . Donc :

$$2F(r) = F(r) + F(-r) = \int_0^\pi \ln((1 - 2r \cos t + r^2)(1 + 2r \cos t + r^2)) dt.$$

Or  $1 - 2r \cos t + r^2 = (1 - r e^{it})(1 - r e^{-it})$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} (1 - 2r \cos t + r^2)(1 + 2r \cos t + r^2) &= (1 - r^2 e^{2it})(1 - r^2 e^{-2it}) \\ &= (1 - 2r^2 \cos 2t + r^4) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} 2F(r) &= \int_0^\pi \ln(1 - 2r^2 \cos 2t + r^4) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r^2 \cos u + r^4) du \\ &= \int_0^\pi \ln(1 - 2r^2 \cos u + r^4) du = F(r^2) \end{aligned}$$

Enfin, pour  $r \neq 0$  :

$$\begin{aligned} F(1/r) &= \int_0^\pi (\ln(1 - 2r \cos t + r^2) - \ln(r^2)) dt \\ &= F(r) - 2\pi \ln|r|. \end{aligned}$$



3. La fonction  $(r, t) \mapsto \ln(1 - 2r \cos t + r^2)$  étant continue sur  $] -1, 1[ \times [0, \pi]$  la fonction  $F$  est continue sur  $] -1, 1[$ . En particulier elle est bornée au voisinage de 0.

Pour  $|r| < 1$ , on a :

$$F(r) = \frac{F(r^{2^n})}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc  $F$  est nulle sur  $] -1, 1[$ .

La relation  $F(r) = 2\pi \ln|r| + F(1/r)$  montre alors :

$$|r| > 1 \implies F(r) = 2\pi \ln|r|.$$

4. La fonction  $(r, t) \mapsto \ln(1 - 2r \cos t + r^2)$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \times [0, \pi]$ , la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  et :

$$F'(r) = \int_0^\pi \frac{2r - 2 \cos t}{1 - 2r \cos t + r^2} dt = 2r J(r) - K(r)$$

où :

$$J(r) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad \text{et} \quad K(r) = \int_0^\pi \frac{2 \cos t}{1 - 2r \cos t + r^2} dt.$$

Supposons  $r \neq 0$ . On a :

$$K(r) = \frac{1}{r} \int_0^\pi \left( \frac{1 + r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} - 1 \right) dt = \frac{1 + r^2}{r} J(r) - \frac{\pi}{r}$$

ce qui donne :

$$F'(r) = \frac{\pi}{r} + \frac{r^2 - 1}{r} J(r).$$

Comme  $F'(r) = 0$  si  $|r| < 1$  et  $F'(r) = \frac{2\pi}{r}$  pour  $|r| > 1$ , on en déduit :

$$P(r) = (1 - r^2) J(r) = \begin{cases} \pi & \text{si } |r| < 1 \\ -\pi & \text{si } |r| > 1. \end{cases}$$

## Chapitre 15

1. 1. Par l'absurde, si  $f$  ne tend pas vers 0, on peut trouver une suite  $(x_n)$  tendant vers  $+\infty$  et un réel  $\varepsilon > 0$  tels que  $|f(x_n)| \geq 2\varepsilon$ .  
Par uniforme continuité, il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On a donc  $|f| \geq \varepsilon$  sur  $[x_n, x_n + \eta]$  et par suite :

$$\int_{[0, x_n + \eta]} |f| - \int_{[0, x_n]} |f| = \int_{[x_n, x_n + \eta]} |f| \geq \eta \varepsilon$$

ce qui contredit l'existence d'une limite pour  $\int_0^x |f(t)| dt$  et donc l'intégrabilité de  $f$ .

2. Oui.

Quitte à considérer les parties réelle et imaginaires, on peut supposer  $f$  réelle. Dans ce cas, en reprenant la démonstration et les notations précédentes, la fonction  $f$  garde un signe constant sur  $[x_n, x_n + \eta]$  et la contradiction provient de :

$$\left| \int_{[0, x_n + \eta]} f - \int_{[0, x_n]} f \right| = \left| \int_{[x_n, x_n + \eta]} f \right| \geq \eta \varepsilon.$$

3. Pour  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ , on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \|f'\|_2 \sqrt{|y - x|}$$

ce qui prouve que  $f$  est uniformément continue. Comme elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_-$ , elle tend vers 0 à l'infini et, étant continue sur  $\mathbb{R}$ , est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

2. Comme  $f$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}_+$ , on se ramène à l'étude de la série de terme général :

$$u_n = \int_{-\frac{\pi}{2} + n\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} x e^{-x^\alpha \sin^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t + n\pi) e^{-(t+n\pi)^\alpha \sin^2 t} dt.$$

Comme, sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ , on a un encadrement du type :

$$\lambda |t| \leq |\sin t| \leq |t| \quad \text{avec} \quad \lambda > 0$$

on en déduit :

$$(n-1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-((n+1)\pi)^\alpha t^2} dt \leq u_n \leq (n+1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-((n-1)\pi)^\alpha \lambda^2 t^2} dt$$

Or, lorsque  $a > 0$  tend vers  $+\infty$  :

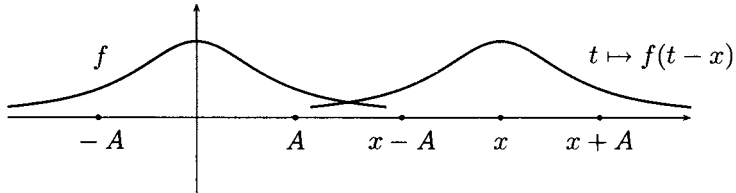
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\pi\sqrt{a}/2}^{\pi\sqrt{a}/2} e^{-u^2} du \sim \frac{I}{\sqrt{a}}$$

avec :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

ce qui fait que la suite  $(u_n)$  est encadrée par deux suites ayant un équivalent de la forme  $\mu n/n^{\alpha/2}$  avec  $\mu > 0$ . La série  $\sum u_n$  converge donc si, et seulement si,  $\frac{\alpha}{2} - 1 > 1$  et la fonction est intégrable si, et seulement si,  $\alpha > 4$ .

3. Le schéma est le suivant :



et l'on peut deviner que la limite est  $2 \int_{\mathbf{R}} |f|$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Prenons  $A > 0$  tel que :

$$\left| \int_{\mathbf{R}} |f| - \int_{[-A,A]} |f| \right| \leq \varepsilon$$

et  $x \geq 2A$ .

- L'inégalité triangulaire  $|f(t) - f(t-x)| \leq |f(t)| + |f(t-x)|$  donne :

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(t) - f(t-x)| dt \leq \int_{-\infty}^{-A} |f(t)| dt + \int_{-\infty}^{-A-x} |f(t)| dt \leq 2\varepsilon$$

et de même :

$$\int_{x+A}^{+\infty} |f(t) - f(t-x)| dt \leq 2\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_A^{x-A} |f(t) - f(t-x)| dt \leq 2\varepsilon.$$

- D'autre part :

$$\left| \int_{-A}^A |f(t) - f(t-x)| dt - \int_{-A}^A |f(t)| dt \right| \leq \int_{-A}^A |f(t-x)| dt \leq \varepsilon$$

puisque  $A-x \leq -A$ , et de même :

$$\left| \int_{x-A}^{x+A} |f(t) - f(t-x)| dt - \int_{x-A}^{x+A} |f(t-x)| dt \right| \leq \int_{x-A}^{x+A} |f(t)| dt \leq \varepsilon.$$

- Enfin :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt - \int_{-A}^{x+A} |f(t)| dt \right| \leq \varepsilon$$

et :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt - \int_{x-A}^{x+A} |f(t-x)| dt \right| \leq \varepsilon$$

ce qui donne :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t-x)| dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \right| \leq 10\varepsilon.$$

4. Comme  $f$  est positive, il suffit de montrer que la série de terme général :

$$u_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t) dt$$

est convergente et de calculer sa somme.

Or :

$$u_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{dt}{t} - n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}$$

et :

$$\sum_{p=1}^n u_p = \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{2}$$

tend vers  $1 - \gamma$  où :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

est la constante d'Euler. Donc :

$$\int_0^1 f(t) dt = 1 - \gamma.$$

5. 1. En intégrant par parties :

$$\int_0^x f'^2(t) dt = [f(t) f'(t)]_0^x - \int_0^x f(t) f''(t) dt$$

et  $f f''$  est intégrable puisque  $f$  et  $f''$  sont de carré intégrable

Donc si  $f'^2$  n'était pas intégrable, la fonction  $f f'$  tendrait vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , ce qui est impossible puisqu'alors :

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^x f(t) f'(t) dt$$

tendrait aussi vers  $+\infty$  et ne serait donc pas intégrable.

Donc  $f'^2$  est intégrable. On en déduit que  $f f'$  et  $f' f''$  sont intégrables, comme produits de fonctions de carré intégrable.

2.  $-(f + f')^2 = f^2 - f'^2 + f''^2 - (f + f' + f'')^2$ .

3. Comme  $f f'$  est intégrable la fonction  $f^2$  admet une limite en  $+\infty$  et cette limite est nulle puisque  $f^2$  est intégrable. De même,  $f'^2$  tend vers 0 en  $+\infty$ .  
 Donc  $\lim_{+\infty}(f + f') = 0$  et :

$$\int_{\mathbf{R}_+} (-(f + f')^2)' = (f(0) + f'(0))^2$$

ce qui donne :

$$\int_{\mathbf{R}_+} (f^2 - f'^2 + f''^2) = (f(0) + f'(0))^2 + \int_{\mathbf{R}_+} (f + f' + f'')^2 \geq 0.$$

- 6 La fonction  $f$  admet une limite (éventuellement infinie) en  $+\infty$  puisqu'elle est décroissante, et cette limite est nulle sinon  $f$  ne serait pas intégrable. Donc  $f$  est positive.

D autre part, sur  $[x/2, x]$ , la fonction  $f$  est minorée par  $f(x)$ , ce qui donne :

$$I_x = \int_{x/2}^x f(t) dt \geq \frac{x}{2} f(x) \geq 0$$

et comme  $I_x$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que  $x f(x)$  tend aussi vers 0.

- 7 Par le changement de variable  $t = e^u$ , on obtient :

$$\int \frac{dt}{t \ln f(t)} = \int \frac{du}{\ln f(e^u)} \quad \text{et} \quad \int \frac{dt}{f(t)} = \int \frac{e^u du}{f(e^u)}.$$

L'hypothèse nous dit donc que  $1/\ln f(e^u)$  est intégrable sur  $\mathbf{R}_+$ , et l'on veut démontrer que  $e^u/f(e^u)$  l'est aussi.

La fonction  $g$  définie par  $g(u) = \ln f(e^u)$  est croissante sur  $\mathbf{R}_+$ , donc  $1/g$  est décroissante et elle est intégrable. On en déduit d après l'exercice 6 que  $1/g(u)$  est négligeable devant  $1/u$  en  $+\infty$ , c'est-à-dire que  $u$  est négligeable devant  $g(u)$ .

Donc il existe  $A$  tel que :

$$\forall u \geq A, g(u) - u \geq \frac{g(u)}{2}$$

et donc, pour  $u \geq A$  :

$$\frac{e^u}{f(e^u)} = e^{-(g(u)-u)} \leq e^{-g(u)/2} = O\left(\frac{1}{g(u)}\right).$$

Comme  $1/g$  est intégrable, on en déduit le résultat.

8. 1. On remarque tout d'abord que la fonction  $t \mapsto \frac{1 + \cos t}{t}$  n'est pas intégrable sur  $[a_0, +\infty[$  puisque l'intégrale impropre :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

existe et que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{a_0}^x \frac{dt}{t} = +\infty.$$

La fonction continue  $\varphi$  :

$$x \mapsto \int_{a_0}^x \frac{1 + \cos t}{t} dt$$

prend donc toutes les valeurs entre  $\varphi(a_0) = 0$  et  $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$ . Ainsi, il existe  $a_1 > a_0$  tel que :

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{1 + \cos t}{t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

De la même façon, on montre par récurrence l'existence de la suite  $(a_n)$ .

Si la suite  $(a_n)$  convergerait vers un réel  $A$ , la série de terme général :

$$u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1 + \cos t}{t} dt = \frac{1}{n + \lambda}$$

convergerait vers  $\int_{a_0}^A \frac{1 + \cos t}{t} dt$  ce qui est impossible puisque  $u_n \sim 1/n$ .

2. D'une part :

$$\int_{a_0}^{a_n} \frac{1 + \cos t}{t} dt = \ln(a_n) - \ln(a_0) + \int_{a_0}^{a_n} \frac{\cos t}{t} dt$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a_0}^{a_n} \frac{\cos t}{t} dt = I - \int_1^{a_0} \frac{\cos t}{t} dt.$$

D'autre part :

$$\int_{a_0}^{a_n} \frac{1 + \cos t}{t} dt = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p + \lambda}$$

et comme  $\frac{1}{p + \lambda} = \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$  :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p + \lambda} = \ln n + C + o(1)$$

où  $C$  est une constante (dépendant de  $\lambda$ ).

Ainsi :

$$\ln(a_n) - \ln n = \ln(a_0) + \int_1^{a_0} \frac{\cos t}{t} dt + C - I + o(1)$$

et comme :

$$a_n \sim n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(a_n) - \ln n) = 0$$

il reste à montrer qu'il existe un unique  $a_0$  vérifiant :

$$\ln(a_0) + \int_1^{a_0} \frac{\cos t}{t} dt = I - C.$$

Pour cela, étudions la fonction continue :

$$F(x) = \ln x + \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt$$

dont la dérivée est  $F'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x} \geq 0$  et dont les limites en 0 et  $+\infty$  sont respectivement  $-\infty$  et  $+\infty$ . Elle est donc bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ , ce qui prouve l'existence et l'unicité d'un tel  $a_0$ .

9. Soit  $\varepsilon > 0$ . Prenons  $A$  tel que :

$$\int_A^{+\infty} f^2(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour  $x \geq A$  :

$$\left( \int_A^x f(t) dt \right)^2 \leq (x - A) \int_A^x f^2(t) dt \leq \frac{\varepsilon x}{2}.$$

Le réel  $A$  étant ainsi fixé, on peut trouver  $B \geq A$  tel que pour  $x \geq B$ , on ait aussi :

$$\frac{1}{x} \left( \int_0^A f(t) dt \right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui donne finalement :

$$\frac{1}{x} \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq \varepsilon.$$

10. 1. Écrivons pour  $x > 0$  :

$$H(f)(x) = \int_0^1 f(ux) dx.$$

La fonction  $(u, x) \mapsto f(ux)$  est continue sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ , ce qui prouve, puisque l'on a supposé  $H(f)$  continue en 0 :

$$H(f)(0) = \lim_{x \rightarrow 0} H(f)(x) = \int_0^1 f(0) du = f(0).$$

2. La linéarité est évidente ; montrons que  $H$  est à valeurs dans  $E$ .

La fonction  $H(f)$  est bien continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et il faut vérifier qu'elle est de carré intégrable.

Posons  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Par intégration par parties, la fonction  $F$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  :

$$\begin{aligned} \int H(f)^2(x) dx &= \int \frac{F^2(x)}{x^2} dx \\ &= -\frac{F(x)^2}{x} + 2 \int \frac{F(x) f(x)}{x} dx \end{aligned}$$

ce qui donne, sachant que  $F(x)/x$  est bornée au voisinage de 0 puisque  $F$  est dérivable nulle en 0 :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^X H(f)^2(x) dx &= -\frac{F(X)^2}{X} + 2 \int_0^X H(f)(x) f(x) dx \\ &\leq 2 \int_0^X H(f)(x) f(x) dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^X H(f)(x) f(x) dx \leq \sqrt{\int_0^X H(f)^2(t) dt} \sqrt{\int_0^X f^2(t) dt}$$

ce qui prouve :

$$\sqrt{\int_0^X H(f)^2(x) dx} \leq 2 \sqrt{\int_0^X f^2(t) dt}.$$

Donc  $H(f)$  est de carré intégrable et  $\|H(f)\|_2 \leq 2\|f\|_2$ . Ainsi,  $H$  est continue de norme inférieure à 2.

**Remarque** On peut montrer que la norme de  $H$  est égale à 2.

11. Pour  $x > 0$ , effectuons une intégration par parties :

$$\int_0^A e^{-xt} f(t) dt = e^{-xA} \varphi(A) + x \int_0^A e^{-xt} \varphi(t) dt.$$

La fonction  $\varphi$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+$  et admettant une limite finie en  $+\infty$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui prouve que  $t \mapsto e^{-xt} \varphi(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  ainsi



que :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-xA} \varphi(A) = 0.$$

Donc  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x > 0, F(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \varphi(u/x) du$$

Posons :

$$\Phi(u, x) = \varphi(u/x) \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad \Phi(u, 0) = F(0) = \lim_{+\infty} \varphi$$

de sorte que :

$$\forall x \geq 0, F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \Phi(u, x) du.$$

Pour tout  $u > 0$ , la fonction  $x \mapsto e^{-u} \Phi(u, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et est dominée par  $M e^{-u}$ , où  $M$  est une borne de  $\varphi$ . Donc  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Remarque** Ces résultats ont déjà été vus en cours (transformée de Laplace) dans le cas où la fonction  $f$  est intégrable.

12. 1. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^3 + x) dx &= \int \frac{x}{3x^2 + 1} (3x^2 + 1) \sin(x^3 + x) dx \\ &= \left[ -\frac{x}{3x^2 + 1} \cos(x^3 + x) \right] + \int \cos(x^3 + x) \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{3x^2 + 1} \right) dx. \end{aligned}$$

Or  $x/(3x^2 + 1)$  tend vers 0 en  $+\infty$  et sa dérivée est équivalente à  $\lambda/x^2$ , ce qui prouve l'intégrabilité de  $x \mapsto \cos(x^3 + x) \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{3x^2 + 1} \right)$ .

Donc les primitives de  $f$  admettent une limite finie en  $+\infty$ , ce qui prouve le résultat.

2. Notons  $\varphi$  l'application réciproque de  $x \mapsto x^3 + x$  qui est  $\mathcal{C}^1$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Comme  $\varphi(y)^3 + \varphi(y) = y$ , on en déduit au voisinage de  $+\infty$  :

$$\varphi(y) \sim \sqrt[3]{y}.$$

Or  $dy = (3x^2 + 1) dx$ , c'est-à-dire  $dx = \frac{dy}{3\varphi(y)^2 + 1}$  ce qui donne :

$$\int x \sin(x^3 + x) dx = \int \frac{\varphi(y)}{3\varphi(y)^2 + 1} \sin y dy$$

et :

$$\psi(y) = \frac{\varphi(y)}{3\varphi(y)^2 + 1} \sim \frac{1}{3y^{1/3}}.$$

Ainsi, on a pour  $y$  suffisamment grand :

$$\psi(y) \geq \frac{1}{4y^{1/3}}$$

ce qui prouve que  $f$  n'est pas intégrable puisqu'à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \psi(y) |\sin y| dy &\geq \int_{n\pi+\pi/6}^{n\pi+5\pi/6} \psi(y) |\sin y| dy \\ &\geq \frac{1}{8} \int_{n\pi+\pi/6}^{n\pi+5\pi/6} \frac{dy}{y^{1/3}} \\ &\geq \frac{K}{(n+1)^{1/3}} \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série divergente.

13. Posons  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ , qui est de classe  $C^1$ .

- Supposons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \ell$ .

Commençons par prouver que l'intégrale impropre  $\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$  existe.

Pour cela, montrons par une intégration par parties que les primitives admettent une limite en  $+\infty$  :

$$\int \frac{F'(t)}{t^2} dt = \frac{F(t)}{t^2} + 2 \int \frac{F(t)}{t^3} dt.$$

Puisque  $F(t)/t$  admet une limite finie, d'une part  $F(t)/t^2$  tend vers 0 et d'autre part  $F(t)/t^3 = O(1/t^2)$  est intégrable sur  $[x, +\infty[$ , ce qui prouve l'existence d'une limite finie pour la primitive considérée.

On en déduit :

$$A(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt = -\frac{F(x)}{x} + 2x \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt.$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{t} = \ell$ , on a :

$$\frac{F(t)}{t^3} - \frac{\ell}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et :

$$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt - \frac{\ell}{x} = \int_x^{+\infty} \left( \frac{F(t)}{t^3} - \frac{\ell}{t^2} \right) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui prouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt = \ell \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \ell.$$

- Supposons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x G(x) = \ell$  avec  $G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$ .

Alors  $f(x) = -x^2 G'(x)$  et par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{x} [-t^2 G(t)]_1^x + \frac{2}{x} \int_1^x t G(t) dt \\ &= \frac{G(1)}{x} - x G(x) + \frac{2}{x} \int_1^x t G(t) dt. \end{aligned}$$

Comme  $t G(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \ell$ , on a :

$$\int_1^x t G(t) dt - \ell(x-1) = \int_1^x (t G(t) - \ell) dt = o(x)$$

ce qui donne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = \ell$ .

14. 1. Pour  $n \geq 1$ , on a :

$$I_n - I_{n-1} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2nt dt = 0$$

ce qui donne :

$$I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Par une intégration par parties, on montre facilement que l'intégrale impropre  $I$  existe. Pour la calculer, on pose :

$$I'_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I.$$

Or :

$$I_n - I'_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin(2n+1)t dt \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

Comme  $\varphi(t) \underset{0}{\sim} t/3$ , la fonction  $\varphi$  peut se prolonger en une fonction continue sur  $[0, \pi/2]$ . De plus :

$$\varphi'(t) = \frac{\sin^2 t - t^2 \cos t}{t^2 \sin^2 t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{6}$$

ce qui prouve que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi/2]$ . Par une intégration par parties :

$$I_n - I'_n = \left[ -\frac{1}{2n+1} \varphi(t) \cos(2n+1)t \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \varphi'(t) \cos(2n+1)t dt.$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n - I'_n) = 0$  et  $I = \pi/2$ .

3. En écrivant :

$$\sin^2(n+1)t - \sin^2 nt = \frac{1}{2} (\cos 2nt - \cos(2n+2)t) = \sin(2n+1)t \sin t$$

on en déduit :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Comme  $J_0 = 0$ , on a  $J_n = n\pi/2$ .

L'existence de  $J$  est claire, puisque  $u \mapsto \sin^2 u/u^2$  est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}_+$  et dominée par  $1/u^2$  au voisinage de  $+\infty$ .

Posons :

$$J'_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2} dt = n \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$$

On a  $J'_n \sim nJ$  et :

$$J_n - J'_n = \int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin^2 nt dt \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}.$$

La fonction  $\psi$  est prolongeable par continuité sur  $[0, \pi/2]$  et :

$$|J_n - J'_n| \leq \int_0^{\pi/2} |\psi(t)| dt = o(n)$$

ce qui prouve  $J_n \sim J'_n$  et donc  $J = \pi/2$ .

**Remarque** On peut facilement, par une intégration par parties montrer que  $I = J$ , en prenant soin d'utiliser  $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$  comme primitive de  $\sin t$ .

- 15 La fonction  $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t + \sqrt{t} \sin t}}$  est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}_+$ .

Faisons un développement au voisinage de  $+\infty$  :

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}}} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{2t} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right).$$

L'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$  existe et  $g(t) = f(t) - \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$  n'est pas intégrable puisqu'équivalente à  $-\frac{\sin^2 t}{2t}$  qui n'est pas intégrable.

Comme  $g(t)$  est négative au voisinage de  $+\infty$ , elle n'admet donc pas d'intégrale impropre sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui prouve que  $f$  non plus.

16. La suite de fonctions converge en croissant vers  $f$  intégrable, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2/n^2} dx = \int_{\mathbb{R}} f.$$

17. Par le changement de variable  $x = at$ , on fixe les bornes :

$$I(a) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 + a^2 t^2)(1 - t^2)}}.$$

Si  $(a_n)$  est une suite décroissante de réels tantand vers 0, il y a convergence monotone de  $1/\sqrt{(1 + a_n^2 t^2)(1 - t^2)}$  vers  $1/\sqrt{1 - t^2}$  intégrable sur  $] -1, 1 [$ , donc :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(a_n) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \pi.$$

18. On peut vérifier facilement que la fonction est intégrable sur  $] 0, 1 [$ , mais ce qui suit le prouve aussi.

La fonction :

$$u_n(x) = -x^{\alpha-1+n} \ln x$$

est positive et intégrable sur  $] 0, 1 [$ , avec :

$$\int_0^1 u_n(x) dx = \frac{1}{(\alpha + n)^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

On peut donc intégrer terme à terme la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1-x}$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1-x} dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^2}.$$

19. La série  $\sum a_n x^n$  converge normalement sur tout segment  $[0, R]$  puisque :

$$a_n R^n = a_n n! \frac{R^n}{n!} = o(a_n n!)$$

ce qui assure la convergence de  $\sum |a_n| R^n$ . Sa somme est donc une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Chaque fonction  $u_n(x) = e^{-x} a_n x^n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |u_n| = |a_n| \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = |a_n| n!$$

est le terme général d'une série convergente. D'où le résultat.

20. Dans chacun des cas l'intégrabilité des fonctions peut être prouvée directement, mais la domination donnée le démontre aussi.

1. La suite des fonctions intégrables  $f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}$  converge simplement vers la fonction  $f$  égale à  $\pi/2$  sur  $]0, 1[$ , égale à  $\pi/2e$  en 1 et nulle ailleurs.

De plus elle est dominée par la fonction intégrable :

$$x \mapsto \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \pi e^{-x}/2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La limite est donc  $\pi/2$ .

2. La suite de fonctions  $f_n(x) = \left(1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right) (1 - \text{th}(x^n))$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  (sauf en 1) vers la fonction caractéristique de  $]0, 1[$ . La limite est donc égale à 1 puisqu'il y a domination par  $g$  :

$$x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2(1 - \text{th } x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

et  $g$  est intégrable d'après les équivalents suivants :

$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x) \underset{+\infty}{\sim} 4e^{-2x}$$

21. Posons :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{c+n} & \text{si } 0 < x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Comme pour  $u \in [0,1]$ , on a  $(1-u) \leq e^{-u}$ , et que pour  $n$  assez grand  $c+n \geq n/2$ , la suite de fonctions  $(f_n)$  est dominée à partir d'un certain rang par  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t/2}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

De plus, pour  $t > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{c+n} = e^{-t}$$

ce qui prouve que la suite  $(f_n(t))_{n \geq t}$  converge vers  $t^{x-1} e^{-t}$  et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{c+n} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x).$$

22. On définit :

$$f_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{si} \quad \frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n}.$$

La suite  $(f_n)$  n'est pas monotone, mais elle est dominée par  $f$  intégrable. Il reste juste à montrer qu'elle converge simplement vers  $f$  sur  $]0,1]$ , ce qui est une conséquence du théorème de Heine qui prouve même la convergence uniforme sur tout segment  $[\varepsilon, 1]$ , pour  $\varepsilon > 0$ .

**Remarque** On peut aussi remarquer que grâce à la décroissance de  $f$ , on a :

$$\int_{1/n}^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

23. Par le changement de variable  $u = nx$ , on obtient :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) du.$$

Comme pour  $u > 0$ , on a lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$\sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) \sim \frac{\pi u}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = e^{-u},$$

la suite des fonctions  $f_n$  :  $[0, n] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $u \mapsto \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right)$

prolongées par 0 sur  $]n, +\infty[$  converge simplement vers  $\pi e^{-u} u$  qui est intégrable et domine les  $f_n$ . Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \pi \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = \pi.$$

- 24** La fonction  $f(x) = \frac{x^{p-1}}{1+x^q}$  est continue sur  $]0,1[$  et  $f(x) \sim x^{p-1}$  au voisinage de 0 avec  $p-1 > -1$ . Donc  $f$  est intégrable sur  $]0,1[$ .

Pour  $x \in ]0,1[$ , on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(x) \quad \text{avec} \quad u_n(x) = x^{p+nq-1}.$$

On peut majorer les sommes partielles :

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k(x) \right| = \left| \frac{x^{p-1} - (-1)^{n+1} x^{p+(n+1)q-1}}{1+x^q} \right| \leq \frac{2x^{p-1}}{1+x^q} = 2f(x)$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée.

### Remarques

- On ne peut pas ici appliquer directement le théorème d'intégration terme à terme des séries (théorème 45 page 571) puisque  $\int_{]0,1[} |u_n| = \frac{1}{nq+p}$  n'est pas le terme général d'une série convergente.
- En revanche, en regroupant les termes deux par deux on obtient une série convergente et le théorème peut s'appliquer.
- On peut aussi remarquer que  $u_n(x)$  est une suite décroissante tendant vers 0, et que par le théorème des séries alternées :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq u_{n+1}(x)$$

dont l'intégrale tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- Cette majoration peut d'ailleurs être obtenue directement à l'aide de l'égalité :

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{p+kq-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{p+(n+1)q-1}}{1+x^q}.$$



25. Soit  $A \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  étant non intégrable, on peut trouver un segment  $J$  de  $I$  tel que  $\int_J f \geq A + 1$ .

La suite de fonctions  $\inf(f, f_n) \chi_J$  converge simplement vers  $f \chi_J$  en étant dominée par cette même fonction qui est intégrable. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J \inf(f, f_n) = \int_J f \geq A + 1,$$

et :

$$\int_I f_n \geq \int_J f_n \geq \int_J \inf(f, f_n)$$

est minore par  $A$  pour  $n$  assez grand, ce qui prouve le résultat.

26. 1. Calcul sans problème.

2. Par la formule de Taylor, on a pour  $u \in ]-1, 0[$  :

$$\ln(1 + u) - u + \frac{u^2}{2} = \int_0^u \frac{(u - t)^2}{2} \frac{2}{(1 + t)^3} dt \leq 0$$

En appliquant cela avec  $u = s/\sqrt{x}$ , on obtient le résultat

Le développement limité en 0 :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

prouve aussi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x, s) = -s^2/2$ .

3. On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, s) = \theta\left(\frac{s}{\sqrt{x}}\right)$$

avec :

$$\theta(u) = \frac{1}{1 + u} \left( (1 + u) \ln(1 + u) - u - \frac{u^2}{2} \right).$$

En appliquant de même la formule de Taylor à la fonction  $u \mapsto (1 + u) \ln(1 + u)$ , on obtient  $\theta(u) \leq 0$  pour  $u \geq 0$ .

Ainsi,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, s) \leq 0$  pour  $s \geq 0$ , et donc  $\varphi(x, s) \leq \varphi(1, s)$  pour  $s \geq 0$  et  $x \geq 1$ .

4. La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  par :

$$f(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < -\sqrt{x} \\ e^{\varphi(x, s)} & \text{si } s \geq -\sqrt{x} \end{cases}$$

est telle que  $f(x, s)$  tend vers  $e^{-s^2/2}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et elle est dominée par la fonction  $g$  définie par :

$$g(s) = \begin{cases} e^{-s^2/2} & \text{si } s \leq 0 \\ e^{\varphi(1,s)} = (1+s)e^{-s} & \text{si } s \geq 0 \end{cases}$$

qui est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème de convergence dominée permet alors de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/2} ds$$

ce qui donne la formule de Stirling sachant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

**27. 1.** On a  $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ .

La suite de fonctions :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t & \text{si } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $f : t \mapsto e^{-t} \ln t$  en étant dominée par  $|f|$  qui est intégrable. Donc :

$$\Gamma'(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

En faisant le changement de variable  $u = 1 - t/n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt \\ &= n \int_0^1 u^n (\ln n + \ln(1-u)) du \\ &= \frac{n}{n+1} \ln n + n \int_0^1 u^n \ln(1-u) du \end{aligned}$$

En écrivant :

$$\ln(1-u) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u^k}{k}$$

on peut intégrer terme à terme sur  $]0, 1[$  la série obtenue puisque  $u^{n+k}/n \geq 0$  et que :

$$u_k = \int_0^1 \frac{u^{k+n}}{k} du = \frac{1}{k(k+n+1)}$$

est le terme général d’une série convergente.

Or, pour  $K > n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K u_k &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{K+1} - \frac{1}{K+2} - \dots - \frac{1}{n+K+1} \right) \\ &\xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{n}{n+1} \left( \ln n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n+1} \right)$$

et  $\Gamma'(1) = -\gamma$ .

2. En intégrant par parties pour  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} \Gamma'(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \ln t dt \\ &= [-\ln t t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t x t^{x-1} + t^{x-1}) dt \\ &= x \Gamma'(x) + \Gamma(x) \end{aligned}$$

on obtient la relation fonctionnelle :

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$$

soit :

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

et finalement :

$$\Gamma'(n+1) = n! \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \right).$$

28. 1. Pour  $x > 0$ , la fonction à intégrer est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et équivalente en  $+\infty$  à  $t^{-2}$ , donc est intégrable.

2. On a, pour tout  $t > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{t^2+x^2}} = \frac{1}{t \sqrt{1+t^2}}.$$

Cette dernière fonction n’étant pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et la convergence étant monotone, on en déduit que  $F(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers 0.

3. On trouve :

$$I_\alpha(x) = \left[ \ln(t + \sqrt{t^2 + x^2}) \right]_0^\alpha = \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + x^2}) - \ln x$$

ce qui donne  $I_\alpha(x) \sim -\ln x$  lorsque  $x$  tend vers 0.

4. Intuitivement, c'est la présence de 0 dans l'intervalle d'intégration qui commande tout. Nous allons donc couper l'intégrale en deux morceaux  $F(x) = G(x) + H(x)$  avec :

$$G(x) = \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \quad \text{et} \quad H(x) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}.$$

On a immédiatement :

$$H(x) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \leq \int_\alpha^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\alpha}.$$

D'autre part :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} I_\alpha(x) \leq G(x) \leq I_\alpha(x).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . En prenant  $\alpha > 0$  tel que  $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \geq 1 - \varepsilon$ , la fonction  $G$  est minorée par une fonction équivalente à  $-(1 - \varepsilon) \ln x$  et majorée par une fonction équivalente à  $-\ln x$ .

Il existe donc  $X$  tel que pour  $x \geq X$ , on ait :

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{G(x)}{-\ln x} \leq 1 + \varepsilon.$$

En prenant  $X$  tel que  $\frac{1}{-\alpha \ln x} \leq \varepsilon$ , on obtient pour  $x \geq X$  :

$$-(1 - 2\varepsilon) \leq \frac{F(x)}{-\ln x} \leq -(1 + 2\varepsilon)$$

ce qui prouve que  $F(x)$  est équivalent à  $-\ln x$  en 0.

5. Par le changement de variable  $t = ux$ , on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x} F(1/x)$$

ce qui donne  $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$ .

29. 1. La fonction à intégrer est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Si  $x \leq 0$ , elle tend vers 1 ou  $+\infty$  en  $+\infty$  donc n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Si  $x > 0$ , elle se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant  $1/t^2$  en  $+\infty$ , donc est intégrable. Le domaine de définition de  $F$  est donc  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. On a immédiatement  $F(x) = e^{-x}G(x)$ . Les variations de  $\varphi$  montrent qu'elle possède un maximum strict en 1. En posant  $A = \max(\varphi(1 - \delta), \varphi(1 + \delta))$ , la fonction  $\varphi/A$  est inférieure à 1 sur  $[0, 1 - \delta]$  et  $[1 + \delta, +\infty[$ , ce qui donne, pour  $x \geq 1$  :

$$\int_0^{1-\delta} \varphi(t)^x dt \leq A^x \quad \text{et} \quad \int_{1+\delta}^{+\infty} \varphi(t)^x dt \leq A^x \int_{1+\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{A} dt$$

et prouve :

$$G(x) - \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi(t)^x dt = O(A^x).$$

3. Les développements limités suivants lorsque  $t$  tend vers 0 :

$$\varphi(1+t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{et} \quad e^{-kt^2} = 1 - kt^2 + o(t^2)$$

donnent, au voisinage de 0, lorsque  $2\alpha < 1 < 2\beta$  :

$$e^{-\beta t^2} \leq \varphi(1+t) \leq e^{-\alpha t^2}$$

d'où l'existence de  $\delta$ .

4. Comme :

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-kxt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{kx}} \int_{-\delta\sqrt{kx}}^{\delta\sqrt{kx}} e^{-u^2} du$$

on en déduit :

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-kxt^2} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{kx}}.$$

5. Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $2\alpha = 1 - \varepsilon$  et  $2\beta = 1 + \varepsilon$ , prenons  $\delta \in ]0, 1[$  tel que :

$$\forall t \in [-\delta, \delta], e^{-\beta t^2} \leq \varphi(1+t) \leq e^{-\alpha t^2}$$

ce qui donne :

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\beta xt^2} dt \leq \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi(t)^x dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\alpha xt^2} dt.$$

On peut alors trouver  $X$  tel que pour  $x \geq X$  :

$$(1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{2\pi}{(1 + \varepsilon)x}} \leq \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi(t)^x dt \leq (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{2\pi}{(1 - \varepsilon)x}}$$

et :

$$0 \leq G(x) - \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi(t)^x dt \leq \varepsilon \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

On a ainsi, pour  $x \geq X$  :

$$\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \leq G(x) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left( \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon}} + \varepsilon \right)$$

ce qui donne :

$$G(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \quad \text{et} \quad F(x) \sim e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

6. En effectuant le changement de variable  $u = tx$  :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du \\ &= \int_0^{+\infty} (tx)^x e^{-tx} x dt \\ &= x^{x+1} F(x) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}. \end{aligned}$$

## Chapitre 16

1. On sait que le support  $J$  de la famille  $u$  (c'est-à-dire l'ensemble des indices  $i$  tels que  $u_i \neq 0$ ) est dénombrable. L'étude de la sommabilité de  $u$  est équivalente à celle de sa restriction  $v$  à  $J$  définie par  $v_j = u_j$  pour  $j \in J$ .

Le cas où  $J$  est fini étant trivial, nous l'écartérons désormais. Il existe donc une bijection  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  sur  $J$ , ce qui définit une suite  $w = (w_n) = (v_{\varphi(n)})$  telle que les études de la sommabilité de  $v$  et de celle de  $w$  soient équivalentes. À cette suite  $w$ , nous pouvons associer la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = w_{[x]}, \quad \text{c'est-à-dire par } f(x) = w_n \quad \text{si } n \leq x < n+1.$$

On a aussitôt :

$$w_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \quad \text{et} \quad |w_n| = \int_n^{n+1} |f(x)| dx$$

intégrales qui existent puisque la restriction de  $f$  au segment  $[n, n+1]$  est en escalier. Enfin la sommabilité de  $w$  équivaut à l'existence d'un majorant pour toutes les sommes  $s_H(|w|)$  où  $H$  décrit l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ , donc à l'existence d'un majorant pour toutes les sommes  $s_H(|w|)$  où  $H$  est de la forme  $\llbracket 0, N \rrbracket$ , ce qui équivaut à l'existence d'un majorant pour toutes les sommes  $\int_0^{N+1} |f(x)| dx$ , c'est-à-dire enfin à la sommabilité de  $f$ .

On remarquera les égalités suivantes, qui parachèvent la propriété qui vient d'être énoncée ; en cas de sommabilité de  $u$  ou de  $f$ , on dispose des relations :

$$s(u) = \sum_{i \in I} u_i = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} f,$$

$$s(|u|) = \sum_{i \in I} |u_i| = \int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{\mathbf{R}_+} |f|.$$

On notera également que si  $u$  et  $u'$  sont deux familles sommables et que si l'on prend pour  $J$  la réunion des supports de ces deux suites, l'algorithme précédent leur associe des fonctions  $f$  et  $f'$  telles que  $f + f'$  soit associée à  $u + u'$ , ce qui permet par exemple de retrouver la relation bien connue :

$$s(u + u') = \int_{\mathbf{R}_+} (f + f') = \int_{\mathbf{R}_+} f + \int_{\mathbf{R}_+} f' = s(u) + s(u').$$

Si la théorie des familles sommables se trouve ainsi ramenée à celle des fonctions sommables, la réciproque est évidemment fautive, cette dernière étant naturellement bien plus riche que la première : il existe des fonctions continues par morceaux autrement plus complexes que les fonctions en escalier !

2. Cette suite est évidemment sommable car, si  $J$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}$ , il existe un entier  $N$  tel que  $J \subset \llbracket -N, N \rrbracket^2$ , d'où la majoration :

$$s_J(|u|) = \sum_{k \in J} |u_k| \leq \sum_{k=-N}^N |u_k| = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{(|k| + 1)^2} < 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k + 1)^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

L'égalité :

$$\sum_{k=-2p}^{2p} \frac{(-1)^k}{(|k| + 1)^2} = -1 + 2 \sum_{k=0}^{2p} \frac{(-1)^k}{(k + 1)^2} = -1 + 2 \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{(k + 1)^2} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(k + 1)^2}$$

montre, en faisant tendre  $p$  vers l'infini, que la somme de la suite  $u$ , limite de l'expression ci-dessus, est égale à :

$$s(u) = -1 + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k + 1)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k + 1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

**Remarque** Pour calculer la somme alternée  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k + 1)^2}$ , on peut aussi utiliser le théorème de sommation par paquets, mais la méthode ci-dessus a l'avantage d'être simple et directe.

3. Obtenir une expression simple de la somme sur  $q$ , puis de la somme sur  $p$ , semble impossible. En réalité, l'expression dont on cherche la limite est tout simplement la somme sur le carré  $I_n = \llbracket 0, n \rrbracket^2$  du terme général d'une suite double de réels positifs.

Si l'on remplace  $I_n$  par  $J_n = \{(p, q) \mid p + q \leq n\}$ , qui définit également une suite croissante de parties de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  dont la réunion est  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  le problème devient trivial car :

$$\sum_{p+q \leq n} \frac{1}{(p+q+1)^3} = \sum_{r=0}^n \sum_{p=0}^r \frac{1}{(r+1)^3} = \sum_{r=0}^n \frac{1}{(r+1)^2}$$

et cette dernière quantité a bien une limite, d'ailleurs connue puisqu'égalée à  $\frac{\pi^2}{6}$ .

Il en résulte que l'on bien affaire à une suite double sommable, de somme  $s = \frac{\pi^2}{6}$  qui est la limite cherchée.

4. Par application de la formule du binôme, on peut écrire  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,n} \right)$

avec  $u_{p,n} = 0$  si  $p < 2^n - 1$  ou  $p > 2^{n+1} - 2$ , et  $u_{p,n} = C_{2^n-1}^{p-2^n+1} z^p$  sinon. Fixons  $n$  ; la série  $\sum u_{p,n}$  est absolument convergente car son terme général est nul au-delà du rang  $p = 2^{n+1} - 1$ . Elle admet donc une somme, bien entendu égale à  $v_n = (z + z^2)^{2^n-1}$  et majorée en module par  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n-1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Le théorème sur les suites doubles sommables s'applique donc, et donne :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,n} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_{p,n} \right).$$

Or il est clair que, pour un entier  $p$  donné, il n'existe qu'un seul entier  $n$  tel que  $u_{p,n} \neq 0$ . Cela démontre l'existence de la suite  $a$  telle que

$$f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p \text{ avec } a_p = C_{2^n-1}^{p-2^n+1} \text{ où } n \text{ est la partie entière de } \frac{\ln(p+1)}{\ln 2}.$$

5. 1. C'est une conséquence absolument immédiate du théorème sur les suites doubles sommables, puisqu'ici convergent absolument les séries

$$\sum_i |u_{i,j}| = |b_j| \sum_i |a_i| \text{ et } \sum_i \left( |b_j| \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| \right), \text{ d'où l'existence de}$$

$$v_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) b_j \text{ et de la somme } \sum_{j=0}^{+\infty} v_j = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right).$$

2. Le résultat précédent s'étend au produit de  $n$  suites sommables. Notons  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite croissante des nombres premiers, et  $A_n$  la partie de  $\mathbb{N}$  for-



mée des nombres  $m$  n'admettant pas de diviseur premier strictement supérieur à  $p_n$ . On a aussitôt :

$$S_n = \sum_{m \in A_n} \frac{1}{m} = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{+\infty} p_i^j \right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = P_n.$$

La somme partielle de la série de terme général  $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$  étant égale à  $\ln P_n = \ln S_n$  tend donc vers  $+\infty$  avec  $n$ . Or la série des inverses des nombres premiers est à termes positifs et équivalente à la série de terme général  $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$  dont nous venons de prouver la divergence. Notons qu'il en résulte notamment qu'il existe une infinité de nombres premiers.

3. Cette famille n'est pas sommable. En effet, dans le cas contraire, sa restriction à l'ensemble  $J$  des rationnels  $\frac{a}{b}$  où  $b = p$  est un nombre premier le serait, et les sommes  $s_K(u)$  seraient majorées lorsque  $K$  décrit l'ensemble des parties finies de  $J$ . Le cas particulier  $K = K_p$  où  $p$  est fixé est facile à étudier, car alors le rationnel  $\frac{a}{b}$  est de la forme  $\frac{a}{p}$  où  $a$  prend exactement les  $p-1$  valeurs  $1, 2, \dots, p-1$ , ce qui donne  $s_{K_p}(u) = \frac{p-1}{p^2} \geq \frac{1}{2p}$ , et la réunion disjointe  $K$  de  $n$  ensembles  $K_p$  correspondant aux  $n$  plus petits nombres premiers, réunion qui existe puisqu'il existe une infinité de nombres premiers, serait supérieure à la moitié de la somme des inverses des  $n$  plus petits nombres premiers, somme qui tend vers l'infini avec  $n$  ce qui contredirait l'hypothèse.

6. 1. Il suffit de prendre  $u_{p,q} = \frac{(-1)^{p+q}}{\sqrt{(p+1)(q+1)}}$ , puisqu'alors  $u_{p,q}$  est, pour  $q$ , fixé le terme général d'une série convergente de somme  $v_q$  d'après le théorème spécial sur les séries alternées, et que  $v_q = (-1)^q w_q$  avec  $w_q = \frac{1}{\sqrt{q+1}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}} = \frac{k}{\sqrt{q+1}}$ , ce qui montre que la série  $\sum v_q$  est elle-même convergente d'après ce même théorème. Pourtant la suite  $u$  n'est pas sommable, puisque :

$$\sum_{m=0}^n |u_{m,n-m}| = \sum_{m=0}^n \frac{1}{\sqrt{(m+1)(n-m+1)}} \geq \sum_{m=0}^n \frac{2}{n+2} = 2 \frac{n+1}{n+2} \geq 1$$

2. Assez curieusement, l'exemple proposé ici, qui répond évidemment également à la question ci-dessus, n'est pas plus compliqué que le précédent. Il

s agit en effet de la suite double définie par :

$$u_{p,q} = 2 \frac{p - q}{(p + q + 1)(p + q + 2)(p + q + 3)} = -\frac{2q + 1}{p + q + 1} + \frac{4q + 2}{p + q + 2} - \frac{2q + 3}{p + q + 3}$$

qui fournit  $v_q = \frac{1}{q + 1} - \frac{1}{q + 2} > 0$  par la sommation d'une série absolument convergente puisque équivalente à  $\frac{2}{p^2}$ .

Pourtant la suite  $u$  n'est pas sommable puisque sa somme devrait être égale à la fois à  $\sum_{q=0}^{+\infty} v_q = 1$ , et à la somme obtenue en échangeant  $p$  et  $q$ , évidemment égale à  $-1$  (cette suite avait été présentée dans le cours pour indiquer que les interversions de limites doivent être ici manipulées comme dans tout problème d'analyse, avec la plus grande prudence)

7. 1. Le support de  $u$ , c'est-à-dire le sous-ensemble  $J$  de  $I$  formé des parties  $A$  de  $\mathbb{N}$  telles que  $u_A \neq 0$ , n'est autre que celui des sous-ensembles finis de  $\mathbb{N}$ . Il contient le sous-ensemble infini  $J_1$  formé des singletons  $A = \{k\}$ , pour lesquels  $u_A = e^{-1}$ . Si la famille était sommable, il en serait de même de sa restriction à  $J_1$ , ce qui n'est évidemment pas le cas puisque, pour tout réel positif  $a$ , l'on peut trouver une partie finie  $K \subset J_1$  telle que  $s_K(u) > a$ . La famille  $(u_A)$  n'est donc pas sommable.
2. Puisque  $m$  est toujours fini, le support de  $v$ , c'est-à-dire le sous-ensemble  $J$  de  $I$  formé des parties  $A$  de  $\mathbb{N}$  telles que  $v_A \neq 0$ , n'est autre que celui des sous-ensembles de  $\mathbb{N}$ , soit  $J = I$ . Il contient le sous-ensemble  $H$  formé des paires  $A = \{0, k\}$ , pour lesquelles  $v_A = 1$ . Si la famille était sommable, il en serait de même de sa restriction à  $H$ , ce qui n'est évidemment pas le cas puisque pour tout réel positif  $a$ , l'on peut trouver une partie finie  $K \subset H$  telle que  $s_K(v) > a$ . La famille  $(v_A)$  n'est donc pas sommable. On peut d'ailleurs retrouver ce résultat en montrant que le support de  $v$ , c'est-à-dire  $J = I$ , n'est pas dénombrable, car il peut être mis en bijection avec  $\mathbb{R}$ .
3. Le support de  $w$ , c'est-à-dire le sous-ensemble  $J$  de  $I$  formé des parties  $A$  de  $\mathbb{N}$  telles que  $w_A \neq 0$ , n'est autre que celui des sous-ensembles finis de  $\mathbb{N}$ . Une suite croissante de parties  $(J_n)$  de  $J$  dont la réunion est  $J$  (c'est-à-dire une suite exhaustive de  $J$ ) est clairement définie en prenant pour  $J_n$  l'ensemble des  $A$  pour lesquels  $M \leq n$ ; le cardinal de  $J_n \setminus J_{n-1}$  ( $J_0$  si  $n = 0$ ) est celui des parties  $A$  telles que  $M = n$ , c'est-à-dire celui des sous-ensembles de  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , et est donc égal à  $2^n$ . Il en résulte que la somme des  $w_A$

pour  $A \in J_n$  est égale à :

$$s_{J_n}(w) = \sum_{k=0}^n 2^k e^{-k} = \frac{1 - \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{e}}$$

Elle est donc majorée par  $\frac{e}{e-2}$ , nombre qui est d'ailleurs la somme  $s(w)$  de la famille  $(w_A)$  puisque  $c$  est la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini de la suite  $s_{J_n}(w)$ .

8. 1. Puisque  $|\exp z| = \exp x$ , il vient  $|a^z| = a^x$ .
2. La suite  $(z_n)$  est sommable si, et seulement si, la série  $\sum |z_n|$  est absolument convergente, donc si, et seulement si,  $x > 1$ . Sa somme est alors  $\zeta(z)$ , ou  $\zeta$  est la célèbre fonction « dzéta » de Riemann.
3. Nous savons que  $|u_{p,q}| = \frac{|h|^p |\ln q|^p}{p! q^x}$ . Il en résulte que, si l'on fixe  $q$ , la série de terme général  $u_{p,q}$  est absolument convergente et de somme :

$$v_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{q^z} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p h^p \ln^p q}{p!} = \frac{1}{q^z} \exp(-h \ln q) = \frac{1}{q^{z+h}}$$

Pour que  $u$  soit sommable, il reste à voir si la série de terme général  $\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$  est elle-même absolument convergente. Or cette somme est égale à  $\frac{1}{q^{x-|h|}}$ , et la condition nécessaire et suffisante de sommabilité de  $u$  est donc  $x - |h| > 1$ . Sous cette condition, on a :

$$s(u) = \sum_{q=1}^{+\infty} v_q = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^{z+h}} = \zeta(z+h)$$

- 9 Notons la majoration fondamentale  $|u_i| \leq |z|^{n_k}$ . L'ensemble  $I$  est la réunion d'une suite d'ensembles  $I_n$ , deux à deux disjoints, et définis par les égalités :

$$I_n = \{(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, n) \mid 0 < n_0 < n_1 < \dots < n_{k-1} < n\}$$

Si l'on pose  $J_n = \bigcup_{p=0}^n I_p$ , l'on obtient ainsi une suite exhaustive  $(J_n)$  de parties finies de  $I$  c'est-à-dire une suite croissante de parties finies dont la réunion est  $I$ . On sait que la sommabilité de  $u$  équivaut à l'existence d'une majoration uniforme des suites  $s_{J_n}(|u|) = \sum_{p=0}^n s_{I_p}(|u|)$ . Notons  $A_p$  le cardinal de  $I_p$  · il est

clairement majoré par  $p^k$ , d'où l'inégalité :

$$s_{I_p}(|u|) = \sum_{i \in I_p} |u_i| \leq \sum_{i \in I_p} |z|^p = |z|^p \sum_{i \in I_p} 1 = A_p |z|^p \leq p^k |z|^p = s_p$$

où  $s_p$  est le terme général d'une série absolument convergente d'après la règle de d'Alembert. Par suite toutes les sommes  $s_{J_n}(|u|)$  sont majorées par la somme  $\sum_{p=0}^{+\infty} s_p$  et la suite  $u$  est sommable.

Lorsque  $i$  décrit  $I_n$ , on peut mettre  $z^n$  en facteur dans les  $u_i$ . Cette remarque va nous servir à mettre la somme de  $u$  sous la forme voulue en écrivant, grâce au caractère exhaustif de la suite  $(J_n)$  :

$$s(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{J_n}(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n a_p z^p$$

où les  $a_p$  sont définis par :

$$a_p = \frac{1}{p^{\alpha_k}} \sum_{i \in I_p} \frac{1}{n_0^{\alpha_0} n_1^{\alpha_1} \dots n_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}$$

ce dernier symbole  $\sum$  portant sur une famille finie.

**Remarque** On peut aussi utiliser ici le théorème de sommation par paquets, en utilisant la partition  $(I_n)$  (le terme de partition est ici légèrement inexact, puisque les premiers ensembles  $I_n$  sont vides, mais cela est sans importance ici), et l'égalité  $s(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_{I_n}(u)$ .

10. 1. Bien entendu ce nombre existe et n'est autre que la somme  $s(u)$  de la famille. Redémontrons ce résultat fondamental. Nous savons qu'il existe une suite croissante  $(I_n)$  de parties finies de  $I$  dont la réunion est égale à  $I$ . Soit  $(p, q)$  un couple d'entiers et  $H = I_{p+q} \setminus I_p$ . Les inégalités :

$$|s_{I_{p+q}}(u) - s_{I_p}(u)| = \left| \sum_{h \in H} u_h \right| \leq \sum_{h \in H} |u_h| = s_{I_{p+q}}(|u|) - s_{I_p}(|u|) \leq s(|u|) - s_{I_p}(|u|)$$

montrent que la suite  $s_{I_n}(u)$  est de Cauchy comme  $s_{I_n}(|u|)$  et admet donc une limite  $S = \lim_p s_{I_p}(u)$ , vérifiant pour tout entier  $p$  l'inégalité :

$$|S - s_{I_p}(u)| \leq s(|u|) - s_{I_p}(|u|).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après la définition de la sommabilité de  $u$  et donc de celle de  $|u|$ , il existe un entier  $p$  tel que :

$$s(|u|) - s_{I_p}(|u|) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or pour toute suite croissante  $(J_n)$  de parties finies de  $I$  dont la réunion est égale à  $I$  il existe un entier  $N$  tel que  $I_p \subset J_N$  (si  $I_p = \{i_1, \dots, i_r\}$ , on peut prendre pour  $N$  le plus grand indice  $n_k$  tel que  $i_k$  appartienne à  $J_{n_k}$ ). Par conséquent et toujours pour la même raison, on dispose pour tout entier  $n \geq N$  d'inclusions de la forme  $I_p \subset J_n \subset I_{p+q}$ .

Posant  $K = J_n \setminus I_p \subset I_{p+q} \setminus I_p = H$ , il vient :

$$\begin{aligned} |s_{J_n}(u) - S| &\leq |s_{J_n}(u) - s_{I_p}(u)| + |s_{I_p}(u) - S| < \left| \sum_{k \in K} u_k \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{k \in K} |u_k| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{h \in H} |u_h| + \frac{\varepsilon}{2} = s_{I_{p+q}}(|u|) - s_{I_p}(|u|) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Pour que  $u$  soit sommable, il est nécessaire et suffisant que la suite croissante  $s_{J_n}(|u|)$  soit majorée, c'est-à-dire qu'elle ait une limite, ce qui équivaut à la convergence de la série donnée.
3. La condition nécessaire et suffisante résulte de la propriété ci-dessus appliquée à la famille croissante des parties finies  $I_n = \{(p, q) \mid p + q \leq n\}$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . La somme de  $u$  se déduit de l'égalité  $s_{I_n}(u) = \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^m u_{p, m-p}$ .

4. Si le réel  $\sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$  existe, toute partie finie  $J$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  étant incluse dans au moins un carré  $\llbracket 0, n \rrbracket^2$ , on en déduit la majoration uniforme :

$$s_J(u) = \sum_{(p,q) \in J} u_{p,q} \leq \sum_{q=0}^n \left( \sum_{p=0}^n u_{p,q} \right) \leq \sum_{q=0}^n \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \leq \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

La suite double  $u$  est donc sommable, et de somme :

$$s(u) = \sum_{(p,q)} u_{p,q} \leq \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

Supposons inversement  $u$  sommable.

La partie finie  $J = \llbracket 0, n \rrbracket \times \{q\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  permet de montrer que

$\sum_{p=0}^n u_{p,q} = s_J(u)$  est majorée par  $s(u)$ , ce qui implique pour tout entier

$q$  l'existence de  $v_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$ . Pour tout couple d'entiers  $(m, n)$ ,

$J = \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est finie, d'où l'on déduit la majoration :

$$\sum_{q=0}^m \left( \sum_{p=0}^n u_{p,q} \right) \leq s(u).$$

Faisant tendre  $n$  vers l'infini dans une somme d'un nombre fini de termes il vient :

$$\sum_{q=0}^m v_q = \sum_{q=0}^m \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \leq s(u).$$

La série à termes positifs  $\sum v_q$  ayant ses sommes partielles majorées converge et admet pour limite :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} v_q = \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \leq s(u).$$

Les deux inégalités opposées prouvent l'égalité annoncée et il ne reste qu'à échanger  $p$  et  $q$ .

**Remarque** Démontrons directement la fin de la réciproque en fixant un entier  $n$ . On dispose des égalités suivantes, où  $r = p + q$  :

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^n v_q - s_{I_n}(u) &= \sum_{q=0}^n \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) - \sum_{q=0}^n \left( \sum_{p=0}^{n-q} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^n \left( \sum_{p=n-q+1}^{+\infty} u_{p,q} \right) \\ &= \sum_{q=0}^n \left( \sum_{r=n+1}^{+\infty} u_{r-q,q} \right) = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^n u_{r-q,q} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Posant  $\sigma_r = \sum_{q=0}^r u_{r-q,q}$ , terme général d'une série convergente d'après le 3.

il vient :

$$0 \leq \sum_{q=0}^n v_q - s_{I_n}(u) = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^n u_{r-q,q} \right) \leq \sum_{r=n+1}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^r u_{r-q,q} \right) = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \sigma_r.$$

La convergence et la valeur de la somme de la série  $\sum v_q$  en résultent aussitôt. (L'emploi du carré  $[[0, n]]^2$  à la place de  $I_n$  aurait légèrement simplifié ces calculs.) De ces inégalités l'on peut déduire une mesure de la vitesse de convergence de  $\sum_{q=0}^n v_q$  vers sa limite  $s(u)$  puisque

$$0 \leq s(u) - s_{I_n}(u) = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \sigma_r \text{ par le 3.}$$

5. Puisque la sommabilité de  $u$  implique celle de  $|u|$ , les séries de l'énoncé sont absolument convergentes et donc convergentes d'après le 4., même la

$$\text{dernière puisque } |v_q| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|.$$

Les trois premières égalités de l'énoncé résultent du 3. ; pour obtenir les autres, il suffit de reprendre les calculs de la remarque clôturant la démonstration du 4. :

$$\sum_{q=0}^n v_q - s_{I_n}(u) = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^n u_{r-q,q} \right)$$

pour en déduire les inégalités :

$$\left| \sum_{q=0}^n v_q - s_{I_n}(u) \right| \leq \sum_{q=0}^n \left( \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) - s_{I_n}(|u|) \leq \sum_{r=n+1}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^r |u_{r-q,q}| \right)$$

puis la majoration finale où le second membre tend vers 0 d'après le 3. :

$$\left| \sum_{q=0}^n v_q - s(u) \right| \leq 2 \sum_{r=n+1}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^r |u_{r-q,q}| \right).$$

6. Puisqu'il y a équivalence entre la sommabilité de  $u$  et celle de  $|u|$ , la condition nécessaire et suffisante résulte aussitôt du 4. Les égalités donnant la somme découlent du 5.

Notons que la convergence simple des deux séries ne suffit pas, comme le montre l'exemple élémentaire où  $u_{p,q} = 0$  sauf pour  $u_{0,q} = 1$  et  $u_{1,q} = -1$ , pour lequel  $\sum v_q = \sum 0 = 0$  converge absolument mais où la somme

$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \text{ est infinie.}$$

11. 1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $N$  tel que  $\|g(N) - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  et que, pour tout entier  $p$ , on ait  $\|h(p) - f(N, p)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  ; en résulte alors, pour tout entier  $p$ , la majoration :

$$\begin{aligned} \|h(p) - \ell\| &\leq \|h(p) - f(N, p)\| + \|f(N, p) - g(N)\| + \|g(N) - \ell\| \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \|f(N, p) - g(N)\|. \end{aligned}$$

Or il existe un entier  $P$  tel que, pour tout  $p \geq P$ , on ait  $\|f(N, p) - g(N)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  et, par conséquent, tel que  $\|h(p) - \ell\| \leq \varepsilon$  pour tout  $p \geq P$ , ce qui démontre le résultat cherché.

**Remarque** Ce résultat est un cas très particulier du théorème d'inversion des limites (ou de la double limite) de Weierstraß, valable pour une application définie sur le produit de deux espaces topologiques et à valeur dans un espace métrique.

2. Il existe en effet une surjection de l'ensemble dénombrable  $I$  sur  $\Lambda$ , qui à tout indice  $i \in I$  associe l'élément  $\lambda \in \Lambda$  défini par  $i \in I_\lambda$ .
3. C'est clair.
4. Non car rien ne prouve que les  $H_p$  sont finies (restriction généralement posée pour définir les suites exhaustives) ; cela dit, la suite  $(H_p)$  est bien croissante et de réunion  $I$ .
5. Il suffit d'assurer l'inclusion  $J_n \subset H_m$ . Comme  $J_n \subset I = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} H_q$ , il suffit de prendre pour  $m$  le plus grand des indices  $q_i$  tels que  $i \in H_{q_i}$  lorsque  $i$  décrit  $J_n$ .
6. La majoration résulte des majorations  $|u_i^\lambda| \leq |u_i|$  où  $i$  décrit  $I$ . On trouve facilement les égalités :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} u_i^\lambda = u_i, \quad s_{J_n \cap I_\lambda}(u_\lambda) = \sum_{i \in J_n \cap I_\lambda} u_i = s_{J_n}(u^\lambda).$$

7. La sommabilité de  $u^\lambda$  résulte de la majoration ci-dessus (on pourra remarquer que  $u_\lambda$  est également sommable, et que  $s(u_\lambda) = s(u^\lambda) = v_\lambda$ ).
8. On trouve aisément  $s_{\Lambda_p}(v) = \sum_{\lambda \in \Lambda_p} v_\lambda = \sum_{i \in H_p} u_i$ , et la sommabilité de  $v$  découle de la majoration uniforme en  $p$  :

$$|s_{\Lambda_p}(v)| = \left| \sum_{\lambda \in \Lambda_p} v_\lambda \right| \leq \sum_{i \in H_p} |u_i| \leq s(|u|).$$

9. Pour  $p \geq m$ , où  $m$  est défini au 5., l'ensemble  $J_n \setminus H_p$  est vide, d'où  $s_{J_n} = f(n, p)$  ; avec les notations du 1., on a donc bien trouvé une fonction  $g(n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f(n, p) = s_{J_n}(u)$ .

Cette fonction  $g$  admet visiblement  $\ell = s(u)$  comme limite lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Par ailleurs, les majorations :

$$|s_{\Lambda_p}(v) - f(n, p)| = \left| \sum_{i \in H_p \setminus J_n} u_i \right| \leq \sum_{i \in H_p \setminus J_n} |u_i| \leq \sum_{i \in I \setminus J_n} |u_i| = s(|u|) - s_{J_n}(|u|)$$

montrent qu'il existe  $h(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, p) = s_{\Lambda_p}(v)$ , et que cette seconde limite est obtenue uniformément puisque le second membre de l'inégalité peut être pris aussi petit que l'on veut indépendamment de  $p$ .

Le 1. montre que  $s(u)$  est aussi la limite de la fonction  $h$  lorsque  $p$  tend vers l'infini ce qu'il fallait démontrer puisque la limite de  $s_{\Lambda_p}(v)$  est justement  $s(v)$  puisque  $(\Lambda_p)$  est une suite exhaustive de  $\Lambda$



12. Si cette suite  $u$  était sommable, ses restrictions  $u'_m$  et  $u''_m$  à chacune des parties  $I'_m$  et  $I''_m$  seraient sommables et définiraient des sommes  $v'_m = s(u'_m)$  et  $v''_m = s(u''_m)$  définissant à leur tour des familles sommables de de même somme  $s(v')$  et  $s(v'')$ , car égales toutes deux à  $s(u)$  (sommation par paquets ou associativité généralisée).

Or, si l'existence et les sommabilités de  $v'_m = \frac{8m + 5}{2(m + 1)(4m + 1)(4m + 3)} \sim \frac{1}{4m^2}$  et de  $v''_m = -\frac{1}{4(m + 1)(2m + 1)} \sim -\frac{1}{8m^2}$  sont bien claires, leurs sommes sont visiblement inégales puisque  $v'_m > 0$  et  $v''_m < 0$ .

13. 1. Le nombre  $\sup_n \sup_m f(n, m)$  est clairement un majorant (éventuellement infini) de l'ensemble des réels  $f(n, m)$ , inférieur ou égal à tous les autres majorants. Il est donc égal, par symétrie, à l'autre nombre  $\sup_m \sup_n f(n, m)$ .
2. Nous supposons que les familles  $a^m$  sont toutes à valeurs positives (ce qui ne change rien, puisqu'il suffit de remplacer le cas échéant chaque  $a^m$  par  $a^m - a^0$ ).

L'inégalité  $0 \leq a^m \leq a^{m+1}$  implique  $a^m \leq a$  ; l'existence éventuelle de  $s(a)$  assure donc la majoration, indépendante de  $m$ ,  $s(a^m) \leq s(a)$ .

Inversement, supposons donc connue une majoration uniforme de la forme  $s(a^m) \leq M$  (notons au passage qu'elle implique les inégalités  $0 \leq a_i^m \leq s(a^m) \leq M$  pour tout  $i \in I$ , et donc l'existence de  $a$  qu'il est alors inutile de supposer). Pour tout entier  $m$  et toute partie finie  $J$  de  $I$ , on a  $0 \leq s_J(a^m) \leq s(a^m) \leq M$ , puis  $0 \leq s_J(a) = \lim_m s_J(a^m) \leq M$ , ce qui montre que  $a$  est sommable. La condition nécessaire et suffisante est donc établie.

Pour le reste, il suffit d'appliquer le 1. au cas  $f(n, m) = s_{J_n}(a^m)$  puisque des limites de suites croissantes sont aussi les bornes supérieures de leurs valeurs.

**Remarque** L'existence de  $a$  n'implique pas que la suite  $(s(a^m))$  soit majorée, comme le montre l'exemple  $I = \mathbb{N}$  et  $a_n^m = n$  si  $n \leq m$ , et  $a_n^m = 0$  sinon, pour lequel  $a$  est l'identité.

- 3 Pour une suite de familles à valeurs réelles, on peut remarquer que les combinaisons linéaires de deux familles réelles sommables et leurs valeurs absolues le sont également. Il en est donc de même des familles  $\max(a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+p})$  et  $\min(a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+p})$ . Une première application du théorème de convergence monotone jointe à la domination  $|a^m| \leq b$  montre que sont également sommables leurs limites respectives

$s^m = \sup_{k \geq m} a^k$  et  $i^m = \inf_{k \geq m} a^k$  quand  $p$  tend vers l'infini. Ces nouvelles suites monotones de familles convergeant visiblement vers  $a$  en tout point, les inégalités  $i^m \leq a^m \leq s^m$ ,  $i^m \leq a \leq s^m$  et une seconde application de ce même théorème montrant que  $a$  est sommable et que  $s(a)$  est la limite commune de  $s(s^m)$  et de  $s(i^m)$ , à savoir aussi celle de  $s(a^m) \in [s(i^m), s(s^m)]$ . L'extension à des familles complexes est immédiate à partir des parties réelles et imaginaires.

**Remarque** Ces deux théorèmes montrent que, sous des conditions assez larges,  $s(\lim_m a^m) = \lim_m s(a^m)$  (interversión de limites), le dernier pouvant également s'écrire sous la forme  $s(\sup_m a^m) = \sup_m s(a^m)$ .

4. On a, ici encore, la relation  $0 \leq s_J(a) \leq M$ .

**Remarques** Le caractère positif des familles  $a^m$  est essentiel, comme le montre l'exemple  $I = \mathbb{N}$  et  $a_n^m = -n$  si  $n \leq m$ , et  $a_n^m = 0$  sinon.

Par ailleurs, il se peut que la suite  $(s(a_m))$  ait une limite  $\ell$ , auquel cas il est facile d'établir que  $s(a) \leq \ell$ , mais que l'on ait inégalité stricte comme le montre l'exemple  $I = \mathbb{N}$  et  $a_n^m = 1$  si  $n = m$ , et  $a_n^m = 0$  sinon, pour lequel  $a = 0$ .

14. 1. Pour tout entier  $m$  et toute partie finie  $J$  de  $I$ , on dispose des inégalités :

$$s_J(|a^m|) = \sum_{i \in J} |a_i^m| \leq \sum_{i \in J} b_i \leq s(b).$$

Puisque  $J$  est finie, il suffit de faire tendre  $m$  vers  $+\infty$  pour obtenir  $s_J(|a|) \leq s(b)$  qui établit la sommabilité de  $a$ . Notons les inégalités  $|a| \leq b$  (c'est-à-dire  $|a_i| \leq b_i$  pour tout  $i \in I$ ) et  $|s(a)| \leq s(|a|) \leq s(b)$ .

Soit  $(J_n)$  une suite exhaustive de parties finies de  $I$ . De la même manière que précédemment, on dispose pour tous les entiers  $m$ ,  $n$  et  $p$  des inégalités :

$$|s_{J_{n+p}}(a^m) - s_{J_n}(a^m)| \leq s_{J_{n+p}}(b) - s_{J_n}(b) \leq s(b) - s_{J_n}(b),$$

qui donnent  $|s(a^m) - s_{J_n}(a^m)| \leq s(b) - s_{J_n}(b)$ . La même méthode conduit aussi à  $|s(a) - s_{J_n}(a)| \leq s(b) - s_{J_n}(b)$ .

Si le réel  $\varepsilon > 0$  est fixé ainsi qu'un indice  $n$  tel que  $0 \leq s(b) - s_{J_n}(b) < \frac{\varepsilon}{3}$ , il suffit de la décomposition :

$$\begin{aligned} |s(a) - s(a^m)| &\leq |s(a) - s_{J_n}(a)| + |s_{J_n}(a) - s_{J_n}(a^m)| + |s_{J_n}(a^m) - s(a^m)| \\ &< 2 \frac{\varepsilon}{3} + |s_{J_n}(a) - s_{J_n}(a^m)| \end{aligned}$$

et de la majoration  $|s_{J_n}(a) - s_{J_n}(a^m)| \leq \sum_{i \in J_n} |a_i^m - a_i|$  pour montrer que  $|s(a) - s(a^m)| \leq \varepsilon$  pour  $m$  assez grand, ce qui prouve le théorème.

**Remarque** Cette démonstration peut se lire comme l'application de la méthode de la double limite de Weierstraß à la suite double  $s_{J_n}(a^m)$ , qui converge respectivement vers  $s_{J_n}(a)$  et  $s(a^m)$  lorsque  $m$  et  $n$  tendent vers l'infini, cette dernière limite étant obtenue de manière uniforme.

2. La condition nécessaire et suffisante sur la sommabilité de  $a$  se traite comme dans l'exercice précédent.

Enfin les inégalités  $0 \leq a^m \leq a$  et le théorème de convergence dominée impliquent que  $s(a)$ , si elle existe, est alors la limite de la suite  $(s(a^m))$  ainsi que sa borne supérieure puisqu'elle est croissante.

15. 1. Cela résulte aussitôt d'égalités telles que  $s_J(\varphi \circ u) = \varphi(s_J(u))$  et de majorations telles que  $|\varphi(u_i)| \leq \|\varphi\| |u_i|$ .

2. La condition nécessaire résulte de la proposition précédente ; la réciproque résulte de majorations telles que  $\left\| \sum x_k e_k \right\| \leq \sum |x_k| \|e_k\|$ .

**Remarque** Cette proposition généralise un énoncé bien connu sur les parties réelles et imaginaires d'une famille complexe.

3. Pour toute suite réelle sommable il existe un  $M$  tel que, pour toute partie finie  $J$  de  $\mathbb{N}$ , la valeur absolue de  $s_J(u)$  est majorée par  $M$  : il suffit de prendre  $M = s(|u|)$ .

La réciproque est légèrement moins évidente : si l'on note  $u^+$  et  $u^-$  les deux suites positives définies par  $u = u^+ - u^-$  et  $|u| = u^+ + u^-$ ,  $u$  n'est non sommable que si l'une d'entre elles au moins,  $u^+$  par exemple, ne l'est pas non plus, ce qui implique l'existence de sommes  $s_J(u^+)$ , donc de la forme  $s_K(u)$  avec  $K \subset J$ , dépassant tout réel donné à l'avance

4. Il suffit d'exhiber par exemple la somme de la norme de  $u$  comme majorant.

5. C'est clair d'après 2., 3. et 4. (éventuellement étendus aux sommes complexes par cette même proposition, ou encore parce que tout espace vectoriel complexe peut être vu comme un espace vectoriel réel).

6. Il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que  $\|s_K(u) - S\| \leq 1$  pour toute partie finie  $K$  de  $I$  contenant  $J$ . Les sommes partielles  $s_{J'}(u)$  où  $J' \subset J$  sont en nombre fini, et admettent donc un majorant  $M$ . Pour toute partie finie  $H$  de  $I$ , posant  $J' = J \setminus H$ , il vient  $J \subset J' \cup H = J' \cup H$  et :

$$\|s_H(u)\| \leq \|s_{J'}(u)\| + \|s_{J'}(u) + s_H(u)\| = \|s_{J'}(u)\| + \|s_{J' \cup H}(u)\| \leq M + |S| + 1.$$

7. Posant  $S = s(u)$   $J = J_N$  où  $N$  est tel que  $s(\|u\|) - s_{J_N}(\|u\|) \leq \varepsilon$  et  $K$  fini tel que  $J_N \subset K \subset I$ , il existe  $M \geq N$  tel que  $K \subset J_M$ , d'où :

$$\|s_K(u) - s_{J_{M+p}}(u)\| \leq \sum_{k \in J_{M+p} \setminus J_N} \|u_k\| \leq s(\|u\|) - s_{J_N}(\|u\|) \leq \varepsilon$$

pour tout  $p$ , et faire tendre  $p$  vers  $+\infty$  donne l'inégalité cherchée

La réciproque dans le cas de la dimension finie découle aussitôt du 6. et de la partie « suffisante » du 4.

**Remarque** Voici une démonstration par l'absurde de cette réciproque partielle évitant le recours au 4. et au 6.. Le 2. montre qu'il suffit de la prouver pour une suite réelle. Soit donc  $u$  non sommable, par exemple parce que  $u^+$  ne l'est pas, mais telle qu'il existe un réel  $S$  tel que  $\|s_K(u) - S\| \leq 1$  pour toute partie finie  $K$  de  $I$  contenant une certaine partie finie  $J$  de  $I$ . Notons  $J^-$  la partie de  $J$  sur laquelle  $u_j < 0$  et  $T = s_{J^-}(u)$ . Alors, pour toute partie finie  $H$  de  $I$  disjointe de  $J^-$ , on dispose de l'inégalité  $s_{J \cup H}(u) \geq s_H(u) + s_{J^-}(u)$  ; puisque  $u^+$  n'est pas sommable, on peut choisir  $H$  telle que  $s_H(u) > S + T + 1$ , d'où les inégalités contradictoires :

$$S + 1 < s_H(u) - T \leq s_{J \cup H}(u) \leq S + 1.$$

8. C'est clair.

9. La suite  $u$  définie par  $u_n = \frac{1}{n+1} \delta^n$ , c'est-à-dire par  $u_n(m) = \frac{1}{n+1}$  si  $m = n$  et  $u_n(m) = 0$  sinon, possède ces propriétés. En effet la suite  $\sum_{k=0}^n u_n$

est de Cauchy comme la suite  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)^2}$  et converge donc dans  $\ell^2$  vers

la suite  $S$  définie par  $S_n = \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n$  et vérifiant l'hypothèse du 6.

puisque, pour toute partie finie  $K$  de  $\mathbb{N}$  contenant  $I_n = \llbracket 0, n \rrbracket$ , on dispose des relations :

$$|s_K(u) - S| = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus K} \frac{1}{(k+1)^2}} \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}}.$$

Les sommes partielles  $s_J(u)$  sont évidemment majorées par  $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$  alors que

$$s_{I_n}(|u|) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sim \ln n.$$

**Remarque** Cette question, où l'espace  $E$  est bien entendu un Banach de dimension infinie, prouve que la restriction aux espaces de dimension finie des réciproques des 4. et 7. n'est pas superflue

10. La suite  $u$  définie par  $u_n = \delta^n$  possède évidemment ces propriétés.

16. L'encadrement suggéré par l'énoncé est immédiat : des inégalités évidentes :

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

on déduit aussitôt les suivantes :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(m+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}.$$

La question posée est très facile si  $k = 1$ , car la réponse est alors  $s_1 > 1$ . L'examen des hypothèses  $k = 2$  et  $k = 3$  est plus complexe, nous ne le ferons pas ici (le laissant à la charge du lecteur), mais admettons qu'il indique une forme vraisemblable de la condition générale, qu'il ne reste plus alors qu'à démontrer par récurrence.

Cette hypothèse, déduite de l'expérience pour  $k < 4$  est la suivante :

$$\{s_k > 1, \quad s_k + s_{k-1} > 2, \quad s_k + s_{k-1} + s_{k-2} > 3, \\ \dots, \quad s_k + s_{k-1} + \dots + s_1 > k\}.$$

Nous définissons une surjection naturelle  $\varphi$  de  $I_{k+1}$  sur  $I_k$  en posant :

$$i = \varphi(j) = \varphi(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}) = (n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Supposons d'abord la sommabilité de la famille de l'énoncé pour l'entier  $k + 1$  et un certain ensemble  $s$ . Pour tout  $i \in I_k$ , la famille restreinte à l'ensemble  $J_i$  des indices  $j$  tels que  $\varphi(j) = i$  est a fortiori sommable. Sa somme s'écrit :

$$\sum_{j \in J_i} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k} n_{k+1}^{s_{k+1}}} = \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}} \sum_{n_{k+1} > n_k} \frac{1}{n_{k+1}^{s_{k+1}}}$$

ce qui implique aussitôt l'inégalité  $s_{k+1} > 1$ . De plus, la majoration établie plus haut et l'inégalité  $n_k + 1 \leq 2n_k$  prouvent que :

$$\sum_{n_{k+1} > n_k} \frac{1}{n_{k+1}^{s_{k+1}}} \geq \frac{1}{(s_{k+1} - 1)(n_k + 1)^{s_{k+1} - 1}} \geq \frac{1}{(s_{k+1} - 1) 2^{(s_{k+1} - 1)} n_k^{s_{k+1} - 1}}.$$

Notons  $s' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_{k-1}, s'_k)$  avec  $s'_h = s_h$  pour  $h < k$  et  $s'_k = s_k + s_{k+1} - 1$ . Pour toute partie finie  $J$  de  $I_k$ , on dispose de la majoration :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} x_i^{s'} &= \sum_{i \in J} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_{k-1}^{s_{k-1}} n_k^{s_k + s_{k+1} - 1}} \\ &\leq (s_{k+1} - 1) 2^{(s_{k+1} - 1)} \sum_{i \in J} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k} n_{k+1}^{s_{k+1}}} \end{aligned}$$

quantité uniformément majorée relativement à  $J$  par définition de la sommabilité supposée de  $(x_i^s)_{i \in I_k}$ . Il en résulte que  $s'$  vérifie l'hypothèse de récurrence pour  $k$ .

Il est maintenant immédiat de vérifier que le passage de  $k$  à  $k + 1$  dans l'hypothèse à l'essai par récurrence s'effectue sans aucune difficulté.

Supposons maintenant inversement que  $s_{k+1} > 1$  et que  $s'$ , définie comme plus haut vérifie l'hypothèse de récurrence pour  $k$ . Montrons que la famille  $(x_i^s)_{i \in I_k}$  est alors sommable. Soit en effet  $K$  une partie finie de  $I_{k+1}$ . On peut écrire l'égalité :

$$S_K = \sum_{j \in K} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k} n_{k+1}^{s_{k+1}}} = \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in J_i \cap K} \left( \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}} \right) \frac{1}{n_{k+1}^{s_{k+1}}}$$

puis, en tenant encore compte de l'encadrement suggéré par l'énoncé (mais cette fois-ci en sens inverse), la majoration :

$$\begin{aligned} S_K &= \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in J_i \cap K} \left( \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k + s_{k+1} - 1}} \right) \frac{n_k^{s_{k+1} - 1}}{n_{k+1}^{s_{k+1}}} \\ &\leq \frac{1}{s_{k+1} - 1} \sum_{i \in I_k} \left( \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k + s_{k+1} - 1}} \right). \end{aligned}$$

Nous disposons donc bien d'une condition nécessaire et suffisante qui répond à la demande de l'énoncé.

Les lecteurs curieux pourront essayer de se représenter géométriquement la partie de  $\mathbb{R}^k$  définie par les  $k$  inégalités strictes de cette hypothèse. Il s'agit (à une translation près) d'un cône convexe ouvert dont la frontière est engendrée par un polygone convexe situé dans un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^k$ . Il est intéressant d'en rechercher une base, c'est-à-dire une famille finie de points  $(s_t)$  telle que  $s$  satisfasse à l'hypothèse de sommabilité si, et seulement si,  $s$  est combinaison affine à coefficients strictement positifs d'une partie des  $s_t$ .

## Chapitre 17

1. Lorsque  $n \geq 1$ ,  $d(n)$  est compris entre 1 et  $n$ . Il est donc compris entre les rayons de convergence des deux séries  $\sum z^n$  et  $\sum nz^n$ . Celles-ci ont un rayon de convergence égal à 1, donc le rayon demandé est 1
2. Si  $b_n = \frac{n}{n^2 + n - 2} a_n$ , alors  $b_n \sim \frac{1}{n} a_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Donc  $\sum b_n z^n$  admet même rayon de convergence que  $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ , et l'on sait que, pour tout  $\alpha$  réel les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n^\alpha a_n z^n$  ont même rayon de convergence.
3.
  1. Comme  $a_n$  est naturellement compris entre 1 et  $\sum_{m=1}^n m^2 \sim \frac{n^3}{3}$ , le rayon est  $R = 1$ .
  2. Comme  $a_n$  est borné, le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1. Comme  $a_n$  prend une infinité de fois la valeur 1 il est inférieur ou égal à 1. Il vaut donc 1.
  3. De même, les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $x^2 + y^2 \leq n^2$  sont tous compris dans le carré  $[-n, n] \times [-n, n]$ , qui a  $(2n + 1)^2$  points entiers, donc  $4 \leq a_n \leq (2n + 1)^2$  pour  $n \geq 1$ , et le rayon de convergence est encore 1.
  4. Comme  $a_n = O(n)$ , le rayon  $R$  est au moins 1. Mais la sous-suite  $(a_{2n})$  n'est pas bornée, donc  $R = 1$ .
  5. Ici,  $a_n \sim \frac{e^n}{2n}$  si  $n$  tend vers l'infini. Le rayon de convergence de  $\sum e^n z^n$  est  $\frac{1}{e}$ , égal à celui de  $\sum \frac{e^n z^n}{2n}$ , donc à celui de  $\sum a_n z^n$ .
  6. Un développement limité donne  $\ln a_n \sim \sqrt{n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, donc  $\ln(a_n r^n) \sim n \ln r$ , pour  $r \neq 0$  et  $r \neq 1$ , qui est borné supérieurement pour  $r < 1$ , et tend vers l'infini pour  $r > 1$ . Donc le rayon de convergence cherché est 1.
4. Comme  $\sum a_n$  diverge, le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est inférieur ou égal à 1.

La suite  $(S_n)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers l'infini et

$$\frac{a_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$$

tend vers 0. Donc le rayon de convergence de  $\sum S_n z^n$  est 1, d'après la glerèl de d'Alembert pour les séries entières. Comme  $a_n = o(S_n)$ , le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est donc supérieur ou égal à 1

On peut remarquer que  $a_n = S_n - S_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ , et  $a_0 = S_0$ , donc, pour tout  $z$  de module inférieur à 1 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n.$$

5. 1. Le rayon de convergence est 1, car  $\sum z^{2n+1}$  admet 1 pour rayon de convergence, et la multiplication par  $(-1)^n n$  du coefficient ne change pas ce rayon. Pour  $|x| < 1$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2(n-1)} = x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n t^{n-1}$$

avec  $t = x^2$ . Mais

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n t^{n-1} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} t^n \right) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+t} \right) = \frac{1}{(1+t)^2},$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

Lorsque  $x = \pm 1$ , le terme général de la série ne tend pas vers 0, et il n'y a pas lieu de calculer la somme.

2. Comme  $\operatorname{ch} n \sim e^n/2$  lorsque  $n$  tend vers l'infini le rayon de convergence est  $1/e$ . Pour  $|x| < 1/e$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} x^n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-ex} + \frac{1}{1-x/e} \right).$$

Pour  $x = \pm 1/e$ , cette série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

3. Le rayon de convergence est 1 car le coefficient de  $x^n$  est équivalent à  $1/n^2$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Pour  $|x| < 1$ , et  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) x^n = -\frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2x^2} \left( -\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

6. On remarque que :

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (k+1-1) \cdot k! = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!) = n+1 - \frac{1}{n!},$$

donc 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n - e^z = \frac{1}{(1-z)^2} - e^z$$



7. Cette série entière est aussi  $\sum a_m z^m$ , où

$$a_m = \begin{cases} \frac{1}{p_n} & \text{si } m = p_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $a_m r^m = r^{p_n}/p_n$  si  $m = p_n$ , 0 sinon. Donc la suite  $(a_m r^m)$  est bornée si, et seulement si, la suite  $(r^{p_n}/p_n)$  l'est, c'est-à-dire pour  $r \leq 1$ . Le rayon demandé est 1.

8 Notons  $R(\sum a_n z^n)$  le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ . Notons aussi  $I(\sum a_n z^n)$  l'ensemble des réels positifs tels que la suite  $(a_n r^n)$  soit bornée.

1. On a vu dans le cours que  $\sum n a_n z^n$  et  $\sum \frac{a_n}{n} z^n$  avaient même rayon de convergence que  $\sum a_n z^n$ . Par récurrence, pour tout  $\alpha$  entier, positif ou négatif,  $\sum n^\alpha a_n z^n$  a même rayon de convergence que  $\sum a_n z^n$ . Par encadrement de  $n^\alpha$  entre  $n^\beta$  et  $n^{\beta+1}$ ,  $\beta$  partie entière de  $\alpha$ , c'est aussi le rayon de convergence de  $\sum n^\alpha a_n z^n$ .

2. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} r \in I(\sum a_n^2 z^n) &\iff (|a_n|^2 r^n) \text{ est bornée} \iff (|a_n| r^{n/2}) \text{ est bornée} \\ &\iff r^{1/2} \in I(\sum a_n z^n). \end{aligned}$$

Donc  $R(\sum a_n^2 z^n) = R(\sum a_n z^n)^2$ .

3. Comme  $|a_n e^{\sqrt{n}}| \geq |a_n|$ , le rayon de convergence  $R'$  de  $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$  n'est pas strictement plus grand que  $R$ . D'autre part, soit  $r > 0$  tel que  $(a_n r^n)$  soit bornée. Alors :

$$\forall r' \in [0, r[, \quad a_n e^{\sqrt{n}} r'^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \cdot \frac{r'^n}{r^n},$$

et comme  $e^{\sqrt{n}} \cdot \frac{r'^n}{r^n}$  tend vers 0 si  $n$  tend vers l'infini, la suite  $a_n e^{\sqrt{n}} r'^n$  tend vers 0. Donc  $R' = R$ .

4. Observons que si  $(\alpha_n)$  est une suite strictement croissante d'entiers naturels,  $r \in I(\sum a_n z^{\alpha_n})$  si, et seulement si,  $(|a_n| r^{\alpha_n})$  est bornée. Ainsi :

$$r \in I(\sum a_n z^{2n}) \iff (|a_n| r^{2n}) \text{ est bornée} \iff r^2 \in I(\sum a_n z^n).$$

Donc  $R(\sum a_n z^{2n}) = \sqrt{R(\sum a_n z^n)}$ .

5. Pour la dernière série, montrons d'abord que si  $R$  est fini non nul, alors  $R' = R(\sum a_n z^{n^2}) = 1$ .

En effet, dans ce cas, soit  $r > R$ . Pour tout  $\rho > 1$ ,  $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \cdot \frac{\rho^{n^2}}{r^n}$  qui

n'est pas borné, car  $\frac{\rho^{n^2}}{r^n}$  tend vers l'infini si  $n$  tend vers l'infini, et  $(a_n r^n)$  n'est pas bornée. Donc  $\rho \geq R'$ .

De même, si  $r < R$ ,  $(a_n r^n)$  est bornée, et, pour tout  $\rho < 1$ ,  $\frac{\rho^{n^2}}{r^n}$  tend vers 0, donc  $(a_n \rho^{n^2})$  est bornée, et  $\rho \leq R'$ . Finalement,  $R' = 1$ .

Le raisonnement précédent montre que si  $R = +\infty$ ,  $R'$  est élément de  $[1, +\infty[$ , mais tout peut arriver :

- (a) si  $a_n = 1/\lambda^{n^2}$ ,  $\lambda > 1$ , alors  $R' = \lambda$  ;
- (b) si  $a_n = 1/n!$ , alors  $R' = 1$  ;
- (c) si  $a_n = 1/(n^2)!$ , alors  $R' = +\infty$ .

De même, si  $R = 0$ ,  $R'$  peut être tout réel de  $]0, 1]$  (on prendra les inverses des valeurs de  $a_n$  ci-dessus).

9. La fonction  $g : t \mapsto \frac{t}{1+t}$  est croissante sur  $[0, 1]$  et, pour tout  $t \in [0, 1]$ , la suite  $(t^n)$  est décroissante, donc la suite  $(g(t^n))$  est décroissante, et  $(a_n)$  est décroissante, de limite nulle car  $0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ . De plus :

$$a_n \geq \int_0^1 (t^n - t^{2n}) dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}.$$

Donc  $\sum a_n$  diverge et le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est 1. De plus, la série  $\sum a_n$  diverge, d'où le comportement de la somme de la série en  $x = 1$ . La série  $\sum (-1)^n a_n$  est alternée convergente.

- 10 Pour calculer le rayon de convergence cherchons un équivalent de  $a_n$ . D'après la formule de Stirling,  $\frac{1}{n!} \sim \frac{e^n}{n^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ . Comme :

$$n^2 \ln n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(n - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \ln n,$$

$a_n$  est équivalent à  $\frac{e^n}{n^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{n^n}{\sqrt{n}} = \frac{e^n}{n\sqrt{2\pi}}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , et le rayon de convergence est  $R = 1/e$ . La divergence de la série harmonique entraîne que  $\sum a_n R^n$  diverge.

Montrons que la série  $\sum a_n (-R)^n$  est alternée « au-delà d'un certain rang ». Le développement asymptotique précédent entraîne que le terme général de la série  $\sum a_n (-R)^n$  tend vers 0. De plus, un développement asymptotique

donne :

$$\begin{aligned} & \ln \left( \frac{a_{n+1}R}{a_n} \right) \\ &= \ln a_{n+1} - \ln a_n + \ln R \\ &= (n+1)^2 \ln(n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) - n^2 \ln n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \ln(n+1) - 1 \\ &= \left( n \ln n + \frac{1}{2} \ln n + 1 + \frac{\ln n}{3n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) - \left( n \ln n \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \ln n + \frac{\ln n}{3n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) - \left( \ln n + \frac{1}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) - 1 = -\frac{1}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Ainsi lorsque  $n$  est assez grand,  $\frac{a_{n+1}R}{a_n} < 1$ , et la série entière converge en  $-R$ .

11. Soit  $A > 0$ . Il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\sum_{n=0}^N a_n R^n \geq A + 1$ . Par

continuité du polynôme  $\sum_{n=0}^N a_n x^n$  sur  $[0, R]$ , il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout

$$x \in ]R - \eta, R[, \sum_{n=0}^N a_n x^n \geq \sum_{n=0}^N a_n R^n - 1, \text{ donc } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq A.$$

12. 1. On sait que le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est lui aussi infini. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  entier, que nous fixons, tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|a_n| \leq \varepsilon b_n$ , et pour tout  $x \geq 0$  :

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n \right| \leq \varepsilon \left( \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \right) \leq \varepsilon g(x).$$

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $f_{N-1}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n = O(x^{N-1})$ , donc :

$$f_{N-1}(x) = o(x^N).$$

Or  $x^N = O \left( \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \right)$ , car  $b_n$  est strictement positif. Donc :

$$f_{N-1}(x) = o(g(x)).$$

Dès que  $x$  est assez grand pour que  $|f_{N-1}(x)| \leq \varepsilon g(x)$  :

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{f_{N-1}(x)}{g(x)} + \frac{\sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n}{g(x)} \right| \leq 2\varepsilon.$$

2. Le changement de variable  $z' = z/R$  nous ramène au cas où le rayon de convergence  $R$  est égal à 1 ce que nous allons supposer. Le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est alors au moins égal à 1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$ , que nous fixons, tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|a_n| \leq \varepsilon b_n$ , de sorte que, pour tout  $x \in ]0, 1[$  :

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n \right| \leq \varepsilon \left( \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \right) \leq \varepsilon g(x).$$

D'autre part :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| = A,$$

et il existe un entier  $N'$  tel que  $\sum_{n=0}^{N'} b_n \geq 1 + \frac{A}{\varepsilon}$ . Par continuité du *polynôme*

$\sum_{n=0}^{N'} b_n x^n$  en 1, il existe  $\eta \in ]0, 1[$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \eta, 1[$  :

$$\sum_{n=0}^{N'} b_n x^n > \sum_{n=0}^{N'} b_n - 1 \geq A/\varepsilon.$$

Dans ce cas, pour tout  $x \in ]1 - \eta, 1[$  :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \right| \leq A \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{N'} b_n x^n \leq \varepsilon g(x),$$

et  $|f(x)| \leq 2\varepsilon g(x)$ .

3. Comme  $a_n - b_n = o(b_n)$ , le résultat de la question précédente entraîne que  $f(x) - g(x) = o(g(x))$  lorsque  $x$  tend vers  $R$  en restant strictement inférieur à  $R$ . Cela signifie que  $f(x) \sim g(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $R$ .
4. Le rayon de convergence de  $\sum n^\alpha a_n z^n$  est égal au rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ . Comme  $a_n$  a une limite non nulle en l'infini le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est 1, égal à celui de  $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ .

On applique la question précédente à  $f(x)$  et à :

$$g(x) = a \ln(1 - x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n} x^n,$$

pour conclure que la limite demandée est  $a$ .

13. On sait que le rayon de convergence de la série entière est 1, donc l'expression de  $f_k(x)$  a bien un sens. Pour tout  $k$  entier positif, et tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^k} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k(k+1)\dots(k+n-1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} x^n \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+k-1)x^n. \end{aligned}$$

Or  $(n+1)(n+2)\dots(n+k-1) \sim n^k$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. La série :

$$\sum_n \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!}$$

diverge, et l'on peut appliquer la troisième question de l'exercice 12, ce qui entraîne que  $f_k(x) \sim \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}$  lorsque  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures.

14 Le rayon de convergence est évidemment  $+\infty$ . La relation demandée sera conséquence immédiate de la relation entre fonctions réelles de variable réelle  $f(x) = o\left(e^{\alpha x^{1/\alpha}}\right)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Pour  $x > 0$  :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{n\alpha} x^n}{(n\alpha)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{n\alpha} (x^{1/\alpha})^{n\alpha}}{(n\alpha)!} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^m (x^{1/\alpha})^m}{m!} = \exp(\alpha x^{1/\alpha}),$$

et il suffit donc de montrer que  $f(x) = o(g(x))$ .

D'après la formule de STIRLING :

$$(n!)^\alpha \sim \left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}\right)^\alpha = \frac{n^{n\alpha}}{e^{n\alpha}} (\sqrt{2\pi})^\alpha (\sqrt{n})^\alpha,$$

tandis que :

$$\frac{(n\alpha)!}{\alpha^{n\alpha}} \sim \frac{(n\alpha)^{n\alpha}}{\alpha^{n\alpha} e^{n\alpha}} \sqrt{2\pi n\alpha} = \frac{n^{n\alpha}}{e^{n\alpha}} (\sqrt{2\pi\alpha}) \sqrt{n}.$$

Donc  $\frac{(n\alpha)!}{\alpha^{n\alpha}} = o((n!)^\alpha)$ , puisque  $\alpha$  est choisi strictement supérieur à 1. Il ne reste plus qu'à utiliser l'exercice 12.

15. Fixons  $r \in ]a, R[$ . La suite  $(a_n r^n)_n$  est bornée par un réel positif  $M$ . Donc, pour

tout  $p \geq 0$  et tout  $x \in [-a, a]$ ,

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(x)| &= \left| \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p} \right| \\ &\leq \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)|a_n x^{n-p}| \\ &\leq \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) \left| \frac{x}{r} \right|^{n-p} |a_n| r^{n-p} \\ &\leq \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) \left| \frac{x}{r} \right|^{n-p} \frac{M}{r^p}. \end{aligned}$$

Posons  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x/r}$ . On reconnaît dans le dernier membre des inégalités

ci-dessus la valeur de  $M\varphi^{(p)}(|x|) = \frac{Mp!}{r^p} \times \frac{1}{(1-(x/r))^{p+1}}$ .

Donc

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(x)| &\leq M\varphi^{(p)}(|x|) \leq M\varphi^{(p)}(|a|) = \frac{M}{(1-a/r)^{p+1}} \times \frac{p!}{r^p} \\ &= \frac{M}{1-a/r} \times \frac{p!}{(r-a)^p}. \end{aligned}$$

**16.** Par hypothèse, la série  $\sum a_n z^n$  converge *simplement* sur le disque unité fermé.

Notons  $f(z)$  sa somme,  $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , et :

$$R_n(z) = f(z) - f_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k,$$

dont nous devons montrer la convergence uniforme vers 0. Pour  $z$  tel que

$|z| = 1$ , et pour  $t \in [0, 1]$ , notons  $A_{n,m} = \sum_{k=n+1}^m (R_k(z) - R_{k+1}(z)) t^k$ , de sorte

que :

$$f(tz) - f_n(tz) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k t^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (R_k(z) - R_{k+1}(z)) t^k = \lim_{m \rightarrow +\infty} A_{n,m}.$$

Une transformation d'ABEL sur  $A_{n,m}$  donne :

$$A_{n,m} = R_{n+1}(z)t^{n+1} - \sum_{k=n+2}^m R_k(z)(t^k - t^{k-1}) - R_{m+1}(z)t^m.$$

Lorsque  $m$  tend vers l'infini,  $R_{n+1}(z)$  tend vers 0, donc :

$$f(tz) - f_n(tz) = R_{n+1}(z)t^{n+1} - \sum_{k=n+2}^{+\infty} R_k(z)(t^k - t^{k-1}).$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall z \in S^1, \quad \forall k \geq N. \quad |R_k(z)| \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tout  $n \geq N$ , et pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$|f(tz) - f_n(tz)| \leq \varepsilon t^{n+1} + \varepsilon \sum_{k=n+2}^{+\infty} (t^{k-1} - t^k) = 2\varepsilon t^{n+1} \leq 2\varepsilon.$$

D où la convergence uniforme désirée.

**Remarque** Avec la même démonstration, on voit que si la série entière converge uniformément sur un arc du cercle unité, elle converge uniformément sur l'enveloppe convexe de la réunion de cet arc et du singleton  $\{0\}$ , autrement dit sur l'intersection du disque fermé unité et du secteur angulaire correspondant à cet arc.

17. 1. Soit en effet  $(v_n)$  la suite définie par  $v_{N-1} = |u_{N-1}|$ ,  $|v_N| = |u_N|$ , et  $\forall n \geq N$ ,  $v_{n+1} = \varepsilon v_n + (1 + \varepsilon)v_{n-1}$ . Il est immédiat par récurrence que  $\forall n \geq N$ ,  $|u_n| \leq v_n$ . Or le polynôme associé à la récurrence linéaire qui définit  $(v_n)$  est  $X^2 - \varepsilon X - (1 + \varepsilon)$ , dont les racines sont  $1 + \varepsilon$  et  $-1$ . Donc il existe des constantes  $A$  et  $B$  telles que  $\forall n \geq N$ ,  $v_n = A(1 + \varepsilon)^n + B(-1)^n$ , et  $u_n = O((1 + \varepsilon)^n)$ , d'où le résultat.

2. Pour  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = \frac{xu_n - (a - 1 + n)u_{n-1}}{n + 1}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_{n+1}| \leq \varepsilon|u_n| + (1 + \varepsilon)|u_{n-1}|$ . La minoration du rayon de convergence découle de la première question, car  $\varepsilon$  est arbitraire.

On peut alors dériver terme à terme la série entière qui définit  $f$  sur  $] -1, 1[$ . La relation de récurrence de  $(u_n)$  et l'égalité  $u_1 = xu_0$  se traduisent par :

$$\forall t \in ] -1, 1[, \quad f'(t) = xf(t) - atf(t) - t^2 f'(t),$$

puisque  $u_0 = f(0)$  et  $u_1 = f'(0)$ . Cette équation différentielle linéaire (d'ordre 1 sans second membre) s'intègre aisément en  $f(t) = \lambda \frac{e^{x \operatorname{arctg} t}}{\sqrt{(t^2 + 1)^a}}$ , et la constante  $\lambda$  est donnée par  $\lambda = u_0 = 1$ .

18. 1. L'intégrale qui définit  $I(r)$  s'écrit :

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-ni\theta} \right) d\theta,$$

et la série de fonctions  $\theta \mapsto f(re^{i\theta}) \overline{a_n} r^n e^{-ni\theta}$  converge normalement sur  $[0, 2\pi]$ , d'où :

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} a_n r^{2n}.$$

La continuité de la fonction  $I$  résulte de celle de l'intégrale dépendant de paramètre, puisque  $|f(re^{i\theta})|^2$  est fonction continue de  $(\theta, r) \in [0, 2\pi] \times [0, R[$ . La représentation obtenue de  $I$  comme somme de série de fonctions de  $r$  croissantes et convexes sur  $[0, R[$  entraîne sa croissance et sa convexité.

2. La série entière  $\sum |a_n|^2 z^{2n}$  admet même rayon de convergence que  $\sum a_n z^n$ , donc  $I$  est de classe  $C^\infty$ . Par suite,  $J$  est  $C^\infty$ . De plus, si l'on pose  $\varphi(x) = I(e^x)$ , alors :

$$J'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \text{et} \quad J''(x) = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - \varphi'(x)^2}{\varphi(x)^2}.$$

Le développement en série de  $I$  se dérive terme à terme et, par composition avec  $\exp$ , celle de  $\varphi(x)$  aussi :

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2n|a_n|^2 e^{2nx}.$$

Il en résulte que :

$$\varphi''(x)\varphi(x) - \varphi'(x)^2 = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} 4n^2 |a_n|^2 e^{2nx} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 e^{2nx} \right) - \left( \sum_{n=0}^{+\infty} 2n |a_n|^2 e^{2nx} \right)^2$$

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} B_n^2 \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} C_n^2 \right) - \left( \sum_{n=0}^{+\infty} B_n C_n \right)^2 \geq 0$$

avec  $B_n = 2n|a_n|e^{nx}$  et  $C_n = |a_n|e^{nx}$  entraîne que  $J''$  est positive sur  $] -\infty, \ln R[$ , donc que  $J$  est convexe.

19. 1. L'équation (1) est équivalente, sur  $] -r, r[$ , à l'équation (2). Une solution

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n \text{ développable en série entière sur } ] -\rho, \rho[ \text{ (avec } \rho \leq r)$$



de l'équation (2), telle que  $h(0) = |a|$  et  $h'(0) = |b|$ , est déterminée par le système :

$$w_0 = |a|$$

$$w_1 = |b|$$

$$\forall n \geq 0, (n+2)(n+1)w_{n+2} = \frac{(n+1)n}{r}w_{n+1} + Mw_n.$$

Cela définit une unique suite  $(w_n)$  telle que, si  $\varepsilon$  est un réel strictement positif donné, et si  $\frac{M}{(N+2)(N+1)} \leq \varepsilon$ , alors :

$$\forall n \geq N, |w_{n+2}| \leq \frac{1}{r}|w_{n+1}| + \varepsilon|w_n|.$$

Si  $\lambda_1 < \lambda_2$  sont les solutions de l'équation  $\lambda^2 - \frac{1}{r}\lambda - \varepsilon = 0$ , on voit par récurrence (comme dans la première question de l'exercice 17) que  $w_n = O(\lambda_2^n)$ .

Or  $\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{1}{r^2} + 4\varepsilon} \right)$ , et l'on peut choisir  $\varepsilon$  pour que ce nombre soit aussi près qu'on veut de  $\frac{1}{r}$ . Donc le rayon de convergence de  $\sum w_n z^n$  est au moins  $\rho = r$  et  $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$  est bien la solution développable en série entière sur  $] -r, r[$  cherchée. On peut donc poser  $g = h$ .

2. Notons  $q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Si une telle fonction  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$  existe, par dérivation terme à terme et identification du coefficient de  $x^n$ , les coefficients  $u_n$  vérifient nécessairement :

$$u_0 = a$$

$$u_1 = b$$

$$\forall n \geq 0, (n+2)(n+1)u_{n+2} = a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \dots + a_n u_0.$$

Cela détermine la série entière de manière unique. Il reste donc à vérifier que la série  $\sum u_n z^n$  définie par ce système a un rayon de convergence supérieur ou égal à  $R$ . La *méthode des séries majorantes* consiste à majorer  $|u_n|$  par le  $n^{\text{ème}}$  coefficient d'une série entière plus simple dont on puisse minorer le rayon de convergence. Fixons  $r \in ]0, R[$ . La suite  $(|a_n| r^n)$  est bornée par une constante  $M$ . Donc :

$$\forall n, |a_n| \leq \frac{M}{r^n} = b_n.$$

Or, pour tout  $x \in ]-r, r[$ ,  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{r^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ .

Une fois prouvée l'existence de la solution  $g$  de la première question, ses coefficients  $(v_n)$  vont vérifier le système :

$$v_0 = |a|$$

$$v_1 = |b|$$

$$\forall n \geq 0, (n+2)(n+1)v_{n+2} = b_0v_n + b_1v_{n-1} + \dots + b_nv_0.$$

et il est immédiat, par récurrence, que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $|u_n| \leq v_n$ , donc le rayon de convergence de  $\sum u_n z^n$  est au moins  $r$ , ce qui achève la démonstration.

20. 1. Supposons que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k(g_n) = a_k(g)$ . Fixons  $x \in ]-1, 1[$ .

Pour tout  $n$ , et tout  $K$  :

$$G_{n,K} = \left| g_n(x) - \sum_{k=0}^K a_k(g_n)x^k \right| = \left| \sum_{k=K+1}^{+\infty} a_k(g_n)x^k \right| \leq \sum_{k=K+1}^{+\infty} M|x|^k = \frac{M|x|^{K+1}}{1-|x|}$$

qui tend vers 0 lorsque  $K$  tend vers l'infini. Fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe donc  $K \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n$ , on ait  $|G_{n,K}| \leq \varepsilon$ . On peut choisir  $K$  pour que,

$$\text{de plus, } \left| g(x) - \sum_{k=0}^K a_k(g)x^k \right| \leq \varepsilon. \text{ Ainsi :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |g_n(x) - g(x)| \leq 2\varepsilon + \left| \sum_{k=0}^K (a_k(g_n) - a_k(g)) |x|^k \right|.$$

Pour chaque  $k \leq K$ , il existe  $N_k$  tel que, pour tout  $n \geq N_k$ ,  $|a_k(g_n) - a_k(g)| \leq \frac{\varepsilon}{K}$ , et en prenant  $N = \max_{k \leq K} N_k$ , on a :

$$\forall n \geq N, |a_k(g_n) - a_k(g)| \leq \frac{\varepsilon}{K},$$

d'où  $|g_n(x) - g(x)| \leq 3\varepsilon$ , puisque  $|x| \leq 1$ .

Réciproquement, on suppose que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $g_n(x)$  tend vers  $g(x)$  si  $n$  tend vers l'infini. D'abord, en prenant,  $x = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0(g_n) = a_0(g)$ .

Supposons par récurrence sur  $K \geq 1$  que, pour tout  $k \leq K-1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k(g_n) = a_k(g)$ , et posons :

$$h_n(x) = g_n(x) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k(g_n)x^k, \quad \text{et} \quad h(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k(g)x^k,$$

de sorte que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x)$ . Il s'agit de montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_K(h_n) = a_K(g_n) = a_K(h) = a_K(g)$ . Pour cela, pour tout  $x$  :

$$|h(x) - a_K(h)x^K| = \left| \sum_{k=K+1}^{+\infty} a_k(h)x^k \right| \leq |x^K| \sum_{p=1}^{+\infty} M|x|^p = \frac{M|x|^{K+1}}{1-|x|}.$$

De même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |h_n(x) - a_K(h_n)x^K| \leq \frac{M|x|^{K+1}}{1-|x|}.$$

On fixe alors  $\varepsilon > 0$ , et on applique ces inégalités à  $x = \eta \in ]0, 1[$  tel que

$$\frac{M\eta}{1-\eta} \leq \varepsilon :$$

$$\forall n, \quad |h_n(\eta) - a_K(h_n)\eta^K| \leq \eta^K\varepsilon, \quad \text{et} \quad |h(\eta) - a_K(h)\eta^K| \leq \eta^K\varepsilon.$$

Mais  $\lim_n h_n(\eta) = h(\eta)$ , et il existe  $N$  tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |h(\eta) - h_n(\eta)| \leq \eta^K\varepsilon,$$

d'où avec les inégalités ci-dessus, pour tout  $n \geq N$ ,  $|a_K(h) - a_K(h_n)| \leq 3\varepsilon$ .

2. En général, la convergence n est pas uniforme. Par exemple, si  $g(x) = \frac{1}{1-x}$

et  $g_n(x)$  est sa somme partielle  $g_n(x) = 1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ , la conver-

gence simple est connue, mais  $g\left(1-\frac{1}{n}\right) - g_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

qui tend vers l'infini si  $n$  tend vers l'infini.

En revanche, la première partie de la preuve montre la convergence uniforme sur tout compact de  $] -1, 1[$ .

21. 1. Fixons  $x$  réel et soit  $\varphi = \text{arctg } x$ . Pour tout  $t$  tel que  $|\varphi| + |t| < \frac{\pi}{2}$ , notons

$f(t) = F(x, t) = \tan(\varphi + t)$ . Soit enfin  $\eta > 0$  tel que  $|\varphi| + \eta < \frac{\pi}{2}$ . Nous

allons montrer l'existence de  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que

$$(*), \quad \forall t \in [-\eta, \eta], \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(t)| \leq ab^n n!.$$

Des relations  $f'(t) = 1 + f(t)^2$  et  $f''(t) = 2f(t)f'(t)$  il résulte que pour tout  $t \in [-\eta, \eta]$  :

$$|f(t)| \leq \tan(|\varphi| + \eta)$$

$$|f'(t)| \leq 1 + \tan^2(|\varphi| + \eta)$$

$$|f'''(t)| \leq 2 \tan(|\varphi| + \eta) (1 + \tan^2(|\varphi| + \eta)).$$

Pour  $a = \max(1, \tan(|\varphi| + \eta))$  et  $b = 1 + \tan^2(|\varphi| + \eta)$ , si  $n \leq 2$ ,  $|f^{(n)}(t)| \leq ab^n n!$ . Supposons que, si  $p \leq n - 1$ ,  $|f^{(p)}(t)| \leq ab^p p!$ . Alors :

$$f^{(n)} = 2(ff')^{(n-2)} = 2 \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i f^{(n-i-2)} f^{(i+1)} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
 |f^{(n)}(t)| &\leq 2 \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i a b^{n-i-2} (n-i-2)! a b^{i+1} (i+1)! \\
 &= 2 \sum_{i=0}^{n-2} a^2 b^{n-1} (n-2)! (i+1).
 \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{i=0}^{n-2} (i+1) = \frac{n(n-1)}{2}$ ,  $|f^{(n)}(t)| \leq a^2 b^{n-2} n! \leq a b^n n!$ , car  $a \leq b$ .

Cela prouve (\*) par récurrence. En prenant alors  $\varepsilon = \min\left(\eta, \frac{1}{|b|}\right)$ , la formule de Taylor-Lagrange entraîne que, si  $|t| \leq \varepsilon$ ,  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ .

Pour voir que, pour tout  $n$ ,  $f^{(n)}(0)$  est fonction polynomiale de  $x$ , il suffit d'utiliser par récurrence la relation  $\tan' = 1 + \tan^2$  : si  $\tan^{(n)}(\theta) = T_n(\tan \theta)$ ,

avec  $T_n \in \mathbb{R}[X]$ , alors :

$$\tan^{(n+1)}(\theta) = \tan'(\theta) T_n'(\tan \theta) = (1 + \tan^2 \theta) \cdot T_n'(\tan \theta) = T_{n+1}(\tan \theta)$$

pour  $T_{n+1}(X) = (1 + X^2) T_n'(X)$ .

2. Immédiat en posant comme ci-dessus  $\varphi = \operatorname{arctg} x$ .

22. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!}$  est infini, donc elle converge normalement sur  $[0, x]$  ( $x \geq 0$ ), et peut donc s'intégrer terme à terme sur cet intervalle :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!} \right) dt = \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (t^4)^n}{n!} \cdot \frac{1}{t^2} \right) dt \\
 &= \int_0^x \frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} dt.
 \end{aligned}$$

La fonction à intégrer a un prolongement continu en 0 (la somme de la série entière !), et est équivalente à  $1/t^2$  en  $+\infty$ , donc elle est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , son intégrale sur  $]0, +\infty[$  étant la limite de  $f$  à l'infini

23. Si  $z = u + iv \in \mathbb{C}$  ( $u, v$  réels),  $\cos z = \left| \frac{e^{iu-v} + e^{-iu+v}}{2} \right| \leq e^{|v|}$ . Donc, pour tout  $t$  réel,  $|\cos(zt)| \leq e^{|tz|}$ , et, lorsque  $|v| \leq 1$ , la fonction  $t \mapsto \cos(zt) f(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , et  $F(z)$  est bien défini. On voit même que le domaine de  $F$  contient l'ensemble  $\mathcal{B}$  des  $z = u + iv$  complexes tels que  $t \mapsto e^{|tv|} f(t)$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Cet ensemble  $\mathcal{B}$  est une bande verticale du plan complexe de la forme  $] -v_0, v_0[ + \mathbb{R}i$  ou  $[ -v_0, v_0] + \mathbb{R}i$ ,  $v_0 \geq 1$  étant la borne supérieure de  $\mathcal{A}$ .

Fixons  $z \in \mathcal{B}$ , et, pour  $n$  entier, notons  $g_n(t) = \frac{(-1)^n z^{2n} t^{2n} f(t)}{(2n)!}$ , de sorte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |g_n(t)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n} t^{2n} |f(t)|}{(2n)!} = \operatorname{ch}(|zt|) |f(t)|,$$

qui est fonction continue de  $t$ , intégrable dès que  $|z| < v_0$ . On peut donc intégrer terme à terme la série des  $g_n$ , et :

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(zt) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} f(t) dt. \end{aligned}$$

En posant  $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} f(t) dt$ , la série entière  $\sum a_n z^n$  converge absolument pour  $|z| < v_0$ .

Rappelons que le rayon de convergence de  $\sum \alpha_n z^n$  est aussi la borne supérieure de l'ensemble des  $r \geq 0$  tels que la série  $\sum \alpha_n r^n$  converge absolument. Or, ici, d'après le théorème de convergence monotone des intégrales, pour tout  $r \geq 0$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{ch}(r|t|) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!} t^{2n} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} |a_n|,$$

que cette somme soit finie ou non. L'intégrabilité de  $t \mapsto \operatorname{ch}(rt) f(t)$  étant équivalente à celle de  $t \mapsto e^{|rt|} f(t)$ , le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est  $v_0$ .

- 24** 1. Nous allons montrer que la suite de fonctions  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  vérifie le critère de Cauchy uniforme sur  $\mathcal{D}$ . Pour cela si  $U_k = 1 + \dots + z^k$ , et si  $p \geq 1$  :

$$\begin{aligned} S_{n+p}(z) - S_n(z) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (U_k - U_{k-1}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k U_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} U_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) U_k + a_{n+p} U_{n+p} - a_{n+1} U_n. \end{aligned}$$

Or, si  $z \in \mathcal{D}$ ,  $|U_k| = \left| \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|} \leq \frac{2}{r}$ , et dans ce cas :

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| \leq \frac{2}{r} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) + \frac{2}{r} a_{n+p} + \frac{2}{r} a_{n+1} = \frac{4}{r} a_{n+1},$$

suite qui tend vers 0 indépendamment de  $z \in \mathcal{D}$  d'où le résultat. Au passage, cela entraîne que le rayon de convergence de la série est au moins 1, ce qui se voit directement car les  $a_n$  sont bornés.

2. Si la convergence était uniforme sur le disque fermé privé de 1, comme, pour tout  $n$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} S_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k$ , le théorème de conservation des limites par convergence uniforme entraînerait la convergence de la série  $\sum a_n$ . Mais le cas de  $a_n = \frac{1}{n \ln n}$  (pour  $n \geq 2$ ) fournit immédiatement un contre-exemple. D'ailleurs, si la série  $\sum a_n$  converge, la série  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur le disque fermé tout entier !

**Remarque** La transformation d'ABEL (avec  $U_n$ ) vient d'être utilisée d'une autre manière que dans la preuve du théorème d'ABEL sur les séries entières : ici, c'est la somme partielle des  $z^k$  et non celle des  $a_k$  qu'on a majorée.

25. 1. Supposons par récurrence que, pour tout  $k \leq n-1$ ,  $0 < g_k \leq 1$ . Alors  $g_n \geq 0$ , et  $ng_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} \leq n$ , d'où  $g_n \leq 1$ . Le rayon de convergence de  $\sum g_n z^n$  est donc supérieur ou égal à 1.
2. Fixons  $z$  de module strictement inférieur à 1. Les relations de récurrence qui définissent  $(g_n)$  donnent par produit de Cauchy :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n g_n z^n = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k \right) \left( \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m} \right) = G(z) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m}, \quad (*)$$

la série écrite à droite étant convergente sur le disque ouvert  $D(0,1)$ . Nous songeons à une équation différentielle qui serait de la forme  $zG'(z) = zH'(z)G(z)$  mais nous devons dériver par rapport à une variable réelle. Il est donc naturel de poser, pour  $|z| < 1$  :

$$H(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

La série  $\sum g_n t^n z^n$  de fonctions de  $t$  converge normalement, ainsi que la série dérivée sur tout intervalle  $[-R, R] \subset ]-1, 1[$ , et peut donc se dériver terme à terme. De même pour  $\sum h_n t^n z^n$ . Si  $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n t^n z^n$  et

$h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n t^n z^n$ , la relation (\*) écrite en  $tz$  à la place de  $z$  entraîne, pour  $t \neq 0$  :

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} g_n z^n = g(t)h'(t)$$

évidemment vérifié aussi pour  $t = 0$ . Ainsi, comme  $h(0) = 0$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $g(t) = g(0) \exp(h(t))$ , soit  $G(tz) = G(0) \exp H(tz)$  et en particulier, pour  $t = 1$ ,  $G(z) = G(0) \exp H(z) = \exp H(z)$ .

3. Une première majoration de  $g_n$  par 1 donne :

$$n g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n,$$

et  $g_n \leq \frac{1 + \ln n}{n}$ , inégalité que nous allons reporter dans la relation de récurrence :

$$n g_n \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 + \ln k}{k(n-k)} \leq \frac{1}{n} + (1 + \ln n) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}.$$

L'estimation demandée de  $g_n$  résulte alors de la suivante :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

26. 1.  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\overline{D}, \mathbb{C})$ , stable par le produit, car un produit de fonctions continues est continue, et, sur le disque unité ouvert le produit de deux fonctions de  $\mathcal{A}$  est somme du produit de Cauchy des deux séries.

Pour l'intégrité, supposons par l'absurde que  $f \cdot g = 0$ ,  $f$  et  $g$  non nulles dans  $\mathcal{A}$ . Si  $f$  est nulle sur  $D = D(0, 1)$ , par continuité  $f$  est nulle sur le disque fermé. On peut donc supposer que  $f$  et  $g$  ne sont pas nulles sur  $D$ . Soit  $k$  le plus petit indice d'un coefficient non nul de la série entière de  $f$ , et  $l$  celui de la série entière de  $g$ . Le produit de Cauchy des deux séries a un coefficient d'indice  $kl$  non nul, donc est non nul, ce qui contredit  $f \cdot g = 0$ .

2. Si  $r < 1$ , et si  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  sur  $D$ , la formule de Cauchy (exercice 18) permet de déduire  $a_n$  de la valeur de  $f$  sur le cercle centré en 0 de rayon  $r$  :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta.$$

Lorsque  $f \in \mathcal{A}$  la fonction  $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$  sur  $[0, 2\pi]$  est limite uniforme de la famille de fonctions  $f_r$  ( $r < 1$ ) :  $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$ . On peut donc remplacer  $r$  par 1 dans la formule de Cauchy. Ainsi, si  $f$  est nulle sur le cercle, elle est nulle partout.

3. Soit  $\varphi > 0$  la longueur d'un arc du cercle unité sur lequel  $g$  s'annule. Choisissons  $n$  entier tel que  $\frac{2\pi}{n} < \varphi$ . La fonction  $z \mapsto h(z) = \prod_{k=0}^{n-1} g(e^{2k\pi i/n} z)$  est dans  $\mathcal{A}$  nulle sur tout le cercle unité, donc nulle d'après 2. L'intégrité de  $\mathcal{A}$  entraîne que  $g$  est elle-même nulle.

- 27 La fonction de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  :  $t \mapsto e^{-t} \sin t$  est continue et tend vers 0 à l'infini. Elle est donc bornée. Sa borne supérieure est facilement déterminée par ses variations, puisque sa dérivée est  $-e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t$  positive, nulle en  $t = \pi/4$ , puis négative. Le maximum de la fonction est  $\mu = e^{-\pi/4} \sin(\pi/4) < 1$ .

Si  $z$  est fixé avec  $|z| < 1/\mu$ , alors la série de fonctions  $\sum f_n$ , définie par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad f_n(t) = e^{-t} e^{-nt} (\sin^n t) z^n,$$

converge simplement et a pour somme :  $h_z(t) = \frac{1}{e^t + z \sin t}$ .

Montrons qu'elle vérifie les hypothèses du théorème d'intégration des séries de fonctions. En effet, la somme est continue, et, pour tout  $n$  :

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-nt} |\sin^n t| |z|^n dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} \mu^n |z|^n dt = \mu^n |z|^n.$$

On peut donc intervertir intégration et sommation, et écrire, pour  $|z| < 1/\mu$  :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-nt} (\sin^n t) dt.$$

Le rayon de convergence est donc au moins  $1/\mu$ .

Montrons qu'il est exactement  $1/\mu$ . En effet, pour  $z = -1/\mu$ , la fonction  $t \mapsto e^t - \frac{\sin t}{\mu}$  s'annule en  $t = \pi/4$ , et a une dérivée seconde non nulle en  $\pi/4$ .

Donc  $h(t) = \frac{1}{e^t - \frac{\sin t}{\mu}}$  est équivalent à  $\frac{\nu}{(t - \pi/4)^2}$ , avec  $\nu$  constante, lorsque  $t$

tend vers  $\pi/4$ . Il en résulte que la restriction de  $h$  à  $[0, +\infty[$  privé de  $\pi/4$  n'est pas intégrable. Le théorème de convergence croissante des intégrales entraîne alors que, pour des valeurs réelles de  $x$  :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1/\mu \\ x > -1/\mu}} \int_0^{+\infty} h_x(t) dt = +\infty.$$



Ainsi,  $F$  n'a pas de prolongement continu en  $-1/\mu$  puisque sa restriction à  $] -1/\mu, 0]$  n'en a pas.

Par linéarisation de  $\sin^n t$  et des intégrations par parties successives, on voit bien que les coefficients de la série entière sont rationnels.

**28.** Fixons  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La fonction  $y : t \mapsto \exp(\lambda \arcsin x)$  de  $] -1, 1[$  dans  $\mathbb{C}$  vérifie

$y' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} y$ , soit  $\sqrt{1-x^2} y' = \lambda y$ . En dérivant encore une fois :

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y' + \sqrt{1-x^2} y'' = \lambda y' = \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-x^2}} y,$$

et finalement :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0. \tag{*}$$

Si, sur un intervalle  $] -R, R[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$  vérifie l'équation (\*), alors, par identification du coefficient de  $x^n$ , on voit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)(n+2)u_{n+2} - n(n-1)u_n - nu_n - \lambda^2 u_n = 0.$$

Donc nécessairement, pour tout  $n \geq 0$ ,  $(n+1)(n+2)u_{n+2} = (n^2 + \lambda^2)u_n$ , soit :

$$u_{n+2} = \frac{n^2 + \lambda^2}{(n+1)(n+2)} u_n.$$

De plus si  $f = y$ ,  $u_0 = f(0) = 1$  et  $u_1 = f'(0) = \lambda$ .

Cela définit réciproquement une unique série entière  $\sum u_n z^n$  de rayon de convergence égal à 1 d'après le critère de d'Alembert (qui s'impose ici), car  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = 1$ . La restriction  $f$  à  $] -1, 1[$  de la somme de cette série entière vérifie l'équation (\*), et la condition initiale  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = \lambda$ . D'après le théorème de Cauchy d'unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire à condition initiale donnée,  $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$ .

**29.** 1. Si  $\|u\| < R$ , la série  $\sum |\lambda_n| \cdot \|u\|^n$  converge. La norme d'opérateur dans  $\mathcal{L}(E)$  est une norme matricielle, et, pour tout  $n$ ,  $\|\lambda_n u^n\| \leq |\lambda_n| \cdot \|u\|^n$ , donc la série  $\sum \lambda_n u^n$  converge absolument. Elle converge, car  $E$  est complet.

Soit maintenant  $\rho > R$ , et considérons  $u = \rho \text{Id}$ . La norme d'opérateur de  $\text{Id}$  est 1, et  $\|u\| = \rho$ . La suite de terme général  $\|\lambda_n u^n\| = |\lambda_n| \cdot \rho^n$  n'est pas bornée, donc la série  $\sum \lambda_n u^n$  ne converge pas.

2. Montrons que  $\mathcal{D}$  est étoilé autour de 0, et il sera alors connexe par arcs. Si  $\sum \lambda_n u^n$  converge, le terme général  $\lambda_n u^n$  est borné par  $M$  indépendant de  $n$ , et, pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $\|\lambda_n t^n u^n\| = |t^n| \cdot \|\lambda_n u^n\| \leq M |t|^n$ , terme général d'une suite géométrique convergente. Donc  $\sum \lambda_n t^n u^n$  converge absolument, d'où  $tu \in \mathcal{D}$ .

30. 1. On remarque que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\Delta^n(P) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p P(X+p)$ .

De plus, pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\deg \Delta(P) \leq \deg P - 1$ . Donc, si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ ,  $\Delta^n(P) = 0$ , d'où :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p P(X+p) = 0,$$

ce qui donne l'expression demandée en prenant la valeur en 0.

2. On voit, pour  $p \geq 1$ , que :

$$\begin{aligned} (pz-x)^{p-1}(pz+y)^{n-p} &= \sum_{\substack{0 \leq q \leq p-1 \\ 0 \leq r \leq n-p}} \binom{p-1}{q} \binom{n-p}{r} (pz)^{p-1-q} (-x)^q (pz)^{n-p-r} y^r \\ &= \sum_{\substack{0 \leq q \leq p-1 \\ 0 \leq r \leq n-p}} (-x)^q y^r \binom{p-1}{q} \binom{n-p}{r} (pz)^{n-1-q-r} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq q \leq p-1 \\ 0 \leq r \leq n-p}} H_{q,r}(p) = S(p), \end{aligned}$$

$$\text{en notant } S(T) = \sum_{\substack{0 \leq q, 0 \leq r, n-1-r-q \geq 0}} H_{q,r}(T).$$

Pour  $0 \leq q$ ,  $0 \leq r$ , et  $n-1-q-r \geq 0$ , le polynôme  $H_{q,r}(T)$  est de degré  $n-1$ , de coefficient dominant  $(-x)^q y^r z^{n-1-q-r}$ . Donc, d'après la première

question,  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p S(p) = 0$ .

Lorsque  $p = 0$ , la valeur en 0 du polynôme  $\binom{T-1}{q}$  est

$$\frac{(-1)(-2)\dots(-1-q+1)}{q!} = (-1)^q,$$

et celle de  $\binom{n-T}{r}$  est  $\binom{n}{r}$ .

Or  $(pz)^{n-1-q-r} = 1$  ou 0, selon que  $q+r = n-1$  ou non. Donc :

$$S(0) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} x^{n-1-r} y^r,$$

ce qui entraîne la formule (1).

3. Si  $\varphi(t) = te^{-t}$ ,  $\varphi'(t) = (1-t)e^{-t}$ , et  $\varphi$  croît strictement sur  $]-\infty, 1[$  de  $-\infty$  à  $\frac{1}{e}$ , puis décroît strictement sur  $]1, +\infty[$  de  $\frac{1}{e}$  à 0. Sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle  $]-\infty, 1[$ , et la fonction réciproque  $f : ]-\infty, \frac{1}{e}[ \rightarrow ]-\infty, 1[$

est un  $C^1$ -difféomorphisme tel que, si  $t = f(x)$ ,  $1 = \frac{dt}{dx}(1-t)e^{-t}$ , d'où :

$$t = \frac{dt}{dx}(1-t)x.$$

4. Comme  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow e$  à l'infini,  $R = \frac{1}{e}$ .

$$\text{Si } x \in I = \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[ \quad xg'(x)(1-g(x)) = \left( \sum_{m=1}^{+\infty} ma_m x^m \right) \left( 1 - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p x^p \right),$$

qui est égal à  $g(x)$  pour tout  $x \in I$  si, et seulement si, pour tout  $n \geq 1$  :

$$a_n = na_n - \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)a_{n-p}a_p. \tag{3}$$

Or l'identité d'ABEL, appliquée à  $y = n$ ,  $z = -1$ , et  $x = 0$  donne :

$$n.n^{n-1} = n^{n-1} - \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)^{n-p} p^{p-1} \binom{n}{p}, \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{(n-1)n^{n-1}}{n!} = \sum_{p=1}^{n-1} (n-p) \frac{(n-p)^{n-p-1}}{(n-p)!} \cdot \frac{p^{p-1}}{p!},$$

équivalent à la relation (3).

Il nous reste à montrer que  $g = f$ . Les coefficients de la série entière de  $g$  sont positifs, donc  $g$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ , sa dérivée ne s'annule pas. De l'autre côté, le changement de variable  $x = \frac{\xi}{e}$  permet d'écrire :

$$\gamma(\xi) = g\left(\frac{\xi}{e}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \xi^n, \quad \text{où} \quad \frac{(n+1)b_{n+1}}{nb_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{e} < 1.$$

Donc  $\gamma$  est, sur  $]-1, 0]$  somme d'une série alternée à terme général décroissant en valeur absolue ainsi que sa dérivée, qui ne s'annule donc pas sur cet intervalle. Ainsi,  $g$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $I$  sur un intervalle  $]\alpha, \beta[$  de  $\mathbb{R}$ . La fonction réciproque  $\psi$  de  $g$  vérifie l'équation différentielle  $t\psi'(t) = (1-t)\psi(t)$ , et  $\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \psi'(t) = 1$ . Il est immédiat que la seule fonction qui puisse vérifier cela est  $\psi(t) = te^{-t}$ . Donc  $\alpha = f(-1/e)$ ,  $\beta = 1$ , et  $g = f$ .

31. 1. Dans cette question et la suivante, la suite  $(a_n)$  n'intervient que par l'intermédiaire de  $(s_n)$ . De plus, le résultat visé est évident pour une suite  $(s_n)$  constante égale à  $L$ . Donc, par différence, il suffit de l'établir lorsque

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ . C est ce que nous supposons. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N > 0$  tel que,  $\forall n \geq N$ ,  $|s_n| \leq \varepsilon$ , de sorte que, pour tout  $x \in [0, R[$  :

$$\left| \sum_{k=N}^n s_k \beta_k x^k \right| \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \varepsilon \beta_k x^k \leq \varepsilon f(x).$$

La suite  $\sum s_n \beta_n x^n$  est de Cauchy, et converge. Donc le rayon de convergence de  $\sum s_n \beta_n z^n$  est supérieur ou égal à  $R$ . De plus, par passage à la

limite sur  $n$ , pour tout  $x \in [0, R[$ ,  $\frac{1}{f(x)} \left| \sum_{k=N}^{+\infty} s_k \beta_k x^k \right| \leq \varepsilon$ .

Montrons d'autre part que  $\lim_{x \rightarrow R^-} \frac{1}{f(x)} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \beta_k x^k = 0$ .

Si  $R = +\infty$ , lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , chaque terme  $s_k \beta_k x^k$  (avec  $k \leq N - 1$ ) est négligeable devant  $x^N$ ; et comme  $\beta_N$  n'est pas nul,

$x^N \leq \frac{1}{\beta_N} \sum_{k=N}^{+\infty} \beta_k x^k \leq \frac{1}{\beta_N} f(x)$ . Si  $R < \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{N-1} s_k \beta_k x^k$  admet une limite

finie à gauche de  $R$ , tandis que, par hypothèse,  $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = +\infty$ . Dans

les deux cas, il existe  $A$  tel que, pour tout  $x > A$ ,  $\frac{1}{f(x)} \left| \sum_{k=0}^{N-1} s_k \beta_k x^k \right| \leq \varepsilon$ , et

$$\left| \frac{S(x)}{f(x)} \right| \leq 2\varepsilon. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow R^-} \frac{S(x)}{f(x)} = 0.$$

2. C'est une application de l'intégration par parties, sans rapport avec les séries entières ! Pour tout  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{U f'}{f^2} &= \left[ -\frac{U}{f} \right]_0^x + \int_0^x \frac{U'}{f} = \left[ -\frac{U}{f} \right]_0^x + \int_0^x \left( \frac{S'}{f} - \frac{S f'}{f^2} \right) \\ &= \left[ -\frac{U}{f} \right]_0^x + \int_0^x \left( \frac{S}{f} \right)' = \left[ -\frac{U}{f} + \frac{S}{f} \right]_0^x \\ &= \left[ \frac{1}{f(t)} \int_0^t \frac{S f'}{f} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{f(x)} \int_0^x \frac{S f'}{f}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow R^-} \int_0^x f' = \infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow R^-} \frac{S(x)}{f(x)} = L$ , on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{S}{f} \cdot f' = L \int_0^x f' + o \left( \int_0^x f' \right) = L \cdot f(x) + o(f(x)).$$

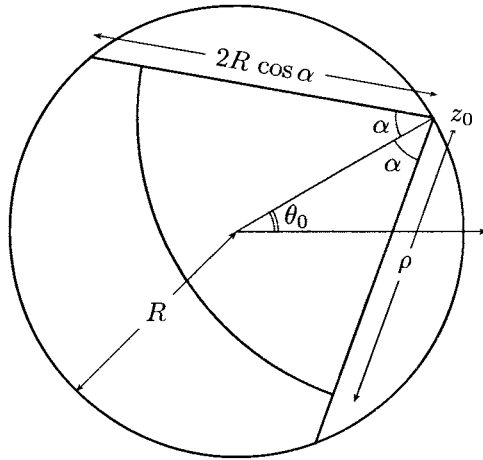
Donc  $\lim_{x \rightarrow R^-} \frac{1}{f(x)} \int_0^x \frac{S f'}{f} = L = \lim_{x \rightarrow R^-} \int_0^x \frac{U f'}{f^2}$ .

3. Dans ce cas,  $\frac{f'}{f} = 1$ , et  $\beta_n = \frac{1}{n!}$ . Si  $x$  est réel, la série  $\sum \frac{s_n t^n}{n!}$  peut s'intégrer terme à terme sur  $[0, x]$ , et :

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n x^n}{n!} - \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n t^n}{n!} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n x^{n+1}}{(n+1)!} \\
 &= s_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s_n - s_{n-1})x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!},
 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

32.



1. Quitte à remplacer  $z$  par  $\frac{z}{z_0}$ , on peut supposer  $R = 1$  et  $z_0 = 1$ .
2. Nous allons montrer que la série vérifie sur  $S$  le critère de Cauchy uniforme. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \geq 1$ , notons  $s_{n,p} = a_{n+1}z^{n+1} + \dots + a_{n+p}z^{n+p}$  et  $\sigma_{n,p} = a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$ . À l'aide d'une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}
 s_{n,p} &= \sigma_{n,1}z^{n+1} + (\sigma_{n,2} - \sigma_{n,1})z^{n+2} + \dots + (\sigma_{n,p} - \sigma_{n,p-1})z^{n+p} \\
 &= z^{n+1}(1 - z)(\sigma_{n,1} + \sigma_{n,2}z + \dots + \sigma_{n,p-1}z^{p-2}) + \sigma_{n,p}z^{n+p}.
 \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , la série  $\sum a_n$  étant convergente, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$  et  $p \geq 1$ , on ait  $|\sigma_{n,p}| \leq \varepsilon$ . On a donc, pour  $n \geq N$ ,  $p \geq 1$  et pour tout  $z$  tel que  $|z| < 1$  :

$$|s_{n,p}| \leq \varepsilon|1 - z|(1 + |z| + \dots + |z|^{n-2}) + \varepsilon \leq \varepsilon \left( 1 + \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \right).$$

Remarquons que :

$$1 - |z|^2 = 1 - (1 - re^{i\varphi})(1 - re^{-i\varphi}) = r(2 \cos \varphi - r) \geq r(2 \cos \alpha - \rho).$$

Si  $z \in S$ , et  $z \neq 1$ , on a donc :

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} = \frac{r}{1 - |z|} = \frac{(1 + |z|)r}{1 - |z|^2} \leq \frac{2}{2 \cos \alpha - \rho}.$$

On a donc, pour tout  $z \in S$  avec  $|z| < 1$  :

$$|s_{n,p}| \leq \varepsilon \left( 1 + \frac{2}{2 \cos \alpha - \rho} \right).$$

Cette dernière inégalité restant valable, pour  $z = 1$ , on a montré la convergence uniforme de la série sur  $S$ .

## Chapitre 18

1. Démontrons d'abord l'inégalité large :

$$\|tx + (1 - t)y\| \leq \|tx\| + \|(1 - t)y\| = t\|x\| + (1 - t)\|y\| \leq t + (1 - t) = 1.$$

Pour qu'il y ait égalité, il faudrait que  $tx$  et  $(1 - t)y$  soient positivement liés et que  $\|x\| = \|y\|$ , ce qui impliquerait  $x = y$ .

2. Posons  $x' = \frac{1}{\|x\|^2} x$  et  $y' = \frac{1}{\|y\|^2} y$ . On a aussitôt :

$$\begin{aligned} \|x' - y'\|^2 &= \|x'\|^2 - 2(x'|y') + \|y'\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2\|y\|^2} [\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2] \\ &= \frac{1}{\|x\|^2\|y\|^2} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

3. Nous allons montrer que cet ensemble est, si  $E$  est de dimension finie égale à 1, celui des réels supérieurs ou égaux à 1 et, sinon, celui des réels supérieurs ou égaux à  $\sqrt{2}$ .

1. Cet ensemble est en effet un sous-ensemble de l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 1, puisque pour  $x = y$  non nuls, on a nécessairement  $2\|x\| \leq \lambda \max(2\|x\|, 0\|x\|) = 2\lambda\|x\|$ .

2. En sens inverse, cet ensemble contient l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à  $\sqrt{2}$  car il suffit de montrer que  $\sqrt{2}$  est bien un nombre  $\lambda$  qui convient. Soit, en effet,  $x$  et  $y$  tels que le produit scalaire  $(x|y)$  soit positif ou nul (c'est possible, quitte à changer  $y$  en  $-y$ , car la somme  $(x|y) + (x|-y)$  est nulle et un tel changement ne modifie pas l'ensemble étudié). Alors  $\|x + y\| \geq \|x - y\|$ , d'où :

$$(\sqrt{2}\|x + y\|)^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 = (\|x\| - \|y\|)^2 + 4(x|y) \geq 0.$$

3. Supposons que  $E$  soit isomorphe à la droite réelle, cet isomorphisme étant établi par la relation qui au réel  $u$  associe le vecteur  $x = ue$  où  $e$  est un vecteur de norme 1 de  $E$  choisi une fois pour toutes. Il reste alors à montrer que 1 est un nombre  $\lambda$  qui convient. On peut changer à volonté  $x$  en  $-x$  et  $y$  en  $-y$  sans changer l'ensemble étudié. Si donc  $x$  et  $y$  ont tous deux des coordonnées  $u$  et  $v$  positives ou nulles, on a  $\max(u+v, u-v) = u+v \geq |u|+|v|$ , ce qui démontre la proposition.

4. Supposons au contraire que  $E$  contienne au moins deux vecteurs indépendants. On peut alors choisir  $x$  et  $y$  de norme 1 et orthogonaux. Il reste alors à montrer que tout nombre  $\lambda$  qui convient est inférieur ou égal à  $\sqrt{2}$ , ce qui résulte de la relation :

$$2 \leq \lambda \max(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \lambda \sqrt{2}$$

et démontre la proposition.

4 Cet ensemble est celui des réels supérieurs ou égaux à  $\sqrt{2}$ . Il est clair qu'il en est un sous-ensemble, puisque pour  $x$  et  $y = ix$  non nuls, on a nécessairement  $2\|x\| \leq \max(|1+i|\|x\|, |1-i|\|x\|) = \lambda\sqrt{2}\|x\|$ .

En sens inverse, il suffit de montrer que  $\sqrt{2}$  est bien un nombre  $\lambda$  qui convient. Soient, en effet,  $x$  et  $y$  tels que la partie réelle du produit scalaire  $(x|y)$  soit positive ou nulle (c'est possible, quitte à changer  $y$  en  $-y$ , car la somme  $(x|y) + (x|-y)$  est nulle et un tel changement ne modifie pas l'ensemble étudié). Alors  $\|x + y\| \geq \|x - y\|$ , d'où :

$$(\sqrt{2}\|x + y\|)^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 = (\|x\| - \|y\|)^2 + 4\operatorname{Re}(x|y) \geq 0$$

ce qui démontre la proposition.

5 Établissons un lemme préliminaire : toute relation  $\sum_i \lambda_i x_i = 0$  implique la relation  $\sum_i |\lambda_i| x_i = 0$ . En effet :

$$0 \leq \left\| \sum_i |\lambda_i| x_i \right\|^2 = \sum_i \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} |\lambda_i \lambda_j| (x_i | x_j)$$

$$\leq \sum_i \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (x_i | x_j) = \left\| \sum_i \lambda_i x_i \right\|^2.$$

Posons  $f(y) = (x|y)$ . Toute combinaison linéaire  $\sum_i \lambda_i x_i = 0$  implique les relations  $\sum_i |\lambda_i| x_i = 0$ , puis  $\sum_i |\lambda_i| f(x_i) = 0$ . Or chacun de ces termes est positif ou nul, donc nul, et les  $f(x_i)$  sont strictement positifs : il en résulte que tous les  $\lambda_i$  sont nuls, ce qu'il fallait démontrer.

6. On trouve  $\lambda = 1$ . En effet, on a  $\lambda \geq 1$  comme le montre l'exemple  $v = -u$  avec  $\|u\| = 1$ . Il suffit maintenant de démontrer l'inégalité  $\|f(v) - f(u)\| \leq \|v - u\|$  pour tous  $u$  et  $v$ .

Supposons, ce qui ne change rien,  $\|v\| \geq \|u\|$ , c'est-à-dire :

$$a = \max(1, \|u\|) \leq \max(1, \|v\|) = b.$$

Alors  $f(u) = \frac{1}{a} u$  et  $f(v) = \frac{1}{b} v$ . Notons également les minoration  $b \geq a \geq 1$ ,  $ab \geq 1$  et  $(u|v) \leq \|u\| \|v\| \leq ab$ .

1. Si  $\|v\| \leq 1$ , alors  $a = b = 1$  et  $\|u\| \leq \|v\| \leq 1$  d'où  $f(v) - f(u) = v - u$ , ce qui implique immédiatement l'inégalité demandée qui est alors une égalité.
2. Soit sinon  $\|v\| = b > 1$ . L'angle sous lequel du point  $f(v)$  de la sphère unité on voit le segment joignant  $f(u)$  à un point de la demi-droite  $\{1, +\infty\} f(v)$  étant obtus, la distance  $\|f(u) - f(v)\|$  est inférieure à la distance  $\|f(u) - v'\|$  où  $v' = k f(v)$  avec  $k \geq 1$ , par exemple pour  $k = \frac{b}{a}$ , valeur telle que  $f(u) - v' = \frac{1}{a}(u - v)$  soit de norme inférieure ou égale à celle de  $v - u$ . Précisons cela par le calcul :

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 - \|f(v) - f(u)\|^2 &\geq \frac{1}{a^2} \|v - u\|^2 - \left\| \frac{1}{b} v - \frac{1}{a} u \right\|^2 \\ &= \frac{b^2}{a^2} - 1 + 2 \frac{a - b}{a^2 b} (u|v) \\ &\geq \left( \frac{b}{a} - 1 \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

car on ne peut avoir à la fois  $b > 1$ ,  $a = 1$  et  $a = b$ .

Ici l'inégalité stricte est donc toujours vraie, et l'égalité est atteinte si, et seulement si les deux vecteurs  $u$  et  $v$  appartiennent à la boule unité fermée.



**Remarque** Voici un autre calcul direct valable pour le cas  $b > 1$  :

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 - \|f(v) - f(u)\|^2 &= \|v - u\|^2 - \left\| \frac{1}{b}v - \frac{1}{a}u \right\|^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \|v\|^2 + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \|u\|^2 - 2\left(1 - \frac{1}{ab}\right) (u|v) \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \|v\|^2 + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \|u\|^2 - 2(ab - 1) \\ &= b^2 - 2ab + 1 + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \|u\|^2 \\ &= (b - a)^2 + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) (\|u\|^2 - a^2) = (b - a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété demandée.

**7** Il s'agit bien d'un maximum, égal à  $M = \frac{p^2 + r^2}{2r}$  où :

$$p = \sqrt{\|c - a\| \|b - a\|} \geq \sqrt{\|c' - a\| \|b' - a\|} = q$$

où les points  $b'$  et  $c'$  sont respectivement les intersections des segments  $[a, b]$  et  $[a, c]$  avec la sphère de centre  $\omega$  et de rayon  $s$ .

Rappelons un résultat de géométrie élémentaire selon lequel la puissance du point intérieur  $a$  par rapport à la boule  $B(\omega, s)$  est égale à  $-q^2 = d^2 - s^2$  où  $d = \|\omega - a\|$  (il suffit de considérer le symétrique  $b''$  de  $b'$  par rapport à  $\omega$  et de calculer le produit scalaire  $(b' - a|b'' - a)$  en faisant intervenir le centre  $\omega$ ). On peut donc écrire :

$$0 = d^2 - s^2 + q^2 \leq d^2 - s^2 + p^2 \leq (s - r)^2 - s^2 + p^2 = p^2 + r^2 - 2rs$$

puisque la boule de centre  $a$  est incluse dans la boule de centre  $\omega$ . L'inégalité  $s \leq M$  en résulte. Elle devient une égalité si et seulement si  $p = q$ , c'est-à-dire si  $b$  et  $c$  sont sur la sphère de centre  $\omega$  et de rayon  $s$ , et si  $d = s - r$  c'est-à-dire si les deux sphères sont tangentes intérieurement, ce qui est évidemment possible.

**8** 1. À l'aide de la formule du *double produit vectoriel*, on trouve facilement :

$$\begin{aligned} \delta' &= (i'|j'|k') = (i'|j' \wedge k') = \frac{1}{\delta^2} (i'|(k \wedge i) \wedge (i \wedge j)) \\ &= \frac{1}{\delta^2} (i'|(k|i|j)i) = \frac{1}{\delta} (i'|i) = \frac{1}{\delta^2} (j \wedge k|i) = \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

ce qui montre l'indépendance de  $(i', j', k')$ . De plus, deux bases supplémentaires sont donc de même orientation puisque  $\delta$  et son inverse ont même signe.

2. Vérifions par exemple que  $i'' = \frac{1}{\delta'} (j' \wedge k') = i$ . Le calcul précédent a justement montré que  $j' \wedge k' = \frac{1}{\delta} i$ ; l'égalité  $\sigma^2 = \text{Id}$  en résulte aussitôt.
3. On trouve immédiatement  $a = (i|a) i' + (j|a) j' + (k|a) k'$ . Une égalité analogue est bien entendu encore valable en échangeant les deux bases.

**Remarque** Le vecteur  $i'$  peut être considéré comme étant égal à  $\gamma^{-1}(i^*)$ , image inverse par l'isomorphisme  $\gamma$  de  $E$  sur son espace dual  $E^*$  défini par  $\gamma(x) : y \mapsto (x|y)$  de la forme linéaire  $i^*$  définie par  $i^*(xi + yj + zk) = x$ . Cette remarque permet d'étendre facilement ce concept de bases supplémentaires à des espaces euclidiens ou même hermitiens (nécessairement de dimension finie).

9. Une figure montre que  $x$  est admis à décrire l'extérieur d'un cône de révolution de sommet  $O$ , d'axe  $\mathbb{R}a$  et de demi-angle au sommet  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . Il est donc géométriquement évident, en ramenant la question à un problème plan que les minorants sont les nombres inférieurs ou égaux à  $\|a\| \cos \varphi$ , le minimum  $\|a\| \cos \varphi$  étant atteint en projetant l'extrémité du vecteur  $-a$  sur ce cône, ce qui donne deux vecteurs  $a + x$  de norme minimale, symétriques par rapport à la droite  $\mathbb{R}a$  (dans un espace de dimension supérieure ou égale à 3 et éventuellement infinie, on obtiendrait un cercle (ou une sphère, une hypersphère etc.) comme ensemble des extrémités de ces vecteurs solutions).

Vérifions cette intuition par un calcul en posant  $\alpha = \|a\| > 0$ ,  $t = \|x\| > 0$  et :

$$\begin{aligned} \delta &= \|a + x\|^2 - \|a\|^2 \cos^2 \varphi = t^2 + 2\alpha t \cos \theta + \alpha^2 \sin^2 \varphi \\ &= (t + \alpha \cos \theta)^2 + \alpha^2 (\sin^2 \varphi - \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Si  $\cos \theta$  est positif ou nul, cette expression est elle-même positive ou nulle comme on le déduit de son avant-dernière forme, et sinon, le cosinus appartenant à  $[-\sin \varphi, 0[$ , l'expression est encore positive ou nulle à cause de sa dernière forme. Il y a égalité pour  $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$  et  $\|x\| = -\alpha \cos \theta = \alpha \sin \varphi$ .

10. Il est géométriquement évident en ramenant la question à un problème plan, que ce maximum est atteint en un point unique situé sur la médiatrice de  $ab$  (ou la droite  $(\mathbb{R}a)^\perp$  si  $a = b$ ) : il suffit d'imaginer l'ensemble des ellipses de foyers  $a$  et  $b$  et de regarder particulièrement celle qui est tangente au cercle unité et le contient dans sa totalité, puisqu'une telle ellipse est justement définie par une égalité de la forme  $\|m - a\| + \|m - b\| = k$ .

Toutefois cette intuition géométrique n'est pas facilement traduisible par un calcul. Voici une solution à ce problème ne faisant pas intervenir de conique et

valable dans l'espace  $E$  de départ : nous poserons  $n = \|a + b\|$ . L'inégalité CBS de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (\|m - a\| + \|m - b\|)^2 &\leq 2 (\|m - a\|^2 + \|m - b\|^2) \\ &= 8 - 4(m|a + b) \\ &= 8 + \frac{2}{n} (n^2 + \|a + b\|^2 - \|nm + (a + b)\|^2) \\ &\leq 8 + \frac{2}{n} (n^2 + \|a + b\|^2) = 8 + 4n \end{aligned}$$

ce majorant  $8 + 4\|a + b\|$  étant atteint pour l'unique point  $m$  tel que :

$$m = -\frac{1}{n} (a + b) = -\frac{1}{\|a + b\|} (a + b).$$

On retrouve bien ainsi ce que l'intuition géométrique rendait si vraisemblable. La valeur maximale de la somme est  $2\sqrt{\|a + b\| + 2}$ .

11. Soit un nombre complexe  $s$  ; on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|u(sx) - \bar{s}u(x)\|^2 &= (u(sx)|u(sx)) + s\bar{s}(u(x)|u(x)) - s(u(x)|u(sx)) - \bar{s}(u(sx)|u(x)) \\ &= (sx|sx) + s\bar{s}(x|x) - s(\bar{x}|sx) - \bar{s}(sx|x) = \|(sx) - sx\|^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que le vecteur  $u(sx) - \bar{s}u(x)$  est nul. Reste à prouver l'additivité, ce qui se fait de manière analogue :

$$\begin{aligned} \|u(x + y) - u(x) - u(y)\|^2 &= (u(x + y)|u(x + y)) + (u(x)|u(x)) + (u(y)|u(y)) \\ &\quad - (u(x + y)|u(x)) - (u(x + y)|u(y)) \\ &\quad - (u(x)|u(x + y)) - (u(y)|u(x + y)) \\ &\quad + (u(x)|u(y)) + (u(y)|u(x)) \\ &= (x + y|x + y) + (x|x) + (y|y) - (x|x + y) - (y|x + y) \\ &\quad - (x + y|x) - (x + y|y) + (y|x) + (x|y) \\ &= \|(x + y) - x - y\|^2. \end{aligned}$$

Ce résultat appliqué à un espace préhilbertien réel montre que les applications conservant le produit scalaire sont linéaires : ce sont les isométries de l'espace (appliqué à un espace affine, ce résultat subsiste si on les compose avec une translation).

12. Nous poserons  $\varphi(X^n) = \lambda_n$ , tel que  $\varphi(P) = \varphi\left(\sum_n p_n X^n\right) = \sum_n \lambda_n p_n$ .

1. S'il existe une infinité de  $\lambda_n$  non nuls, pour tout polynôme  $Q = \sum_m q_m X^m \in H^\perp$  on a  $q_m = 0$  pour tout  $m > M$  et  $\lambda_n \neq 0$  pour au moins un  $n > M$ . Soit  $\psi$  la forme linéaire définie par  $P \mapsto \psi(P) = (Q|P)$ ; si  $P$  appartient à  $H$ , on a  $\psi(P) = (P|Q) = 0$  d'où l'inclusion  $H \subset \text{Ker } \psi$  et l'existence d'un complexe  $\rho$  tel que  $\psi = \rho\varphi$ . Il en résulte que :

$$\rho\lambda_n = \rho\varphi(X^n) = \psi(X^n) = (Q|X^n) = \bar{q}_n = 0$$

puis  $\rho = 0$  et  $\|Q\|^2 = \psi(Q) = \rho\varphi(Q) = 0$ , c'est-à-dire enfin  $H^\perp = \{0\}$ .

2. Sinon il existe un rang tel que  $\lambda_n = 0$  pour tout  $n > N$ . Alors le polynôme  $Q = \sum_n \bar{\lambda}_n X_n$  est non nul puisque  $\varphi$  est non nul, clairement orthogonal à tous les polynômes  $P$  appartenant à  $H$  puisque :

$$(Q|P) = \sum_n \bar{q}_n p_n = \sum_{n=0}^N \lambda_n p_n = \varphi(P) = 0$$

c'est-à-dire enfin  $H^\perp \neq \{0\}$ .

3. Montrons que dans ce cas le rapport  $\frac{|\varphi(P)|}{\|P\|}$  est borné, donc que  $\varphi$  est continue et  $H = \text{Ker } \varphi$  est fermé. Il suffit en effet de remarquer que pour tout polynôme  $P$  non nul :

$$\frac{|\varphi(P)|}{\sqrt{\sum_n |p_n|^2}} = \frac{\left| \sum_{n=0}^N \lambda_n p_n \right|}{\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |p_n|^2}} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^N |\lambda_n|^2}.$$

4. La réciproque est fautive ; ainsi la forme linéaire  $\varphi$  définie par  $\varphi(P) = \int_0^1 P$  est-elle continue, bien que tous les  $\lambda_n = \frac{1}{n+1}$  soient différents de 0 (on notera que ces nombres ne sont toutefois pas arbitraires, puisque définissant une série de carré convergente).

13. 1. Si la dimension inférieure ou égale à un, la fonction  $f$  est presque arbitraire puisqu'elle n'est soumise qu'à la condition  $f(0) = 0$  obtenue en posant  $x = y = 0$ . Nous supposons donc désormais que  $E$  contient au moins un plan.

2. Si  $x$  et  $y$  ont même norme, alors  $x + y$  et  $x - y$  sont orthogonaux, puisque :

$$(x + y|x - y) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0.$$

On en déduit par exemple qu'est alors vérifiée l'égalité :

$$f(2x) = f(x + y) + f(x - y).$$

3. Si  $f$  est paire, l'expression ci-dessus montre que  $f(2x) = f(2y)$  pour tout couple de vecteurs de même norme. On en déduit qu'il existe une fonction  $\varphi$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout vecteur  $x$  de  $E$  :

$$f(x) = \varphi(\|x\|).$$

Si  $(x, y)$  est une famille orthonormée, on dispose donc pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  de nombres réels des égalités :

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 - \alpha^2 \|x\|^2 - \beta^2 \|y\|^2 = 0$$

$$\varphi(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) - \varphi(|\alpha|) - \varphi(|\beta|) = f(\alpha x + \beta y) - f(\alpha x) - f(\beta y) = 0.$$

Posant  $\psi(t) = \varphi(\sqrt{t})$ , il en résulte que  $\psi(\alpha^2 + \beta^2) = \psi(\alpha^2) + \psi(\beta^2)$ , soit  $\psi(\gamma + \delta) = \psi(\gamma) + \psi(\delta)$  pour tout couple  $(\gamma, \delta)$  de réels positifs ou nuls. On a l'égalité  $\psi(n\gamma) = n\psi(\gamma)$  pour tout entier  $n$  par une récurrence immédiate, puis  $\psi(r\gamma) = r\psi(\gamma)$  pour tout rationnel  $r$  positif ou nul.

Puisque  $f$  est continue, il en est de même pour  $\psi$ , et la relation  $\psi(\gamma) = \gamma\psi(1)$  est vérifiée pour tout nombre réel  $\gamma$ . Finalement, on voit qu'il existe un vecteur  $a$  fixé dans  $F$  tel que, pour tout vecteur  $x$  de  $E$  l'on dispose de l'égalité :

$$f(x) = \|x\|^2 a.$$

Inversement, toute fonction de  $E$  dans  $F$  de cette forme est une fonction paire vérifiant la condition donnée.

4. Si  $f$  est impaire, si  $n$  est un entier dans  $\mathbb{Z}$  et si  $x$  et  $y$  sont orthogonaux et de même norme, alors  $nx + y$  et  $x - ny$  sont orthogonaux, puisque :

$$(nx + y|x - ny) = n\|x\|^2 - n\|y\|^2 + (1 - n^2)(x|y) = 0.$$

Il en résulte la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} f((n + 1)x) - f((n - 1)y) &= f((n + 1)x + (1 - n)y) \\ &= f(nx + y) + f(x - ny) \\ &= f(nx) + f(y) + f(x) - f(ny). \end{aligned}$$

En réécrivant cette relation sous la forme :

$$f((n + 1)x) = f(nx) + f(x) + f((n - 1)y) + f(y) - f(ny)$$

on trouve par une récurrence immédiate que  $f(nx) = n f(x)$ . Un argument très voisin de celui de la question précédente conduit à la relation  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$  pour tout réel  $\alpha$  et tout vecteur  $x$  de  $E$  (eventuellement nul).

Munissant un plan de  $E$  d'une base orthonormée  $(i, j)$ , on voit que l'image de  $\alpha i + \beta j$  par  $f$  est donnée par l'égalité :

$$f(\alpha i + \beta j) = f(\alpha i) + f(\beta j) = \alpha f(i) + \beta f(j).$$

La restriction de  $f$  à un tel plan est donc linéaire, et il est immédiat d'en déduire que  $f$  elle-même est linéaire de  $E$  dans  $F$ .

Inversement, toute fonction linéaire de  $E$  dans  $F$  est une fonction impaire vérifiant la condition donnée.

5. Il suffit de remarquer que si  $f$  vérifie la condition donnée, il en est de même de sa partie paire  $x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  et de sa partie impaire  $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ ; il en résulte que  $f$  est la somme d'une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et du produit du carré de la norme de la variable par un vecteur fixé de  $F$ .

14. 1. C'est clair puisque  $\theta$  ne s'annule jamais et est continue. On peut noter que  $J(P) = \langle 1, P \rangle$ .
2. Appliquons ici la méthode bien connue sous le nom d'*orthogonalisation de Gram-Schmidt*; généralement présentée pour une famille finie de vecteurs indépendants, elle reste valable, comme c'est ici le cas, pour une famille dénombrable).

L'existence de  $P_0$  est claire. Supposant connus les  $P_m$  avec  $m < n$ , on peut poser a priori  $P_n = \alpha_n X^n + \sum_{m < n} \lambda_m P_m$  avec  $\alpha_n > 0$ . L'orthogonalité des

$P_m$  pour la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  fait que l'éventuel polynôme  $P_n$  doit vérifier, pour tout  $m < n$ , l'égalité  $0 = J(P_n, P_m) = \alpha_n J(X^n P_m) + \lambda_m$ , ce qui détermine  $\lambda_m$  en fonction de  $\alpha_n$ . Nous disposons donc d'une égalité de la forme  $P_n = \alpha_n \hat{P}_n$ , où  $\hat{P}_n$  n'est pas nul pour des raisons de degré. La dernière égalité  $1 = \langle P_n, P_n \rangle$  donne  $1 = \alpha_n^2 J(\hat{P}_n^2)$  ce qui détermine exactement  $\alpha_n > 0$  puisque  $J(P_n^2) > 0$ , et donc le polynôme  $P_n$ .

3. Dans le cas particulier annoncé, le changement de variable indiqué par l'énoncé et les relations faciles à vérifier :

$$\int_{-1}^{+1} T_n(t) T_m(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \delta_{n,m} \frac{\pi}{2}$$

où  $T_n$  est le polynôme de Tchebitcheff de degré  $n$  défini par  $\cos nu = T_n(\cos u)$  montrent que le polynôme  $P_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n$  convient, sauf pour  $n = 0$ , auquel cas l'intégrale vaut  $\delta_{0,m} \pi$  et où l'on pose donc  $P_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .

**Remarque** On peut déterminer explicitement le polynôme  $T_n$  qui, pour  $n \geq 1$ , vérifie l'égalité :

$$T_n(X) = \sum_{2k \leq n} \frac{(-1)^k n}{n-k} 2^{n-2k-1} C_{n-k}^k X^{n-2k}$$

comme le montre une vérification, un peu pénible, par récurrence.

4. Soit  $Q$  le polynôme de degré  $p$ , éventuellement égal à 1, de la forme

$$Q = \prod_i (X - z_i) \text{ où les } z_i \text{ sont les racines de } P_n \text{ d'ordre impair appartenant à } \overset{\circ}{I}.$$

Sur cet intervalle nous disposons de l'inégalité  $\theta P_n Q \geq 0$ . Si l'on avait  $p < n$ , on disposerait alors de la nullité de  $J(P_n Q)$  et donc de la nullité de  $\theta P_n Q$  en tout point ce qui n'est pas. Donc  $p = n$ , et  $P_n$  se scinde complètement sur  $\overset{\circ}{I}$ .

5. C'est le polynôme dit de Lagrange, défini par l'égalité  $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - z_j}{z_i - z_j}$ .

L'unicité est vérifiée par exemple en considérant le déterminant de Vandermonde associé aux  $z_i$ . Notons l'égalité  $L_i = \frac{1}{P'_n(z_i)} \frac{P_n}{X - z_i}$ .

6. Soit  $P$  de degré au plus  $2n - 1$ . La division euclidienne fournit une égalité de la forme  $P = QP_n + R$ , avec  $R$  de degré strictement inférieur à  $n$ , ce qui implique pour degré de  $Q$  un entier également strictement inférieur à  $n$ , d'où la relation  $J(P) = J(QP_n) + J(R) = J(R)$ . Or  $R(z_i) = P(z_i)$  pour tout indice  $i$ . Posant  $\rho_i = \frac{P(z_i)}{P'_n(z_i)}$ , on dispose de l'égalité  $\frac{R}{P_n} = \sum_i \frac{\rho_i}{X - z_i}$ ,

d'où :

$$J(P) = J(R) = J\left(\sum_i \rho_i \frac{P_n}{X - z_i}\right) = \sum_i \rho_i J(P'_n(z_i)L_i) = \sum_i \lambda_i P(z_i).$$

7. Puisque  $L_i^2$  est de degré au plus  $2n - 2$ , il suffit de remarquer les égalités :

$$J(L_i^2) = \sum_j \lambda_j \delta_{i,j}^2 = \lambda_i.$$

8. Posons  $a_n = \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}$  ; pour tout  $b_n$  le degré de  $R = P_{n+2} - a_n(X - b_n)P_{n+1}$

est inférieur ou égal à  $n + 1$ . On peut choisir  $b_n$  de façon à ce que ce degré soit inférieur ou égal à  $n$ . Alors, pour tout polynôme  $P$  de degré strictement inférieur à  $n$ ,  $J(RP) = J(P_{n+2}P) - a_n J(XP_{n+1}P) + a_n b_n J(P_{n+1}P) = 0$ , ce qui montre qu'il existe un  $c_n$  tel que  $R = c_n P_n$ , ce qu'il fallait démontrer. On peut même vérifier facilement les égalités  $b_n = J(XP_{n+1}^2)$  et

$$c_n = -a_n J(XP_{n+1}P_n) = -\frac{\alpha_n \alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}^2}, \text{ qui déterminent complètement la relation de récurrence.}$$

15. 1. Projetons  $v$  et  $w$  en  $p$  et  $q$  sur le plan  $P$  orthogonal à  $u$  : plus précisément, on a  $p = v - (\cos \gamma) u$  et  $q = w - (\cos \beta) u$ , d'où  $(p|u) = 0$ ,  $\|p\| = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sin \gamma$ ,  $(q|u) = 0$  et  $\|q\| = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sin \beta$ .

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= (v|w) = (p|q) + \cos \gamma \cos \beta \leq \|p\| \|q\| + \cos \gamma \cos \beta \\ &= \cos(\beta - \gamma) = \cos(|\beta - \gamma|). \end{aligned}$$

Il y a même inégalité stricte, car sinon  $p$  et  $q$  seraient liés et les trois vecteurs  $(u, v, w)$  appartiendraient à un même plan. Par suite  $|\beta - \gamma| < \alpha$ .

2. De la même manière, la minoration  $(p|q) \geq -\|p\| \|q\|$  conduit à  $\cos \alpha \geq \cos(\beta + \gamma)$ . Si  $\beta + \gamma$  est supérieur ou égal à  $\pi$  il n'y a rien à prouver ; sinon, on en déduit  $\alpha \leq \beta + \gamma$  et même  $\alpha < \beta + \gamma$ .
3. En tant qu'arc cosinus du produit scalaire de vecteurs deux à deux indépendants, les nombres  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sont strictement positifs, ainsi par conséquent que leur somme.
4. Posons  $v' = -v$  et  $w' = -w$ , d'où  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = \pi - \beta$  et  $\gamma' = \pi - \gamma$  Il en résulte :

$$\alpha = \alpha' < \beta' + \gamma' = \pi - \beta - \gamma.$$

16. 1. On a facilement :

$$T + \left\| \sum_i x_i \right\|^2 = N(N-1) - 2 \sum_{i < j} (x_i | x_j) + N + 2 \sum_{i < j} (x_i | x_j) = N^2$$

et l'inégalité n'est autre que l'application de l'inégalité CBS de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz à la définition de  $S$  combinée à l'inégalité  $T \leq N^2$ .

2. Dans le cas de l'origine, montrons tout d'abord que les  $a_i$  doivent être de plus inférieurs ou égaux à  $\frac{1}{2}$ . En effet :

$$a_i = |a_i| = \|a_i x_i\| = \left\| - \sum_{j \neq i} a_j x_j \right\| \leq \sum_{j \neq i} |a_j| = \sum_{j \neq i} a_j = 1 - a_i.$$

Majorons ensuite la norme de la somme des  $x_i$  :

$$\left\| \sum_i x_i \right\| = \left\| \sum_i (1 - 2a_i) x_i \right\| \leq \sum_i |1 - 2a_i| = \sum_i (1 - 2a_i) = N - 2$$

Passons enfin à la minoration de  $S$ . L'inégalité triangulaire montre que  $\|x_i - x_j\|^2 \leq 2 \|x_i - x_j\|$ , d'où  $M \leq 2$  ainsi que :

$$S = \sum_{i < j} \|x_i - x_j\| \geq \frac{T}{2} \geq \frac{1}{2} \left( N^2 - \left\| \sum_i x_i \right\|^2 \right) \geq \frac{1}{2} \left( N^2 - (N-2)^2 \right) = 2(N-1).$$

L'égalité est vraie si, par exemple,  $x_2 = x_3 = \dots = x_N = -x_1$ , cas dans lequel  $S = 2(N-1)$  et où  $0 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$ .



3. Démontrons d'abord l'inégalité  $S \geq (N - 1) M$  :

$$\begin{aligned} N(N - 1) &\geq \frac{N(N - 1)}{2} M \geq S \geq \|x_1 - x_N\| + \sum_{i=2}^{N-1} [\|x_1 - x_i\| + \|x_i - x_N\|] \\ &\geq \|x_1 - x_N\| + \sum_{i=2}^{N-1} [\|x_1 - x_N\|] = M + (N - 2) M = (N - 1) M \end{aligned}$$

L'inégalité  $M \geq \sqrt{2}$  se prouve par l'absurde.

En effet, le choix  $M = \max_{i < j} \|x_i - x_j\| = \|x_1 - x_N\|$ , qui est sans importance quant au résultat, implique les inégalités  $(x_i | x_j) \geq (x_1 | x_N)$  et l'hypothèse  $M < \sqrt{2}$  impliquerait  $(x_1 | x_N) > 0$ , d'où les relations contradictoires :

$$\begin{aligned} 0 &= \left( x_1 \left| \sum_i a_i x_i \right. \right) = \sum_i a_i (x_1 | x_i) \geq \sum_i a_i (x_1 | x_N) \\ &= \left( \sum_i a_i \right) (x_1 | x_N) = (x_1 | x_N) > 0. \end{aligned}$$

Enfin l'inégalité  $S \leq N(N - 1)$  résulte des majorations  $2 \leq N$  et  $S \leq N \sqrt{\frac{N(N - 1)}{2}}$ .

17. 1. Les réels  $(a, b, c)$  sont respectivement les mesures, inférieures à  $\pi$ , des arcs de grands cercles notés  $[v, w]$ ,  $[w, u]$ ,  $[u, v]$ , c'est-à-dire les longueurs minimales des arcs respectifs joignant ces points sans quitter la sphère de centre 0 contenant  $u, v$  et  $w$  (géodésiques).

Les réels  $(A, B, C)$  sont les mesures des angles dièdres définis par les couples de demi-plans d'arêtes  $u, v, w$ , respectivement définis par  $v$  et  $w, w$  et  $u, u$  et  $v$ .

Si l'on mène dans le plan tangent en  $u$ , à partir du point  $u$  (ou, si l'on préfère, de l'extrémité du vecteur  $u$ ) les deux demi-tangentes aux arcs  $[u, v]$  et  $[u, w]$ , on en déduit aussitôt deux vecteurs unitaires dont l'angle a pour mesure  $A$ .

Il résulte de tout cela que  $(a, b, c)$  et  $(A, B, C)$  jouent en quelque sorte le rôle de mesures des côtés et de mesures des angles du triangle sphérique  $(u, v, w)$ . Si la sphère avait  $\rho$  pour rayon, les angles ne changeraient pas, mais les côtés verraient leurs mesures multipliées par  $\rho$ .

2. Des égalités  $v = (\cos c) u + (\sin c) \hat{v}$  et  $w = (\cos b) u + (\sin b) \hat{w}$  l'on déduit aussitôt la valeur de  $(\sin b)(\sin c) \cos A$  égale à :

$$(v v - (\cos c) u | w - (\cos b) u) = \cos a - 2 \cos c \cos b + \cos c \cos b$$

puis la première formule fondamentale.

3. Les appartenances des six nombres à l'intervalle  $]0, \pi[$  proviennent de la définition d'un arc cosinus et de l'indépendance des trois vecteurs qui forment une base.

Si  $b + c \geq \pi$ , on a bien  $b + c > a$  ; sinon :

$$\cos a - \cos(b + c) = \sin b \sin c (1 + \cos A) \geq 0$$

d'où  $a \leq b + c$  ; en fait l'égalité est impossible puisqu'elle signifierait  $A = \pi$ , la liaison de  $\hat{v}$  et de  $\hat{w}$  et, finalement, la coplanarité du triplet  $(u, v, w)$ .

Changeons  $u$  en  $-u$  ;  $b$  et  $c$  deviennent  $\pi - b$  et  $\pi - c$ . Le résultat précédent donne alors  $a < 2\pi - b - c$ , c'est-à-dire  $a + b + c < 2\pi$ .

4. Les quatre réels  $p, p - a, p - b$  et  $p - c$  appartiennent à  $]0, \pi[$ . Leurs sinus sont strictement positifs. On obtient facilement les valeurs de  $\sin^2 \frac{A}{2}$  et  $\cos^2 \frac{A}{2}$ , de la forme  $\frac{1 \mp \cos A}{2}$  et donc respectivement égales à :

$$\frac{\cos(b - c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} = \frac{\sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin b \sin c} = \frac{\sin(p - b) \sin(p - c)}{\sin b \sin c} \quad \text{et :}$$

$$\frac{\cos a - \cos(b + c)}{2 \sin b \sin c} = \frac{\sin \frac{b+c-a}{2} \sin \frac{b+c+a}{2}}{\sin b \sin c} = \frac{\sin p \sin(p - a)}{\sin b \sin c}.$$

Puisque  $A \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , les égalités cherchées sont bien établies.

5. Démontrons l'égalité indiquée par l'énoncé :

$$\begin{aligned} \sin \frac{B + C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p - a)}{\sin b \sin c}} \left[ \frac{\sqrt{\sin^2(p - c)} + \sqrt{\sin^2(p - b)}}{\sqrt{\sin^2 a}} \right] \\ &= \cos \frac{A}{2} \frac{\sin(p - c) + \sin(p - b)}{\sin a} \\ &= 2 \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin a} \sin \left( p - \frac{b + c}{2} \right) \cos \frac{b - c}{2} \\ &= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \cos \frac{b - c}{2}. \end{aligned}$$

Les autres formules se démontrent de la même manière ; nous n'en expliciterons ici que quatre, les huit autres étant automatiquement données par permutation circulaire :

$$\begin{aligned} \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{a}{2} &= \cos \frac{b - c}{2} \cos \frac{A}{2}, \\ \sin \frac{B - C}{2} \sin \frac{a}{2} &= \sin \frac{b - c}{2} \cos \frac{A}{2}, \\ \cos \frac{B + C}{2} \cos \frac{a}{2} &= \cos \frac{b + c}{2} \sin \frac{A}{2}, \\ \cos \frac{B - C}{2} \sin \frac{a}{2} &= \sin \frac{b - c}{2} \sin \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

6. Les analogies de Neper se déduisent presque trivialement de celles de Delambre ; nous ne donnerons, ici encore, que quatre égalités sur douze sans justification supplémentaire :

$$\begin{aligned} \cos \frac{b+c}{2} \tan \frac{B+C}{2} &= \cos \frac{b-c}{2} \cot \frac{A}{2}, \\ \sin \frac{b+c}{2} \tan \frac{B-C}{2} &= \sin \frac{b-c}{2} \cot \frac{A}{2}, \\ \cos \frac{B+C}{2} \tan \frac{b+c}{2} &= \cos \frac{B-C}{2} \tan \frac{a}{2}, \\ \sin \frac{B+C}{2} \tan \frac{b-c}{2} &= \sin \frac{B-C}{2} \tan \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

La forme même de toutes ces relations, systématiquement multiplicative, les rend propres à des calculs par logarithmes et permet, par exemple, les résolutions des triangles sphériques, c'est-à-dire le calcul de trois des six réels  $(a, b, c, A, B, C)$  à partir des trois autres. L'importance pratique de telles égalités, qu'il s'agisse d'astronomie ou de navigation, est claire, même si les moyens actuels de calcul donnent à ces analogies des couleurs délicieusement désuètes.

7. Notons que  $\delta = (u|U) = (u|v \wedge w) = (u|v|w)$  n'est autre que le produit mixte des trois vecteurs  $(u, v, w)$  et vérifie par conséquent les deux autres égalités  $\delta = (v|V) = (w|W)$ . Notons également que  $\|U\| = \sin a$ .

La formule dite du *double produit vectoriel*  $(x \wedge y) \wedge z = (x|z)y - (y|z)x$  donne aussitôt  $V \wedge W = (w \wedge u) \wedge W = (w|W)u = \delta u$ .

8. On en déduit  $(U|V|W) = (U|V \wedge W) = (U|\delta u) = \delta^2 > 0$ . Il en résulte notamment que  $(U, V, W)$  est une base, en général non normée.

Notons que la base  $(\frac{1}{\delta}U, \frac{1}{\delta}V, \frac{1}{\delta}W)$  de produit mixte  $\frac{1}{\delta}$ , est appelée *base supplémentaire* de  $(u, v, w)$ , à laquelle elle est reliée par d'importantes relations. Le vecteur générique défini par :

$$t = xu + yv + zw = X \left( \frac{1}{\delta}U \right) + Y \left( \frac{1}{\delta}V \right) + Z \left( \frac{1}{\delta}W \right)$$

voit ses coordonnées s'exprimer par des produits scalaires (comme dans le cas de bases orthonormées) puisque par exemple  $x = \left( \frac{1}{\delta}U | t \right)$ ,  $X = (u|t)$  etc.

Ces égalités prouvent de plus que les rôles des deux bases sont symétriques car chacune est la supplémentaire de l'autre (le caractère normé des vecteurs  $u, v$  et  $w$  est ici sans importance).

**Remarque** Il est d'usage en calcul tensoriel d'appeler *coordonnées contravariantes* et *coordonnées covariantes* de  $t$  les triplets respectifs  $(x, y, z)$  et  $(X, Y, Z)$ .

Une variante du même double produit vectoriel donne :

$$\begin{aligned}(V|W) &= (V|u \wedge v) = (V|u|v) = (u|v|V) = (u|v \wedge V) \\ &= (u|v \wedge (w \wedge u)) = (v|u) (u|w) - (v|w) \|u\|^2 \\ &= \cos c \cos b - \cos a = -\sin b \sin c \cos A = -\|V\| \|W\| \cos A\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \pi - A = \text{Arc cos } \frac{(V|W)}{\|V\| \|W\|}.$$

Cette dernière relation montre que  $\pi - A$  est la mesure de l'angle de  $V$  et de  $W$ . On en déduit que  $\delta u = V \wedge W$  a pour norme  $\|V\| \|W\| \sin A$  soit

$$\sin A = \frac{\delta}{\sin b \sin c} > 0 \text{ et enfin :}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{\delta}.$$

9. Des calculs justifiant l'égalité  $(w \wedge u|u \wedge v) = (V|W) = (v|u) (u|w) - (v|w) \|u\|^2$  on tire facilement  $(W \wedge U|U \wedge V) = (V|U) (U|W) - (V|W) \|U\|^2$  qui conduit à :

$$\begin{aligned}\delta^2 \cos a &= \delta^2 (v|w) = (\delta v|\delta w) = \|U\|^2 \|V\| \|W\| (\cos C \cos B + \cos A) \\ &= (\sin^2 a \sin b \sin c) (\cos B \cos C + \cos A) \\ &= \frac{\delta^2}{\sin B \sin C} (\cos B \cos C + \cos A)\end{aligned}$$

et enfin à  $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$ .

10. Si  $B + C \leq \pi$ , on a bien  $B + C < \pi + A$  ; sinon l'appartenance  $(\pi + A, B + C) \in ]\pi, 2\pi]^2$  et la relation :

$$\cos(\pi + A) - \cos(B + C) = \sin B \sin C (1 - \cos a) > 0$$

donnent encore  $\pi + A > B + C$ .

L'inégalité  $2E = (A + B + C - \pi) < 3\pi - \pi = 2\pi$  est claire. Si  $B + C \geq \pi$ , on a bien  $E > 0$  ; sinon l'appartenance  $(\pi - A, B + C) \in ]0, \pi]^2$  et la relation  $\cos(\pi - A) - \cos(B + C) = \sin B \sin C (1 - \cos a) > 0$  donnent  $\pi - A < B + C$  et donc encore  $E > 0$ .

Enfin de  $2(E - A) = B + C - \pi - A$  et  $2(\pi + E - A) = B + C + \pi - A$  résultent aussitôt les inégalités  $0 < A - E < \pi$ .

11. Ici une figure, d'ailleurs extrêmement simple et laissée à l'initiative du lecteur, est indispensable pour suivre les affirmations ci-après :

- Si l'on note  $(u', v', w')$  les vecteurs opposés à  $(u, v, w)$ , un principe d'homogénéité, postulant la proportionnalité de l'aire d'un fuseau sphérique à la mesure de son angle dièdre, laisse prévoir que  $A$  est proportionnel à la somme des aires des triangles sphériques  $(u, v, w)$  et  $(u', v, w)$ , et

même plus précisément que  $A$  est égal à la moitié de la somme de ces deux aires (puisque l'aire d'une demi-sphère, correspondant à un angle dièdre de  $2\pi$ , vaut  $4\pi$ ).

- Le réel  $4E$ , somme des nombres de la forme  $2A$  diminuée de  $2\pi$ , peut donc être considéré comme la somme des aires de six triangles sphériques diminuée de  $2\pi$ , alors que  $2\pi$  est celle des quatre triangles  $(u, v, w)$ ,  $(u, v', w)$ ,  $(u, v', w')$  et  $(u, v, w')$ .

Il en résulte que  $4E$  est égal au double de l'aire  $S$  du triangle  $(u, v, w)$ , ce qui justifie intuitivement la définition  $S = 2E$  de l'énoncé.

(Cette démonstration célèbre est due, semble-t-il, à *Thomas Harriot* en 1603).

12. Les deux premières égalités ne sont autres que celles que nous avons prouvé au 4. à condition d'échanger  $a$  et  $\pi - A$ ,  $b$  et  $\pi - B$ ,  $c$  et  $\pi - C$  ainsi que  $p$  et  $\pi - E$ .

On peut noter que ces changements de variables, qui transforment l'une en l'autre les deux formules fondamentales, redonnent immédiatement les inégalités  $B + C < \pi + A$ ,  $0 < 2E < 2\pi$ ,  $0 < A - E < \pi$ .

De l'égalité :

$$\tan u \tan v = \frac{\cos(u - v) - \cos(u + v)}{\cos(u - v) + \cos(u + v)}$$

et des analogies de Delambre on déduit facilement :

$$\begin{aligned} \tan \frac{p}{2} \tan \frac{p-a}{2} &= \frac{\cos \frac{a}{2} - \cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b+c}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B+C}{2}} \\ &= \frac{\cos \left( E - \frac{B+C}{2} \right) - \cos \frac{B+C}{2}}{\cos \left( E - \frac{B+C}{2} \right) + \cos \frac{B+C}{2}} \\ &= \tan \frac{E}{2} \tan \frac{B+C-E}{2} \\ &= \tan \frac{E}{2} \cot \frac{A-E}{2}, \\ \tan \frac{p-b}{2} \tan \frac{p-c}{2} &= \frac{\cos \frac{b-c}{2} - \cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{b-c}{2} + \cos \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{B+C}{2} - \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B+C}{2} + \cos \frac{A}{2}} \\ &= \frac{\cos \left( E - \frac{A}{2} \right) - \cos \frac{A}{2}}{\cos \left( E - \frac{A}{2} \right) + \cos \frac{A}{2}} = \tan \frac{E}{2} \tan \frac{A-E}{2} \end{aligned}$$

et enfin :

$$\tan \frac{S}{4} = \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\tan \frac{p}{2} \tan \frac{p-a}{2} \tan \frac{p-b}{2} \tan \frac{p-c}{2}}.$$

13. Pour traiter cette question, le tracé à main levée de deux ou trois figures est à peu près indispensable.

- Soit  $A = \frac{\pi}{2}$  ; on en déduit :

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}, \quad \cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$$

d'où  $\tan b = \sin c \tan B = \tan a \cos C$  si de plus  $\cos a$  n'est pas nul (ce qui implique que  $\cos B, \cos C, \cos b$  et  $\cos c$  sont également non nuls).

On dispose évidemment d'égalités analogues échangeant  $b$  et  $c$ .

De  $A = a = \frac{\pi}{2}$ , on déduit facilement des relations de la forme  $B = b = \frac{\pi}{2}$  et  $0 < C = c < \pi$  (à une permutation près).

- Donnons une première application au calcul du rayon  $r$  du cercle inscrit. Comme dans le cas des triangles plans, on commence par montrer que les arcs joignant  $u$  aux points de contact avec le cercle inscrit, évidemment isométriques, ont  $p - a$  pour longueur commune.

Prenons pour  $A$  le point de contact de ce cercle avec l'arc  $[u, v]$ , pour  $C$  le centre du cercle et pour  $B$  le point  $u$  ; l'égalité  $\tan b = \sin c \tan B$  a ici un sens et s'écrit  $\tan r = \sin(p - a) \tan \frac{A}{2}$ . Les formules du 4. donnent

$$\text{alors } \tan r = \sqrt{\frac{\sin(p - a) \sin(p - b) \sin(p - c)}{\sin p}}.$$

- Terminons par une seconde application au calcul du rayon  $R$  du cercle circonscrit.

Comme dans le cas des triangles plans, on commence par montrer que les angles définis en  $v$  et en  $w$  par l'arc  $[v, w]$  et ceux qui joignent ces sommets au centre du cercle circonscrit, évidemment isométriques, ont

$$\frac{B + C - A}{2} = \frac{\pi}{2} - A + E \text{ pour mesure commune.}$$

Prenons pour  $A$  le milieu de l'arc  $[u, v]$ , pour  $B$  le centre du cercle et pour  $C$  le point  $v$  ; l'égalité  $\tan b = \tan a \cos C$  a ici un sens et s'écrit

$$\tan \frac{a}{2} = \tan R \cos \left( \frac{\pi}{2} - A + E \right) = \tan R \sin(A - E).$$

Les formules du 12. donnent :

$$\tan R = \sqrt{\frac{\sin E}{\sin(A - E) \sin(B - E) \sin(C - E)}}.$$

14. Soit  $G$  la matrice de Gram des vecteurs  $(u, v, w)$ , définie par  $G = {}^t\Gamma\Gamma$  où  $\Gamma$  est la matrice de déterminant  $(u|v|w) = \delta$ , du triplet de vecteurs relativement

à une base orthonormée directe. Les éléments de  $G$  sont évidemment les produits scalaires  $\|u\|^2, (u|v), (u|w) \dots$  d'où l'égalité :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \det {}^t\Gamma \det \Gamma = \det G = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c \\ &= (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2 \\ &= [\cos(b - c) - \cos a][\cos a - \cos(b + c)] \\ &= 4 \sin(p - b) \sin(p - c) \sin(p - a) \sin p \end{aligned}$$

et finalement  $\delta = 2\sqrt{\sin p \sin(p - a) \sin(p - b) \sin(p - c)}$ .

Le calcul de  $r$  donné plus haut conduit aussitôt à l'égalité  $\delta = 2 \sin p \tan r$ .

15. • La formule  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$  du début de l'exercice se transforme en l'égalité :

$$\cos \frac{a}{\rho} = \cos \frac{b}{\rho} \cos \frac{c}{\rho} + \sin \frac{b}{\rho} \sin \frac{c}{\rho} \cos A$$

ce qui donne, en multipliant par  $-2\rho^2$  le développement limité à l'ordre 2 en  $\rho^{-1}$ , l'égalité bien connue  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

- La formule  $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$  vue plus haut de manière absolument immédiate, la double égalité traditionnelle  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

- La formule  $E = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\tan \frac{p}{2} \tan \frac{p-a}{2} \tan \frac{p-b}{2} \tan \frac{p-c}{2}}$  vue plus haut prouve que  $E$  tend vers 0 quand  $\rho$  tend vers l'infini, d'où l'égalité fondamentale  $A + B + C = 2\pi$ .

On dispose en outre de l'équivalent  $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  de  $2\rho^2 E$ , égal à l'aire du triangle sphérique, encore notée  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  par abus d'écriture.

- La formule  $\tan \frac{a}{2} = \tan R \cos \left( \frac{\pi}{2} - A + E \right) = \tan R \sin(A - E)$  vue plus haut conduit à l'équivalent  $\frac{a}{2 \sin A}$  de  $R$ .

En résulte la triple égalité  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

- La formule  $\delta = 2\sqrt{\sin p \sin(p - a) \sin(p - b) \sin(p - c)}$  vue plus haut montre que  $\rho^2 \delta$  est équivalent à  $2S$ . L'autre formule  $\delta = 2 \sin p \tan r$

donne  $\rho^2 \delta \sim 2pr$  d'où l'égalité  $S = pr$  et les équivalents  $\frac{abc}{2pr} = \frac{abc}{2S}$  de

$$\rho \frac{\sin \frac{a}{\rho}}{\sin A} = \rho \frac{\sin \frac{a}{\rho} \sin \frac{b}{\rho} \sin \frac{c}{\rho}}{\delta}.$$

En résultent notamment les égalités remarquables  $abc = 4Rpr = 4RS$ .

Il n'est pas difficile de retrouver de manière analogue (par passage à la limite) des relations célèbres telles que  $a = b \cos C + c \cos B$  à partir de  $\sin A = \sin(B - E) \cos(C - E) + \sin(C - E) \cos(B - E)$  ainsi que de nombreuses autres comme  $r = (p - a) \tan \frac{A}{2}$ ,  $2S = bc \sin A$  etc.

On pourra également rechercher des relations portant sur des cercles ex-inscrits au triangle sphérique, et à leurs homologues en géométrie euclidienne plane, encore obtenus par passage à la limite.

## Chapitre 19

1. Ils sont égaux. En effet, on a l'inclusion naturelle  $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$  mais inversement  $u^2(x) = 0$  implique que  $u(x)$  appartient à  $\text{Ker } u = \text{Ker } u^*$ , puis que :

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|u^* \circ u(x)) = (x|0) = 0.$$

2. 1. Il est facile de vérifier que  $p^*$  est également un projecteur de  $E$ . On a clairement  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } p^* \subset \text{Ker } (p + p^*)$ . Inversement, si  $p^*(x) = -p(x)$ , on a :

$$0 = p^2(x) + p \circ p^*(x) = p(x) + p \circ p^*(x)$$

et :

$$0 = p^* \circ p(x) + (p^*)^2(x) = p^* \circ p(x) + p^*(x).$$

En additionnant, il vient  $p \circ p^*(x) + p^* \circ p(x) = 0$ , puis en multipliant scalairement à droite par  $x$  :

$$0 = (p \circ p^*(x)|x) + (p^* \circ p(x)|x) = \|p^*(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$$

d'où  $p^*(x) = p(x) = 0$ . Par suite  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } p^* = \text{Ker } (p + p^*)$ .

2. Puisque nous sommes en dimension finie, l'inversibilité de  $p + p^*$  équivaut donc au fait que les noyaux de  $p$  et  $p^*$  ont une intersection réduite à  $\{0\}$ , ou encore au fait que  $E$  est l'orthogonal de cette intersection, donc la somme de leurs orthogonaux. Or  $(\text{Ker } p)^\perp$  n'est autre que l'image de  $p^*$  et inversement en échangeant  $p$  et  $p^*$  ce qui est loisible puisque  $p^{**} = p$ .



3. Ce sont les orthogonaux des droites de  $E$  stables par  $u$  c'est-à-dire des droites propres de  $u$ .

Soit en effet un vecteur propre  $a$ , tel que  $u(a) = sa$ , et  $H$  l'hyperplan orthogonal à la droite  $\mathbb{C}a$  ; on a  $u^*(H) \subset H$ , puisque  $x \in H$  implique :

$$0 = s(a|x) = (sa|x) = (u(a)|x) = (a|u^*(x))$$

et donc  $u^*(x) \in H$ .

Inversement, si  $H$  est stable par  $u^*$ , si  $a$  est un vecteur non nul dont  $H$  contient les orthogonaux, si  $b = u(a)$ , alors pour tout  $x \in H$  :

$$0 = (a|u^*(x)) = (u(a)|x) = (b|x)$$

d'où l'appartenance de  $b$  à l'orthogonal de  $H$ , donc au biorthogonal de  $\mathbb{C}a$  justement égal à  $\mathbb{C}a$ . C'est donc qu'il existe un  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $u(a) = b = sa$ .

**Remarque** La proposition où l'on échange les rôles de  $u$  et de  $u^*$  est également vraie, puisque  $u = u^{**}$ .

4. Il est immédiat de vérifier que  $u$  est autoadjoint, et il est donc bien diagonalisable. Son image est incluse dans le plan  $P$  engendré par  $a$  et  $b$ . Son noyau est l'intersection des orthogonaux des droites  $\mathbb{R}a$  et  $\mathbb{R}b$  c'est-à-dire l'orthogonal de  $P$  ; à cause des dimensions, on voit donc que son image est exactement  $P$ .

Nous construirons donc une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_{n-2})$  de l'orthogonal de  $P$ , complétée par  $a$  et  $b$  ce qui donne une base  $B$  (non nécessairement orthonormée !) de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \|a\|^2 & \alpha (a|b) \\ 0 & \beta (b|a) & \beta \|b\|^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M$  est diagonalisable, puisque c'est la matrice de la restriction à un plan d'un endomorphisme autoadjoint (elle n'est pas symétrique, parce qu'il n'y a aucune raison que  $a$  et  $b$  forment une famille orthonormée) Il ne reste plus qu'à remplacer dans  $B$  le couple  $(a, b)$  par une base orthonormée  $(e_{n-1}, e_n)$  de  $P$  pour obtenir la diagonalisation complète de  $u$ . Les éléments diagonaux sont nuls en ce qui concerne les  $n - 2$  premiers, et égaux aux valeurs propres (réelles) de  $M$  pour les deux derniers.

5. Soit  $r$  le rang de  $u$ , c'est-à-dire la dimension de l'image de  $u$  et donc la codimension de son noyau. L'égalité  $u^2 = 0$  implique l'inclusion  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ , et par conséquent l'inégalité  $n \geq 2r$ . Prenons une base orthonormée du noyau,

complétée par une base orthonormée de son orthogonal pour obtenir une base orthonormée  $B$  de  $E$  ; dans cette base,  $u$  a pour matrice :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $A \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$  est de rang  $r$ , et a donc au moins autant de lignes que de colonnes. On a aussi :

$$\text{Mat}_B(u + u^*) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible si et seulement si son carré est inversible. Or on a facilement :

$$\text{Mat}_B^2(u + u^*) = \begin{pmatrix} A^tA & 0 \\ 0 & {}^tAA \end{pmatrix}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que chacune des deux matrices  $A^tA$  et  ${}^tAA$  le soient. Cela implique que  $A$  soit carrée d'ordre  $r$ , c'est-à-dire que  $n = 2r$  et finalement l'égalité de l'image et du noyau. Cette condition est suffisante, car alors  $A$  est inversible, ce qui implique bien l'inversibilité de  $A^tA$  et  ${}^tAA$ .

6. L'application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\langle x, y \rangle = (u(x)|u(y))$  est la forme polaire d'une forme quadratique  $q$  ; toute base de diagonalisation de la matrice de  $q$  — et il en existe — convient.
7. Rappelons la notation  $A^*$  pour l'adjointe d'une matrice  $A$ , à savoir sa transconjugée  ${}^t\bar{A}$ .
1. Si  $A = (a_{i,j})$  est la matrice de  $u$  dans une base orthonormée et si  $B$  est celle de  $v$ , on a :

$$\langle u, v \rangle = \text{tr}(A^*B) = \text{tr}(BA^*) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Ce produit est linéaire à droite et semi-linéaire à gauche, et possède la symétrie hermitienne puisque :

$$\overline{\langle v, u \rangle} = \text{tr}(\overline{B^*A}) = \text{tr}({}^tB\bar{A}) = \text{tr}({}^t({}^tB\bar{A})) = \text{tr}(A^*B) = \langle u, v \rangle.$$

Enfin  $\langle u, u \rangle = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 \geq 0$ , avec égalité si, et seulement si,  $A = 0$  c'est-à-dire  $u = 0$ .

**Remarque** La norme  $N(A) = \sqrt{\text{tr}(A^*A)}$  est la norme hermitienne canonique de l'espace hermitien  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  identifié à  $\mathbb{C}^{n^2}$  grâce à sa base canonique.

2. Posons  $L_i^2 = \sum_j |a_{i,j}|^2$ ,  $\Gamma_j^2 = \sum_i |b_{i,j}|^2$  et  $C = AB$ , avec  $c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$ . L'inégalité CBS de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz implique  $|c_{i,j}|^2 \leq L_i^2 \Gamma_j^2$ , d'où :

$$N^2(u \circ v) = \sum_{i,j} |c_{i,j}|^2 \leq \sum_{i,j} L_i^2 \Gamma_j^2 = \left( \sum_i L_i^2 \right) \left( \sum_j \Gamma_j^2 \right) = N^2(u) N^2(v).$$

Il n'y a pas toujours égalité, comme le montre le cas  $u = v = \text{Id}$  pour lequel l'inégalité s'écrit  $n \leq n^2$ , ou celui du produit nul de deux matrices non nulles.

3. Soit  $P$  la matrice (unitaire) de  $p$  dans une base orthonormée, telle que  $P^*P = I$ . On a :

$$\begin{aligned} N^2(P^{-1}AP) &= \text{tr}((P^{-1}AP)^*(P^{-1}AP)) = \text{tr}(P^{-1}A^*PP^{-1}AP) \\ &= \text{tr}(P^{-1}A^*AP) = \text{tr}(A^*A) = N^2(A) \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété.

**Remarque**

- On peut aussi démontrer de la même manière les égalités plus simples  $N(u \circ p) = N(u) = N(p \circ u)$  ce qui conduit naturellement au résultat cherché puisque  $p^{-1}$  est également unitaire.
  - Il existe d'ailleurs une preuve purement géométrique de ce fait : les deux endomorphismes  $u$  et  $p^{-1} \circ u \circ p$  ont la même matrice  $A$  dans deux bases orthonormées *a priori* différentes, ce qui prouve que leur norme, qui ne dépend que de  $A$ , est la même.
4. Si l'on choisit  $P$  unitaire telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale, on trouve que la somme des carrés des modules des  $a_{i,j}$ , égale à la trace de  $A^*A$  et donc au carré de la norme de  $A$ , est aussi égale à la trace de  $D^2$  et donc à la somme des carrés des valeurs propres de  $A$  :

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = \sum_{s \in S(A)} \alpha(s) |s|^2$$

où  $S(A)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $A$  et  $\alpha(s)$  la multiplicité de la valeur propre  $s$ .

5. Si cela était exact, on aurait  $N(\text{Id}) = 1$  et non  $n$ .

**Remarque** Ce produit et cette norme s'étendent sans difficultés au cas euclidien, avec par exemple  $\langle u, v \rangle = \text{tr} {}^tAB$ .

8. Une telle matrice représentant dans une base orthonormée  $(e_i)$  une isométrie  $u$  d'un espace euclidien de dimension  $n$ , ses colonnes sont formées des coordonnées dans cette base des images des  $(e_i)$ , formant elles-mêmes une base orthonormée  $(f_i)$ . Soit  $e = \sum_{i=1}^n e_i$  ; on dispose alors des relations :

$$\|u(e)\| = \|f\| = \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\| = \sqrt{n} = \|e\|.$$

Or la somme  $\sum_{i,j} a_{i,j}$  n'est autre que le produit scalaire :

$$(e|f) = \sum_{i,j} (e_i|f_j) = \sum_{i,j} (e_i|u(e_j)).$$

L'inégalité CBS de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz implique alors les relations :

$$\left| \sum_{i,j} a_{i,j} \right| = |(e|f)| \leq \|e\| \|f\| = n.$$

L'égalité a lieu si, et seulement si,  $e$  est vecteur propre de  $u$  donc tel que  $u(e) = \varepsilon e$  avec  $\varepsilon^2 = 1$ , donc si et seulement si la somme de chaque ligne de  $A$  est égale à ce  $\varepsilon$ , et en particulier pour  $I_n$ .

9. Munissons l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , canoniquement associé à  $\mathbb{R}^{n^2}$ , du produit scalaire euclidien  $\langle X, Y \rangle = \text{tr } {}^tXY = \sum_{i,j} x_{i,j}y_{i,j}$ . À la matrice  $A$ , on peut associer la matrice  $B = (b_{i,j})$  définie par :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i,j} > 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors l'inégalité CBS de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz implique les relations :

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}| = \sum_{i,j} a_{i,j}b_{i,j} = \langle A, B \rangle \leq \|A\| \|B\| = \sqrt{n}\sqrt{n^2} = n\sqrt{n}.$$

L'égalité a lieu si, et seulement si,  $A$  et  $B$  sont positivement proportionnelles, c'est-à-dire si, et seulement si, la matrice  $A$  est de la forme  $\lambda B$  avec  $\lambda > 0$ , c'est-à-dire si, et seulement si, chaque  $a_{i,j}$  est égal à  $-\lambda$  ou  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$  et si la distribution des signes est telle que  $A$  vérifie l'orthogonalité de ses colonnes prises deux à deux.

Ce n'est pas toujours possible, par exemple si  $n = 3$ , mais peut néanmoins se produire, par exemple pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  ou  $n = 4$  :

$$A = (1), \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Il existe un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$  et une base orthonormée  $B$  de cet espace. Si  $P$  est l'inverse de la matrice de passage de la base  $B$  à une base dans laquelle  $A$  est diagonalisée en la matrice unité  $I$ , on voit que  $A = {}^tPIP = {}^tPP$ . Il est clair que  $P$  est inversible

Montrons que, pour toute matrice orthogonale  $U$ , on a  $\text{tr}(AU) \leq \text{tr} A$ , avec égalité si, et seulement si,  $U = I$ . Nous nous servons ici du produit scalaire sur l'algèbre des matrices réelles d'ordre  $n$  défini par

$$\langle M, N \rangle = \text{tr}({}^tMN) = \sum_{i,j} m_{i,j}n_{i,j}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(AU) &= \text{tr}({}^tPPU) = \langle P, PU \rangle \leq \sqrt{\text{tr}{}^tPP} \sqrt{\text{tr}{}^tU{}^tPPU} \\ &= \sqrt{\text{tr} A} \sqrt{\text{tr}{}^tUAU} = \text{tr} A \end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si,  $PU$  et  $P$  sont positivement proportionnelles : comme  $P$  est inversible et  $U$  orthogonale, on trouve bien  $U = I$ .

Or  $\sum_i a_{i,i}$  est la trace de  $A$ , et  $\sum_i a_{i,\sigma(i)}$  est celle du produit  $AU$  où  $U$  est la matrice associée à la permutation  $\sigma$  de terme général  $u_{i,j} = \delta_{j,\sigma(i)}$ . Comme  $U$  est visiblement orthogonale, on a bien l'inégalité demandée, avec égalité si, et seulement si  $U = I$  c'est-à-dire  $\sigma = \text{Id}$ .

11. Notons  $e = \sum_i e_i$  et  $C$  la matrice colonne de ses coordonnées. On a aussitôt  $\sum_{i,j} a_{i,j} = {}^tCAC = \sum_j s_j |x_j|^2$  où les  $x_j$  sont les coordonnées de  $e$  dans une base orthonormée  $(f_j)$  dans laquelle l'endomorphisme normal  $u$  se diagonalise. On a aussitôt :

$$\sum_{i,j} a_{i,j} \leq \rho \sum_j |x_j|^2 = \rho \|e\|^2 = n\rho.$$

Il y a égalité si  $u$  est l'endomorphisme identique, mais ce n'est pas vrai pour tout  $u$  (considérer par exemple la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$  pour laquelle  $\rho = 2$ ). Une condition nécessaire et suffisante est en effet que toutes les valeurs propres  $s_j$  associées à des indices  $j$  pour lesquels  $x_j = (e|f_j) \neq 0$  soient égales à  $\rho$ .

**Remarque** On peut démontrer que  $\rho$  est à la fois le maximum de  $|(u(x)|x)|$  et celui de  $\|u(x)\|$  lorsque  $x$  décrit la sphère unité de l'espace

- 12 Pour la structure euclidienne de l'espace engendré par le produit scalaire  $p$ , le produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$  est associé à un endomorphisme autoadjoint  $u$  défini par  $(x|y) = p(x|u(y))$ . La famille  $(a_i)$  étant orthogonale et formée de vecteurs non nuls est libre, c'est une base orthogonale de l'espace dans laquelle on dispose d'égalités de la forme :

$$u(a_i) = \sum_j \alpha_{i,j} a_j$$

avec par exemple :  $\alpha_{i,i} = \alpha_{i,i} q(a_i) = p(u(a_i)|a_i) = (a_i|a_i) = \|a_i\|^2$ . Il en résulte que la somme  $\sum_i \|a_i\|^2$  est égale à la trace de la matrice de  $u$  dans la base  $(a_i)$  qui n'est autre que  $(\alpha_{i,j})$ , trace qui est bien indépendante de  $a$ .

**Remarque** Cette démonstration revient en fait à vérifier qu'en échangeant les rôles des deux produits scalaires ce théorème d'Apollonius traduit simplement que la somme  $\sum_i q(a_i)$  est constante sur chaque base orthonormée puisqu'elle est égale à la trace de  $q$ .

13. La famille  $(a_i)$  étant orthogonale et formée de vecteurs non nuls est libre. Définissons une base orthonormée par les relations  $(e_i) = \left( \frac{1}{\|a_i\|} a_i \right)$ . On en déduit aussitôt :

$$1 = q(a_i) = q(\|a_i\| e_i) = \|a_i\|^2 q(e_i).$$

Il en résulte que la somme  $\sum_i \frac{1}{\|a_i\|^2}$  est égale à la trace de la matrice de  $q$  dans la base  $(e_i)$ , trace qui est bien indépendante de  $a$ .

- 14 Les séries définissant  $q$  et sa forme polaire :

$$p(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( P(n)Q(-n) + P(-n)Q(n) \right) e^{-n}$$

convergent par la règle de comparaison de d'Alembert.

Soit  $m \geq 1$  et notons  $h$  la partie entière de  $\frac{m-1}{2}$  et  $k$  celle de  $\frac{m}{2}$ . On voit que  $E = F \oplus G$  où  $F = \text{Vect}(1, X^2, X^4, \dots, X^{2k})$  et  $G = \text{Vect}(X, X^3, \dots, X^{2h+1})$ . De plus, cette somme directe est orthogonale par rapport à la forme  $q$  puisque  $p(X^{2a}, X^{2a+1}) = 0$ . Les restrictions de  $q$  à  $F$  et  $G$  sont respectivement définies positives et définies négatives. Il en résulte que la signature de  $q$  est  $(k+1, h+1, 0)$ . La forme quadratique  $q$  ne peut être définie positive que si  $m = 0$ , cas pour lequel  $q$  associe à une constante  $\lambda$  arbitraire le nombre  $\frac{\lambda^2 e}{e-1}$ .

15. ((i) et (ii))  $\implies$  (iii). On a en effet :

$$4 \ (x|u(x)) = \|x + u(x)\|^2 - \|u(x) - x\|^2 = \|x + u(x)\|^2 - \|u(x) + u^2(x)\|^2 = 0.$$

Avant de traiter la suite, remarquons que (iii) équivaut à l'égalité  ${}^t u = -u$  ( $u$  est un endomorphisme antisymétrique). Si en effet  ${}^t u = -u$ , on en déduit que pour tout vecteur  $x$  :

$$2(x|u(x)) = (x|u(x)) + (u^*(x)|x) = ((u + u^*)(x)|x) = 0$$

Inversement, pour tout  $(x, y)$  :

$$\begin{aligned} ((u + u^*)(x)|y) &= (u(x)|y) + (u^*(x)|y) = (y|u(x)) + (x|u(y)) \\ &= (y + x|u(y + x)) - (y|u(y)) - (x|u(x)) = 0. \end{aligned}$$

((iii) et (i))  $\implies$  (ii). Il est en effet alors immédiat de noter que  ${}^t u = -u$  et  $u^* = u^{-1}$  impliquent  $u^2 = -u^* \circ u = -\text{Id}$ .

((ii) et (iii))  $\implies$  (i). Ici encore  ${}^t u = -u$  et  $u^2 = -\text{Id}$  impliquent aussitôt  $u^* \circ u = -u^2 = \text{Id}$ .

16. 1. Si  $u$  est autoadjoint, on voit que  $(x|u(x))$  est le conjugué de  $(u(x)|x)$  donc de  $(x|u^*(x)) = (x|u(x))$ .

Supposons réciproquement que  $(x|u(x)) = (u(x)|x)$  pour tout  $x$ . Pour tout vecteur  $y$  et tout nombre complexe  $\omega$ , on a donc :

$$(x + \omega y|u(x) + \omega u(y)) = (u(x) + \omega u(y)|x + \omega y)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{\omega} (y|u(x)) + \omega (x|u(y)) &= \omega (u(x)|y) + \bar{\omega} (u(y)|x), \\ \bar{\omega} (y|u(x)) - \omega (u(x)|y) &= \bar{\omega} (u(y)|x) - \omega (x|u(y)). \end{aligned}$$

Les nombres  $\bar{\omega} (y|u(x))$  et  $\bar{\omega} (u(y)|x)$  ont donc même partie imaginaire. Il suffit maintenant de spécialiser  $\omega$  en 1 et en  $i$  pour en déduire que, pour tout couple  $(x, y)$ , on a  $(y|u(x)) = (u(y)|x)$ , c'est-à-dire  $u^* = u$ .

2. L'une des implications est évidente. Inversement, pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  et tout nombre complexe  $\omega$ , on a donc  $0 = (x + \omega y|u(x) + \omega u(y))$ , soit :

$$\bar{\omega} (y|u(x)) = \omega (x|u(y)).$$

Il suffit maintenant de spécialiser encore  $\omega$  en 1 et en  $i$  pour en déduire que, pour tout couple  $(x, y)$ , on a  $(x|u(y)) = 0$ . Si l'on pose enfin  $x = u(y)$  il vient, pour tout vecteur  $y$ ,  $\|u(y)\|^2 = 0$ , c'est-à-dire  $u(y) = 0$  et enfin  $u = 0$ .

3. Il est clair qu'il n'en est rien, puisque tout endomorphisme  $u$  vérifie la première propriété, et que la rotation plane d'angle  $\frac{\pi}{2}$  vérifie la seconde.

17. Si le vecteur  $z$  décrit  $E$  et si  $u$  est un endomorphisme arbitraire, on a aussitôt :

$$(u(x) \wedge u(y) | u(z)) = (u(x), u(y), u(z)) = (\det u)(x, y, z) = (\det u)(x \wedge y | z)$$

soit encore, pour tout  $z$  :

$$(u^*(u(x) \wedge u(y)) | z) = (\det u)(x \wedge y | z)$$

c'est-à-dire  $u^*(u(x) \wedge u(y)) = (\det u)(x \wedge y)$ . Or il est facile de voir que tout vecteur  $a$ , nul ou non, peut s'écrire sous la forme  $a = x \wedge y$  (on peut choisir par exemple  $x$  et  $y$  orthogonaux entre eux et à  $a$ ). L'égalité cherchée s'écrivant  $u^* \circ u(x \wedge y) = (\det u)(x \wedge y)$ , il en résulte l'égalité plus simple  $u^* \circ u = \delta \text{Id}$  où  $\delta = \det u$ . On en déduit l'égalité  $\delta^2 = \delta^3$ , et soit  $\delta = 0$ , ce qui implique  $\text{tr}(u^* \circ u) = 0$  puis  $u = 0$ , soit  $\delta = 1$ , ce qui implique que  $u$  est une isométrie directe (ou rotation). La réciproque est évidente.

18. Le caractère vectoriel de  $U$  est élémentaire. Rappelons que tout endomorphisme  $u$  peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$u = \frac{1}{2}(u + u^*) + \frac{1}{2}(u - u^*) = v + w$$

où  $v^* = v$  et  $w^* = -w$ . Il en résulte une décomposition en somme directe de la forme  $U = V \oplus W$  où  $V$  est l'espace des endomorphismes symétriques (autoadjoints) annihilant chaque  $x_i$ , et  $W$  l'espace de tous les endomorphismes antisymétriques (chacun d'eux est visiblement élément de  $U$ ). On sait que la dimension de  $W$  est  $\frac{n(n-1)}{2}$ ; reste à calculer celle de  $V$ . Considérons une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_r)$  de l'espace Vect  $(x_1, \dots, x_p)$ , où  $r$  est le rang de la famille ; on peut la compléter en une base orthonormée  $B = (e_k)$  de  $E$  tout entier. Pour qu'un endomorphisme symétrique  $v$  de  $E$  s'annule sur tout vecteur  $x_i$ , il faut et il suffit que sa matrice dans  $B$  soit de la forme :

$$\text{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

où  $S$  est une matrice symétrique arbitraire. Il en résulte que la dimension de  $V$  est  $\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}$ , d'où  $\dim U = n^2 - nr + \frac{r(r-1)}{2}$ .

19. Soient  $R$  la matrice de la rotation  $u$  et  $M$  la matrice inversible dont les colonnes sont respectivement formées des coordonnées de  $a$ ,  $b$  et  $c$  relatives à une base orthonormée fixée de l'espace. Les images  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  de  $a$ ,  $b$  et  $c$  par  $u$  sont des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  des trois vecteurs de base. Il existe donc une matrice  $N$  à coefficients entiers telle que  $RM = MN$ , d'où  $N = M^{-1}RM$ . Les matrices  $R$  et  $N$  ont même polynôme caractéristique, qui est à coefficients entiers à cause de  $N$ . Or on sait que la trace de  $R$  calculée



dans une base orthonormée  $(i, j, k)$  telle que la droite  $\mathbb{R}k$  soit invariante dans la rotation  $u$ , est égale à  $1 + 2 \cos \theta$ . Ce cosinus ne peut donc prendre que les valeurs  $0, \pm 1$  et  $\pm \frac{1}{2}$ .

Le nombre  $\theta$ , par principe compris entre  $0$  et  $\pi$ , ne peut donc prendre que les cinq valeurs  $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$  et  $\pi$ . Un schéma dessiné dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation montre que ces cinq rotations conviennent effectivement car préservent la projection du réseau  $L$  formé de triangles équilatéraux contigus.

**20.** Posons  $\mu = \lambda \|a\|^2$ . L'application  $x \mapsto \frac{(a|x)}{(a|a)} a$  n'étant autre que la projection orthogonale  $p$  sur la droite  $\mathbb{R}a$ , on voit que  $u = \text{id} + \mu p$ . Sa restriction à l'hyperplan orthogonal à  $a$  est l'identité. Sa restriction à  $\mathbb{R}a$  est l'homothétie de rapport  $1 + \mu$ . L'endomorphisme  $u$  est donc une isométrie si, et seulement si,  $|1 + \mu| = 1$ , positive si  $\mu = 0$ , cas à écarter puisqu'alors  $u = \text{Id}$ , et négative si  $\mu = -2$ . Dans ce dernier cas, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $(\mathbb{R}a)^\perp$ .

**21** C'est  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . En effet la trace d'un retournement, rotation d'angle  $\pi$ , doit être égale à  $1 + 2 \cos \theta = -1$  ce qui donne la condition nécessaire. Inversement, cette matrice peut alors se mettre sous la forme :

$$M = -I + 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ( a \quad b \quad c )$$

et il est facile de reconnaître sur les colonnes de ce dernier produit matriciel la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire de coordonnées  $(a, b, c)$ .

**22.** Soit  $F$  l'image de  $v$  et  $\mathbb{R}a = \text{Ker } v$  ; le vecteur  $a$  n'appartient pas à  $(\text{Ker } v^*)^\perp = (F^\perp)^\perp = F$ . Par suite, l'intersection de l'image et du noyau de  $v$  est réduite à  $\{0\}$ . Comme la somme de leurs dimensions est la dimension de l'espace, ils sont supplémentaires. Dans une base adaptée à cette décomposition, on voit que le polynôme caractéristique de  $v$  est le produit des polynômes caractéristiques des restrictions  $v_I$  et  $v_K$  de  $v$  associées à cette décomposition. L'intersection nulle des deux sous-espaces impliquant l'injectivité de  $v_I$ , il en résulte que l'ordre de multiplicité de la racine  $0$  du polynôme caractéristique de  $v$  est égal à la dimension du noyau, c'est-à-dire  $1$ . Il en est donc de même de l'ordre de multiplicité de la racine  $s$  du polynôme caractéristique de  $u$ .

23. 1. C'est immédiat puisque :

$${}^tX({}^tA + A)X = {}^tXAX + {}^tX^tAX = 2{}^tXAX > 0$$

pour  $X \neq 0$ . Il en résulte évidemment que  $A$  est inversible, donc de rang  $n$ , puisque sinon il existerait une colonne non nulle  $X$  telle que  $AX = 0$  d'où  ${}^tXAX = 0$ .

2 Identifions ici matrices colonnes et vecteurs Soit  $X = X' + iX''$  un vecteur propre complexe décomposé en ses parties réelle et imaginaire, relatif à une valeur propre  $\lambda$  de  $SA$  : on a  $SAX = \lambda X$ . Posons  $Y = AX$  : puisque  $A$  et  $S$  sont inversibles, on a  $\lambda \neq 0$ , et l'égalité  $SY = \lambda X$  montre que  $Y \neq 0$ . Il en résulte que :

$$0 < \rho = {}^t\bar{Y}SY = {}^t\bar{X}^tASAX = \lambda^t\bar{X}^tAX$$

puisque  $A$  est réelle et égale à sa conjuguée  $\bar{A}$ . Un calcul immédiat montre que :

$$\frac{\rho}{\lambda} = {}^t\bar{X}^tAX = ({}^tX' - i{}^tX'')^tA(X' + iX'') = {}^tX'AX' + {}^tX''AX'' + ki$$

où  $k$  est un réel. Il en résulte que la partie réelle de  $\frac{\rho}{\lambda}$  est négative ou nulle, et même plus précisément strictement négative car l'une au moins des deux colonnes  $X'$  et  $X''$  n'est pas nulle. Comme  $\rho$  est strictement positif, on voit que la partie réelle de  $\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2} = \frac{1}{\lambda}$  est strictement négative, et donc que la partie réelle de  $\lambda$  est également strictement négative. On agirait de même avec les valeurs propres de la matrice  $AS$ .

24. Soit  $(e_i)$  une base orthonormée d'un espace hermitien dans laquelle  $H$  est la matrice d'une forme quadratique à symétrie hermitienne  $h$ . Il est clair que l'application de  $E^2$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = (x|h(y)) = (h(x)|y)$  est une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne définie positive, donc un produit scalaire hermitien, pour lequel  $E$  est muni de la norme  $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{(x|h(x))}$ .

L'inégalité CBS de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz montre que pour tous  $x$  et  $y$  :

$$|(x|h(y))|^2 = |\langle x, y \rangle|^2 \leq N^2(x)N^2(y).$$

Spécialisons cette inégalité au cas  $y = h(x)$  : il vient  $(x|h(y)) = (x|h^2(x)) = \|h(x)\|^2$ ,  $N^2(x) = (x|h(x))$  et :

$$N^2(y) = (y|h(y)) = (h(x)|h^2(x)) = (x|h^3(x)),$$

ce qui prouve l'inégalité cherchée.

On sait que dans l'inégalité CBS il y a égalité si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont liés, donc si, et seulement si  $X$  est une colonne propre de  $H$ , cas prévisible au simple examen de l'énoncé.

25. Nous allons considérer les matrices hermitiennes  $A, B$  et  $C$  représentant respectivement les endomorphismes  $u, v$  et  $w$  dans une base orthonormée. On sait qu’il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = P^*P = {}^t\bar{P}P$  (il suffit de prendre l’inverse de la matrice de passage transformant  $B$  en  $I$ ). On peut alors écrire :

$$A = B + C = P^*P + C = P^*(I + H)P$$

où  $H = P^{*-1}CP^{-1}$  est, comme  $C$ , une matrice hermitienne positive. Ses valeurs propres sont donc réelles et positives ou nulles, ce qui montre que les valeurs propres de  $I + S$  sont supérieures ou égales à 1. Il en résulte que le déterminant de  $I + H$  est supérieur ou égal à 1, d’où :

$$\begin{aligned} \det u = \det A &= \det (P^*(I + H)P) \geq (\det P^*)(\det P) = \det (P^*P) \\ &= \det B = \det v \end{aligned}$$

Pour que l’inégalité soit stricte, il faut et il suffit que  $H$  ait au moins une valeur propre non nulle, donc que  $H \neq 0$  puis que  $C \neq 0$  et enfin  $w \neq 0$ .

**Remarque** Si  $v$  est seulement positive, on peut considérer l’endomorphisme  $v' = v + \varepsilon \text{Id}$ , où  $\varepsilon > 0$ . Cet endomorphisme étant cette fois-ci défini positif, on peut lui appliquer le résultat précédent, c’est-à-dire  $\det (v' + w) \geq \det v'$ . Il suffit maintenant de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 pour en déduire l’inégalité plus générale  $\det (v + w) \geq \det v$ .

26. Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, par choix d’une base orthonormée fixée une fois pour toutes, nous identifierons un tel endomorphisme  $u$  à une matrice hermitienne  $A$ , et munirons l’ensemble de ces matrices de la norme  $\|A\| = n \max |a_{i,j}|$ . À la matrice  $A$  nous associerons l’application qui, à toute matrice colonne  $X$  vérifiant  ${}^t\bar{X}X = 1$ , associe  $\alpha(X) = {}^t\bar{X}AX = \sum_{i,j} a_{i,j} \bar{x}_i x_j$ . Il est clair par l’inégalité CBS que  $|\alpha(X)| \leq \|A\|$ . Dans une base de diagonalisation de la forme hermitienne  $\alpha$  où l’on note  $(x_i)$  la famille des coordonnées de  $X$ , on a :

$$\alpha(X) = \sum_{i=1}^n s_i |x_i|^2 \geq f(A) \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = f(A) = f(u).$$

Donc  $f(u)$  n’est autre que le minimum de  $\alpha$  sur la sphère unité de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  puisque ce minorant est visiblement atteint.

Soient maintenant deux endomorphismes autoadjoints  $u$  et  $u'$ , et  $A$  et  $A'$  leurs matrices associées telles que  $\|A' - A\| \leq \varepsilon$ . Posant  $\lambda = f(u)$  et  $\lambda' = f(u')$  il vient pour tout  $X$  de norme hermitienne égale à 1 :

$$|\alpha'(X) - \alpha(X)| = |(\alpha' - \alpha)(X)| \leq \|A' - A\| \leq \varepsilon,$$

d'où  $\alpha(X) - \varepsilon < \alpha'(X)$ ,  $\alpha'(X) - \varepsilon < \alpha(X)$ ,  $\lambda - \varepsilon < \alpha'(X)$ ,  $\lambda - \varepsilon < \lambda'$  puis  $\lambda' - \varepsilon < \lambda$ , c'est-à-dire  $|f(u') - f(u)| = |\lambda' - \lambda| < \varepsilon$  et l'uniforme continuité de  $f$ .

Si  $f$  était différentiable, l'application qui, pour tout réel  $t$ , associerait à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$  sa plus petite valeur propre  $-|t|$ , serait dérivable, ce qui n'est pas. Ce contre-exemple se généralise aussitôt dans tout espace de dimension supérieure ou égale à 2.

**Remarque** Le choix de la norme qui, à  $A$  hermitienne, associe  $\max \alpha$  redonnerait, aussi facilement, les mêmes résultats.

- 27** La condition est visiblement vérifiée si  $u$  est une similitude, c'est-à-dire le produit d'une homothétie (peut-être nulle) par une isométrie. Montrons que la réciproque est vraie.

Démontrons tout d'abord que les normes des images de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de même norme sont égales. En effet, l'égalité  $(x + y | x - y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$  montre qu'alors  $x + y$  et  $x - y$  sont orthogonaux, puis qu'il en va de même pour leurs images, et donc que  $\|u(x)\| = \|u(y)\|$ .

Si  $u$  est nulle il n'y a rien à prouver. Sinon il existe un vecteur  $e$ , nécessairement non nul, tel que  $u(e) \neq 0$ . La décomposition :

$$x = \frac{\|x\|}{\|e\|} \left( \frac{\|e\|}{\|x\|} x \right)$$

montre que, si l'on pose  $\lambda = \frac{\|u(e)\|}{\|e\|} > 0$ , on obtient pour tout vecteur  $x$ , même nul, l'égalité  $\|u(x)\| = \lambda \|x\|$ .

**Remarque** On peut aussi procéder autrement, en imitant par exemple la démonstration du théorème selon lequel le centre de l'algèbre des endomorphismes d'un espace est formé de ses homothéties.

Pour tout vecteur  $x$  non nul, notons  $f_x$  et  $g_x$  les formes linéaires définies pour tout vecteur  $y$  par  $(u(x)|u(y)) = f_x(y)$  et  $(x|y) = g_x(y)$ . La seconde de ces deux formes est non nulle et a pour noyau l'hyperplan  $(\mathbb{R}x)^\perp$  inclus par hypothèse dans le noyau de la première : il existe donc un réel  $\lambda_x$  vérifiant  $f_x = \lambda_x g_x$ .

Choisissons un vecteur non nul  $a$  et posons  $\lambda = \lambda_a$ . Pour tout vecteur  $x$  non orthogonal à  $a$ , alors :

$$\lambda_x(x|a) = (u(x)|u(a)) = (u(a)|u(x)) = \lambda(a|x)$$

d'où  $\lambda_x = \lambda$ . Si maintenant  $x$  est orthogonal à  $a$  ce qui exige d'être en dimension au moins égale à deux, il est loisible de choisir un vecteur  $b$  qui n'est ni orthogonal à  $a$  ni à  $x$ , et le même raisonnement montre que  $\lambda_x = \lambda_b = \lambda$ . Finalement  $\lambda_x$  est indépendant de  $x$ , et :

$$(u(x)|u(y)) = \lambda(x|y)$$

pour tout couple  $(x, y)$  (même si  $x = 0$ ) ce qui prouve que  $u$  est le produit d'une isométrie par le nombre réel  $\lambda$ , donc une similitude.

- 28** 1. Pour tout couple d'indices  $(i, j)$ , on a  $e_{i,j} = \frac{1}{n}$ . Les deux polynômes sont  $C(X) = X^{n-1}(X - 1)$  comme on le voit en revenant à la projection qui engendre  $E$  ou par un calcul direct (moins intéressant),  $M(X) = X^2 - X$  si  $n \geq 2$  et  $X - 1$  si  $n = 1$ . Le déterminant est  $D = 0$  si  $n \geq 2$  et 1 sinon, les valeurs propres sont 0 d'ordre  $n - 1$  (si  $n \geq 2$ ) et 1 qui est simple, les éventuels vecteurs propres relatifs à 0 sont les vecteurs non nuls orthogonaux à  $\omega$  et les vecteurs propres relatifs à 1 sont les vecteurs non nuls proportionnels à  $\omega$ .
2. On trouve  $A = ncE + (1-c)I$ , d'où  $\lambda I - A = nc(\mu I - E)$  où  $\mu = \frac{\lambda+c-1}{nc}$ , d'où  $C(X) = (X+c-1)^{n-1}(X-1-(n-1)c)$ ,  $M(X) = (X+c-1)(X-1-(n-1)c)$  si  $n \geq 2$  et  $X - 1$  sinon. Le déterminant est  $D = (1 - c)^{n-1}(1 + (n - 1)c)$ , les valeurs propres sont  $1 - c$  d'ordre  $n - 1$  (si  $n \geq 2$ ) et  $1 + (n - 1)c$  qui est simple, les éventuels vecteurs propres relatifs à  $1 - c$  sont les vecteurs non nuls orthogonaux à  $\omega$  et les vecteurs propres relatifs à  $1 + (n - 1)c$  sont les vecteurs non nuls proportionnels à  $\omega$ .
3. Une condition nécessaire est clairement la positivité des valeurs propres de  $A$ , c'est-à-dire  $c \leq 1$  et  $1 + (n - 1)c \geq 0$ , ce qui équivaut à  $c \in \left[-\frac{1}{n-1}, 1\right]$  pour  $n \geq 2$  et  $c \in \mathbb{R}$  pour  $n = 1$ . Écartant ce dernier cas par trop trivial, l'existence de  $S$  est alors claire, soit en cherchant une base orthonormée dans laquelle  $A$  diagonalise (ce qui est vrai puisque  $1 - c \neq 1 + (n - 1)c$  ce qui donne un polynôme minimal simplement scindé, sauf si  $c = 0$  auquel cas  $A = I = I^2$ ), ou en cherchant directement  $S = n\gamma E + \delta I$  ce qui donne les équations :

$$\delta^2 = 1 - c, \quad (n\gamma + \delta)^2 = 1 + (n - 1)c$$

soit  $\delta = \varepsilon\sqrt{1 - c}$  et  $n\gamma = -\delta + \varepsilon'\sqrt{1 + (n - 1)c}$  avec  $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$ .

Mais il faut que  $S$  ait aussi ses valeurs propres positives ou nulles, condition nécessaire ou suffisante pour que  $S$  soit associée à une forme quadratique positive (ou, en abrégé, soit positive, ce qu'il ne faut pas confondre avec la propriété d'avoir tous ses éléments positifs ou nuls). Mais les valeurs propres

de  $S$ , obtenues comme plus haut, sont évidemment  $\delta$ , d'ordre  $n - 1$ , et  $n\gamma + \delta$  : il en résulte que  $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ , ce qui détermine une unique matrice  $S$  bien entendu symétrique par construction même.

Dans les cas particuliers demandés par l'énoncé, on trouve (avec un abus d'écriture facile à déchiffrer) :

$$S = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres  $\frac{1}{3}$  d'ordre 2, et  $\frac{5}{3}$  d'ordre 1, ainsi que :

$$S = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  d'ordre 2, et 0 d'ordre 1.

4. Dans un bon repère, la matrice de  $u$  est diagonale, avec par exemple les  $n - 1$  premiers termes diagonaux égaux à  $1 - c$  et le dernier égal à  $1 + (n - 1)c$  :  $u$  est donc la somme de l'homothétie de rapport  $1 - c$  et du produit de l'homothétie de rapport  $nc$  par la projection orthogonale sur la droite dirigée par le dernier vecteur de base, aux anciennes coordonnées toutes égales à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Cette interprétation géométrique était d'ailleurs évidente sur la décomposition  $A = (1 - c) + ncEI$ . Pour  $v$ , l'interprétation est la même, en remplaçant  $1 - c$  par  $\delta$  et  $nc$  par  $n\gamma$ .
5. Le cas  $n = 1$  étant trivial, nous supposons  $n \geq 2$ . Il est clairement nécessaire que  $c \in [-1, 1]$  puisque les  $x_i$  sont normés et que l'on doit donc avoir  $c = \cos \varphi$  où  $\varphi$  est une mesure de l'angle de n'importe quel couple de deux vecteurs  $x_i$  et  $x_j$  d'indices différents.
- Si  $c = 1$ , il suffit de prendre les  $x_i$  deux à deux égaux, mais c'est aussi nécessaire, d'après la condition nécessaire et suffisante d'égalité dans l'inégalité CBS de Cauchy-Bouniakowski-Schwarz.
  - Soit donc  $c \in [-1, 1[$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n, n+1}(\mathbb{R})$  la matrice des  $n + 1$  vecteurs  $x_i$  dans une base orthonormée de  $E$ . Le produit  ${}^tXX$  est une matrice dite de Gram du type  $A$  (avec  $n + 1$  au lieu de  $n$ ). La forme quadratique associée à  $A$  est donc positive ; nécessairement les valeurs propres de  $A$  sont positives ou nulles, l'une d'entre elles étant forcément nulle car  $A$  est de rang au plus  $n$ . Le déterminant de  $A$  étant égal à  $D = (1 - c)^n(1 + nc)$ , on a nécessairement  $c = -\frac{1}{n}$ . Il en résulte que la somme  $\sum_i x_i$  est nulle, car le carré de sa norme est  $\sum_{i,j} (x_i | x_j) = 1 + nc = 0$ .

Pour démontrer l'existence d'une telle famille, on peut utiliser une matrice  $A$ , avec toutefois  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ . On sait d'après la question précédente que  $A = S^2$ , avec  $S$  inversible et symétrique. Il en résulte que les vecteurs  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, x'_{n+1})$  d'un espace euclidien  $F$  de dimension  $n + 1$  dont les coordonnées relatives à une base orthonormée  $(a_i)$  forment les colonnes de  $S$  vérifient les conditions  $\|x'_i\| = 1$  et  $(x'_i | x'_j) = c$ . De plus, on a  $x'_1 + \dots + x'_{n+1} = 0$  par le raisonnement ci-dessus. Il suffit alors de considérer une isométrie  $\varphi$  de  $E$  sur l'hyperplan de  $F$  contenant les  $x'_i$  pour obtenir une solution  $(x - 1, \dots, x_{n+1})$  du problème en posant  $x_i = \varphi^{-1}(x'_i)$ .

Le calcul de  $S$  est facile d'après les formules précédentes, à condition d'y remplacer  $n$  par  $n + 1$ . Compte tenu de la valeur  $c = -\frac{1}{n}$ , on trouve

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ et } \delta = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \text{ ce qui donne :}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} A.$$

On a déjà construit une telle matrice dans le cas particulier  $n = 2$ . Il est remarquable que  $S$  et  $A$  soient ici proportionnelles, ce qui est normal puisque dans ce cas particulier le polynôme minimal montre que  $A^2 = \frac{n+1}{n}A$ .

On peut alors déterminer le rang de ces vecteurs  $(x_i)$  en remarquant que, si la matrice  $S$  est singulière, son avant-dernier mineur principal, obtenu en rayant la dernière ligne et la dernière colonne, est une matrice régulière de type  $A$ . Le rang est donc  $n$ .

Montrons maintenant que cette solution particulière est en fait la solution générale. Ce résultat est vraisemblable, puisqu'un calcul immédiat donne  $\|x_i - x_j\|^2 = 2(1 - c)$  si  $i \neq j$  ; les solutions engendrent donc des polyèdres réguliers en fixant l'un des indices et en laissant varier l'autre. Or une construction de tels polyèdres réguliers consiste, on le sait, à « plonger » l'espace  $E$  dans un espace  $F$  dont il est un hyperplan et à prendre dans  $F$  une base orthonormée  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$  vérifiant l'égalité  $\|a_i - a_j\|^2 = 2$  si  $i \neq j$ .

Partons donc d'une solution  $(x_i)$ . Plongeant  $E$  dans un tel espace  $F$ , il existe bien une isométrie  $\varphi$  entre  $E$  et un hyperplan  $H$  de  $F$ . Soit  $a$  un vecteur de norme  $\sqrt{n+1}$  orthogonal à  $H$ . Si  $x'_i = \varphi(x_i)$  et si  $a_i = \frac{1}{n+1}a + \sqrt{\frac{n}{n+1}}x'_i$ , il vient  $a = \sum_i a_i$  (car  $\sum_i x'_i = 0$  comme  $\sum_i x_i$ ),

puis :

$$\|a_i\|^2 = 1, \quad (a_i | a_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

ce qui prouve que la famille  $(a_i)$  est une base orthonormée de  $F$  liée aux  $x_i$  par les égalités :

$$x_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \varphi^{-1} \left( a_i - \frac{1}{n+1} a \right).$$

Enfin l'hyperplan  $H = \varphi(E)$  est l'orthogonal de la somme  $a$  des vecteurs de la base.

Pour  $n = 2$ , on constate par exemple que les triplets solutions sont formés de vecteurs formant entre eux des angles de mesure  $\frac{2\pi}{3}$  provenant d'un triangle équilatéral d'un espace de dimension 3.

**Remarque** On peut démontrer directement que les vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont indépendants et que le rang cherché est donc  $n$ .

Posons en effet  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$  où  $J$  est l'ensemble des indices  $1 \leq j \leq n$  tels que  $\lambda_j > 0$  et  $K$  celui des  $k$  tels que  $\lambda_k < 0$ . On a  $\sum_j \lambda_j x_j = \sum_k (-\lambda_k) x_k = x$  d'où :

$$0 \leq \|x\|^2 = -c \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \leq 0$$

d'où  $J = \emptyset$  ou  $K = \emptyset$ . Si par exemple  $K$  est vide, on a  $x = 0$ , puis  $0 = (x | x_{n+1}) = c \sum_j \lambda_j \leq 0$ , d'où enfin  $J = K = \emptyset$ . Sinon, on opérerait de même en échangeant les rôles de  $J$  et de  $K$

29. 1. Puisque le groupe  $O(E)$  est l'ensemble  $f^{-1}(\text{Id})$ , où  $f$  est l'application continue  $u \mapsto u^* \circ u$ , il est donc fermé (et même compact puisque borné en dimension finie). Son inclusion dans  $F$  est évidente ; pour un endomorphisme vérifiant  $u \in F$ , la relation  $u \in O(E)$  équivaut à l'inversibilité de  $u$ . Donc  $O(E)$  est aussi l'ensemble  $g^{-1}(\mathbb{R}^*)$ , où  $g$  est l'application continue de  $F$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $u \mapsto \det u$  ; il est donc ouvert dans  $F$ . Mais  $O(E)$  est aussi fermé dans  $F$  puisqu'il l'est dans  $\mathcal{L}(E)$  ; c'est d'ailleurs aussi l'ensemble  $g^{-1}(\{1, -1\})$ . Enfin  $F$  est lui-même fermé dans  $\mathcal{L}(E)$  puisqu'il est l'ensemble  $h^{-1}(0)$ , où  $h$  est l'application continue  $u \mapsto u \circ u^* \circ u - u$ .
2. Nous allons montrer que chaque proposition implique la suivante (modulo 4) :

(i)  $\implies$  (ii). En effet  $(u \circ u^*)^2 = u \circ u^* \circ u \circ u^* = u \circ u^*$  ; par suite  $u \circ u^*$  est un projecteur, visiblement orthogonal puisque  $(u \circ u^*)^* = (u^*)^* \circ u^* = u \circ u^*$



(ii)  $\implies$  (iii). Notons d’abord que  $u^* \circ u$  est autoadjoint comme  $u \circ u^*$ . Par ailleurs ces deux endomorphismes ont même polynôme caractéristique, comme tout les couples de la forme  $(v \circ w, w \circ v)$ . Ils ont donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité. Enfin ils sont tout deux diagonalisables : ayant même matrice diagonale dans deux bases, ils sont donc semblables et  $u^* \circ u$  annule  $X^2 - X$  comme  $u \circ u^*$ .

(iii)  $\implies$  (iv). Rappelons que  $\text{Ker } u^* \circ u = \text{Ker } u$  puisque  $u(x) = 0$  équivaut à  $(u^* \circ u(x)|x) = 0$ . Un vecteur  $x$  orthogonal à  $\text{Ker } u$  appartient donc à  $(\text{Ker } u^* \circ u)^\perp$ , qui est l’image de  $(u^* \circ u)^* = u^* \circ u$ . Ce dernier endomorphisme étant un projecteur on a donc  $u^* \circ u(x) = x$ , d’où :

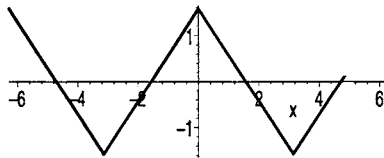
$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (u^* \circ u(x)|x) = (x|x) = \|x\|^2.$$

(iv)  $\implies$  (i). Montrons d’abord que  $x \in (\text{Ker } u)^\perp = \text{Im } u^*$  implique  $u^* \circ u(x) = x$ . Pour deux vecteurs  $x$  et  $y$  de ce sous-espace, on sait par l’identité de polarisation que  $(u^* \circ u(x)|y) = (u(x)|u(y)) = (x|y)$ . Ces égalités étant vérifiées pour tout  $y \in (\text{Ker } u)^\perp$ , on peut spécialiser  $y$  en  $u^* \circ u(x) - x$  qui appartient bien à  $\text{Im } u^*$ , ce qui donne  $0 = y = u^* \circ u(x) - x$ .

Par suite, on a  $u \circ u^* \circ u(x) = u(x)$ , soit que ces vecteurs soient nuls si  $u \in \text{Ker } u$ , soit plus généralement qu’ils soient égaux si  $x \in (\text{Ker } u)^\perp$  : ces deux espaces étant supplémentaires, on a bien  $u \circ u^* \circ u = u$ .

## Chapitre 20

1. 1. Il suffit de linéariser  $\sin^3$  ou de se rappeler que  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ .



arcsin cos x

2. La fonction  $x \mapsto \arcsin \sin x$  vaut  $x$  sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  et  $\pi - x$  sur  $[\pi/2, 3\pi/2]$ . Or  $\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$  Donc la fonction  $f$  vaut  $\frac{\pi}{2} - x$  sur  $[0, \pi]$ , et est paire. Elle est continue, et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, donc somme de sa série de Fourier qui converge normalement.

Ses coefficients de Fourier sont  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \cos nt \, dt = \frac{4}{\pi n^2}$  si  $n$  est impair et 0 sinon.

2. Cette série est naturellement normalement convergente, et il est naturel de lui associer la série analogue avec des sinus :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\cos(2p+1)x + i \sin(2p+1)x}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{e^{(2p+1)ix}}{(2p+1)!} = \sin(e^{ix}) = \sin(\cos x + i \sin x) \\ &= \sin(\cos x) \cos(i \sin x) + \cos(\cos x) \sin(i \sin x) \\ &= \sin(\cos x) \operatorname{ch}(\sin x) + i \cos(\cos x) \operatorname{sh}(\sin x). \end{aligned}$$

Sa partie réelle est :  $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)!} = \sin(\cos x) \operatorname{ch}(\sin x).$

3. La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^\infty$ . Sa dérivée est :

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

Posant  $z = e^{ix}$  (ce qui est juste ici un confort de notation mais  $f$  est bien fonction de la seule variable réelle  $x$ ),

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{z - \frac{1}{z}}{2i \left(2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} = -i \frac{1 - z^2}{z^2 + 4z + 1} \\ &= i - \frac{i}{1 + \frac{z}{2 + \sqrt{3}}} - \frac{i}{1 + \frac{z}{2 - \sqrt{3}}}, \end{aligned}$$

par décomposition en éléments simples. Nous souhaitons développer cela en série de puissances de  $z$ , mais il faut traiter différemment les deux fractions, car  $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ , donc  $\frac{z}{2 - \sqrt{3}}$  est de module plus grand que 1. Comme  $\frac{1}{z} = \bar{z}$ , il vaut mieux écrire :

$$\frac{i}{1 + \frac{z}{2 - \sqrt{3}}} = i\bar{z} \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})\bar{z}} \right).$$

Cela entraîne que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= i \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{z}{2 + \sqrt{3}}} \right) - i \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{\bar{z}}{2 + \sqrt{3}}} \right) \\ &= -2 \operatorname{Im} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{z}{2 + \sqrt{3}}} \right). \end{aligned}$$

Or  $1 - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{(2 + \sqrt{3})^n}$ , car  $|z| = 1$  et  $2 + \sqrt{3} > 1$ , donc :

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{(2 + \sqrt{3})^n},$$

et par convergence normale de cette série de fonctions il existe une constante  $\lambda$  telle que :

$$f(x) = \lambda + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n(2 + \sqrt{3})^n}.$$

Pour  $x = 0$ , on voit tout de suite que  $\lambda = \ln 3 - 2 \ln \left(1 + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)$  que l'on ne gagne pas grand-chose à simplifier

4. Si  $\sum a_n$  converge,  $\sum a_n \cos nx$  converge normalement, donc uniformément.

Si  $\sum a_n$  ne converge pas, soit  $A > 0$  et  $N$  quelconque strictement positif. Il existe  $n \geq N$ , et  $m \geq n$  tels que  $a_n + a_{n+1} + \dots + a_m \geq A$ . Pour ces valeurs de  $n$  et  $m$  fixées :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a_n \cos nx + a_{n+1} \cos(n+1)x + \dots + a_m \cos mx) = a_n + a_{n+1} + \dots + a_m.$$

Donc il existe  $x \in ]0, 2\pi[$  tel que  $a_n \cos nx + \dots + a_m \cos mx \geq A/2$ . Ainsi, pour tout  $N$ , il existe  $n \geq N$ ,  $m \geq n$  et  $x \in ]0, 2\pi[$  tels que  $\sum_{k=n}^m a_k \cos kx \geq A/2$ , ce qui contredit le critère de Cauchy uniforme pour  $\sum a_k \cos kx$ .

5 La fonction  $f$  n'est pas  $C^1$  par morceaux, vu sa dérivée à droite infinie en 0. Cherchons un équivalent de son  $n^{\text{ème}}$  coefficient de Fourier

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{t} \cos nt \, dt.$$

Une intégration par parties, où l'on intègre le pro-

longement par continuité en 0 de  $\frac{\sin nt}{2n\sqrt{t}}$  donne :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \sqrt{\pi} \frac{\sin n\pi}{n} - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin nt}{2n\sqrt{t}} \, dt = -\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin nt}{\sqrt{t}} \, dt = -\frac{1}{n\sqrt{n\pi}} \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \, du.$$

Cette intégrale admet une limite lorsque  $n$  tend vers l'infini notée  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \, du$ , de sorte que  $a_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ . La série de Fourier converge normalement. D'après le théorème de Parseval, la somme de cette série est  $f$  elle-même.

6. 1. Il suffit de montrer que la série est uniformément de Cauchy sur  $]0, \pi/2]$ , par imparité et symétrie. La convergence évidente en 0 permet de conclure.

Pour cela  $\sum_{k=n}^m \sin kx$  est la partie imaginaire de  $\sum_{k=n}^m e^{ikx}$ , majorée par son module, et si  $r = m - n$  :

$$\left| \sum_{k=n}^m \sin kx \right| \leq \left| \frac{1 - e^{i(r+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{r+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Par concavité du sinus sur  $[0, \pi/2]$ , si  $0 < x < \pi$ ,  $0 \leq \sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}$  et  $\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{\pi}{x}$ .

En posant  $A_k = \sum_{q=n}^k \sin qx$ , une transformation d'ABEL donne :

$$\sum_{k=n}^m b_k \sin kx = b_n A_n + \sum_{k=n+1}^m b_k (A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m.$$

Donc, pour  $0 < x < \pi$  :

$$\left| \sum_{k=n}^m b_k \sin kx \right| \leq b_n \max_{n \leq k \leq m} |A_k| \leq \frac{b_n}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{\pi b_n}{x}.$$

Comme  $\sin px \leq px$  :

$$\left| \left( \sum_{k=n}^m b_k \sin kx \right) \sin px \right| \leq b_n \cdot \pi p,$$

d'où la convergence uniforme voulue.

2. Mais alors si  $f$  est continue par morceaux, pour tout entier  $p \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \sin pt \, dt &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nt \sin pt \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} b_n \sin nt \sin pt \, dt \right) = \pi b_p, \end{aligned}$$

et  $b_p$  est le  $p^{\text{ème}}$  coefficient de Fourier de  $f$ .

7. Nous avons vu à la proposition 13 page 779 du cours que  $f(x)$  était définie et continue sur  $]0, 2\pi[$ .

Pour  $x \in ]0, \pi/2[$  soit  $N_x$  l'unique entier strictement positif tel que :

$$\frac{\pi}{4(N_x + 1)} < x \leq \frac{\pi}{4N_x}.$$

Alors :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n \cos nx + \sum_{n=N_x+1}^{+\infty} a_n \cos nx = A(x) + B(x).$$

Une transformation d'ABEL et l'usage de la concavité du sinus sur  $[0, \pi/2]$ , comme dans l'exercice 6, permettent d'écrire :

$$|B(x)| \leq \frac{a_{N_x+1}}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi a_{N_x+1}}{x},$$

borné indépendamment de  $x$ , car  $(N_x + 1)a_{N_x+1} \leq M$ .

D'autre part, comme  $N_x x \leq \frac{\pi}{4}$  pour tout  $n \geq N_x$ ,  $\cos nx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , donc :

$$A(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{N_x} a_n,$$

qui tend vers l'infini si  $x$  tend vers 0, puisque  $N_x$  tend vers l'infini.

8. 1. On peut se limiter à  $x \in [0, \pi]$ , et on pose  $t_k = \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}$ , pour  $k$  variant de 0

à  $n$ , et on s'intéresse spécialement à  $\delta = t_1$ .

On voit facilement que  $D_n$  est positive sur  $[0, t_1]$ , puis négative sur  $[t_1, t_2]$ ,  $\dots$ , positive sur  $[t_{2p}, t_{2p+1}]$  et négative sur  $[t_{2p+1}, t_{2p+2}]$ , etc. De plus, comme  $t \mapsto \sin \frac{t}{2}$  est croissante sur  $[0, \pi]$ , si  $t \leq \pi$  est dans l'intervalle

$[t_k, t_{k+1}]$ , alors  $|D_n(t)| \geq |D_n(t + \delta)|$ . Les intégrales  $I_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} D_n$

( $0 \leq k \leq n$ ) vérifient  $|I_0| \geq |I_1| \geq \dots \geq |I_n|$  et leurs signes alternent. De plus, si  $x \in [t_{2p}, t_{2p+1}]$  :

$$0 \leq \int_0^{t_{2p}} D_n(t) dt \leq \int_0^x D_n(t) dt \leq \int_0^{t_{2p+1}} D_n(t) dt ;$$

et si  $x \in [t_{2p+1}, t_{2p+2}]$  :

$$0 \leq \int_0^{t_{2p+2}} D_n(t) dt \leq \int_0^x D_n(t) dt \leq \int_0^{t_{2p+1}} D_n(t) dt.$$

Cela prouve que :

$$0 \leq \int_0^x D_n(t) dt \leq \int_0^\delta D_n(t) dt.$$

La fonction  $D_n$  étant décroissante sur  $[0, \delta]$ ,  $\int_0^\delta D_n(t) dt \leq D_n(0)\delta = 2\pi$ .  
Ainsi, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $0 \leq \int_0^x D_n(t) dt \leq 2\pi$ .

2. Il suffit de remarquer que :

$$D_N(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos kt \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{2} \int_0^x D_N(t) dt$$

3. La convergence simple a été vue dans le cours. En utilisant la transformation d'ABEL vue dans les exercices 6 et 7, on peut donc écrire .

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \sin kx \right| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} kb_k \frac{\sin kx}{k} \right| \leq nb_n \sup_{N \geq n} \left( \sum_{k=n}^N \frac{\sin kx}{k} \right) \leq Mnb_n,$$

où  $M$  est un majorant commun de toutes les sommes  $\sum_{k=n}^N \frac{\sin kx}{k}$  lorsque  $n, N, x$  varient. Le résultat s'en déduit immédiatement.

9 La relation  $|a_n(f)a_n(g)| \leq \frac{1}{2} (|a_n(f)|^2 + |a_n(g)|^2)$ , et l'inégalité de Bessel appliquée à  $f$  et  $g$ , entraînent la convergence normale de la série qui définit  $h$ . Ainsi,  $h$  est continue, et les coefficients de Fourier de  $h$  sont, pour tout  $n \geq 0$ ,  $a_n(h) = a_n(f)a_n(g)$ .

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les familles de réels de carré sommable,

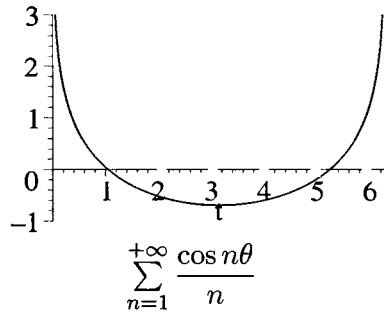
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|h\|_\infty &\leq \frac{|a_0(f)a_0(g)|}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)a_n(g)| \\ &\leq \sqrt{\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2} \sqrt{\frac{|a_0(g)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(g)|^2} = A \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bessel,

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g|^2}.$$

L'inégalité demandée résulte alors de  $\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2} \leq \|f\|_\infty$ .

10. Il faut d'abord justifier l'existence de l'intégrale. Pour  $t \in [0, 1]$ , on pose



$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k e^{(k+1)i\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - t^n e^{ni\theta}}{1 - te^{i\theta}}.$$

Le minimum de  $|1 - te^{i\theta}|$  lorsque  $t$  décrit le segment  $[0, 1]$  est la distance dans  $\mathbb{C}$  de 1 au segment  $\Gamma = \{te^{i\theta}, t \in [0, 1]\}$ , égale à  $\sin \theta$ . Donc la fonction  $t \mapsto \frac{t^n e^{(n+1)i\theta}}{1 - te^{i\theta}}$  est continue sur  $[0, 1]$ , majorée en module par  $\frac{t^n}{\sin \theta}$ .

Son intégrale sur  $[0, 1]$  tend évidemment vers 0, et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(t) dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}} dt = I.$$

Or  $\int_0^1 S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{e^{(k+1)i\theta}}{k+1}$ . Donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{ni\theta}}{n}$  converge, de somme  $I$ .

Il suffira de calculer la partie réelle de :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{e^{-i\theta} - t} = \int_0^1 \frac{dt}{(\cos \theta - t) - i \sin \theta}.$$

Or  $J = \text{Re}(I) = \int_0^1 \frac{\cos \theta - t}{(\cos \theta - t)^2 + \sin^2 \theta} dt$ , et la dérivée de  $(\cos \theta - t)^2 + \sin^2 \theta$  est justement  $-2(\cos \theta - t)$ , donc :

$$\begin{aligned} J &= \left[ -\frac{1}{2} \ln ((\cos \theta - t)^2 + \sin^2 \theta) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \ln ((\cos \theta - t)^2 + \sin^2 \theta) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos \theta) = -\frac{1}{2} \ln \left( 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = -\ln \left( 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln \left( 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right).$$

On remarque qu'on peut retrouver, avec la partie imaginaire de  $I$  la formule classique pour  $\theta \in ]0, \pi[$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

11. Par l'absurde, si une telle fonction  $\varphi$  existe, son comportement imposé à l'infini entraîne que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $k_n \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq \varphi(k_n) \leq \frac{1}{n^3}$ . On peut choisir la suite  $(k_n)$  strictement croissante. On définit alors :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(k_n x).$$

Cette série trigonométrique *lacunaire* converge normalement. Elle est donc bien la série de Fourier de  $f$ . De plus,  $a_{k_n}(f) = \frac{1}{n^2}$ , et  $\frac{\varphi(k_n)}{a_{k_n}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $a_m$  n'est pas dominé par  $\varphi(n)$ .

L'exemple demandé s'en déduit. Ce peut être  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^3 x)$ .

12. 1. De la relation (\*), il résulte que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , puis que  $f'$  est  $\mathcal{C}^1$ , et chacune d'elles est somme de sa série de Fourier normalement convergente.  
2. Si  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ , alors :

$$f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i n c_n e^{inx} = f(x + \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in(x+\lambda)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\lambda} e^{inx}.$$

D'après l'unicité du développement en série de Fourier de la fonction  $f'$ , pour tout  $n$ ,  $(in - e^{in\lambda})c_n = 0$ . S'il existe  $n_0$  tel que  $in_0 = e^{in_0\lambda}$ , seul cas où  $c_{n_0}$  puisse ne pas être nul, vu le module de  $e^{in_0\lambda}$ ,  $|in_0| = 1$ , et  $n_0 = \pm 1$ . Donc  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ , qui convient en effet.

13. 1. Comme  $f$  est uniformément continue, c'est une conséquence immédiate du théorème de HEINE.  
2. On écrit  $a_n = a_n(f)$  de deux manières, avec un petit décalage de la variable :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi - \frac{\pi}{n}} f\left(\frac{\pi}{n} + u\right) \cos n\left(\frac{\pi}{n} + u\right) \, du \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi - \frac{\pi}{n}} f\left(\frac{\pi}{n} + u\right) \cos nu \, du = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\pi}{n} + u\right) \cos nu \, du. \end{aligned}$$



Donc  $a_n$  est la demi-somme de la première et la troisième de ces expressions intégrales (en fait identiques !), et :

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( f(t) - f\left(\frac{\pi}{n} + t\right) \right) \cos nt \, dt, \quad \text{d'où :}$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \Omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right) \int_0^{2\pi} |\cos nt| \, dt \leq \frac{2}{\pi} \Omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

- 3. C'est immédiat car  $\Omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 0$  si  $n$  tend vers l'infini d'après la première question.
- 4. De même, car l'hypothèse entraîne que  $\Omega_f(\delta) \leq \lambda\delta^\alpha$ .

14. 1. Si  $c_n = c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n + c_{-n}) e^{inx}$

converge normalement. Si  $f$  est continue par morceaux et à sauts symétriques elle est la somme de sa série de Fourier, d'après le corollaire de la formule de Parseval-Bessel vu dans le cours.

En fait, on sait qu'il suffit que  $\sum |c_n|$  converge pour la même conclusion. Plus généralement, si  $\sum n^q |c_n|$  converge, la série  $\sum n^q c_n e^{inx}$  converge normalement. Le théorème de convergence normale des séries de Fourier et une application itérée du théorème sur les suites de fonctions dérivées entraînent que  $f$  est de classe  $C^q$  et ses  $q$  premières dérivées sont obtenues en sommant terme à terme leur série de Fourier.

- 2. Avec le corollaire du lemme de Riemann-Lebesgue vu dans le cours, il est alors immédiat que la condition nécessaire et suffisante demandée est  $c_n = o(1/n^p)$  pour tout  $p$ , ou bien, ce qui est équivalent,  $c_n = O(1/n^p)$  pour tout  $p$ .
- 3. On suppose maintenant que  $c_n(f) = o(e^{-r|n|})$  si  $n$  tend vers l'infini. D'après la question précédente,  $f$  est de classe  $C^\infty$  et sa série de Fourier est normalement convergente ainsi que celles de ses dérivées. De plus  $\|f\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$ ,  $\|f'\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |c_n|$ , etc., et il existe une constante  $A$  telle que :

$$\forall k \geq 0, \quad \|f^{(k)}\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |c_n| \leq A \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-r|n|} |n|^k.$$

Montrons que si  $r > 0$ , il existe  $B$  et  $\lambda$  (pouvant dépendre de  $r$ ) tels que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-rn} n^k \leq B k! \lambda^k$ .

En effet, si  $x \in ]0, 1[$ , et si  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$  :

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n n^k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n n(n+1) \cdots (n+k-1) = \varphi^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}.$$

Donc  $\|f^{(k)}\|_\infty \leq 2A \frac{(k-1)!}{(1-e^{-r})^k}$  (pour  $x = e^{-r}$ ,  $n$  décrivant  $\mathbb{Z}$ , d'où le facteur 2). Nous avons vu que cela entraîne que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0. Comme un changement d'origine n'affecte pas le module des coefficients de Fourier exponentiels de  $f$ , c'est la même chose au voisinage de tout point.

15. 1. Nous allons établir que, pour tout polynôme  $Q$  à coefficients complexes :

$$\int_{-1}^1 Q(t) dt = -i \int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

Par linéarité, il suffit de le prouver lorsque  $Q(z) = z^n$ , et dans ce cas,

$$\int_{-1}^1 t^n dt = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}, \text{ tandis que :}$$

$$\int_0^\pi (e^{i\theta})^n e^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^{n+1} d\theta = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{i(n+1)} = -\frac{1}{i} \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Dans le cas particulier où  $Q(z) = P(z)^2$ , cela donne le résultat voulu.

2. Comme  $P$  est à coefficients réels, pour tout  $t$  réel,  $P(t)^2 > 0$  et :

$$\int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq \int_0^1 P(t)^2 dt = \sum_{0 \leq n, m \leq N} \frac{a_n a_m}{n+m+1}.$$

Pour la même raison sur les coefficients de  $P$ , si  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|P(z)|^2 = P(z)P(\bar{z})$ , et :

$$\left| \int_0^\pi (P(e^{i\theta}))^2 e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^\pi P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta}) d\theta.$$

Cette dernière intégrale se développe en :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta}) d\theta &= \sum_{n=0}^N a_n^2 \int_0^\pi d\theta \\ &+ \sum_{0 \leq n < m \leq N} a_n a_m \int_0^\pi (e^{i(n-m)\theta} + e^{i(m-n)\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Le premier terme est  $\pi \sum_{k=0}^N a_k^2$ , et le second est nul.

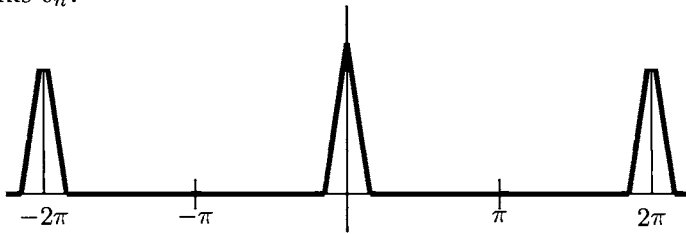
16. 1. On peut supposer que  $x_0 \in ]0, \pi[$ , car le résultat est évident si  $x_0 = 0$  ou même  $\pi$ . Comme  $\cos^2 \theta \leq |\cos \theta|$ ,  $\sum |a_n| \cos^2 nx_0$  converge. Mais :

$$2 \cos^2 nx_0 = 1 + \cos 2nx_0,$$

et d'après la proposition 13 page 779 du cours, la série  $\sum |a_n| \cos 2nx_0$  converge. D'où le résultat par différence. En particulier, la série de Fourier converge normalement.

2. La réponse est non, par exemple avec  $\sum_p \frac{1}{p} \cos(4p + 1)x$  (c'est-à-dire que  $a_n = \frac{1}{p}$  si  $n = 4p + 1$ , et 0 sinon), qui converge absolument pour  $x = \frac{\pi}{2}$  car tous ses termes sont alors nuls, mais  $\sum |a_n|$  diverge.

17. Autrement dit, la moyenne quadratique de  $\varphi$  sur un arc est au moins la moitié de sa moyenne sur le cercle. Cette propriété étonnante est due à la positivité des coefficients  $v_n$ .



1. Les coefficients  $b_n$  de  $h$  sont nuls, et :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \left(1 - \frac{\theta}{t}\right) \cos n\theta \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ \left(1 - \frac{\theta}{t}\right) \frac{\sin n\theta}{n} \right]_0^t + \frac{1}{nt} \int_0^t \sin n\theta \, d\theta \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2 t} (1 - \cos nt) \end{aligned}$$

qui est positif. D'autre part,  $a_0 = \frac{t}{\pi}$ .

La série de Fourier de  $h$  converge normalement vers  $h$ .

D'autre part :

$$\int_{-t}^t |\varphi(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \geq \int_{-t}^t h(\theta) |\varphi(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \int_{-t}^t h(\theta) \varphi(re^{i\theta}) \overline{\varphi(re^{i\theta})} \, d\theta$$

et, pour  $r$  fixé, c'est le produit scalaire usuel (au facteur  $\frac{1}{2\pi}$  près) des deux fonctions suivantes, toutes deux  $2\pi$ -périodiques continues, et  $C^1$  par morceaux :

$$f(\theta) = h(\theta) \varphi(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{ni\theta}, \quad \text{et :}$$

$$g(\theta) = \varphi(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n e^{ni\theta},$$

la seconde étant somme de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} v_n r^n e^{in\theta}$ , et de classe  $C^\infty$ .

D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \varphi(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} v_p r^p \int_0^{2\pi} h(\theta) e^{i(n-p)\theta} d\theta, \end{aligned}$$

car  $r < 1$  et la série de fonctions à intégrer converge normalement, ce qui permet d'intervertir les symboles  $\sum$  et  $\int$ . D'où  $\alpha_n = \sum_{p=0}^{+\infty} v_p r^p c_{n-p}(h)$ .

Nous avons vu que les coefficients  $c_m(h) = \frac{1}{2} a_m(h)$  sont positifs pour tout  $m \neq 0$ . De plus,  $c_0(h) = \frac{a_0(h)}{2}$  donc  $\alpha_n \geq v_n r^n c_0(h) = v_n r^n \frac{t}{2\pi} = \beta_n \frac{t}{2\pi}$ .

D'après l'égalité de Parseval,  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \bar{\beta}_n \geq \frac{t}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n \bar{\beta}_n$  c'est-à-dire

dire que  $\frac{1}{2t} \int_{-t}^t |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq \frac{t}{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)$ , d'où le résultat.

- 18.** Pour tout  $y$ , la fonction  $f_y$  suggérée dans l'énoncé est continue, et  $C^1$  par morceaux, car sa restriction à  $[-\pi, \pi]$  est de classe  $C^2$ , et la relation  $f_y(-\pi) = f_y(\pi) = 0$  entraîne que  $f_y$  est continue. Elle est donc somme de sa série de Fourier (dont la variable est  $x$ ). De plus :

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) \sin nx dx = \left[ -\frac{u(x, y) \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos nx dx$$

La condition  $u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0$  annule le terme entre crochets. L'autre terme est égal à :

$$\frac{1}{n} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \sin nx dx.$$

Ici encore, le premier terme est nul car  $\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0$ . Ainsi, pour tout  $y$  :

$$b_n(f_y) = -\frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \sin nx dx + \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \sin nx dx.$$

Comme  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  est de classe  $C^2$ , on peut dériver sous le signe  $\int$  l'expression intégrale de  $b_n(f_y)$ , et l'on reconnaît ci-dessus :

$b_n(f_y) = \frac{1}{n^2} \frac{d^2}{dy^2}(b_n(f_y))$ . Ainsi, pour  $n$  fixé, la fonction  $\varphi_n : y \mapsto b_n(f_y)$  vérifie  $\varphi_n''(y) - n^2\varphi_n(y) = 0$ , donc il existe  $\lambda_n$  et  $\mu_n$  tels que  $\varphi_n(y) = \lambda_n e^{ny} + \mu_n e^{-ny}$ . Rappelons que sur  $[-\pi, \pi]$ ,  $u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ , ce qui répond à la question.

19. 1. Pour toute forme sesquilineaire  $(\cdot | \cdot)$  sur un espace vectoriel complexe  $E$  et tous éléments  $f$  et  $g$  de  $E$ , si l'on note  $q(f) = (f | f)$  :

$$4(f | g) = q(f + g) - q(f - g) + iq(f - ig) - iq(f + ig),$$

et d'après l'égalité de Parseval, le second membre de cette relation est égal à :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f + g)} c_n(f + g) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f - g)} c_n(f - g) \\ & + i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f - ig)} c_n(f - ig) - i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f + ig)} c_n(f + ig). \end{aligned}$$

En développant ces quatre sommes (absolument convergentes), par linéarité des coefficients de Fourier, cette expression se réduit à  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g)$ . On applique en effet à  $u = c_n(f)$  et  $v = c_n(g)$  la formule vraie dans  $\mathbb{C}$  :

$$4\overline{uv} = \overline{(u + v)}(u + v) - \overline{(u - v)}(u - v) + i\overline{(u - iv)}(u - iv) - i\overline{(u + iv)}(u + iv).$$

2. La définition de  $g_n$  entraîne que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(nt) dt = (\overline{f} | g_n)$ , pour la forme sesquilineaire usuelle sur l'espace  $E$  des fonctions complexes  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux. D'après la forme polarisée ci-dessus de l'égalité de Parseval :

$$(\overline{f} | g_n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \overline{c_p(\overline{f})} c_p(g_n).$$

Or, pour  $p = nq, q \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} c_p(g_n) &= c_{nq}(g_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inqt} g(nt) dt \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi n} e^{-iqu} g(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iqu} g(u) du = c_q(g) \end{aligned}$$

Le même changement de variable  $nt = u$  entraîne que :

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} |c_q(g)|^2 = (g | g) = (g_n | g_n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} |c_p(g_n)|^2.$$

La somme  $\sum_{p \in \mathbb{Z}} |c_p(g_n)|^2$  se décompose en  $\sum_{p \in n\mathbb{Z}} + \sum_{p \notin n\mathbb{Z}}$ . Donc :

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} |c_q(g)|^2 = \sum_{q \in \mathbb{Z}} |c_q(g)|^2 + \sum_{p \notin n\mathbb{Z}} |c_p(g_n)|^2,$$

et si  $p \notin n\mathbb{Z}$ ,  $c_p(g_n) = 0$ . Ainsi, pour  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  :

$$(\bar{f}|g_n) = \overline{c_0(\bar{f})}c_0(g) + \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} \overline{c_{nq}(\bar{f})}c_q(g),$$

$$\text{et } |(\bar{f}|g_n) - \overline{c_0(\bar{f})}c_0(g)| \leq \sqrt{\sum_{q \in \mathbb{Z}^*} |c_{nq}(\bar{f})|^2} \cdot \sqrt{\sum_{q \in \mathbb{Z}} |c_q(g)|^2}.$$

La convergence de la série de Parseval de  $\bar{f}$  entraîne immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} |c_{nq}(\bar{f})|^2 = 0.$$

3. Pour étendre cela à  $f$  non  $2\pi$ -périodique définie et continue par morceaux sur l'intervalle  $I = [a, b]$ , on note  $f_k$  la fonction définie sur  $I$  qui coïncide avec  $f$  sur  $I_k = I \cap [2k\pi, 2(k+1)\pi[$  et qui est nulle ailleurs. Alors  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k$ ,

où la somme est, en fait, finie. Par linéarité, il suffit donc de montrer le résultat pour les  $f_k$ . Chacune des fonctions  $f_k$  se prolonge en une fonction  $2\pi$ -périodique  $h_k$ . On applique alors la question précédente à chacune des  $h_k$  et à  $g$  :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} h_k(t)g(nt) dt &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} h_k(t) dt \right) \left( \int_0^{2\pi} g(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{I_k} f_k(t) dt \right) \left( \int_0^{2\pi} g(t) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{I_k} f_k(t)g(nt) dt. \end{aligned}$$

20. 1. La  $k^{\text{ème}}$  dérivée de la fonction  $e^{-x^2}$  est de la forme  $H_n(x)e^{-x^2}$ , où  $H_n$  est un polynôme, donc pour  $\varphi(x) = e^{-x^2}$ ,  $x^n \varphi^{(m)}(x)$  tend vers 0 en  $\pm\infty$  et  $\varphi \in \mathcal{S}$ .
2. Pour  $x \in [-N, N]$ , ( $N$  entier fixé supérieur ou égal à 1) et  $|n| \geq N + 1$ ,  $|x + n| \geq 1$ . Soit  $B$  réel tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t^2 f(t)| \leq B$ . Alors  $\forall x \in [-N, N]$ ,  $|(x+n)^2 f(x+n)| \leq B$ , et  $|f(x+n)| \leq \frac{B}{(x+n)^2} \leq \frac{B}{(n-N)^2}$ , ce qui prouve la convergence normale de la série  $\sum f(x+n)$  sur le compact  $[-N, N]$ . En particulier l'ordre de sommation n'importe pas quand on écrit  $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ .

Il en est de même avec  $G$ , puisque  $f'$  est aussi à décroissance rapide.

Remarquons que nous avons, pour l'instant, seulement eu besoin que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$  et les deux fonctions  $x^2 f(x)$  et  $x^2 f'(x)$  soient bornées. Notons aussi que la série  $\sum f(x+n)$  ne converge pas normalement, ni même uniformément sur  $\mathbb{R}$ , car il faudrait au moins pour ce dernier point que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x+n)\|_\infty = 0$ , ce qui est faux si  $f$  n'est pas identiquement nulle, puisque la fonction  $x \mapsto f(x+n)$  a même norme  $\|\cdot\|_\infty$  que  $f$ .

3. Sur tout compact, on peut donc appliquer le théorème sur les suites de fonctions dérivées et dériver terme à terme l'expression de  $F$ . Sa dérivée est  $G$ , continue par convergence normale sur tout compact de la série dont elle est somme.

La 1-périodicité de  $F$  est claire.

4. La série de fonctions  $\sum_n f(t+n)e^{-2i\pi pt}$  converge, elle aussi, normalement sur le compact  $[0, T] = [0, 1]$ , et l'on peut écrire, pour la période  $T = 1$  de  $F$  :

$$\begin{aligned} c_p(F) &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t)e^{-2i\pi pt/T} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) \right) e^{-2i\pi pt/T} dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) \right) e^{-2i\pi pt} dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi pt} dt \right) \quad (\text{par convergence normale}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi p(u-n)} du \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi pu} du \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi pu} du = \widehat{f}(p). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on peut appliquer à  $F$  le théorème de convergence normale de la *série de Fourier* pour les fonctions 1-périodiques, continues et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (et non de la série  $\sum_n f(x+n)$  !), et  $F$  est somme de sa série de Fourier, dont on vient d'exprimer les coefficients.

5. Il reste à remarquer que  $F$  est somme de sa série de Fourier (pour la période 1), et en particulier,  $F(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(p)$ .

21. Dans toute cette solution d'exercice, nous désignerons par  $e^{inx}$  la fonction  $t \mapsto e^{int}$ . Si  $f$  est dans  $D$ , et sa série de Fourier est  $\sum c_n e^{inx}$ , rappelons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} = f$ , où la limite est prise au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ , autrement

$$\text{dit } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} \right\|_2 = 0. \text{ Nous écrivons cela } f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

1. Si  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \in D$ ,  $\tau_\alpha(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\alpha} e^{inx}$  (car  $\tau_\alpha(f) \in D$ ,

et le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de Fourier exponentiel de  $\tau_\alpha(f)$  est  $c_n e^{-in\alpha}$ , ce qu'on vérifie immédiatement sur la forme intégrale du coefficient de Fourier). Ainsi si  $f \in D$  est vecteur propre de  $\tau_\alpha$ , pour la valeur propre  $\lambda$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\alpha} e^{inx} = \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ . Par unicité du développement de Fourier,

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c_n e^{-in\alpha} = \lambda c_n$ . Comme  $\frac{\alpha}{\pi}$  est irrationnel, il ne peut exister qu'une valeur au plus de  $n$  pour laquelle  $\lambda = e^{in\alpha}$ , disons  $n_0$ . Pour tous les autres  $n$ ,  $c_n = 0$ . Et il est clair que, lorsque  $n_0$  décrit  $\mathbb{Z}$ , les fonctions  $e^{in_0 x}$  sont fonctions propres de  $\tau_\alpha$ .

2. Montrons d'abord que si  $T$  commute avec  $\tau_\alpha$ , chaque fonction  $e^{imx}$  est fonction propre de  $T$ . Avec nos conventions de notation, si  $T(e^{imx}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t_{n,m} e^{inx}$ , alors  $\tau_\alpha(T(e^{imx})) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\alpha} t_{n,m} e^{inx}$ . D'autre part, par linéarité de  $T$  :

$$T(\tau_\alpha(e^{imx})) = T(e^{-im\alpha} e^{imx}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\alpha} t_{n,m} e^{inx}.$$

L'unicité du développement de Fourier de  $T \circ \tau_\alpha(e^{imx}) = \tau_\alpha \circ T(e^{imx})$  entraîne que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $(e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}) t_{n,m} = 0$ . Comme dans la première question, l'irrationalité de  $\frac{\alpha}{\pi}$  entraîne que pour tous les  $n \neq m$ ,  $t_{n,m} = 0$ , et  $T(e^{imx}) = t_{m,m} e^{imx}$ .

La continuité de  $T$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$  entraîne alors que, pour toute  $f \in D$  :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} \implies$$

$$T(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{|k| \leq n} c_k T(e^{ikx}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n t_{n,n} e^{inx}.$$



22. 1. et 2. La périodicité de  $F$  résulte de  $\int_0^{-\pi} f(t) dt = \int_0^{\pi} f(t) dt$ , car  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$ . De plus,  $F$  est dérivable aux points de continuité de  $f$ . Ainsi,  $F$  est continue (comme une intégrale fonction de sa borne supérieure) et  $C^1$  par morceaux, et donc somme de sa série de Fourier normalement convergente. La dérivée de  $F$  étant  $f$  sauf en un nombre fini de points sur  $[-\pi, \pi]$ , ses coefficients de Fourier vérifient, pour  $n \geq 1$  :

$$a_n(f) = nb_n(F), \quad \text{et} \quad b_n(f) = -na_n(F).$$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F(x) = \frac{a_0(F)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{a_n(f) \sin nx}{n} - \frac{b_n(f) \cos nx}{n} \right).$$

En particulier, pour  $x = 0$  :

$$F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0 = \frac{a_0(F)}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n},$$

d'où  $\frac{a_0(F)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n}$ . Donc la série  $\sum \frac{b_n}{n}$  converge.

3. On pose  $g = f - \frac{a_0(f)}{2} = f - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = f - \bar{f}$  où  $\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$ .

La fonction  $g$  vérifie les hypothèses de la première question, et ses coefficients de Fourier d'indice supérieur ou égal à 1 sont les mêmes que ceux de  $f$ . Donc la fonction  $s \mapsto G(x) = \int_0^x g(t) dt$  est  $2\pi$ -périodique, continue sur  $\mathbb{R}$ , et de classe  $C^1$  par morceaux, dont la dérivée sur  $[-\pi, \pi]$ , sauf en un nombre fini de points, est  $f - \bar{f}$ . Ainsi, pour tout  $x$  réel (et pas seulement dans  $[-\pi, \pi]$ ) :

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{a_n(f) \sin nx}{n} - \frac{b_n(f) \cos nx}{n} \right) \\ &= \int_0^x f - \int_0^x \bar{f} = \int_0^x f - x\bar{f}. \end{aligned}$$

Soit alors  $\varphi$  la fonction impaire  $2\pi$ -périodique qui vaut  $x$  sur  $] -\pi, \pi[$ . Nous savons que  $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi) = 0$ , et pour tout  $x \in ] -\pi, \pi[$ ,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{2n}.$$

Évidemment, si  $x \in ]-\pi, \pi[$ ,  $G(x) + \bar{f}\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$ . De plus,  $F$ , somme de deux fonctions  $2\pi$ -périodiques vérifiant la condition de Dirichlet, est somme de sa série de Fourier et vérifie la condition de Dirichlet. Par addition des développements en série de Fourier de  $G$  et  $\varphi$  :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(a_n(f) + (-1)^{n+1}a_0(f)) \sin nx}{n} - \frac{b_n(f) \cos nx}{n} \right),$$

qui coïncide avec  $\int_0^x f(t) dt$  sur  $]-\pi, \pi[$ .

Cette fonction  $F$  est somme de sa série de Fourier uniformément, si et seulement si  $\bar{f} = 0$ , car  $F = G + \varphi$ , et  $G$  est elle-même somme de sa série de Fourier normalement convergente. Bien-entendu, si  $\bar{f} \neq 0$ , la fonction définie par la somme ci-dessus n'est pas égale à  $\int_0^x (f - \bar{f})$  hors de  $]-\pi, \pi[$ .

**23.** Rappelons qu'elle est définie sur  $\mathbb{R}$  et continue sur tout intervalle de la forme  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ ,  $0 < \varepsilon < \pi$ . Si elle était continue par morceaux, sa série de Fourier serait  $\sum \frac{\sin nx}{\ln n}$ , d'après l'exercice 6. Mais alors, d'après l'exercice 22, ou l'égalité de Parseval, la série  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  devrait converger, ce qui n'est pas le cas.

**24.** Nous avons déjà vu à la proposition 13 page 779 du cours que lorsque la suite  $(b_n)$  décroît et tend vers 0,  $\sum b_n \sin nx$  converge simplement, et uniformément sur tout intervalle  $]\varepsilon, 2\pi - \varepsilon[$ , où  $0 < \varepsilon < \pi$ . Posons :

$$R_n(x) = b_n \sin nx + \dots + b_{n+q} \sin(n+q)x + \dots = \sum_{p=n}^{+\infty} b_p \sin px.$$

Pour montrer que la condition  $(nb_n)_n \rightarrow 0$  entraîne la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  de la série trigonométrique, nous allons utiliser pour  $0 < x < \pi$ , la relation  $|R_n(x)| \leq 2nb_n \frac{\pi}{nx} = \frac{b_n \pi}{x}$  (qui lie  $b$  à  $x$ ), établie dans l'exercice 7.

De plus, dans l'expression de  $R_n(x)$ , nous allons découper la somme en mettant de côté les  $b_n \sin nx$  tant que  $n$  n'est pas trop grand devant  $\pi/x$ , autrement dit tant que  $\frac{\pi}{nx}$  n'est pas trop petit. De manière précise, une fois choisie pour cela une constante  $\lambda$  arbitraire strictement positive (sa valeur importe peu), on écrit :

$$R_n(x) = \sum_{\substack{p \geq n \\ px \leq \lambda}} b_p \sin px + \sum_{\substack{p \geq n \\ px < \lambda}} b_p \sin px = A_n + B_n.$$

Le terme  $B_n$  est majoré comme plus haut, mais en remplaçant  $n$  par le premier indice  $p_n$  tel que  $p_n x > \lambda$  :

$$|B_n| = \left| \sum_{p=p_n}^{+\infty} b_p \sin px \right| \leq b_{p_n} \frac{\pi}{x} < \frac{1}{\lambda} p_n b_{p_n},$$

qui tend vers 0 lorsque  $p$  tend vers l'infini, donc  $B_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  si  $n$  tend vers l'infini.

Pour majorer  $A_n$ , pour les  $n$  tels que  $p_n > n$  (sinon  $A_n = 0$ ), on utilise simplement le fait que  $|\sin t| \leq |t|$ , et :

$$|A_n| = \left| \sum_{p=n}^{p_n-1} b_p \sin px \right| \leq \sum_{p=n}^{p_n-1} b_p px = x \sum_{p=n}^{p_n-1} p b_p \leq x(p_n - n)\varepsilon_n,$$

où  $\varepsilon_n = \sup_{p \geq n} p|b_p|$ . Donc  $|A_n| \leq \lambda \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Montrons maintenant que la condition  $(nb_n)$  est nécessaire à la convergence uniforme de la série trigonométrique. En effet, pour  $x = \frac{\pi}{2n}$  :

$$\sum_{p=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n b_p \sin px \geq \left( \sin \frac{\pi}{4} \right) b_n \sum_{p=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n (1) \geq \left( \sin \frac{\pi}{4} \right) \frac{nb_n}{2},$$

donc  $nb_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

## Chapitre 21

1. Non, car si l'on fixe  $v \neq 0$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $N(tv) = |t|N(v)$  n'est pas dérivable en 0.
2. Les développements limités :

$$\sin y = y + o(y^2) = y + o(\|(x, y)\|^2), \quad \sin x = x + o(x^2) = x + o(\|(x, y)\|^2)$$

entraînent que  $N(x, y) = x \sin y - y \sin x = o(\|(x, y)\|^2)$ , et  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par opérations algébriques sur des fonctions de classe  $C^1$ .

Comme  $f(x, 0) = 0$  pour tout  $x$ , on voit que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ . Or, ailleurs qu'à l'origine :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\sin(y)x^2 - \sin(y)y^2 + y \cos(x)x^2 + y^3 \cos(x) - 2xy \sin(x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

De la même manière que pour  $N(x, y)$ , le numérateur  $N_1(x, y)$  se développe en :

$$N_1(x, y) = -\frac{2}{3}y^3x^2 + \frac{1}{6}y^5 - \frac{1}{6}yx^4 + o(\|(x, y)\|^5),$$

donc cette dérivée partielle admet 0 pour limite lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$  en restant différent de  $(0, 0)$ . Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0, 0)$ .

Il en est de même par symétrie pour l'autre dérivée partielle, et  $f$  est  $\mathcal{C}^1$

3. Fixons  $y = 0$ . La fonction  $x \mapsto g(x) = f(x, 0)$  est continue, et sa dérivée  $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$  sur  $\mathbb{R}^*$  admet une limite en 0, donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Mais alors  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  est la limite de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  lorsque le couple  $(x, 0)$  tend vers  $(0, 0)$  en restant différent de  $(0, 0)$ , et cette limite est celle de  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$  en restant différent de  $(0, 0)$ . Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

4. 1. Si  $0 < \|x\| \leq 1$ ,  $f(x) = \|x\|^\alpha f(x/\|x\|)$ . Mais  $f$  est continue et donc bornée sur le compact  $S^1$  des  $x$  de norme 1. Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .
2. Fixons  $x$  non nul, et notons  $\ell = d_0 f$ . Lorsque  $t$  tend vers 0 en restant strictement positif :

$$f(tx) = t^\alpha f(x) = \ell(tx) + o(\|tx\|) = t\ell(x) + o(t),$$

$$\text{donc } f(x) = t^{1-\alpha}\ell(x) + o(t^{1-\alpha}).$$

En faisant tendre  $t$  vers 0, on voit que  $f(x) = 0$ .

3. Le même calcul montre que, dans ce cas,  $f(x) = \ell(x)$  si  $x \neq 0$ . Réciproquement, toute application affine est différentiable.  
Pour l'exemple proposé,  $f$  est homogène de degré 1 sans être affine donc elle n'est même pas différentiable en  $(0, 0)$ .

4. Pour  $\alpha > 1$ , et  $x$  non nul  $f(x) = \|x\|^\alpha f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ .

Donc  $\frac{f(x)}{\|x\|} = \|x\|^{\alpha-1} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ , qui tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $(0, 0)$ , puisqu'on a vu que  $f$  était bornée sur  $S^1$ . Donc  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ , de différentielle nulle en  $(0, 0)$ .

5. Fixons un instant  $t \geq 0$ . Pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}(f(tx, ty)) = t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)$ .

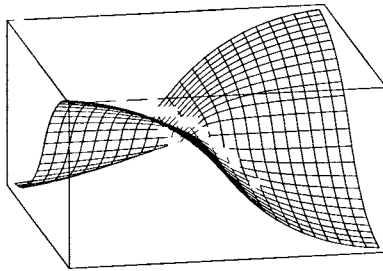
Mais d'autre part  $\frac{\partial}{\partial x}(t^\alpha f(x, y)) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ . Donc, si  $f$  est homogène de degré  $\alpha$  sur  $U$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est homogène de degré  $\alpha - 1$  sur  $U$ .

De  $f(x, 0) = x^\alpha f(1, 0)$ , il résulte que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ . D'après la première question, la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , continue sur  $U$  et positivement homogène de degré  $\alpha - 1$ , est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

De même pour l'autre dérivée partielle.

L'exemple proposé est une fonction positivement homogène de degré  $\alpha/2 > 1$ , et donc de classe  $\mathcal{C}^1$ .

5 Elle est évidemment continue sur  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Munissons  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ . Comme  $\sin u = O(u)$  lorsque  $u$  tend vers 0, et  $xy = O(\|(x, y)\|^2)$  lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$  (pour toute norme),  $f(x, y) = O(\|(x, y)\|)$  lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ , et  $f$  est donc continue en  $(0, 0)$ .



Pour l'existence et la continuité des dérivées partielles, par symétrie, il suffit d'étudier  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

Dans chacun des quadrants ouverts délimités par les axes,  $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\varepsilon x + \eta y}$ , où les signes  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont constants sur le quadrant. Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur ces quadrants, de dérivée partielle par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y \cos(xy)}{\varepsilon x + \eta y} - \frac{\varepsilon \sin(xy)}{(\varepsilon x + \eta y)^2}.$$

En un point  $(0, y_0)$  tel que  $y_0 \neq 0$ , la fonction est nulle, et, pour  $x \neq 0$  :

$$\frac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x} = \frac{\sin(xy_0)}{x(|x| + |y_0|)},$$

qui tend vers  $\frac{y}{|y_0|}$  lorsque  $x$  tend vers 0. Donc  $f$  admet une dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \frac{y}{|y_0|}.$$

L'expression de  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  écrite plus haut pour  $x \neq 0$  et  $y$  voisin de  $y_0$  entraîne aisément que :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x \neq 0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y_0}{\eta y_0} = \frac{y_0}{|y_0|}.$$

Enfin, lorsque  $x = 0$ , et  $y \neq 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y}{|y|}$  qui tend aussi vers  $\frac{y_0}{|y_0|}$  lorsque  $y$  tend vers  $y_0$ . Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0, y_0)$ .

Un calcul analogue montre la continuité de cette même dérivée partielle en  $(x_0, 0)$ . Ainsi,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  privé de  $(0, 0)$ .

Comme  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y}{|y|}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

6. On fixe  $y$ , et le théorème de dérivation sous le signe somme donne la formule de dérivation du lemme. La continuité de  $\frac{\partial F}{\partial x}$  (par rapport aux deux variables) est une application directe à  $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, t)$  de la continuité d'une intégrale en fonction d'un paramètre (ici,  $(x, y)$ ).
7. 1. Si  $f$  est de classe  $C^1$ , on peut écrire :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt = (y - x) \int_0^1 f'(x + \tau(y - x)) d\tau.$$

Lorsque  $x = y$  :

$$\int_0^1 f'(x + \tau(y - x)) d\tau = \int_0^1 f'(x) d\tau = f'(x) = F(x).$$

Donc, pour tout couple  $(x, y) \in I^2$  :

$$F(x, y) = \int_0^1 f'(x + \tau(y - x)) d\tau.$$

La continuité de  $F$  résulte alors du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (ici, le paramètre est le couple  $(x, y)$ ).

Réciproquement, si  $F$  est continue, l'application  $x \mapsto F(x, x) = f'(x)$  est continue.

2. Si  $f$  est de classe  $C^2$ , la fonction  $f'$  est de classe  $C^1$  et la fonction de trois variables  $(x, y, t) \mapsto H(x, y, t) = f'(x + \tau(y - x))$  vérifie les hypothèses de l'exercice 6, ce qui permet de conclure.
8. 1. L'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x) = 0$  si  $x \leq 0$  et  $\varphi(x) = e^{-1/x}$  si  $x > 0$  est de classe  $C^\infty$ , et  $f$  est la composée de  $\varphi$  et de  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , donc  $f$  est de classe  $C^\infty$ . Il est commode de définir  $\varphi$  sur tout  $\mathbb{R}$  même si  $x^2 + y^2$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , afin d'utiliser le théorème de dérivation des fonctions composées directement.
2. La restriction de  $g$  au disque ouvert de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1 est somme et composée de fonctions de classe  $C^\infty$ , et est donc elle-même de classe  $C^\infty$ . La restriction de  $g$  au complémentaire  $U$  du singleton  $\{(0, 0)\}$  est la composée de l'application  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ , et de l'application  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $t \mapsto e^{-1/(1-t)}$  si  $t < 1$  et  $t \mapsto 0$  si  $t \geq 1$ . Comme  $\psi$  est de classe  $C^\infty$ , il en est de même de  $g$ .

9 Nous allons déterminer les dérivées de  $\Phi$  le long des vecteurs de la base "canonique" de  $E$  formée des  $X^k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , au point  $P \in E$ , et montrer qu'elles dependent continûment de  $P$ , ce qui permet de conclure.

Si l'on fixe  $P$  et l'indice  $k$ , il s'agit de dériver l'application :

$$h \mapsto \int_0^1 f(t, P(t) + ht^k) dt$$

en  $h = 0$ .

Les hypothèses faites sur  $f$  entraînent que l'application  $(t, h) \mapsto f(t, P(t) + ht^k)$  est de classe  $C^1$  donc on peut dériver sous le signe  $\int$ , et :

$$\left( \frac{d}{dh} \int_0^1 f(t, P(t) + ht^k) dt \right)_{(h=0)} = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x}(t, P(t)) dt.$$

Si  $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ , l'intégrale  $\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x}(t, P(t)) dt$  dépend continûment du paramètre  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  (en munissant  $\mathbb{R}^{n+1}$  de n'importe quelle norme : elles sont toutes équivalentes), et l'application  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto P$  est lineaire bijective bicontinue quelle que soit la norme dont  $E$  soit équipé, donc l'application dérivée partielle  $P \mapsto \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x}(t, P(t)) dt$  est continue.

10. Comme  $|U_n(x, y)| \leq \frac{1}{n^2}$ , la série de fonctions est normalement convergente. De plus,  $\frac{\partial U_n}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x}{n} \exp(-n(x^2 + y^2))$ , terme général

d'une série (simplement) convergente sur  $\mathbb{R}^2$ . En effet, si  $x^2 + y^2 \neq 0$ ,  $U_n(x, y) = O(\exp(-n(x^2 + y^2)))$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, et si  $x^2 + y^2 = 0$ ,  $\frac{\partial U_n}{\partial x}(x, y) = 0$  est nulle.

Par ailleurs, notons  $\varphi_n(t) = tz^{-nt^2}$ . Alors  $\sup_{t \geq 0} \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-1/2}$ . Donc,

$\frac{\partial U_n}{\partial x}(x, y) \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2}{e}}$ . Ainsi, la série  $\sum_n \frac{\partial U_n}{\partial x}(x, y)$  converge normalement. On

peut appliquer, à  $y$  fixé, le théorème de dérivation des séries, qui prouve que  $U(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x, y)$  a une dérivée partielle par rapport à  $x$  égale à  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial U_n}{\partial x}$ .

Comme cette fonction, somme d'une série normalement convergente de fonctions continues de deux variables, est continue, la dérivée partielle de  $U$  par rapport à  $x$  est continue (comme fonction de deux variables). Pour  $\frac{\partial U}{\partial x}$ , on échange les rôles de  $x$  et  $y$  dans la preuve.

**11. 1.** Pour abrégé, notons, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_i$  l'application  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même, et  $f_{ij}$  l'application  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ . De plus, si  $f$  et  $g$  sont deux applications de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même, notons  $(f|g)$  l'application  $x \mapsto (f(x)|g(x))$ .

La relation  $df_x \in O(n)$  se traduit par :  $\forall i, j, (f_i | f_j) = \delta_{ij}$ . En dérivant partiellement par rapport à  $x_k$  cette relation, on trouve :

$$\forall i, j, k, (f_{ki} | f_j) + (f_{kj} | f_i) = (f_{ki} | f_j) + (f_{jk} | f_i) = 0.$$

En permutant circulairement les indices, cela donne :

$$\forall i, j, k, (f_{ij} | f_k) + (f_{ik} | f_j) = (f_{ij} | f_k) + (f_{ki} | f_j) = 0.$$

$$\forall i, j, k, (f_{jk} | f_i) + (f_{ji} | f_k) = (f_{jk} | f_i) + (f_{ij} | f_k) = 0,$$

car, d'après le théorème de *Schwarz* sur les dérivées partielles secondes d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $f_{ij} = f_{ji}$  et de même avec les deux autres couples d'indices.

Si l'on pose  $a = (f_{jk} | f_i)$ ,  $b = (f_{ki} | f_j)$ , et  $c = (f_{ij} | f_k)$ , on voit que les trois égalités de droite s'écrivent maintenant :  $b + a = c + b = a + c = 0$ , d'où  $a = b = c = 0$ . Mais alors, pour tout  $i, j, k$ ,  $(f_{ij} | f_k) = 0$ . Or, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la famille des  $f_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $f_{ij}$  est nul pour tout couple  $(i, j)$  (et tout  $x$ ), et la différentielle de  $f$  est constante, autrement dit  $f$  est affine.



2. Maintenant,  $(f_1 | f_2) = 0$ , dont la dérivation partielle par rapport à  $x_2$  donne :

$$(f_{21} | f_2) + (f_{22} | f_1) = 0.$$

D'autre part,  $(f_1 | f_1) = (f_2 | f_2)$  donne, par dérivation partielle par rapport à  $x_1$  :

$$2(f_{11} | f_1) = 2(f_{21} | f_2) = -2(f_{22} | f_1)$$

D'où :

$$(f_{11} + f_{22} | f_1) = (f_{11} | f_1) + (f_{22} | f_1) = 0.$$

En échangeant les indices dans la preuve, on trouve  $(f_{11} + f_{22} | f_2) = 0$ , ce qui signifie, puisque  $f_1$  et  $f_2$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$ , pour tout  $x$ , que  $f_{11} + f_{22} = 0$ . D'où le résultat.

3. En dimension  $n \geq 3$ , on peut montrer de la même manière que :

$$(f_{11} | f_1) + (f_{22} | f_1) + \dots + (f_{nn} | f_1) = -(n - 2)(f_{11} | f_1),$$

ce qui ne nous avance guère (tout en restant curieux). Mais on a vu dans le cours que la différentielle d'une inversion plane était une similitude indirecte, et un calcul analogue permet d'établir le même résultat en dimension 3. Il reste à vérifier que le Laplacien d'une des applications composantes n'est pas nul.

En notant maintenant  $x, y$ , et  $z$  les coordonnées des points l'inversion s'écrit,  $(x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ , avec  $X = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$  et de même pour  $Y$  et  $Z$  (avec  $y$  et  $z$  au numérateur). Le Laplacien de la fonction  $X$  est  $\Delta X = -\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ , en général non nul.

12. La différentielle de  $f$  en  $A$  est évidemment

$$df_A : H \mapsto {}^tAH + {}^tHA.$$

Ainsi,  $\text{Ker } df_A$  est l'ensemble des matrices carrées  $H$  telles que  ${}^tAH$  soit antisymétrique, car  ${}^t({}^tAH) = {}^tHA$ .

Or une matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$  est antisymétrique si, et seulement si, pour tout vecteur colonne  $U$ , on a  ${}^tUMU = 0$ . En effet, cette condition est évidemment vérifiée par les matrices antisymétriques, et, réciproquement, si, pour tout vecteur colonne,  ${}^tUMU = 0$ , alors, pour deux vecteurs colonnes  $U$  et  $V$ , on a :  ${}^t(U + V)M(U + V) = 0$ , d'où  ${}^tUMV + {}^tVMU = 0$ , et il en résulte que  $M$  est antisymétrique.

Donc  $H \in \text{Ker}(df_A) \iff \forall U, {}^tU^tAHU = 0$ .

Soit  $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  et  $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  dont les matrices dans la base canonique sont respectivement  $A$  et  $H$ . Nous cherchons donc la dimension de l'ensemble des  $h$  tels que, pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $(u | (a^* \circ h)(u)) = 0$ , autrement dit l'ensemble des  $h$  tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad a(u) \perp h(u). \quad (*)$$

Soit  $E'$  un supplémentaire de  $\text{Ker}(a)$  (peu importe lequel), et  $F = \text{Im}(a)^\perp$ . La condition  $\forall u \in \text{Ker}(a), a(u) \perp h(u)$  n'impose rien à  $h$ . Notons  $\bar{a}$  la bijection de  $E'$  sur  $\text{Im}(a)$  définie par restriction de  $a$ . La relation  $(*)$  équivaut donc à :  $\forall v \in \text{Im}(a), h \circ \bar{a}^{-1}(v) \perp v$ .

L'application  $g$  de  $\text{Im}(a)$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par  $g(v) = h \circ \bar{a}^{-1}(v)$  se décompose en  $g(v) = g_1(v) + g_2(v)$ , où  $g_1 \in \mathcal{L}(\text{Im}(a))$  et  $g_2 \in \mathcal{L}(\text{Im}(a), F)$ . Comme  $(g_2(v) | v) = 0$  pour tout  $v$  (puisque  $F = \text{Im}(a)^\perp$ ), la relation  $(*)$  équivaut donc à :  $\forall v \in \text{Im}(a), (g_1(v) | v) = 0$ , ce qui revient à dire que  $g_1$  est anti-autoadjoint, i.e.  $g_1^* = -g_1$ . Finalement,  $h$  vérifie  $(*)$  si, et seulement si :

il existe  $g_1 \in \mathcal{L}(\text{Im}(a))$  anti-autoadjoint, il existe  $g_2 \in \mathcal{L}(\text{Im}(a), \text{Im}(a)^\perp)$  et il existe  $g_0 \in \mathcal{L}(\text{Ker}(a), \mathbb{R}^n)$  telles que, pour tout  $v = v_1 + v_2$  (où  $v_1 \in \text{Ker}(a)$  et  $v_2 \in E'$ ),  $h(v) = g_0(v_1) + g_1(a(v_2)) + g_2(a(v_2))$ .

La dimension de  $\text{Ker } df_A$  est donc  $m = n_0 + n_1 + n_2$ , où  $n_0 = n(n-r)$ ,  $n_1 = r(r-1)/2$ , et  $n_2 = (n-r)r$ , soit  $\dim(\text{Ker}(df_A)) = m = n^2 - \frac{r(r+1)}{2}$ .

13. 1. Si  $U$  est  $\mathbb{R}^2$  privé de la demi-droite verticale définie par les équations  $x = 0$  et  $y \geq 0$ , on définit  $f$  sur  $U$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ y^2 & \text{si } y \geq 0 \text{ et } x > 0, \\ -y^2 & \text{si } y \geq 0 \text{ mais } x < 0. \end{cases}$$

Sa dérivée partielle par rapport à  $x$  est évidemment nulle. De plus :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 2x & \text{si } y \geq 0 \text{ et } x > 0, \\ -2x & \text{si } y \geq 0 \text{ et } x < 0. \end{cases}$$

Elle est donc elle aussi continue. Mais pour  $y > 0$  et  $x > 0$ ,

$$f(x, y) = -f(-x, y) > 0.$$

On observera que  $U$  est un ouvert étoilé.

2. Une condition (évidemment) suffisante est que l'intersection de  $U$  avec chaque droite  $\Delta_{y_0}$  d'équation  $y = y_0$  soit "un intervalle", c'est-à-dire de la forme  $]a(y_0), b(y_0)[ \times \{y_0\}$  ( $a$  ou  $b$  éventuellement infini), autrement dit *connexe* (par arcs). En effet, dans ce cas, l'application partielle  $x \mapsto f(x, y_0)$  de  $]a(y_0), b(y_0)[$  dans  $\mathbb{R}$  a une dérivée nulle, et est donc constante, cette constante pouvant être prise pour  $h(y_0)$ . En particulier, si l'on fait tourner d'un angle droit l'ouvert  $U$  de la première question, une fonction  $f$  sur  $U$  telle que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  ne dépend que de  $y$ .

14 L'équation aux dérivées partielles est linéaire, et nous pouvons utiliser les deux principes déjà vus pour les équations différentielles linéaires :

- *l'ensemble des solutions est un espace affine*, c'est-à-dire qu'on trouve la solution générale en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation sans second membre ;
- *principe de superposition* : si le second membre est somme de deux fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , on résout l'équation avec successivement  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  comme second membre, et on ajoute les solutions obtenues.

Nous avons donc à résoudre l'équation :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2. \tag{25.1}$$

Le second membre est homogène de degré 2. Or, si  $\varphi$  est une fonction homogène de degré  $\delta \neq 0$  on voit immédiatement que  $f = \frac{1}{\delta} \varphi$  vérifie  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \delta f = \varphi$ . Dans le cas présent une solution particulière est donc  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ .

De plus, les solutions sur  $U$  de  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  sont les fonctions *homogènes de degré 0*, c'est-à-dire constantes sur les demi-droites d'origine  $(0, 0)$  (exclus), autrement dit les fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto h(\theta)$ , où  $\theta$  est un argument de  $x + iy$ .

En procédant de même avec l'autre terme  $\sqrt{x^4 + y^4}$ , on voit que les solutions sur  $U$  de l'équation donnée sont les fonctions de la forme suivante, avec  $h$  comme ci-dessus :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + y^4} + h(\theta).$$

15. Nous allons chercher les constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  telles que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , et telles que le changement de variable  $u = \alpha x + \beta y, v = \gamma x + \delta y$  transforme l'équation aux dérivées partielles en équation de la forme  $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$  lorsque  $f(x, y) = g(u, v)$ .

Pour tout quadruplet  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  tel que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , l'application  $g \mapsto f$ , où  $f(x, y) = g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ , est bijective de l'ensemble des fonctions  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  dans lui-même. De plus,

$$\begin{aligned} a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} &= a \left( \alpha \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \gamma \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) + b \left( \beta \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \delta \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= (a\alpha + b\beta) \frac{\partial g}{\partial u} + (a\gamma + b\delta) \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

formule dans laquelle on convient que la notation  $\varphi(u, v)$  signifie strictement  $\varphi(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ , et que les seules "variables" sont  $x$  et  $y$  (le  $u$  au dénominateur de  $\frac{\partial g}{\partial u}$  rappelant seulement qu'on dérive  $g$  par rapport à sa première variable).

Choisissons  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  tels que  $a\gamma + b\delta = 0$ , mais  $a\alpha + b\beta \neq 0$ , ce qui est toujours possible. Par exemple,  $\gamma = b$  et  $\delta = -a$ , les nombres  $\alpha$  et  $\beta$  étant choisis de sorte que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  : par exemple,  $\alpha = a$  et  $\beta = b$ , mais nous verrons que les valeurs numériques de  $\alpha$  et  $\beta$  n'interviennent pas dans le résultat, et importent donc peu. La relation  $\forall x, y, a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  est équivalente à la

$$\text{relation } \forall x, y, \frac{\partial g}{\partial u}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = 0.$$

Comme l'application  $(x, y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$  est bijective, cela équivaut à :

$$\forall u, v, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 0,$$

Ces changements de notations sont fréquents dans ce domaine, et on n'est pas toujours obligé de les expliciter comme c'est fait ici, mais il faut être sûr de ne pas confondre les objets manipulés...

Ainsi,  $f$  vérifie l'équation si, et seulement si,  $g$  dépend seulement de  $v$  i.e. il existe une fonction  $h$  d'une seule variable et de classe  $C^1$  telle que  $g(u, v) = h(v)$ . Les fonctions  $f$  solutions sont alors les fonctions  $f(x, y) = h(bx - ay)$ , où  $h$  est une fonction de classe  $C^1$  d'une seule variable

16. Indiquons d'abord une méthode générale pour résoudre une équation aux dérivées partielles avec un changement de variable  $\Phi$  donne sous la forme  $(x, y) = \Phi(u, v)$ , soit  $x = \varphi(u, v)$  et  $y = \psi(u, v)$ , dont nous admettons ici que c'est un  $C^1$  difféomorphisme.

Le problème est de trouver l'équation aux dérivées partielles que vérifie  $g(u, v)$  définie par  $f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = g(u, v)$ , si  $f$  vérifie une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\forall(x, y), \quad H\left(x, y, f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \quad (1)$$

Il faut donc chercher à "exprimer les dérivées partielles de  $f$  en fonction de celles de  $g$ " (et non le contraire). Or, si l'on note  $g_u = \frac{\partial g}{\partial u}$ ,  $g_v = \frac{\partial g}{\partial v}$ , On voit que

$$\begin{pmatrix} g_u & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \circ \Phi & f_y \circ \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \circ \Phi & f_y \circ \Phi \end{pmatrix} P,$$

où l'on veillera bien à laisser les coefficients de la jacobienne  $P$  de  $(u, v) \mapsto (x, y)$  en fonction de  $u$  et  $v$ . On en tire  $f_x \circ \Phi$  et  $f_y \circ \Phi$  en fonction de  $g_u$  et  $g_v$  en inversant la matrice  $P$ , et on reporte la valeur obtenue dans la formule suivante équivalente à (1) :

$$\forall(u, v), \quad H(\varphi(u, v), \psi(u, v), f \circ \Phi(u, v), f_x \circ \Phi, f_y \circ \Phi) = 0. \quad (2)$$

Montrons sur l'exemple proposé l'utilisation de cette recette, et son écriture allégée par la traditionnelle assimilation de la lettre  $x$  à la fonction  $(u, v) \mapsto x = \varphi(u, v)$  (idem pour  $y$ ) qui fait écrire, par exemple,  $x_u$  au lieu de  $\varphi_u$

On commence par vérifier que le changement de variable définit bien un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme, afin que l'équation aux dérivées partielles (2) vérifiée par  $g$  soit bien équivalente à (1). Pour ce point, le plus simple c'est le cas ici, est d'exprimer  $u$  et  $v$  en fonction de  $x$  et  $y$  (en veillant bien à ce qu'on puisse en tirer en retour  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et  $v$ ). Remarquons au passage que  $(x, y) = \Phi(u, v) \implies (u, v) = \Theta(x, y)$  signifie simplement que  $\Theta$  est une inverse à gauche de  $\Phi$ , d'où la nécessité du calcul dans l'autre sens. Pour  $x, y, u, v$  positifs on a bien (en calculant  $y/x$ ) :

$$(x = u/v, y = uv^\alpha) \iff (v = (y/x)^{1/(\alpha+1)}, u = xv).$$

Maintenant, la jacobienne  $P$  de  $(x, y)$  en fonction de  $(u, v)$  est :

$$P = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ v^\alpha & \alpha uv^{\alpha-1} \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha v & 1/v^\alpha \\ -v^2/u & 1/(uv^{\alpha-1}) \end{pmatrix},$$

d'où, en comprenant bien  $x$  et  $y$  comme fonctions de  $u$  et  $v$  (seules "variables" du calcul) :

$$\begin{aligned} -xf_x + \alpha yf_y &= (g_u \ g_v) P^{-1} \begin{pmatrix} -x \\ \alpha y \end{pmatrix} \\ &= (g_u \ g_v) \frac{1}{\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha v & 1/v^\alpha \\ -v^2/u & 1/(uv^{\alpha-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u/v \\ \alpha uv^\alpha \end{pmatrix} \\ &= (g_u \ g_v) \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix} = -vg_v = -v \frac{\partial g}{\partial v}. \end{aligned}$$

L'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $g$  est donc :

$$-v \frac{\partial g}{\partial v} = g.$$

Pour  $u$  fixé, la fonction  $v \mapsto g(u, v)$  est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 de solution immédiate (sur  $\mathbb{R}^{*+}$ ) :  $v \mapsto \frac{h(u)}{v}$ , et  $g$  est  $C^1$  si et seulement si la fonction  $h$  est  $C^1$ . On exprime le résultat en fonction de  $x$  et  $y$ , et les solutions cherchées sont donc les fonctions  $(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{h(x(y/x)^{1/(\alpha+1)})}{(y/x)^{1/(\alpha+1)}}$ , où  $h$  est une fonction  $C^1$  quelconque à une variable.

Insistons sur le fait que la méthode donnée permet d'éviter d'avoir à deviner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $g$ .

17. 1. Ce point est immédiat, car si les fonctions  $x$  et  $y$  de  $u$  et  $v$  vérifient ((\*)), alors :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

et  $f$  vérifie (1) si, et seulement si,  $g$  vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \gamma(u, v)g + \delta(u, v), \quad (2)$$

où  $\gamma(u, v) = c(x(u, v), y(u, v))$  et  $\delta(u, v) = d(x(u, v), y(u, v))$ . C'est bien, pour chaque  $v$  fixé, une équation différentielle linéaire par rapport à la variable  $u$ .

2. Le système ((\*)) s'écrit ici tout simplement :  $\frac{\partial x}{\partial u} = x$  et  $\frac{\partial y}{\partial u} = -y$ . La solution (trop) générale en est :  $x = \lambda(v)e^u$  et  $y = \mu(v)e^{-u}$ . Il faut choisir les fonctions  $\lambda$  et  $\mu$  pour un changement de variables qui soit un difféomorphisme, et, si possible, de telle sorte que les solutions de (2) soient faciles à calculer.

On peut commencer par chercher les solutions de (1) sur chaque quadrant de coordonnées non nulles. Choisissons  $\lambda(v) = \mu(v) = v$ . Pour  $x > 0$  et  $y > 0$ , on pose donc  $x = ve^u$  et  $y = ve^{-u}$ ,  $v > 0$  et  $u$  quelconque. En tirant  $u = \frac{1}{2} \ln(x/y)$  et  $v = \sqrt{xy}$ , il est maintenant clair que l'application  $(u, v) \mapsto (x, y)$  choisie est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{**}$  sur  $\mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}^{**}$ .

L'équation (2) devient  $\frac{\partial g}{\partial u} = 2v^2 \operatorname{ch}(2u)g$ , dont la solution générale sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{**}$  est  $g(u, v) = h(v)e^{v^2 \operatorname{sh}(2u)}$ ,  $h$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{**}$ . La solution  $f$  cherchée est :

$$f(x, y) = h(\sqrt{xy})e^{2(x^2 - y^2)}.$$

Sur les autres quadrants, il faut remplacer  $\sqrt{xy}$  par  $\sqrt{|xy|}$ . Cela donne quatre expressions similaires pour les quatre quadrants, avec des fonctions  $h_i$ ,  $i$  allant de 1 à 4. On vérifie alors facilement qu'il n'y a de solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  que si chaque  $h_i$  a un prolongement continu de dérivée nulle en 0, et même tel que  $h'_i(u)/u$  ait une limite lorsque  $u > 0$  tend vers 0.

**18.** 1. Cette fois-ci, ce sont  $u$  et  $v$  qui sont exprimés simplement en fonction de  $x$  et  $y$ . L'application  $(x, y) \mapsto (xy, x + y) = (u, v)$  admet pour Jacobien :

$\operatorname{Jac}(u, v) = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y - x$ . Il est nul lorsque  $x = y$ . Pour montrer que  $(x, y) \mapsto (u, v)$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $U = \{(x, y) / x > y\}$  sur l'ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  des couples  $(u, v)$  tels que  $v^2 - 4u > 0$  il suffit de remarquer que  $x$  et  $y$  sont les solutions de l'équation en  $t$  de degré 2 :  $t^2 - vt + u = 0$  (et de discriminant  $v^2 - 4u$ ). Cela donne :

$$x = \frac{-v + \sqrt{v^2 - 4u}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{-v - \sqrt{v^2 - 4u}}{2}.$$

Pour toute  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , il existe une unique fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$  telle que, pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $g(xy, x + y) = f(x, y)$ . Mais alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(g(xy, x + y)) - \frac{\partial}{\partial y}(g(xy, x + y)) \\ &= y \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y) - x \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) - \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y) \\ &= (y - x) \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y). \end{aligned}$$

Cette expression est égale à  $\alpha(x-y)f(x,y) = \alpha(x-y)g(xy, x+y)$  pour tout  $(x,y) \in U$  si et seulement si, pour tout  $(x,y) \in U$  :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x+y) = -\alpha g(xy, x+y).$$

Ainsi,  $f$  vérifie l'équation (\*) si, et seulement si, pour tout  $(u,v) \in V$  :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = -\alpha g(u,v).$$

Cette équation différentielle (partielle) a pour solution générale :

$$g(u,v) = e^{-\alpha u} h_1(v).$$

Le domaine  $V$  de  $g$  coupe les droites horizontales en des "intervalles", donc on peut dire que les solutions sur  $U$  de l'équation aux dérivées partielles (\*) sont de la forme  $f(x,y) = e^{-\alpha xy} h_1(x+y)$ .

Sur l'autre domaine  $U' = \{(x,y) / x < y\}$ , l'application  $(x,y) \mapsto (xy, x+y) = (u,v)$  est aussi un difféomorphisme d'image  $V$  et les solutions sur  $U'$  de (\*) sont encore de la forme  $f(x,y) = e^{-\alpha xy} h_2(x+y)$ .

Ces deux expressions de  $f$  sont restrictions d'une fonction continue si et seulement si  $h_1 = h_2$ . Les solutions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  sont donc les fonctions de la forme  $f(x,y) = e^{-\alpha xy} h(x+y)$ , où  $h$  est une fonction  $C^1$  d'une variable.

**Remarque** La simplification par  $(x-y)$  nous a permis de trouver tout de suite l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $g$ . Dans le cas général, cette manière de transformer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $g(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y)$ , en remplaçant  $u$  et  $v$  par leur expression, fournit une relation faisant intervenir  $\frac{\partial g}{\partial u}$  et  $\frac{\partial g}{\partial v}$  mais aussi directement  $x$  et  $y$  qu'il faut, par une inversion de fonction, « exprimer en fonction de  $u$  et  $v$  », avant même de résoudre l'équation aux dérivées partielles transformée. La méthode de l'exercice 16 est donc en général meilleure (mais pas ici !).

2. On cherche un changement de variables  $(u,v) \mapsto (x,y)$  cette fois-ci, tel que  $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$ , et  $\frac{\partial y}{\partial u} = -1$ . Le plus simple est un changement de variables affine, et  $x = u + v$ ,  $y = -u + v$  convient, sur tout  $\mathbb{R}^2$ . En notant  $f(x,y) = g(u,v)$ , l'équation aux dérivées partielles devient :  $\frac{\partial g}{\partial u} = 2\alpha u g(u,v)$ , dont la solution générale est  $g(u,v) = \lambda(v)e^{\alpha u^2}$ , soit :

$$f(x,y) = \lambda \left( \frac{x+y}{2} \right) e^{\alpha \left( \frac{x-y}{2} \right)^2} = \lambda \left( \frac{x+y}{2} \right) e^{\alpha \left( \frac{x+y}{2} \right)^2} e^{-\alpha xy},$$

où l'on reconnaît l'autre forme de solution vue en 1



19. Si  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , vérifient  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , l'application :

$$(x, y) \mapsto (u, v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même, et si  $g$  est définie par  $g(u, v) = f(x, y)$  :

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2)D_{11} \\ &+ (2a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\beta\delta)D_{12} + (a\gamma^2 + b\gamma\delta + c\delta^2)D_{22}, \end{aligned}$$

où  $D_{11} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y), \quad D_{12} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$

et  $D_{22} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$

Notant  $\lambda$  et  $\mu$  les deux racines réelles distinctes de l'équation  $at^2 + bt + c = 0$ , on peut poser  $\alpha = \lambda, \beta = 1, \gamma = \mu$  et  $\delta = 1$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 &= a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \\ a\gamma^2 + b\gamma\delta + c\delta^2 &= a\mu^2 + b\mu + c = 0, \end{aligned}$$

$$2a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\beta\delta = \frac{4ac - b^2}{a} \neq 0.$$

Ainsi,  $f$  vérifie l'équation aux dérivées partielles (1) si, et seulement si,  $g$  vérifie :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0. \tag{2}$$

Cette dernière équation aux dérivées partielles admet pour solutions les fonctions de la forme  $g(u, v) = h(u) + l(v)$  où  $h$  et  $l$  sont deux fonctions de classe  $C^2$  d'une seule variable. En effet,  $g$  est solution de classe  $C^2$  de (2) si, et seulement si,  $g$  est  $C^2$  et  $g_2 = \frac{\partial g}{\partial v}$  vérifie  $\frac{\partial g_2}{\partial u} = 0$ , donc  $g_2$  est de la forme  $g_2(u, v) = \varphi(v)$ , où  $\varphi$  est de classe  $C^1$ , et  $g(u, v) = g(u, 0) + \int_0^v \varphi(t) dt = h(u) + l(v)$ . Enfin on voit facilement que  $(u, v) \mapsto h(u) + l(v)$  est de classe  $C^2$  si et seulement si  $h$  et  $l$  sont de classe  $C^2$ .

Les solutions de classe  $C^2$  de (1) sont donc les fonctions  $f$  de la forme :  $f(x, y) = h(\lambda x + y) + l(\mu x + y)$  où  $h$  et  $l$  sont des fonctions de classe  $C^2$  d'une seule variable.

20 Pour toute fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , on note :

$$T(f) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors  $T(f)$  est  $\mathcal{C}^1$ , et on peut écrire :

$$T(T(f)) = x \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = U(f) + T(f).$$

Donc  $U(f) = T(T(f)) - T(f)$ . Pour  $k = 0, 1, 2$ , notons  $E_k = \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Par abus de langage, on notera  $T \circ T$  l'application  $f \mapsto T(T(f))$  de  $E_2$  dans  $E_0$ . Pour toute fonction  $f \in E_2$  :

$$\begin{aligned} (U(f) - n(n-1)\text{Id})(f) &= (T - n\text{Id})((T - (1-n)\text{Id})(f)) \\ &= (T - (1-n)\text{Id})((T - n\text{Id})(f)). \end{aligned}$$

1. Si  $f$  est homogène de degré  $n$ , on sait que  $(T - n\text{Id})(f) = 0$ , donc :

$$(U(f) - n(n-1)\text{Id})(f) = 0.$$

2. Réciproquement, si une fonction  $f \in E_2$  vérifie  $(U(f) - n(n-1)\text{Id})(f) = 0$ , alors  $g = (T - n\text{Id})(f) \in E_1$  et vérifie  $(T - (1-n)\text{Id})(g) = 0$ . Mais alors on sait que  $g$  est homogène de degré  $n-1$ .

L'opérateur différentiel  $T - n\text{Id}$  étant linéaire, étant donnée  $g$ , on trouve la solution générale de l'équation  $(T - n\text{Id})(f) = g$  est obtenue en ajoutant à une solution particulière  $f_1$  une solution de l'équation sans second membre  $(T - n\text{Id})(f) = 0$ , autrement dit une fonction homogène de degré  $n$ . Cherchons une solution particulière  $f_1$  de la forme  $f_1 = \mu g$ . Comme  $T(g) = (n-1)g$  :

$$(T - (1-n)\text{Id})(\mu g) = (2n-1)\mu g,$$

qui est égal à  $g$  si, et seulement si,  $\mu = \frac{1}{2n-1}$ .

Les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  solutions de  $(U - n(n-1)\text{Id})(f) = 0$  sont les sommes de deux fonctions homogènes respectivement de degré  $n$  et  $n-1$ .

**21** On se donne des nombres  $a, b, c, d, \lambda, \mu$  réels, pour l'instant arbitraires et on considère les opérateurs différentiels  $S$  et  $T$  définis sur  $E$  dans l'énoncé. Ainsi :

$$\begin{aligned} S \circ T(f) &= acx^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (ad + bc)xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + bdy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &\quad + (ac - \lambda c - \mu a)x \frac{\partial f}{\partial x} + (bd - \lambda d - \mu b)y \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \mu f, \end{aligned}$$

Pour  $a = c = 2, b = d = 1, \lambda = 1$  et  $\mu = 0$ , on voit que :

$$S \circ T(f) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial f}{\partial x},$$

de sorte que l'équation aux dérivées partielles (1) équivaut à  $S \circ T(f) = xy^2$  (où  $xy^2$  est une notation abrégée pour la fonction de deux variables  $(x, y) \mapsto xy^2$ )

On cherche une solution particulière simple de la forme  $\nu xy^2$ , et on vérifie immédiatement que  $\nu = \frac{1}{12}$  convient. La solution générale est obtenue en ajoutant cette solution à une solution quelconque  $f_0$  de  $S \circ T(f_0) = 0$ .

Dans un premier temps, nous cherchons donc les solutions  $g$  dans  $E$  de :

$$S(g) = 2x \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Si l'on trouve un changement de variable  $(u, v) \mapsto (x, y)$  qui soit un  $C^1$  difféomorphisme et vérifiant :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = y,$$

on a vu dans l'exercice 17 que  $g$  vérifie (2) si, et seulement si, la fonction  $h(u, v) = g(x(u, v), y(u, v))$  vérifie  $\frac{\partial h}{\partial u} = 0$ . Le domaine  $\mathcal{D}$  proposé permet de poser  $x = e^{2u}v$  et  $y = e^u v$  ce qui définit un difféomorphisme de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$  sur  $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$  de réciproque  $u = \ln(x/y)$  et  $v = y^2/x$ . Les solutions  $(u, v) \mapsto h(u, v)$  sont donc les fonctions de  $v$  seul. La solution générale de (2) est donc :

$$g(x, y) = \varphi(y^2/x),$$

où  $\varphi$  est une fonction  $C^1$  d'une seule variable.

Nous devons ensuite trouver les  $f_0$  telles que :

$$T(f_0) = 2x \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} - f_0 = g. \quad (3)$$

Le même changement de variables, pour  $f_0(x, y) = k(u, v)$  et la fonction  $\varphi$  ci-dessus transforme l'équation en  $\frac{\partial k}{\partial u} - k(u, v) = \varphi(v)$ . La solution générale est donc  $k(u, v) = e^u \psi(v) + \varphi(v)$ , où  $\psi$  est une fonction de classe  $C^1$  d'une seule variable. La solution générale de  $S \circ T(f) = xy^2$  est donc :

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \psi \left( \frac{y^2}{x} \right) + \varphi \left( \frac{y^2}{x} \right) + \frac{1}{12} xy^2$$

22. Le Laplacien de  $g$  est :

$$\Delta g = \frac{1}{\operatorname{ch}^4 y} \left( f'' \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} \right) \operatorname{ch}^2 y - f'' \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} \right) \cos^2 x - 2f' \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} \right) \cos x \operatorname{ch} y \right)$$

qui s'annule pour tout couple  $(x, y)$  si, et seulement si,  $f$  vérifie l'équation différentielle (obtenue en divisant le numérateur ci-dessus par  $\operatorname{ch}^2 y$ ) :

$$f''(t) - t^2 f''(t) - 2t f'(t) = (1 - t^2) f''(t) - 2t f'(t) = 0.$$

On reconnaît la dérivée de  $(1 - t^2) f'(t)$ , donc  $f'(t) = \frac{\lambda}{1 - t^2}$ ,  $\lambda$  constante, et les fonctions  $f$  requises sont les fonctions  $f$  de la forme :

$$f(t) = \frac{\lambda}{2} \ln \frac{1 - t}{1 + t} + \mu,$$

$\lambda$  et  $\mu$  constantes.

## Chapitre 22

1. L'application  $f$  est de la forme :  $g(x^2, y, z)$ , où  $g$  est une application linéaire bijective. Donc les points critiques de  $f$  sont exactement les points critiques de l'application  $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$ , à savoir le plan  $x = 0$ , et évidemment  $f$  restreinte à chaque demi-espace délimité par ce plan est un difféomorphisme sur son image, dont la réciproque s'explique facilement.
2. En identifiant  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , on voit que  $f$  est l'application  $z \mapsto nz - z^n$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . La restriction de  $f$  au disque  $D$  est injective. En effet, si  $z$  et  $z'$  ont même image par  $f$ ,  $n(z - z') = z^n - z'^n$ , soit :

$$n(z - z') = -(z - z')(z^{n-1} + z^{n-2}z' + \dots + zz'^{n-2} + z'^{n-1}).$$

Mais si  $|z| < 1$  et  $|z'| < 1$ , alors  $|z^{n-1} + z^{n-2}z' + \dots + zz'^{n-2} + z'^{n-1}| < n$ .  
Donc  $z = z'$ .

Si  $P$  est un polynôme complexe, avec  $P(x + iy) = P(z) = P_1(z) + iP_2(z)$  (les  $P_i$  à valeurs réelles), la matrice jacobienne de  $(x, y) \mapsto (P_1(z), P_2(z))$  est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & -\frac{\partial P_2}{\partial x} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial x} \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est  $|P'(z)|^2$ . Comme  $P'(z) = n(1 - z^{n-1})$  ne s'annule pas sur  $D$ , le jacobien de  $f$  n'est jamais nul sur  $D$  et  $f$  est un difféomorphisme de  $D$  sur son image.

- 3 1. En notant pour abrégé  $X = \sqrt{1+x^2}$  et  $Y = \sqrt{1+y^2}$ , la jacobienne de  $f$  est :

$$M = \begin{pmatrix} Y + \frac{xy}{X} & \frac{xy}{Y} + X \\ \left(1 + \frac{x}{X}\right)(y+Y) & (x+X)\left(1 + \frac{y}{Y}\right) \end{pmatrix}$$

Il en résulte aisément que le jacobien de  $f$  est nul pour tout  $(x, y)$ .

2. Nous verrons la non injectivité de  $f$  plus loin. On soupçonne que  $f(\mathbb{R}^2)$  est une courbe de  $\mathbb{R}^2$ . Pour cela, il est naturel de chercher une relation polynomiale entre  $u$  et  $v$ . Or on remarque que :  $u^2 = x^2 + 2x^2y^2 + y^2 + XY$ , puis que  $v - u = xy + XY$ , de sorte que  $(v - u)^2 = u^2 + 1$ . Ainsi,  $(u, v)$  est sur l'hyperbole d'équation :

$$v^2 - 2uv - 1 = 0.$$

Il reste à savoir quelle partie de cette hyperbole est décrite par  $f(\mathbb{R}^2)$ . Mais lorsque  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ ,  $x + \sqrt{1+x^2}$  décrit  $\mathbb{R}^{++}$ , car c'est une fonction strictement croissante de  $x$  qui varie de 0 à l'infini. Donc  $v$  décrit aussi  $\mathbb{R}^{++}$  lorsque  $(x, y)$  décrit  $\mathbb{R}^2$ . En particulier,  $v$  est toujours strictement positif. De plus, pour  $y = 0$ , on voit que  $v = x + \sqrt{1+x^2}$  (et  $u = x = \frac{v^2 - 1}{2v}$ ), ce qui montre que la branche de l'hyperbole correspondant à  $v > 0$  est bien décrite en entier.

Il est alors immédiat que si  $v$  est donné, et  $(u, v)$  sur la branche d'hyperbole,  $C > 0$ , pour tout  $x$  réel il existe un unique réel  $y$  tel que :

$$y + \sqrt{1+y^2} = \frac{v}{x + \sqrt{1+x^2}},$$

ce qui montre non seulement la non injectivité de  $f$ , mais que l'image réciproque de tout point de l'hyperbole est une courbe paramétrée (en fait, une courbe algébrique régulière).

4. 1. Comme  $f$  est continue, l'image réciproque d'un fermé est fermée. Cela donne les équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ est propre} &\iff \text{si } C \text{ est bornée, } f^{-1}(C) \text{ est bornée} \\ &\iff \forall \beta > 0, \exists \alpha > 0 : f^{-1}(B(0, \beta)) \subset B(0, \alpha) \\ &\iff \forall \beta > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x, \|f(x)\| \leq \beta \implies \|x\| \leq \alpha \\ &\iff \forall \beta > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x, \|x\| > \alpha \implies \|f(x)\| > \beta \end{aligned}$$

2. Pour un raisonnement par l'absurde, soit  $b \notin \text{Im}(f) = V$ . Il existe un élément  $b' \notin \text{Im}(f)$  mais *adhérent* à  $\text{Im}(f)$ . En effet, La distance  $d(b, \overline{V})$  est atteinte en  $b' \in \overline{V}$ , car  $\overline{V}$  est fermé. De plus,  $b' \notin V$ , car  $V$  est ouvert. Nous pouvons donc supposer que  $b$  lui-même est adhérent à  $V$  sans être élément de  $V$  (quitte à remplacer  $b$  par  $b'$ ).

Pour  $r$  réel quelconque strictement positif,  $f^{-1}(B_f(b, r))$  est compact. Soit donc  $(b_n)_n$  une suite d'éléments de  $V$  qui converge vers  $b$ , et choisissons pour tout  $n$  un élément  $x_n$  tel que  $f(x_n) = b_n$ . La suite  $(x_n)$  est bornée. On en extrait une suite convergent vers un élément  $x$  tel que  $f(x) = b$  car  $f$  est continue. Cela donne la contradiction voulue.

3. Soit  $y \in \mathbb{R}^m$ , et  $(y_n)$  une suite convergent vers  $y$ . Pour tout  $n$ , il existe un unique  $x_n$  tel que  $y_n = f(x_n)$ . De même soit  $x$  tel que  $f(x) = y$ . On peut extraire de  $(x_n)$  une sous-suite qui converge vers un élément  $\xi$  tel que, par continuité de  $f$  on ait  $f(\xi) = y$ . Donc  $\xi = x$ . Mais alors la suite bornée  $(x_n)$  admet  $x$  pour seule valeur d'adhérence. C'est donc sa limite.

5. 1. Le jacobien de  $f$  est :

$$J_{(x,y)}(f) = \begin{vmatrix} 1 & a \cos y \\ b \cos x & 1 \end{vmatrix} = 1 - ab \cos x \cos y.$$

Si  $|ab| \geq 1$ , on trouve sans mal un couple  $(x, y)$  où s'annule ce jacobien.

Si  $|ab| < 1$ , il ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ . Montrons que  $f$  est alors injective. Si  $f(x, y) = f(x', y')$ , alors :

$$\left. \begin{aligned} x + a \sin y &= x' + a \sin y' \\ y + b \sin x &= y' + b \sin x' \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} x - x' &= a(\sin y' - \sin y) \\ y - y' &= b(\sin x' - \sin x) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} |x - x'| &\leq |a| |y - y'| \\ |y - y'| &\leq |b| |x - x'| \end{cases}$$

$$\implies |x - x'| \leq |ab| |x - x'|.$$

D'où  $x = x'$ , et  $y = y'$ . L'application  $f$  est injective et son jacobien ne s'annule nulle part. Donc  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

2. Il suffit de montrer que  $f$  est propre. Mais il est immédiat que  $\|f(x, y)\|$  tend vers l'infini lorsque  $\|(x, y)\|$  tend vers l'infini, puisque  $\|f(x, y) - (x, y)\| \leq \|(a, b)\|$ .

6. 1. Évidemment,  $f$  est continue, car  $f - \text{Id}$  est continue. Si  $f - \text{Id}$  est contractante de rapport  $k < 1$ , alors, pour tout  $x$ , on a :

$$\|f(x) - x - (f(0) - 0)\| \leq k\|x - 0\|,$$

donc  $\|f(x) - x\| \leq k\|x\| + \|f(0)\|$ , et  $\|f(x)\| \geq (1 - k)\|x\| - \|f(0)\|$ . La première partie de l'exercice 4 entraîne que  $f$  est propre. Pour son injectivité, si  $f(p) = f(q)$ , alors,  $\|f(p) - p - (f(q) - q)\| = \|q - p\| \leq k\|p - q\|$ , donc  $p = q$ .

2. L'inégalité des accroissements finis entraîne que  $f - \text{Id}$  est contractante, donc  $f$  est propre et injective. Mais, pour tout  $p$ ,  $df_p$  est inversible, car  $df_p = \text{Id} + H_p$ , où  $H_p$  vérifie :  $\forall x, \|H_p(x)\| \leq k\|x\|$ . Donc, d'après le théorème du cours,  $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^m$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . D'après la deuxième question de l'exercice 4, cet ouvert image est  $\mathbb{R}^m$  tout entier.
3. Immédiat.

7. La solution suit exactement la preuve du théorème de Rolle vue dans le volume 1. Supposons que  $f$  ne soit pas constante sur  $A$ . On peut admettre, quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , que  $\sup f$  est strictement supérieur à sa valeur constante sur la frontière. Par compacité de  $A$ , cette borne supérieure est atteinte. Ce ne peut être qu'en un point  $x$  intérieur à  $A$ , qui est alors un maximum local de  $f$ . En un tel point, on sait que  $df$  s'annule.

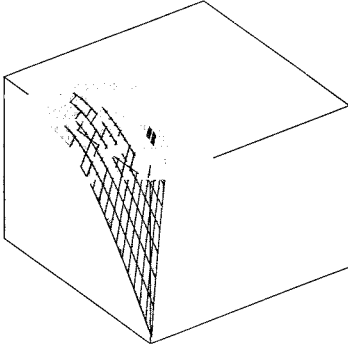
8. 1. Le domaine  $T$  est compact. Si  $f$  a un extremum en un point intérieur à  $T$ , c'est un point critique de  $f$ . Mais les dérivées partielles de  $f$  sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x - y)^2 - 6y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3(x - y)^2 - 6x,$$

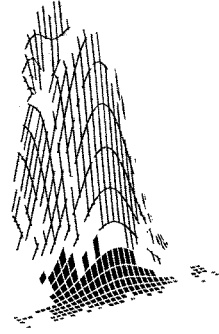
ce qui donne deux points critiques  $(-0, 0)$  et  $(-1/2, 1/2)$ . Seul ce dernier est intérieur à  $T$ . L'expression de :

$$\begin{aligned} f(-1/2 + u, 1/2 + v) &= \frac{1}{2} - 3u^2 - 3v^2 + u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 \\ &= \frac{1}{2} - 3u^2 - 3v^2 + o(\|(u, v)\|) \end{aligned}$$

entraîne que  $p = (-1/2, 1/2)$  est un maximum local strict, et c'est le seul extremum de  $f$  intérieur à  $T$ . Les variations de  $f$  sur chacun des trois côtés du triangle  $T$  montrent que  $p$  est un maximum global, et que  $(1, 1)$  est un minimum global de  $f$  sur  $T$ .



$$(x - y)^3 - 6xy$$



$$(2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

2. La fonction  $g$  tend vers 0 à l'infini (i.e. lorsque la norme de  $(x, y)$  tend vers l'infini) et est positive. Elle admet donc un maximum global atteint en un point critique. Les dérivées partielles de  $g$  sont :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2)}(-2 + 2x^2 + 3y^2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)}(-3 + 2x^2 + 3y^2).$$

Les points critiques de  $g$  s'en déduisent aisément, et sont :  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ . Comme  $g(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + o(\|(x, y)\|^2)$ , le point  $(0, 0)$  est un minimum local strict, et même un minimum global car  $f \geq 0$  et  $f$  ne s'annule qu'en 0. Aux points  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ ,  $g$  prend la valeur  $2e^{-1}$ . Un développement limité de  $g$  au voisinage de l'un d'eux s'écrit :

$$g(1 + u, v) = 2e^{-1} - 4e^{-1}u^2 + e^{-1}v^2 + o(\|(u, v)\|^2).$$

Il s'agit d'un col, comme  $(-1, 0)$ , et ce ne sont pas des extrema locaux. Aux points  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$   $g$  prend la valeur  $3e^{-1}$ , et ce sont donc deux maximums locaux, et finalement globaux, car  $g$  en admet au moins un. Pour ce dernier point, on observe qu'on n'a pas eu besoin de l'étude à l'ordre 2 de  $g$ .

- 9 Remarquons d'abord que :

$$x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}, \quad \text{et} \quad (x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2),$$

donc  $f(x, y)$  tend vers l'infini lorsque la norme de  $(x, y)$  tend vers l'infini. Donc  $f$  admet un minimum global, qui est un point critique. De plus, elle ne peut présenter d'extremum relatif qu'en un point critique. Comme :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(-(x - y) + x^3), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4((x - y) + y^3),$$

les points critiques sont  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .



Au voisinage du point  $(0, 0)$ , on observe que  $f(x, 0) = x^2(x^2 - 2)$  tandis que  $f(x, x) = 2x^4$ . Donc  $(0, 0)$  n'est pas un extremum local. Comme la valeur de  $f$  aux deux autres points critiques est la même, plus petite que la valeur en  $(0, 0)$ , on n'a pas besoin d'étude locale en ces points pour savoir que ce sont des minimums globaux.

10. 1. Comme  $f(x, 1) = x^3$ , la fonction  $f$  n'a pas d'extrema globaux. Les points critiques de  $f$  sont donnés par le système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= xy^3(4y + 3x - 4) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2y^2(8y + 3x - 6) \end{aligned}$$

et sont les couples  $(0, y)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(2/3, 1/2)$ .

Au point  $(2/3, 1/3)$ , un développement limité à l'ordre 2 à deux variables donne :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3} + h, \frac{1}{2} + k\right) &= -\frac{1}{54} + \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{3}hk + \frac{4}{9}k^2 \\ &+ \text{un nombre fini de monômes de degré au moins 3} \\ &= -\frac{1}{54} + \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{3}hk + \frac{4}{9}k^2 + o(\|(h, k)\|^2). \end{aligned}$$

Le discriminant est  $\Delta = -\frac{1}{9}$ , donc c'est un minimum local strict.

Les autres points critiques sont dégénérés car ils ne sont pas isolés. Il faut tout de même en faire une étude locale, car ils peuvent *a priori* être des extrema (non stricts).

Au point  $(0, y_0)$ , pour  $y_0 > 0$ ,  $f(x, y)$  a le signe de  $x + 2y - 2$ , et si  $2y_0 - 2 \neq 0$ , soit  $y_0 \neq 1$ ,  $f$  admet un extremum local en  $(0, y_0)$ .

Au voisinage de  $(0, 1)$ , comme on a vu que  $f(x, 1) = x^3$ , il n'y a pas d'extremum local.

Au voisinage de  $0$ ,  $f(x, y) = 2x^2y^3 + o(\|(x, y)\|^5)$ , et  $(0, 0)$  n'est pas extremum local.

Au voisinage de  $(0, y_0)$  avec  $y_0 < 0$ ,  $f(x, y) \geq x^2\nu(x, y)$ , où  $\nu(x, y) > 0$ , donc  $f$  admet un minimum local en  $(0, y_0)$ .

La discussion est analogue au voisinage de  $(x_0, 0)$  et nous la laissons au lecteur.

2. Sur  $\mathcal{E}$ ,  $y > 0$ ,  $x = \frac{1}{y^{3/2}}$ , et  $f(x, y) = \frac{1}{y^{3/2} + 2y - 2} = \varphi(y)$ . L'étude de la fonction  $\varphi$  (décroissante puis croissante) donne immédiatement que  $f$  admet sur  $\mathcal{E}$  un minimum local strict pour  $y_0$  tel que  $-\frac{3}{2y_0^{5/2}} + 2 = 0$ .

11. 1. Somme de trois fonctions convexes,  $f$  est convexe. Les points critiques sont des minimums globaux. Or  $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} - e^{3-x}$ , nul si, et seulement si,

$$x+y = 3-x. \text{ De même, } \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y} - e^{3-y}, \text{ nul si et seulement si } x+y = 3-y.$$

La seule solution de ce système est  $x = y = 1$ . C'est un minimum strict, comme le prouve la valeur de  $s^2 - rt$  (avec les notations de Lagrange).

2. Si  $a^2 < 1$ ,  $x^2 + y^2 + 2axy = (x + ay)^2 + (1 - a^2)y^2$ , forme quadratique définie positive, donc  $g$  est *strictement* convexe, et  $g(x, y) > g(0, 0)$  pour tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Si  $a^2 = 1$ ,  $g(x, y) = x^2y^2 + (x \pm y)^2$  encore fonction convexe, admettant  $(0, 0)$  comme unique extremum local. C'est un minimum global strict.

Si  $a^2 > 1$ , les points critiques de  $g$  sont donnés par :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy^2 + 2x + 2ay = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2yx^2 + 2y + 2ax = 0.$$

$$\text{Or } \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-x)(xy-1+a).$$

Lorsque  $y = x$ , l'une des deux équations (d'annulation des dérivées partielles) donne  $x(x^2 + 1 + a) = 0$ , soit  $x = 0$  ou  $x = \pm\sqrt{-1-a}$ .

Lorsque  $y \neq x$ , on trouve  $x = \pm\sqrt{a-1}$  et  $y = -x$ . Le changement de variable  $(x, y) \mapsto (-x, y)$  montre qu'il suffit de traiter le cas de  $a > 1$

Le point  $(0, 0)$  est un col, car la partie homogène de degré 2 du polynôme  $g(u, v)$  est  $u^2 + v^2 + 2auv$  qui vérifie  $s^2 - rt > 0$ .

L'étude du développement limité au voisinage de  $(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$  permet de voir que c'est un minimum local, mais on va voir que c'est un minimum global, en transformant l'expression de  $g(b+u, -b+v)$ , où  $b = \sqrt{a-1}$ . En effet,  $g(b+u, -b+v) = -b^4 + (uv + b(v-u))^2 + (u+v)^2$ , ce qui permet de conclure.

Remarquons qu'on peut voir que  $(b, -b)$  est un minimum global sans aucune étude locale en ce point. En effet :

$$g(x, y) = (xy + a)^2 + x^2 + y^2 - a^2 \geq x^2 + y^2 - a^2.$$

Si l'un des nombres  $|x|$  ou  $|y|$  est supérieur ou égal à  $|a|$ , alors  $g(x, y) \geq 0$ . Mais 0 n'est pas le minimum des valeurs prises par  $g$  (car  $(0, 0)$  est un col). Donc  $g$  atteint sa borne inférieure sur le compact  $[-a, a] \times [-a, a]$ , et ce sera un minimum global. Ce minimum est atteint à l'intérieur du compact, en un point critique de  $g$  autre que  $(0, 0)$ . Mais nous connaissons *tous* les points critiques de la fonction  $g$ , et elle y prend la même valeur !

3. Cherchons les points critiques de  $h$ . Ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = x - yz + 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -xz$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -xy - 1.$$

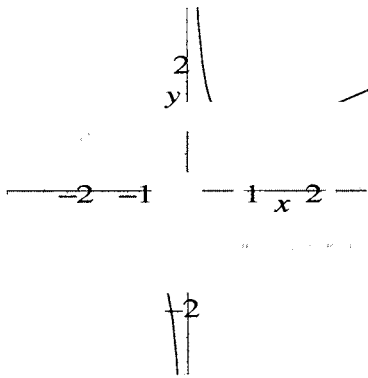
Soit  $(x, y, z)$  un point critique de  $h$ . Comme  $xz = 0$ ,  $x$  ou  $z$  est nul. Le premier cas est exclu si  $-xy - 1 = 0$ , donc  $z = 0$ ,  $x = -1$  et  $y = 1$ . Cet unique point critique n'est pas un extremum, comme le montre par exemple un développement limité à l'ordre 2 :

$$h(-1 + u, 1 + v, w) = -\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2} + wv - wu - o(\|(u, v, w)\|)^2.$$

En effet, en fixant  $u = 0$ , la partie quadratique est  $vw$  qui change de signe à volonté.

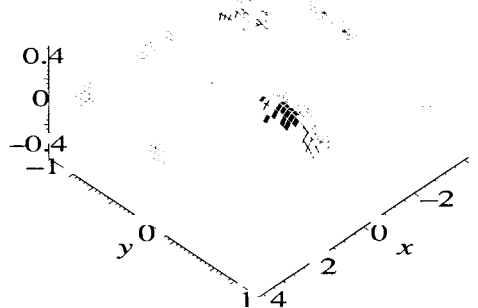
12 Le domaine de  $f$  est  $\mathbb{R}^2$  privé de la courbe  $y = \frac{x^2 + 1}{2x}$ . En particulier,  $f$  est continue sur  $D$  privé des deux points  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$ . Mais  $x^2 + 1 - 2xy = (x - y)^2 + 1 - y^2 \geq 1 - y^2$ . Donc si  $(x, y) \in U$  (sur lequel  $1 - y^2 \geq 0$ ),

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2(1 - y^2)^3}{(1 - y^2)^2} = x^2(1 - y^2).$$



domaine  $D$ .

Le



La restriction de  $f$  à  $D$ .

La restriction de  $f$  à la bande  $D$  privée des deux points  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$  admet donc un prolongement continu  $\bar{f}$  en ces deux points, où  $\bar{f}$  prend d'ailleurs la

valeur 0. Mais alors  $\sup_{(x,y) \in U} f(x,y) = \sup_{(x,y) \in D} \bar{f}(x,y)$ . On ne sait pas encore si ce dernier est un  $\sup$  ou un  $\max$ . On détermine d'abord les points critiques sur l'ouvert  $U$ . On trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(1-y^2)^3}{(x^2+1-2xy)^3} (1-x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2(1-y^2)^2}{(x^2+1-2xy)^3} (-3x^2y - 3y + 2x + 4xy^2).$$

Cela donne immédiatement comme points critiques dans  $U$  les points  $(1, 1/2)$  et  $(-1, -1/2)$ , ainsi que les droites  $x = 0$  et  $y = \pm 1$ . Sur ces droites,  $f$  vaut 0, et aux deux points critiques isolés, elle prend la même valeur positive. Or  $\bar{f}(x,y)$  tend vers 0 lorsque  $(x,y)$  s'éloigne indéfiniment en restant dans  $D$ . Cela signifie précisément que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A$  tel que, si  $|x| \geq A$ ,  $|f(x,y)| \leq \varepsilon$  (et quel que soit  $y$  entre  $-1$  et  $1$ ). C'est facile à vérifier, car, sur  $U$ ,  $|f(x,y)| \leq \frac{x^2}{(x-1)^4}$ .

Mais alors, la borne supérieure de  $f(x,y)$  sur  $D$  est :

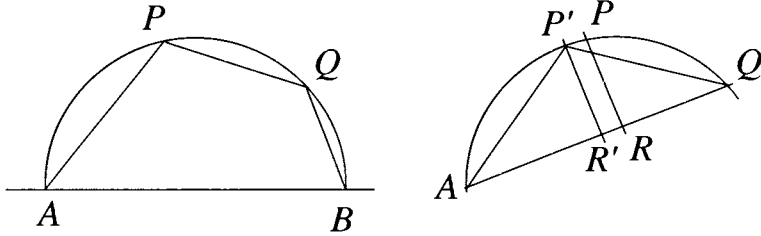
- sa borne supérieure sur la frontière de  $D$ ,
- ou bien sa valeur en un point critique de la bande ouverte  $U$ .

Comme la valeur de  $f$  sur la frontière de  $D$  est 0 la borne supérieure de  $f$  est sa valeur en  $(1, 1/2)$ , à savoir  $(3/4)^3$ .

- 13** Une affinité orthogonale laissant invariante la droite  $(AB)$ , de déterminant  $d = 1/ab$ , multiplie les aires par  $d$ , et l'on peut donc se limiter au cas d un demi-cercle, image par affinité de l'ellipse donnée.

L'ensemble des couples  $(P, Q)$  où  $A, P, Q, B$  apparaissent dans cet ordre sur le demi-cercle est évidemment compact, donc la borne supérieure des aires des quadrilatères  $APQB$  est atteinte. Montrons que c'est nécessairement pour un quadrilatère tel que le triangle  $APQ$  soit isocèle en  $P$ . En effet, si ce triangle ne l'est pas, le point  $P'$  milieu de l'arc  $AQ$  vérifie  $\mathcal{A}(AP'Q) > \mathcal{A}(APQ)$  puisque  $P'$  est à une distance  $P'R'$  de la droite  $(AQ)$  strictement plus grande que la distance  $PR$  de  $P$  à cette droite.

Le maximum est donc atteint lorsque  $APQ$  est isocèle en  $P$  et  $PQB$  est isocèle en  $Q$ , ce qui correspond à  $AP = PQ = QB$ . Si le rayon du cercle est 1, l'aire du quadrilatère (qui est alors un trapèze) est  $\sqrt{3}/2$ . La réponse à la question posée est  $ab\sqrt{3}/2$ .



14. Pour  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= |\cos(z)|^2 = |\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y|^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x(1 + \operatorname{sh}^2 y) + (1 - \cos^2 x) \operatorname{sh}^2 y = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles montrent immédiatement que le seul point critique intérieur au disque est  $(0, 0)$ , qui n'est pas un extremum local, comme on le voit immédiatement en fixant  $x = 0$  puis  $y = 0$  (c'est un col).

Donc la borne supérieure de  $f$  est atteinte sur le bord du disque. Si  $z = e^{i\theta}$  et  $\theta$  croit de  $0$  à  $\pi/2$ ,  $\cos^2 x$  décroît,  $x$  décroît, donc  $y = \sqrt{1 - x^2}$  croît, et  $\operatorname{sh}^2 y$  croît, de sorte que le maximum de  $f$  est atteint sur le cercle trigonométrique pour  $x = 0, y = 1$  avec  $f(0, 1) = |\cos i|^2 = \cos^2 0 + \operatorname{sh}^2(1) = 1 + \operatorname{sh}^2(1) = 2,38\dots$ , qui est le maximum demandé.

15. On a vu en algèbre que toute matrice orthogonale  $A \in O(n)$  est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs :

$$M = \operatorname{Diag}(M_1, M_2, \dots, M_k),$$

où  $k = p + q + r, n = 2p + q + r$ , et :

- les  $p$  premiers blocs sont d'ordre 2 de la forme  $M_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ , avec  $1 \leq i \leq p$  et  $\theta_i$  non congru à 0 modulo  $2\pi$  ;
- les  $q$  suivants d'ordre 1 de la forme  $(1)$  ;
- les  $r$  suivants d'ordre 1 de la forme  $(-1)$ .

Une matrice  $A \in O(n)$  orthogonalement semblable à un extremum (local ou global) de la trace est elle-même un extremum (local ou global) de la trace.

Si la matrice  $M$  ci-dessus vérifie  $p \neq 0$ , elle n'est pas un extremum local de la trace dans  $O(n)$ , car en fixant tous les  $\theta_i, i \geq 2$  et en faisant croître  $\theta_1$ , on voit que la trace croît strictement au voisinage de sa valeur pour la matrice  $M$  considérée. Ainsi, seules les matrices de symétrie orthogonale (n'ayant comme valeurs propres que 1 ou  $-1$ ) peuvent être des extrema locaux de la trace sur  $O(n)$

Considérons donc uniquement les  $M$  telles que  $p = 0$ . Si  $r = 0$ , alors  $q = n$  et la trace de  $M$  est  $n$ , évidemment un maximum local strict de la trace. De même si  $q = 0$ ,  $r = n$  et la trace de  $M$  est  $-n$ , minimum global strict de la trace. Il reste le cas où  $q$  et  $r$  sont tous deux non nuls.

Si  $q$  est au moins égal à 2, la matrice  $M$  contient un bloc diagonal de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  que l'on fait varier localement en le remplaçant, dans l'écriture de  $M$ , par un bloc  $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , ce qui montre que  $M$  n'est pas un minimum local de la trace. Donc si  $q$  et  $r$  sont tous deux au moins égaux à 2,  $M$  n'est ni maximum local ni minimum local de la trace.

Il ne reste plus que les deux cas où (premier cas)  $q = n - 1$  et  $r = 1$ , et (deuxième cas)  $q = 1$  et  $r = n - 1$ .

Supposons que  $q = n - 1$  et  $r = 1$ . Par continuité du spectre, toute matrice orthogonale suffisamment proche de  $M$  admet  $-1$  comme valeur propre simple, et a donc une trace inférieure ou égale à  $\text{Tr}(M) = (n - 1) + (-1) = n - 2$ . Donc  $M$  est un maximum local (non global) de la trace. De même, dans le cas où  $q = 1$  et  $r = n - 1$ ,  $M$  est un minimum local non global de la trace.

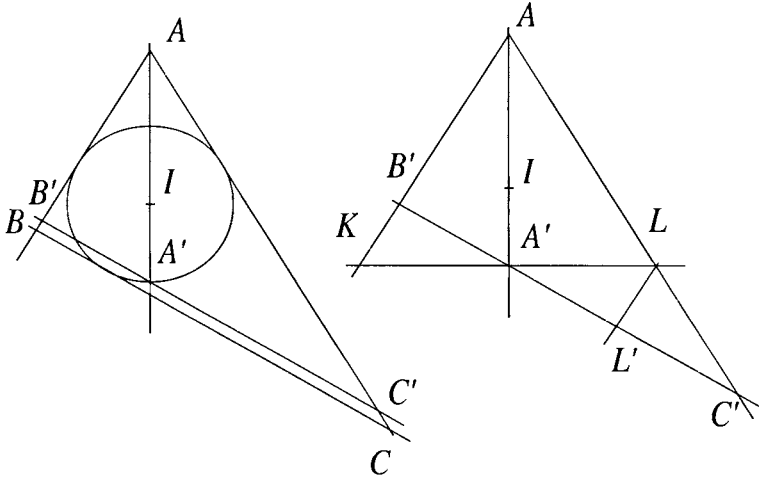
- 16** Comme dans l'exercice précédent, une affinité de déterminant  $d$  multiplie les aires par  $d$ , et l'on peut donc se limiter au cas d'un cercle, image par affinité de l'ellipse donnée.

Considérons donc un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I$  et de rayon 1 dans le plan affine  $\mathcal{P}$ . Nous allons montrer que la borne inférieure cherchée  $\alpha$  est obtenue pour un triangle équilatéral. Dans le cas d'un triangle équilatéral, l'aire du triangle (le centre du cercle inscrit étant l'isobarycentre, le rayon de ce cercle est le tiers du côté), l'aire du triangle est  $3\sqrt{3}$ .

Montrons d'abord que la borne  $\alpha$  est atteinte. En effet, l'ensemble des triplets  $(A, B, C)$  tels que le triangle  $ABC$  soit circonscrit à  $\mathcal{C}$  est un fermé de  $\mathcal{P}^3$ . Mais si  $A$  est extérieur à  $\mathcal{C}$  et si les points de contact des tangentes menées de  $A$  à  $\mathcal{C}$  sont notés  $T$  et  $T'$ , l'aire du quadrilatère  $ITAT'$  tend vers l'infini lorsque  $A$  s'éloigne indéfiniment de  $\mathcal{C}$ . Il en résulte qu'il existe  $\beta$  tel que, si  $A$  est à une distance au moins  $\beta$  de  $I$ , quels que soient  $B$  et  $C$ , l'aire  $\mathcal{A}(ABC)$  du triangle est supérieure à  $3\sqrt{3}$ .

La borne inférieure  $\alpha$  est donc la borne inférieure des aires obtenues pour les triangles dont les trois sommets sont à une distance inférieure ou égale à  $\beta$  de  $I$  (peu importe la valeur de  $\beta$ ). Ces triplets  $(A, B, C)$  décrivent un compact de  $\mathcal{P}^3$ , donc la borne inférieure  $\alpha$  est atteinte.

Soit  $ABC$  un triangle dont les côtés sont tangents au cercle  $C$  de centre  $I$ . Montrons que si  $ABC$  n'est pas isocèle en  $A$ , il existe un triangle isocèle d'aire strictement plus petite circonscrit à  $C$ .

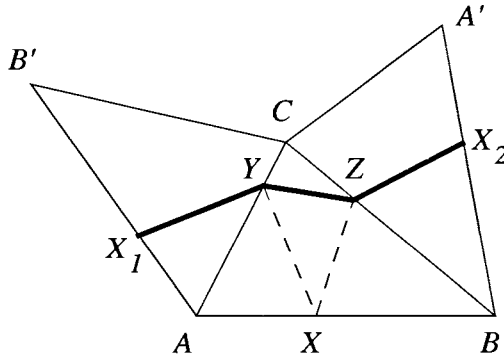


En effet, soit  $A'$  le point de  $C$  de l'autre côté de  $I$  sur le diamètre passant par  $A$ . La parallèle à  $(BC)$  passant par  $A'$  coupe  $(AB)$  en  $B'$  sur le segment  $[A, B]$  et  $(AC)$  en  $C'$  sur le segment  $[A, C]$ . L'aire  $A(B'C')$  du triangle  $AB'C'$  est strictement plus petite que celle de  $ABC$ , car  $A'$  est intérieur au domaine bordé par  $ABC$ . Puis, la perpendiculaire à  $AA'$  menée de  $A'$  coupe la droite  $(AB')$  en  $K$  et la droite  $(AC')$  en  $L$ . Si  $K$  n'est pas sur le segment  $[A, B']$ , alors  $L$  est sur le segment  $[A, C']$ . Dans ce cas, la parallèle à  $(AB')$  menée de  $L$  coupe  $(B'C')$  en un point  $L'$  sur le segment  $[A', C']$ . Mais les triangles  $A'B'K$  et  $A'L'L$  sont "égaux", donc de même aire. Donc  $A(A'LC') > A(A'B'K)$ . Ainsi, le triangle isocèle  $AKL$  a une aire plus petite que  $AB'C'$ . Si la borne  $\alpha$  est atteinte pour le triangle  $ABC$ , il est isocèle en ses trois sommets, donc équilatéral.

17. 1. Soit  $p$  le minimum local considéré, et  $q \neq p$ .  
 L'application  $t \mapsto h(t) = f(p+t(q-p))$  est convexe de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et admet un minimum local en  $0$ , qui est donc un minimum global sur  $\mathbb{R}$ . En particulier  $h(1) = f(q) \geq h(0) = f(p)$ , et  $p$  est un minimum global de  $f$ .
2. On peut admettre que ce minimum est l'origine  $O$  et  $f(O) = 0$ . Munissons  $\mathbb{R}^p$  d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes). Pour tout  $x$  de norme 1,  $f(x) > 0$ . La sphère unité  $S$  de  $\mathbb{R}^p$  est compacte, donc la restriction  $\varphi$  de  $f$  à cette sphère  $S$  atteint donc sa borne inférieure  $\alpha$ , qui est donc non nulle. Si  $\|x\| > 1$ , par convexité de  $f$  (et  $f(O) = 0$ ),  

$$f(x) \geq \|x\| f\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) \geq \alpha \|x\|$$
, ce qui prouve le résultat voulu

18. On peut déjà dire que  $[A, B] \times [B, C] \times [C, A]$  est compact et le périmètre de  $XYZ$  est une fonction continue sur ce compact, de sorte que sa borne inférieure est atteinte. Mais nous allons procéder plus directement.



La symétrie orthogonale par rapport à  $(BC)$  envoie  $A$  sur  $A'$  et  $X$  sur un point  $X_2$ . La symétrie orthogonale par rapport à  $(AC)$  envoie  $B$  sur  $B'$ , et  $X$  sur  $X_1$ . Le point  $X_2$  se déduit de  $X_1$  par une rotation  $r$  d'angle  $2\widehat{ACB}$  et de centre  $C$ . Comme l'angle  $\widehat{ACB}$  est aigu, l'angle  $\widehat{X_1CX_2}$  est saillant. L'angle  $\widehat{X_2XX_1}$  supplémentaire de  $\widehat{ACB}$ , est aussi saillant, et le quadrilatère  $CX_1XX_2$  est convexe,  $A$  et  $B$  n'étant pas intérieurs au quadrilatère. Ainsi, la diagonale  $[X_1, X_2]$  coupe la diagonale  $[C, X]$  et les hauteurs des triangles isocèles  $CX_1X$  et  $CXX_2$ . Donc  $[X_1, X_2]$  coupe les segments  $[A, C]$  et  $[B, C]$ , et est contenu dans la réunion des trois triangles (pleins)  $ABC$ ,  $ACB'$ ,  $BCA'$ . Il réalise le plus court chemin de  $X_1$  à  $X_2$  dans cette réunion.

De plus la distance de  $X_1$  à  $X_2$  est  $2CX_1 \sin(\widehat{ACB})$  qui est minimal lorsque  $X_1$  est le plus près possible de  $C$ , donc lorsque  $X_1$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $AB'$ . Donc  $X$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $AB$ , et, par symétrie,  $Y$  est le projeté de  $B$  sur  $AC$ , et  $Z$  est le projeté de  $A$  sur  $BC$ .

On remarquera que les segments  $[X_1, Y]$  et  $[Y, Z]$  sont alignés, ce qui signifie que la hauteur  $(CX)$  est la bissectrice de l'angle formé par les droites  $(XY)$  et  $(XZ)$ . Cela veut dire, par exemple, que dans une pièce triangulaire (à angles aigus) aux murs couverts de miroirs, on se voit exactement de dos lorsqu'on se place sur les segments qui joignent les pieds  $X_1$ ,  $X_2$ , et  $X_3$  des hauteurs.

19. 1. C'est la concavité du logarithme. Comme  $-\ln$  est *strictement* convexe, il y a égalité si, et seulement si, les  $x_i$  sont tous égaux.
2. On considère que la boîte  $K$  est l'ensemble des  $t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3$  lorsque  $t_1, t_2$  et  $t_3$  varient dans  $[0, 1]$ , avec  $v_1, v_2, v_3$  fixés. On dira que la boîte est *construite sur* le triplet  $(v_1, v_2, v_3)$ . On peut supposer  $v_1, v_2, v_3$  linéairement



indépendants. Notons  $(e_1, e_2, e_3)$  le triplet obtenu en orthonormalisant  $(v_1, v_2, v_3)$  au sens de Schmidt. Nous pouvons supposer que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormée fixe orthonormalisée de Schmidt de toutes les boîtes que nous considérerons (en les faisant éventuellement tourner pour cela). La matrice  $M$  de  $(v_1, v_2, v_3)$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure

à coefficients diagonaux positifs :  $M = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ . Prenons pour l'espace l'orientation de  $\mathcal{B}$ . L'aire latérale de la boîte est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2(\|v_1 \wedge v_2\| + \|v_1 \wedge v_3\| + \|v_2 \wedge v_3\|) \\ &= 2(ac + \sqrt{(ae)^2 + (af)^2} + \sqrt{(be - cd)^2 + (bf)^2 + (cf)^2}) \end{aligned}$$

tandis que le volume de la boîte  $K$  est  $acf$ . Or, l'aire latérale du parallélépipède rectangle  $K'$  construit sur  $(w_1, w_2, w_3) = (ae_1, ce_2, fe_3)$  est :

$$\mathcal{A}' = 2(ac + af + cf) \leq \mathcal{A},$$

et le volume est le même  $acf$ . De plus,  $\mathcal{A}'$  n'est égal à  $\mathcal{A}$  que si  $b = d = e = 0$ .

Si  $\mathcal{A}' < \mathcal{A}$ , il existe  $\lambda > 1$  tel que le parallélépipède rectangle construit sur  $(\lambda ae_1, ce_2, fe_3)$  ait même aire latérale que  $K$ , mais alors son volume est plus grand que  $acf$ . On peut donc, pour chercher le volume maximum "à aire latérale donnée", supposer que le parallélépipède est rectangle.

On est ainsi ramené à chercher le maximum de  $V = acf$ , la quantité  $ac + af + cf$  restant constante. Mais  $(ac.af.cf)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(ac + af + cf)$ , le maximum du membre de gauche étant atteint pour  $ac = af = cf$  et égal au membre de droite.

Dans ce cas,  $V^2 = a^2c^2f^2 = a^6$ , car  $ac = af = cf \iff a = c = f = 1$ . Le volume maximum cherché est celui du cube.

**20.** Lorsque  $x = 1$ , et  $y$  tend vers 0,  $f(x, y)$  tend vers 1, donc la borne inférieure cherchée est inférieure ou égale à 1. Pour montrer que cette borne est exactement 1, nous allons montrer que, pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $f(x, y) > 1$ .

D'abord, si  $x \geq 1$  ou  $y \geq 1$ ,  $f(x, y) > 1$ . On peut donc se restreindre à  $(x, y) \in ]0, 1]^2$ . Sur  $\Gamma_\lambda$ , avec  $\lambda < 0$ , on a :  $e^{y \ln x} = e^\lambda$ , soit  $y = \frac{\lambda}{\ln x} = \frac{|\lambda|}{|\ln x|}$ , puis :

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= f(x, y) = f(x, \lambda/\ln x) = e^\lambda + y^x = e^\lambda + \left(\frac{|\lambda|}{|\ln x|}\right)^x \\ &= e^\lambda + \exp(x(\ln |\lambda| - \ln |\ln x|)), \end{aligned}$$

d'où :  $\frac{1}{f_\lambda(x)} \frac{d}{dx}(f_\lambda(x)) = \ln |\lambda| - \ln |\ln x| - \frac{1}{\ln x}$ .

Or les fonctions  $x \mapsto -\frac{1}{\ln x}$  et  $x \mapsto -\ln |\ln x|$  sont croissantes sur  $]0, 1[$ . Donc  $f_\lambda$  est décroissante puis croissante sur  $]0, 1[$ , et a un minimum pour :

$$\ln |\lambda| - \ln |\ln x| - \frac{1}{\ln x} = 0.$$

Comme  $\lambda = y \ln x$ , cela correspond bien à un point de  $\Gamma_\lambda$  tel que  $\ln y = \frac{1}{\ln x}$ . Ainsi, la borne inférieure des  $f(x, y)$  sur le pavé ouvert  $]0, 1[^2$  est aussi celle de  $f(x, y)$  sur l'ensemble  $\mathcal{C}$  des  $(x, y)$  de ce pavé tels que  $\ln x \ln y = 1$ .

Posant alors  $u = -\ln x$ , de sorte que  $(x, y) \in \mathcal{C} \iff \ln y \ln x = 1 \iff y = e^{-1/u}$  nous allons montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathcal{C}$  :

$$f(x, y) = f(e^{-u}, e^{-1/u}) = \varphi(u) = \exp\left(-\frac{1}{u} e^{-u}\right) + \exp\left(-u e^{-1/u}\right) > 1.$$

Comme  $\varphi(u) = \varphi(1/u)$ , il suffit de le prouver pour  $u > 1$ . Minorons chacun des deux termes de la somme.

D'une part,  $-\frac{1}{u} e^{-u} > -e^{-u}$ , et, d'autre part,  $-u e^{-1/u} > -u$ , donc :

$$\varphi(u) > \exp(-e^{-u}) + e^{-u}.$$

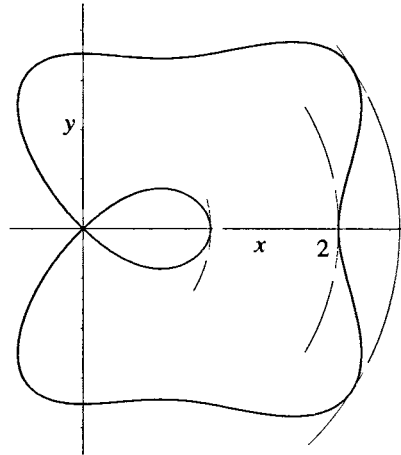
Or, si  $0 < t$ , alors  $e^{-t} + t > 1$ . Donc  $\varphi(u) > 1$ .

**Louis COMTET** Voici une autre preuve rapide de ce résultat. On montre d'abord que, si  $a, b \in ]0, 1[$ ,  $-a \ln(1-b) > -\ln(1-ab)$ . On en déduit que, si  $x, y \in ]0, 1[$ ,  $x^y + y^x > \frac{x+y}{x+y-xy}$ , qui est toujours supérieur à 1 sur le pavé ouvert  $]0, 1[^2$ .

- 21.** La borne supérieure des  $y^2(2-y^2)$ , lorsque  $y$  décrit  $\mathbb{R}$  est 1. Donc pour tout point  $(x, y)$  de  $\Gamma$ ,  $P(x) = x^2(x-2)(x-1) \leq 1$ . Si  $x < -1$ ,  $P(x) \geq 2$ . Si  $x \geq 3$ ,  $P(x) \geq 18$ . Ainsi, pour tout  $(x, y) \in \Gamma$ ,  $-1 \leq x \leq 3$ , et  $y^2(2-y^2) \geq P(\mu)$ , où  $\mu$  est le point où  $P$  atteint son minimum. Cela prouve que  $\Gamma$  est bornée.

Les points  $M = (x, y)$  à distance maximale (atteinte, car  $\Gamma$  est compacte) de  $(0, 0)$  sont ceux où la tangente à  $\Gamma$  est orthogonale à  $(OM)$  c'est-à-dire ceux où  $\overrightarrow{\text{grad}(f)}$  est colinéaire à  $(x, y)$ , avec :

$$f(x, y) = P(x) + y^2(y^2 - 2) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + y^4 - 2y^2.$$



La courbe  $y^2(2 - y^2) = x^2(x - 2)(x - 1) = 0$

Or  $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & x \\ \frac{\partial f}{\partial y} & y \end{array} \right| = xy \left| \begin{array}{cc} 4x^2 - 9x + 4 & 1 \\ 4(y^2 - 1) & 1 \end{array} \right| = 4xy(x^2 - \frac{9}{4}x + 2 - y^2)$ . Pour trouver

les points autres que ceux où  $x = 0$  ou  $y = 0$ , il faut résoudre le système :

$$x^2 - \frac{9}{4}x + 2 - y^2 = 0$$

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + y^4 - 2y^2 = 0$$

En tirant  $y^2$  de la première équation, et en le reportant dans la seconde, on voit que  $x$  vérifie :

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + \left(x^2 - \frac{9}{4}x\right) \left(x^2 - \frac{9}{4}x + 2\right) = x \left(2x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{145}{16}x - \frac{9}{2}\right) = 0.$$

admettant, outre 0, une unique solution réelle voisine de 2, 1053... Elle correspond à deux valeurs de  $y$ , ce qui est en accord avec la figure tracée avec *Maple*. On vérifie aisément que ces deux points sont ceux de  $\Gamma$  à distance maximale de l'origine.

- 22** On soupçonne, par symétrie, que le maximum est atteint en un point où  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , et comme  $x = 1 + \dots + x_n = 1$ , c'est probablement

pour  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ . On pose donc  $x_i = \frac{1}{n} + y_i$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i \neq j} \left( \frac{1}{n} + y_i \right) \left( \frac{1}{n} + y_j \right) = \sum_{i \neq j} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}(y_i + y_j) + y_i y_j \right) \\ &= \frac{n^2 - n}{n^2} + \frac{1}{n} \sum_{i,j} (y_i + y_j) - \frac{1}{n} \sum_i 2y_i + \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &= \frac{n-1}{n} + 2 \sum_{i=1}^n y_i - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i + \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2. \end{aligned}$$

Or, sur  $E$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ . Donc  $f(x) = \frac{n-1}{n} - \sum_{i=1}^n y_i^2$ , et la nouvelle origine est bien un maximum absolu, unique.

- 23.** 1. On écrit  $f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + g(x, y)$ , où tous les monômes de  $g$  sont de degré au moins 4. Si  $a \neq 0$ ,  $f(ty, y) = y^3P(t) + y^4h(t, y)$ , où  $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$  et  $h$  est un polynôme. Comme  $P$  n'est pas nul, choisissons  $t$  tel que  $P(t) \neq 0$ . Lorsque  $y$  tend vers 0,  $f(ty, y) \sim y^3P(t)$  qui change de signe au voisinage de 0.

On peut remplacer 3 par n'importe quel entier impair.

2. La réponse est non ! En effet, prenons :

$$f(x, y) = x^2 + 2\lambda xy^2 + y^4 = (x + \lambda y^2)^2 + y^4(1 - \lambda^2).$$

Si  $1 - \lambda^2 > 0$ ,  $(0, 0)$  est minimum local strict, et si  $1 - \lambda^2 < 0$ , c'est un maximum local strict le long de la parabole  $x + \lambda y^2 = 0$  et un minimum local strict le long de la droite  $y = 0$ .

- 24.** Si  $M_A, M_B, M_C$  sont les images de  $M$  par projection sur les côtés respectifs  $BC, CA$  et  $AB$  du triangle (de longueurs  $a, b$ , et  $c$ ), le produit des aires  $s_A(M)$ ,  $s_B(M)$  et  $s_C(M)$  des triangles  $BMC, CMA$  et  $AMB$  est :

$$P(M) = \frac{aMM_A}{2} \frac{bMM_B}{2} \frac{cMM_C}{2} = \frac{abc}{8} MM_A \times MM_B \times MM_C = \frac{abc}{8} f(M).$$

Or, pour n'importe quel point  $M$  du triangle plein, les coordonnées barycentriques de  $M$  dans le repère affine  $(A, B, C)$  sont  $\frac{s_A(M)}{S}$ ,  $\frac{s_B(M)}{S}$  et  $\frac{s_C(M)}{S}$  ( $S$  aire du triangle  $ABC$ ). Ainsi, pour tout triplet  $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3$  tel que  $x + y + z = 1$ , il existe un (unique) point  $M$  de l'enveloppe convexe du triangle  $ABC$  tel que  $s_A(M) = x$ ,  $s_B(M) = y$ ,  $s_C(M) = z$ . Il s'agit donc de chercher le maximum (atteint, par l'argument habituel de compacité) de  $xyz$  pour tous

les triplets  $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3$  tels que  $x + y + z = 1$ . Cela revient à chercher le maximum de  $xy(1 - x - y)$  sur l'ensemble  $T$  des  $(x, y)$  tels que  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1$ . Ce maximum n'est certainement pas atteint sur le bord du triangle  $T$  de  $\mathbb{R}^2$ , car  $xy(1 - x - y)$  est nul sur ce bord. Le maximum est atteint en un point intérieur à  $T$  où les dérivées partielles de  $xy(1 - x - y)$  s'annulent, et l'on trouve immédiatement que c'est possible seulement en  $x = y = \frac{1}{3}$  (qui correspond à l'isobarycentre de  $T$ ).

Le maximum de  $f(M)$  est donc atteint au point  $G$  isobarycentre du triangle.

25. Lorsque  $M$  s'éloigne indéfiniment de  $O$ ,  $f(M)$  tend vers l'infini, car  $f(M) \geq OM - OA - OB$ . Donc la fonction continue  $f$  atteint sa borne inférieure dans le plan. Il reste à savoir où. C'est, *a priori*, en  $A$  ou  $B$ , ou  $O$  où un point où la différentielle de  $f$  s'annule. Mais si l'on note  $u_P(M)$  le vecteur unitaire  $\frac{1}{\|PM\|} \overrightarrow{PM}$ , la différentielle de  $f$  ailleurs qu'en  $A, B$  ou  $O$  est donnée par  $df_M.v = (u_A(M) + u_B(M) - u_O(M) | v)$ . Un point critique de  $f$  (autre que  $A, B, O$ ) est donc un point  $M$  tel que  $u_A(M) + u_B(M) = u_O(M)$ . Si  $\overrightarrow{MP} = u_O$ , cela revient à dire que le triangle  $MAB$  et le triangle  $MPB$  sont équilatéraux, autrement dit que  $M$  est, sur la perpendiculaire à  $AB$  menée de  $O$ , en une position où l'angle  $\widehat{AMO}$  est  $\pi/3$ . Dans ce cas,  $MA = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , donc  $MA + MB - MO = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ , minimum des valeurs prises par  $f$ .

26. 1. L'ouvert  $U$  (resp.  $V$ ) est étoilé autour de  $(1, 0)$  (resp. de  $(-1, 0)$ ). D'après le théorème de Poincaré,  $\omega|_U$  est la différentielle d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $U$ . De même,  $\omega|_V$  est la différentielle d'une fonction  $g$  de classe  $C^1$  sur  $V$ . Mais  $U \cap V$  est la réunion disjointe de deux demi-plans  $H^+$  et  $H^-$ , chacun étoilé. Sur  $H^+$ ,  $df$  et  $dg$  ont même différentielle  $\omega|_{H^+}$ , donc elles diffèrent d'une constante  $\delta_{f,g}^+ = f(a, b) - g(a, b)$ ,  $(a, b)$  quelconque sur  $H^+$ . Comme :

$$f(a, b) - g(a, b) - f(a, -b) + g(a, -b) = f(a, b) - f(a, -b) - g(a, b) + g(a, -b),$$

si l'on remplace  $f$  par une autre fonction  $f_1$  sur  $U$  telle que  $df_1 = \omega$  sur  $U$ , alors  $f_1(a, b) - f_1(a, -b) = f(a, b) - f(a, -b)$ . Donc  $f(a, b) - g(a, b) - f(a, -b) + g(a, -b)$  est indépendant du choix de  $f$ . De même pour  $g$ .

2. Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux formes différentielles sur  $W$ . A  $\omega_1$  on associe  $f_1$  sur  $U$  et  $g_1$  sur  $V$  telles que  $df_1 = \omega_1|_U$  et  $dg_1 = \omega_1|_V$ . De même, à  $\omega_2$  on associe  $f_2$  sur  $U$  et  $g_2$  sur  $V$  telles que  $df_2 = \omega_2|_U$  et  $dg_2 = \omega_2|_V$ . Pour des

réels  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , les fonctions  $f = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2$  et  $g = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2$  vérifient  $df = (\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2)|_U$ , et  $dg = (\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2)|_V$ . D'où la linéarité de l'application  $\oint$ .

Si  $\oint \omega = 0$ , c'est-à-dire que  $f(a, b) - g(a, b) = f(a, -b) = g(a, -b)$ , la fonction  $f - g$  est constante sur tout  $U \cap V$ . Notons  $\rho$  cette constante. Il suffit alors de définir  $h$  sur  $W$  par  $h|_U = f$  et  $h|_V = g + \rho$  pour que  $\omega = dh$  sur tout  $W$ .

3. Comme  $2\pi\omega_0$  admet pour primitive sur  $U$  la fonction "argument", et admet aussi une primitive sur  $V$  de même forme, on voit immédiatement que  $\oint \omega_0 = 1$ . Mais alors, par linéarité de l'application  $\oint$  on voit que  $\omega - (\oint \omega) \omega_0 \in \text{Ker}(\oint)$ , et il existe donc  $h$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $W$  telle que :

$$\omega = \left( \oint \omega \right) \omega_0 + dh$$

27. Soit  $\omega$  une forme fermée sur  $W = \mathbb{R}^3 \setminus O$ , où  $O = (0, 0, 0)$ . D'après le théorème de Poincaré, la restriction de  $\omega$  à  $U$  est la différentielle d'une fonction  $f$  sur  $U$ , et la restriction de  $\omega$  à  $V$  est la différentielle d'une fonction  $g$  sur  $V$ . Mais comme cette fois-ci  $U \cap V$  complémentaire d'une droite de  $\mathbb{R}^3$ , est connexe par arcs,  $f - g$  est une constante  $\rho$  sur tout  $U \cap V$ . On peut alors définir directement  $h$  comme à la fin de la deuxième question de l'exercice précédent de sorte que, sans hypothèse supplémentaire  $\omega = dh$ .

## Chapitre 23

1. L'équation homogène  $y' + a(x)y = 0$  admet comme solution particulière  $y_0(x) = \exp\left(\int_0^x (-a)\right)$ . On remarque que :

$$\begin{aligned} y_0(x+1) &= \exp\left(\int_0^{x+1} (-a)\right) = \exp\left(\int_0^1 (-a) + \int_1^{x+1} (-a)\right) \\ &= \exp\left(\int_0^1 (-a)\right) \exp\left(\int_1^{x+1} (-a)\right) = \exp\left(\int_0^1 (-a)\right) \exp\left(\int_0^x (-a)\right) \\ &= \mu y_0(x) \quad \text{avec} \quad \mu = \int_0^1 (-a) \end{aligned}$$

car  $a$  est 1-périodique, et  $\int_1^{x+1} (-a) = \int_0^x (-a)$ .

L'équation avec second membre admet pour solution générale :

$$y(x) = y_0(x) \left( \lambda + \int_0^x \frac{b}{y_0} \right).$$

Elle est 1-périodique si, et seulement si, pour tout  $x$ ,  $y(x+1) = y(x)$ , soit :

$$\forall x, \quad y_0(x+1) \left( \lambda + \int_0^{x+1} \frac{b}{y_0} \right) = y_0(x) \left( \lambda + \int_0^x \frac{b}{y_0} \right),$$

soit  $\forall x, \quad \mu y_0(x) \left( \lambda + \int_0^x \frac{b}{y_0} \right) = y_0(x) \left( \lambda + \int_0^x \frac{b}{y_0} \right).$

Comme  $y_0$  ne s'annule pas, on peut simplifier par  $y_0(x)$  et la condition s'écrit :

$$\forall x, \quad \mu \left( \lambda + \int_0^{x+1} \frac{b}{y_0} \right) = \lambda + \int_0^x \frac{b}{y_0}. \tag{1}$$

Or

$$\int_1^{x+1} \frac{b}{y_0} = \int_1^{x+1} \frac{b(u)}{y_0(u)} du = \int_0^x \frac{b(t+1)}{y_0(t+1)} dt = \frac{1}{\mu} \int_1^x \frac{b}{y_0},$$

car  $b$  est aussi 1-périodique. Ainsi la condition (1) s'écrit :

$$\forall x, \quad \mu \left( \lambda + \int_0^1 \frac{b}{y_0} + \frac{1}{\mu} \int_1^x \frac{b}{y_0} \right) = \lambda + \int_0^x \frac{b}{y_0},$$

ce qui équivaut à :

$$\mu \left( \lambda + \int_0^1 \frac{b}{y_0} \right) = \lambda. \tag{2}$$

Si  $\mu = 1$ , ce qui revient à dire que  $\int_0^1(-a) = 0$  ou encore que  $y_0$  est 1-périodique la solution  $y$  est 1-périodique si, et seulement si,  $\int_0^1 \frac{b}{y_0} = 0$ , ce qui ne dépend pas de  $\lambda$ , et toutes les solutions de l'équation différentielle sont 1-périodiques. Si  $\mu \neq 1$ , il existe une valeur et une seule de  $\lambda$  qui rende  $y$  périodique, pour la valeur de  $\lambda$  donnée par l'équation (2).

2. Soit  $w(x) = c + \int_0^x uv$ . Alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= (w' - vw)(x) = u(x)v(x) - v(x) \left( c + \int_0^x uv \right) \\ &= v(x) \left( u(x) - c - \int_0^x uv \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Par variation de la constante, la solution  $w$  de l'équation différentielle  $w' - vw = g$  s'écrit en fonction de  $g$  :

$$w(x) = \exp\left(\int_0^x v\right) \left(\lambda + \int_0^x \frac{g(t)}{\exp\int_0^t v} dt\right).$$

Vu le signe de  $g$ , on a  $w(x) \leq \lambda \exp\left(\int_0^x v\right)$ , avec  $\lambda = w(0) = c$

- 3 Sur chaque intervalle  $I_k = ]k\pi, (k+1)\pi[$ , on trouve une solution qui ne s'annule pas en écrivant l'équation sous la forme  $\frac{y'}{y} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$ , soit  $\ln|y| = -\frac{1}{\sin^3 x}$

et toutes les solutions sur  $I_k$  sont de la forme  $y_k(x) = \lambda_k \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ . Une telle fonction admet en  $k\pi$  et en  $(k+1)\pi$  un prolongement par 0 qui est, sur  $[k\pi, (k+1)\pi]$ , de classe  $C^\infty$  à dérivées toutes nulles en  $k\pi$  et en  $(k+1)\pi$ . La dimension demandée est donc 4, puisque, pour quatre constantes  $\lambda_k$ ,  $k = 0 \dots 3$ , les fonctions  $y_k$  définissent une unique solution dérivable sur  $[0, 4\pi]$  dont la restriction à chaque  $I_k$  soit  $y_k$ .

4. 1. Comme  $(x^2 y)' = x^2 y' + 2xy$ , l'équation homogène a immédiatement  $\frac{1}{x^2}$  comme solution sur chacun des deux intervalles  $I_+ = \mathbb{R}^{*+}$  et  $I_- = \mathbb{R}^{*-}$ . Par variation de la constante, on trouve pour solution générale sur  $I_\pm$  :

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - \ln(1+x^2) + C_\pm}{x^2}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \ln(1+x^2)) = 0$ , les solutions sur  $I_+$  et  $I_-$  ne sont restrictions d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  que si  $C_+ = C_- = 0$ . Le prolongement par 0 de  $x \mapsto \frac{1}{2} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{x^2}$  est continu (et même  $C^1$ ) et c'est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$ .

2. De même, les solutions sur  $I_+$  et  $I_-$  de cette équation sont de la forme  $y(x) = \frac{e^x + C_\pm}{x}$ , qui n'ont un prolongement commun continu en 0 que pour  $C_+ = C_- = -1$ . La fonction  $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$  a un prolongement  $C^\infty$ , unique solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle.

5. L'équation homogène admet comme solution sur chacun des trois intervalles  $I_1 = ]-\infty, 0[$ ,  $I_2 = ]0, 1[$  et  $I_3 = ]1, +\infty[$  la restriction de la même fonction  $x \mapsto y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ .



Sur  $I_2$  et  $I_3$ , la solution générale s'écrit  $y(x) = y_0(x) \left( \lambda + \int_{x_0}^x \frac{dt}{2\sqrt{t}(1-t)} \right)$ . Le changement de variable  $\sqrt{t} = u$  donne :

$$\int \frac{dt}{2\sqrt{t}(1-t)} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right|,$$

donc la solution générale sur chacun de ces deux intervalles est de la forme :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \lambda + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| \right),$$

avec une constante  $\lambda$  sur chacun des deux intervalles. À cause du dénominateur  $1/(1-x)$  du second membre de l'équation différentielle, il n'y a pas à chercher à raccorder les solutions sur  $I_2$  et  $I_3$ .

La solution sur  $I_2$  ne se prolonge par continuité en 0 que pour  $\lambda = 0$ . Notons-la  $y_2$ , de limite 1 en 0.

Sur  $I_1$ , on trouve de la même manière  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \left( \mu + \arctg(\sqrt{|x|}) \right)$ . Cette fonction n'admet de prolongement continu à gauche de 0 que si  $\mu = 0$ . Notons  $y_1$  la fonction  $y$  correspondante. Il existe alors une solution (maximale)  $y$  sur  $]-\infty, 1[$ , dont les restrictions sont  $y_1$  et  $y_2$ . Toute solution sur un intervalle ouvert contenant 0 en est une restriction. Elle admet d'ailleurs sur  $]-1, 1[$  le développement en série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ , seule solution développable en série entière au voisinage de 0, comme on le voit aisément par une étude directe.

6. 1. Pour tout  $n$ , il existe une constante  $\lambda_n$  telle que :

$$\forall x, \quad \varphi_n(x) = e^{nx} \left( \lambda_n - n \int_0^x f(t)e^{-nt} dt \right).$$

La fonction  $t \mapsto f(t)e^{-nt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  car  $f$  est bornée, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n \int_0^x f(t)e^{-nt} dt = n \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt} dt = \mu_n.$$

Si  $\lambda_n \neq \mu_n$ ,  $\varphi_n(x) \sim e^{nx}(\lambda_n - \mu_n)$  en  $+\infty$ , et  $\varphi_n$  n'est pas bornée. Donc  $\lambda_n = \mu_n$ , et  $\varphi_n(x) = ne^{nx} \int_x^{+\infty} f(t)e^{-nt} dt$ . Il faut encore prouver que cette solution est bornée en  $+\infty$ , mais si  $M = \|f\|_\infty$  :

$$|\varphi_n(x)| \leq ne^{nx} \int_x^{+\infty} Me^{-nt} dt = M.$$

Dans ce cas,  $\varphi'_n = n\varphi_n - nf$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  (ici c'est  $x$  qui varie, et  $n$  est fixé !). Ainsi  $\varphi_n$  est Lipschitzienne donc uniformément continue, et la continuité *uniforme* de  $f$  n'y est pour rien.

2. Comme  $ne^{nx} \int_x^{+\infty} e^{-nt} dt = 1$  :

$$\varphi_n(x) - f(x) = ne^{nx} \int_x^{+\infty} (f(t) - f(x)) e^{-nt} dt.$$

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \text{ et } \forall t \in [x, x + \eta], \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - f(x)| &\leq ne^{nx} \int_x^{x+\eta} \varepsilon e^{-nt} dt + ne^{nx} \cdot 2M \int_{x+\eta}^{+\infty} e^{-nt} dt \\ &\leq \varepsilon(1 - e^{-n\eta}) + 2Me^{-n\eta}. \end{aligned}$$

Il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $2Me^{-n\eta} \leq \varepsilon$ , auquel cas, pour tout  $x \geq 0$ ,  $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ .

7. 1. Sur  $\mathbb{R}^{*+}$  on peut écrire l'équation différentielle sous la forme  $y' - \frac{\alpha}{x}y = \frac{f(x)}{x}$ , et la solution générale sur ce même intervalle s'écrit sous la forme :

$$y(x) = x^\alpha \left( \lambda + \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right).$$

Comme  $\alpha > 0$ ,  $x^\alpha \lambda$  tend vers 0 si  $x$  tend vers 0 dans  $\mathbb{R}^{*+}$ .

Si  $f(0) \neq 0$ ,  $\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} \sim \frac{f(0)}{t^{\alpha+1}}$  en 0. Dans ce cas,  $\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}$  n'est pas intégrable et est de signe constant, donc :

$$\int_{x_0}^x \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \sim \int_{x_0}^x \frac{f(0)}{t^{\alpha+1}} dt = -\frac{f(0)}{\alpha} \left( \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x_0^\alpha} \right),$$

de sorte que  $x^\alpha \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt$  tend vers  $-\frac{f(0)}{\alpha}$  à droite en 0

Si  $f(0) = 0$ ,  $\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} = o\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$  lorsque  $t$  tend vers 0, et  $y(x)$  tend vers 0 =  $-\frac{f(0)}{\alpha}$  si  $x$  tend vers 0.

2. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on peut intégrer par parties la formule integrale :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\alpha y + f}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \lambda + \alpha x^{\alpha-1} \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt + \frac{f(x)}{x} \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \lambda + \alpha x^{\alpha-1} \left( \frac{-f(x)}{\alpha x^\alpha} + \frac{f(x_0)}{\alpha x_0^\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^x \frac{f'(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right) + \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

dont deux termes se simplifient évidemment. Comme  $\alpha > 1$ , le terme  $\alpha x^{\alpha-1} \lambda$  tend vers 0. De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \int_{x_0}^x \frac{f'(t)}{t^\alpha} dt = \frac{-f'(0)}{\alpha-1}$  comme on l'a montré plus haut avec  $f$  à la place de  $f'$  et  $\alpha + 1$  à la place de  $\alpha$ . Ainsi,  $y'$  admet une limite à droite en 0, et comme  $y$  a un prolongement continu à droite en 0, on sait que cela entraîne que  $y$  a un prolongement de classe  $\mathcal{C}^1$  à droite en 0.

8. Si  $x > 0$ , et  $g = f + f'$ , par variation de la constante,

$$f(x) = e^{-x} \left( \lambda + \int_{x_0}^x g(\tau) e^\tau d\tau \right)$$

Comme  $g(t) \sim t^\alpha$  si  $t$  tend vers  $+\infty$ , la fonction  $t \mapsto t^\alpha e^t$  n'est pas intégrable sur  $[x_0, +\infty[$ , Or, en  $+\infty$ ,  $t^\alpha e^t \sim (t^\alpha + \alpha t^{\alpha-1}) e^t = \frac{d}{dt} (t^\alpha e^t)$ . Donc  $H(x) \sim x^\alpha e^x$  en  $+\infty$  d'où l'équivalent cherché pour  $f$ .

9. La matrice  $A$  a pour polynôme caractéristique :

$$P(Z) = (Z - 1)(Z^2 - 2Z + 2) = (Z - 1)(Z - (1 + i))(Z - (1 - i))$$

Elle est donc diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Le vecteur  $v = (-1 - 2i, 1, -i)$  est propre pour la valeur propre  $\lambda = 1 + i$ , donc  $\bar{v} = (-1 + 2i, 1, i)$  est propre pour  $\bar{\lambda} = 1 - i$ . Comme  $e_1 = (1, 0, 0)$  est propre pour la valeur propre 1, toute solution complexe est de la forme :  $X(t) = \alpha e^{(1+i)t} v + \beta e^{(1-i)t} \bar{v} + \gamma e^t e_1$ . Les solutions réelles sont obtenues avec  $\beta = \bar{\alpha}$  et  $\gamma$  réel, ce qui se transforme immédiatement en :

$$\begin{aligned} X(t) &= 2 \operatorname{Re} \left( (\alpha_1 + i\alpha_2) e^t (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} -1 - 2i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) + \gamma e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha_1 e^t (-\cos t + 2 \sin t) + 2\alpha_2 e^t (2 \cos t + \sin t) + \gamma e^t \\ 2\alpha_1 e^t \cos t - 2\alpha_2 e^t \sin t \\ 2\alpha_1 e^t \sin t + 2\alpha_2 e^t \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. 1. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  admet pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 2Z = Z(Z-1)(Z-2)$$

Elle est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , et ses vecteurs propres sont les colonnes de

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ de sorte que (sans calculer } P^{-1}\text{) :}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont donc les fonctions de  $t$  de la forme :

$$t \mapsto c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  est diagonalisable de valeurs propres 1 et 4 et

$$\text{pour } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ on a } P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \Delta$$

On fait donc le changement de fonctions inconnues déterminé par :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \text{ Le système différentiel vérifié par } u \text{ et } v \text{ est alors :}$$

$$\begin{pmatrix} u''(t) \\ v''(t) \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix},$$

$$\text{c'est-à-dire } u'' = u + \frac{e^{2t} - 3e^t}{3} \text{ et } v'' = 4v + \frac{2e^{2t} + 3e^t}{3}.$$

Calculons  $u$ . L'équation homogène admet pour solutions les fonctions :

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

On trouve une solution particulière de  $u'' - u = e^{2t}/3$  de la forme  $\gamma e^{2t}$ . Par identification des coefficients,  $\gamma = 1/9$ . Puis on trouve une solution de  $u'' - u = -e^t$  de la forme  $\delta t e^t$ , puisque 1 est racine de l'équation caractéristique  $r^2 - 1 = 0$  de l'équation homogène. Par identification,  $\delta = -1/2$ . Par superposition, cela donne la forme générale des solutions :

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{9} e^{2t} - \frac{1}{2} e^t.$$

On trouve de la même manière :

$$v(t) = d_1 e^{2t} + d_2 e^{-2t} + \frac{t}{6} e^{2t} - \frac{1}{3} e^t.$$

Nous laissons au lecteur les expressions pour  $x(t)$  et  $y(t)$  qui s'en déduisent.

3. On pose d'habitude  $x' = u$  et  $y' = v$ , de sorte que le système  $\mathcal{E}$  formé des deux équations données et de ces deux nouvelles est équivalent au système linéaire d'ordre 1 :

$$x' = u; \quad y' = v; \quad u' = 4x - 6y - 3v; \quad v' = 2x - 4y - u.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  du

système est  $\chi_A(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 1)$ . Donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  à valeurs propres distinctes, et pour la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 3i \\ 2 & 0 & -1 - 2i & -1 + 2i \\ -8 & 2 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 2 - i & 2 + i \end{pmatrix},$$

la matrice  $P^{-1}AP$  est diagonale, de diagonale  $(-2, 2, i, -i)$  (on n'a pas besoin de calculer  $P^{-1}$ ). Les colonnes de  $P$  étant notées  $w_1, w_2, w$  et  $\bar{w}$ , les solutions cherchées sont :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} w_1 + c_2 e^{2t} w_2 + c_3 e^{it} w + c_4 e^{-it} \bar{w}.$$

Les solutions en  $x$  et  $y$  reviennent à oublier  $u$  et  $v$ . Les solutions réelles sont obtenues avec  $c_1, c_2$  constantes réelles, et  $c_4 = \bar{c}_3$ .

4. Ici, il est avantageux de remarquer que si  $(x, y)$  vérifie ce système  $\mathcal{E}$ , alors  $x'' + y'' = a^2(x + y)$ , et la fonction  $u = x + y$  est solution de  $u'' = a^2 u$  donc  $u = \alpha e^{ta} + \beta e^{-ta}$ . Il n'y a plus qu'à reporter l'expression de  $y$  qui en résulte :  $y = u - x$  dans l'une des deux équations de  $\mathcal{E}$  (la formule  $y = u - x$  permettant de retrouver  $y$  ensuite). Ainsi :

$$x'' = (a^2 + b)x + b(\alpha e^{ta} + \beta e^{-ta} - x) = a^2 x + b(\alpha e^{ta} + \beta e^{-ta}).$$

L'équation caractéristique de l'équation homogène est  $r^2 - a^2 = 0$ . On cherche donc une solution de  $x'' - a^2 x = b\alpha e^{ta}$  de la forme  $\gamma t e^{ta}$ , de même pour le second membre  $b\beta e^{-ta}$ , puis on superpose les solutions ce qui donne :

$$x(t) = \frac{bt}{2a}(\alpha e^{ta} - \beta e^{-ta}) + c_1 e^{ta} + c_2 e^{-ta}$$

$$y(t) = -\frac{bt}{2a}(\alpha e^{ta} - \beta e^{-ta}) + (\alpha - c_1)e^{ta} + (\beta - c_2)e^{-ta}.$$

11. 1. On sait que l'espace des solutions est de dimension 2. Le système différentiel proposé est équivalent à :

$$x' + y' = (t+1)(x+y) \quad \text{et} \quad x' - y' = (t-1)(x-y).$$

Donc  $x + y = \lambda \exp\left(\frac{t^2}{2} + t\right)$  et  $x - y = \mu \exp\left(\frac{t^2}{2} - t\right)$ . D'où  $x$  et  $y$ .

On remarquera que les matrices  $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$  commutent entre elles, et d'après la proposition 22, les solutions sont de la forme :

$$\exp\left(\int_0^t A(\tau) d\tau\right) \cdot X_0.$$

2. On peut restreindre l'étude à  $t > 0$

Pour le comportement voulu du système, d'après la proposition 22, il était nécessaire de choisir  $t \mapsto A(t)$  de telle sorte que les matrices  $A(t)$  et  $A(s)$  ne commutent pas en général. Comme  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ne commutent pas, l'exemple  $A(t) = J_1 + tJ_2$  est naturel. Pour  $t > 0$ , calculons  $B(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tau) d\tau\right)$ . La matrice :

$$A_1(t) = \int_0^t A(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 0 & t^2/2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , car son polynôme caractéristique est  $P(Z) = Z^2 - t^3/2$ . Une base de vecteurs propres de  $A_1(t)$  est formée des colonnes de la matrice  $Q(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2t} & -1/\sqrt{2t} \end{pmatrix}$ , et :

$$Q(t)^{-1} A_1(t) Q(t) = D(t) = \begin{pmatrix} t^{3/2}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -t^{3/2}/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On trouve alors que, pour  $u = \exp(t^{3/2}/\sqrt{2})$  et  $v = \exp(-t^{3/2}/\sqrt{2})$  :

$$B(t) = \exp(A_1(t)) = Q(t) \exp(D(t)) Q(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} & \sqrt{\frac{t}{2}}(u-v) \\ \frac{u-v}{\sqrt{2t}} & \frac{u+v}{2} \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant voir que les combinaisons linéaires des colonnes de  $B(t)$  ne sont pas solutions du système différentiel de départ. Un moyen simple de s'en convaincre est un développement de Taylor à d'ordre 2 des coefficients de  $B'(t) - A(t)B(t)$  (par produit matriciel de développements de Taylor), car  $B(t) - A(t)B(t) = \begin{pmatrix} -t^2/4 + o(t^2) & o(t^2) \\ o(t^2) & t^2/4 + o(t^2) \end{pmatrix}$ , et aucune combinaison linéaire des colonnes ne peut être nulle.

12. 1. La matrice  $A - \lambda Id$  est de rang 2 et nilpotente. Son carré ne peut être nul, car son noyau ne peut contenir son image, vues leurs dimensions. On sait alors que tout vecteur  $v_3$  tel que  $(A - Id)v_3 \neq 0$  forme avec  $v_2 = (A - Id)v_3$  et  $v_1 = (A - Id)v_2$  une base de  $\mathbb{C}^3$ . Soit  $P$  la matrice dont les colonnes successives sont les vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$ . Alors :

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

De plus, le système différentiel  $\frac{dX}{du} = AX$  équivaut, pour  $X = PY$ , au

système  $\frac{dY}{du} = TY$  dont la solution générale, pour  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et

$Y_0$  un vecteur colonne constant est :

$$Y(u) = \exp(u(\lambda Id + N))Y_0 = e^{u\lambda} \exp(uN)Y_0 = e^{u\lambda} \left( Id + uN + u\frac{N^2}{2} \right) Y_0.$$

Donc, pour  $Y_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$  :

$$\begin{aligned} Y(u) &= e^{u\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \alpha e^{u\lambda} \varepsilon_1 + \beta e^{u\lambda} (u\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma e^{u\lambda} \left( \frac{u^2}{2} \varepsilon_1 + u\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right), \end{aligned}$$

les vecteurs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  formant la base canonique. Sans aucun calcul supplémentaire, il en résulte que :

$$X(u) = \alpha e^{u\lambda} v_1 + \beta e^{u\lambda} (uv_1 + v_2) + \gamma e^{u\lambda} \left( \frac{u^2}{2} v_1 + uv_2 + v_3 \right).$$

2. Le changement de variable  $t = e^u$  (légitime sur l'intervalle considéré) permet d'écrire que  $\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = t \frac{dx}{dt}$ , et de même pour les autres fonctions  $y$  et  $z$ , de sorte que, en notant encore (par un abus de langage ici sans péril)  $x, y$  et  $z$  les fonctions de  $u$  correspondantes le système donné équivaut au système :

$$\left( \frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du} \right) = (x - 3y + 3z, -2x - 6y + 13z, -x - 4y + 8z),$$

soit  $\frac{dX}{du} = AX$ , pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$  La matrice  $A$  a pour poly-

nome caractéristique  $\chi_A(\xi) = (\xi - 1)^3$ , et le noyau de  $A - Id$  est de dimension 1.

On peut appliquer la première question avec  $\lambda = 1$  et l'on trouve facilement que  $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , ce qui permet de conclure avec la formule *explicite* donnée plus haut pour  $X(u)$ .

- 13** En reportant l'expression de  $Y$  de la première équation dans la seconde, le système proposé est équivalent à :

$$Y = X' + t^4 I_n, \quad t^2(X'' + 4t^3 I_n) = 2t(X' + t^4 I_n) - 2X + t^5 I_n,$$

dont la seconde relation s'écrit :

$$t^2 X'' - 2tX' + 2X = -t^5 I_n.$$

On cherche d'abord une solution particulière de la forme  $\lambda t^5 I_n$ , et on trouve par identification  $\lambda = -1/12$ . Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation homogène ( $\mathcal{EH}$ ). Chacun des coefficients d'une matrice  $X(t)$  solution de ( $\mathcal{EH}$ ) est solution de la même équation différentielle :

$$t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0.$$

La recherche de solutions particulières polynomiales donne immédiatement sa solution générale sous la forme :

$$x(t) = at + bt^2.$$

La solution générale l'équation homogène en  $X$  est donc  $X(t) = tA + t^2 B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées constantes. La fonction  $Y$  s'en déduit

- 14** La matrice  $A(t) = tA(1)$  est antisymétrique, et les matrices  $A(t)$  commutent toutes. On pourrait donc, avec la proposition 22 écrire les solutions

$X(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tau) d\tau\right) X_0$ . Mais on peut aussi réduire sur  $\mathbb{R}$  simultanément toutes les matrices  $A(t)$ , en réduisant  $A(1)$  dans une même base orthonormée dont le premier vecteur  $v_1$  est colinéaire à  $(1, 1, 1)$ , vecteur du noyau de  $A(t)$  pour tout  $t$ . Si  $a$  est l'endomorphisme associé à  $A(1)$ ,  $a$  est anti-autoadjoint, et la matrice de  $a$  dans une base orthonormée de premier vecteur  $v_1$  est encore antisymétrique donc nécessairement (avant tout calcul)

de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}$ . On norme la base orthogonale des colonnes

de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ , ce qui donne  $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ , et



$$P^{-1}A(t)P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t\sqrt{3} \\ 0 & t\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = C. \text{ Pour } Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \text{ le}$$

système différentiel  $Y' = CY$  s'écrit  $y_1' = 0$ , et  $(y_2 + iy_3)' = it\sqrt{3}(y_2 + iy_3)$ , donc  $y_2 + iy_3 = (\alpha + i\beta) \exp(it^2\sqrt{3}/2)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles. Il faut séparer les parties réelle et imaginaire. Ainsi :

$y_1$  est constant

$$y_2(t) = \alpha \cos(t^2\sqrt{3}/2) - \beta \sin(t^2\sqrt{3}/2)$$

$$y_3(t) = \alpha \sin(t^2\sqrt{3}/2) + \beta \cos(t^2\sqrt{3}/2).$$

D'où  $X(t) = PY(t)$ .

15. 1. De  $X(t) = X(0) + \int_0^t A(\tau)X(\tau) d\tau$  il résulte que, pour tout  $t$  :

$$\|X(t)\| \leq \|X(0)\| + \int_0^t \|A(\tau)\| \|X(\tau)\| d\tau.$$

Le lemme de Gronwall de l'exercice 2, appliqué à  $u(t) = \|X(t)\|$ ,  $v(t) = \|A(t)\|$  et  $c = \|X(0)\|$ , donne :

$$\forall t, \quad \|X(t)\| \leq \|X(0)\| \exp\left(\int_0^t \|A(\tau)\| d\tau\right).$$

Mais la fonction  $t \mapsto \int_0^t \|A(\tau)\| d\tau$  est bornée, donc la fonction  $t \mapsto \|X(t)\|$  est bornée, et il existe un réel  $M$  positif tel que, pour tout  $t$ ,  $\|X'(t)\| \leq M\|A(t)\|$ . Comme la fonction  $t \in A(t)$  est intégrable, la fonction  $t \mapsto X'(t)$  est intégrable, et  $\int_0^t X'(\tau) d\tau = X(t) - X(0)$  admet une limite lorsque  $t$  tend vers l'infini.

2. Le système différentiel d'ordre 1 équivalent à l'équation donnée est défini en posant  $y' = u$ , ce qui donne l'autre équation :  $u' = -y - \frac{1}{t^2}u$ . En notant  $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$ , il s'écrit de manière synthétique :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} Y(t).$$

En considérant sa matrice comme une petite perturbation de la matrice

$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  par la matrice :

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2} P(-1),$$

la fonction vectorielle  $t \in Y(t)$  vérifie :

$$Y'(t) - RY(t) = P(t)Y(t) = W(t).$$

Un système fondamental de solutions de  $Y' - RY = 0$  est formé des deux fonctions vectorielles indépendantes :  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$  et  $t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

On obtient une expression intégrale pour  $Y(t)$  faisant intervenir  $W(t)$  en appliquant la *variation des constantes* à  $Y'(t) - RY(t) = W(t)$ . Pour cela

si  $M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ , on pose  $Y(t) = M(t)Z(t)$ , de sorte que  $M'(t)Z(t) + M(t)Z'(t) - RM(t)Z(t) = W(t)$ , soit :

$$Z'(t) = M(t)^{-1}W(t) = M(-t)P(t)Y(t) = M(-t)P(t)M(t)Z(t).$$

La matrice  $M(-t)P(-1)M(t)$  est une matrice de projecteur autoadjoint, de norme d'opérateur 1 pour la norme euclidienne. Cela montre sans calcul

que l'application  $t \mapsto A(t) = M(-t)P(t)M(t) = \frac{1}{t^2}M(-t)P(-1)M(t)$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , pour  $a > 0$ . La question précédente entraîne que

$t \mapsto Z(t)$  admet une limite  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . La première ligne de  $Y(t)$  est donc  $y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \varepsilon(t)$ , où  $\varepsilon(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.

16. Comme  $\frac{d}{dt}({}^tX(s)X(s)) = {}^tX'(s)X(s) + {}^tX(s)X'(s)$ , la matrice

$$A(s) = {}^tX(s)X'(s)$$

est antisymétrique, et  $X' = {}^tX^{-1}A = XA$ .

Réciproquement, on suppose que  $t \mapsto X(t)$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $M_p(\mathbb{R})$ , telle que  $X(0) \in O^+(p)$ . Montrons que si, de plus, pour tout  $t$ ,  $X'(t) = X(t)A(t)$ , où  $A(t)$  est une matrice antisymétrique (réelle) alors pour tout  $t$ ,  $X(t) \in O^+(p)$ .

Comme  $GL_p(\mathbb{R})$  est ouvert l'ensemble  $I$  des  $t$  tels que  $X(s) \in GL_p(\mathbb{R})$  pour tout  $s$  compris entre 0 et  $t$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Par hypothèse, sur cet intervalle,  $X' = XA$  donc  $X^{-1}X' = A$ , antisymétrique, c'est-à-dire que  $X^{-1}X' + {}^tX'{}^tX^{-1} = 0$ . Cela entraîne que  $X' + X{}^tX'{}^tX^{-1} = 0$  puis que  $X'{}^tX + X{}^tX' = 0$ , ce qui revient à dire que  $\frac{d}{dt}(X{}^tX) = 0$ . Attention, la transposée est ici à droite. Donc, pour tout  $t \in I$ ,  $X(t){}^tX(t) = X(0){}^tX(0) = \text{Id}$ , et  $X(t) \in O(p)$ . Comme l'application  $t \mapsto X(t)$  est continue et l'application

$t \mapsto \det X(t)$  est continue de  $I$  dans  $\{-1, 1\}$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\det X(t)$  est constamment égal à 1, et  $X(t) \in O^+(p)$ .

Par continuité, si  $I$  n'était pas  $\mathbb{R}$  tout entier, ses bornes seraient aussi dans  $I$ . Donc  $I = \mathbb{R}$ , d'où le résultat.

17. Si  $P$  est une matrice constante inversible et  $P^{-1}AP = T$ , en posant  $X = PY$ , le système  $X' = AX$  est équivalent au système  $Y' = TY$ . On peut donc supposer  $A$  déjà réduite, i.e. de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dans le premier cas, les solutions du système  $x' = \lambda x, y' = \mu y$  sont  $x = c_1 e^{\lambda t}, y = c_2 e^{\mu t}$ , qui tendent toutes vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  et  $\operatorname{Re} \mu < 0$ .

Dans le second cas les solutions de  $x' = \lambda x + y, y' = \lambda y$  sont  $x = e^{\lambda t}(c_1 + tc_2), y = e^{\lambda t}c_2$ , qui tendent toutes vers 0 en  $+\infty$  si, et seulement si,  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .

Le lecteur peut maintenant lui-même voir à quelle condition les solutions sont toutes bornées sur  $\mathbb{R}^+$ .

18. 1.  $Q'(t) = v_1 + 2tv_2 + 3t^2v_3 + \dots + (k-1)t^{k-2}v_{k-1}$ , et  $X(t) = e^{t\lambda}Q(t)$  est solution de  $X' = AX$  si, et seulement si, pour tout  $t$  :

$$(e^{t\lambda}Q(t))' = \lambda e^{t\lambda}Q(t) + e^{t\lambda}Q'(t) = Ae^{t\lambda}Q(t),$$

ce qui équivaut à  $\lambda Q(t) + Q'(t) = AQ(t)$ , soit à :

$$Q'(t) = (A - \lambda \operatorname{Id})Q(t).$$

En développant suivant les puissances de  $t$  cela donne le système linéaire (\*\*).

2. Pour trouver en pratique une solution de  $X' = AX$  de cette forme (en fait, on peut montrer que toutes les solutions sont de cette forme), il suffit donc de chercher un vecteur  $v_0$  tel que  $G^k v_0 = 0$  mais  $G^{k-1} v_0 \neq 0$ . Les formules (\*\*) de l'énoncé fournissent explicitement  $Q(t)$  à partir du seul  $v_0$ , car :

$$\begin{aligned} Q(t) &= v_0 + tGv_0 + \frac{t^2}{2}G^2v_0 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}G^{k-1}v_0 \\ &= \left( \operatorname{Id} + tG + \frac{t^2}{2}G^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}G^{k-1} \right) \cdot v_0 \end{aligned}$$

où l'on reconnaît  $Q(t) = \exp(tG)v_0$ , car  $G^k v_0 = 0$ .

3. Pour tout vecteur  $v_0$  tel que  $G^k v_0 = 0$  mais  $G^{k-1} v_0 \neq 0$ , nous savons déjà que les vecteurs  $v_0, Gv_0, \dots, G^{k-1}v_0$  de  $\mathbb{C}^n$  sont indépendants. Les fonctions de  $t$  :

$$Q_0(t) = \exp(tG)v_0, Q_1(t) = \exp(tG)v_1, \dots, Q_{k-1}(t) = \exp(tG)v_{k-1}$$

sont des solutions linéairement indépendantes de  $X' = AX$ , car on vérifie aisément par récurrence sur la formule explicite donnée de  $Q_i(t)$  que  $Q_i(t)$  est de degré exactement  $k-1-i$  le terme de degré le plus élevé en  $t$  de

$$Q_i(t) \text{ étant } \frac{t^{k-1-i}}{(k-1-i)!} G^{k-1-i} v_i, \text{ et } G^{k-1-i} v_i = G^{k-1} v_0 \neq 0.$$

4. Le polynôme caractéristique est  $\chi_A(\xi) = (\xi - 1)^2(\xi + 3/2)$ . Pour la valeur propre  $3/2$ , un vecteur propre est  $w = (-2, 8, 5)$ , d'où la solution  $e^{-3t/2}(-2, 8, 5)$  de  $X' = AX$ . Pour la valeur propre  $\lambda = 1$  :

$$G = A - \text{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } G^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -5/2 & 5/2 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur  $v_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = (1/2, 0, 1)$  du noyau de  $G^2$  n'est pas dans le noyau de  $G$ . La méthode précédente fournit donc les solutions  $e^t(\text{Id} + tG)v_0$ , pour la fonction  $Q_0(t) = \text{Id} + tG$ , et  $e^t Gv_0$ , pour la fonction  $Q_1(t) = \text{Id} v_0 = v_0$ . Ces deux solutions sont donc :

$$e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2t & 1-2t & 0 \\ t & -t & 1-t/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1/2+t \\ t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } e^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

19. Pour le cas  $n = 1$ , reprenons rapidement la méthode de l'exercice 12 du chapitre 18 (volume I). On suppose que  $g(x) = f'(x) - \alpha f(x)$  tend vers 0 si  $x$  tend vers  $+\infty$ , avec  $\text{Re}(\alpha) < 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $t_0$  tel que si  $t > t_0$ ,  $|g(t)| \leq \varepsilon$ . Avec justement cette valeur de  $t_0$ , on peut écrire :

$$f(t) = e^{\alpha t} \left( \lambda + \int_{t_0}^t g(\tau) e^{-\alpha \tau} d\tau \right) = e^{\alpha t} \lambda + \int_{t_0}^t g(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau.$$

et le changement de variable  $u = t - \tau$  donne :

$$|f(t)| \leq |\lambda| e^{-|\text{Re}(\alpha)|t} + \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-|\text{Re}(\alpha)|u} du.$$

Si  $t$  est assez grand, cela est inférieur à  $\varepsilon + \frac{\varepsilon}{|\text{Re}(\alpha)|}$ .

Pour le cas général, on écrit  $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$  où :

$$Q = X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_1X + b_0$$

a aussi des zéros de partie réelle strictement négative. La fonction :

$$h = f^{(n-1)} + b_{n-2}X^{(n-2)} + \dots + b_1f' + b_0f$$

vérifie les hypothèses du cas  $n = 1$  ci-dessus, donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ , ce qui donne la réponse par récurrence.

- 20.** 1. L'équation différentielle  $(x^2y)'' = 0$  n'a que 0 comme solution définie sur un intervalle centré en 0, car  $x^2y = \alpha x + \beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  constantes.
2. Pour la dimension 4, cherchons une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux ayant sur  $\mathbb{R}^+$  une base de solutions formée de  $x^3$  et  $x^4$  (afin que chaque solution ait un prolongement continu en 0 nul ainsi que ses deux premières dérivées en 0). Toute combinaison linéaire  $y$  de ces deux fonctions vérifie :

$$\begin{vmatrix} y & x^3 & x^4 \\ y' & 3x^2 & 4x^3 \\ y'' & 6x & 12x^2 \end{vmatrix} = x^4(x^2y'' - 6xy' + 12y) = 0.$$

On reconnaît l'équation d'Euler  $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$ , dont les solutions sur  $\mathbb{R}^{*+}$  sont en effet  $\lambda_+x^3 + \mu_+x^4$ , et les solutions sur  $\mathbb{R}^{*-}$  sont  $\lambda_-x^3 + \mu_-x^4$ . Ces quatre constantes d'intégration sont compatibles pour fournir une solution de classe  $C^2$  sur tout  $\mathbb{R}$ . La dimension de l'espace vectoriel des solutions est 4.

3. Le coefficient de  $y''$  dans cette équation différentielle  $(\mathcal{E}\mathcal{D})$  est :

$$a(x) = (PQ' - QP')(x) = xP(x)^2$$

qui s'annule exactement aux points  $0, 1, 2, \dots, k - 1$ . Sur chacun des  $k$  intervalles ouverts  $I_k$  qu'ils délimitent, les solutions de  $(\mathcal{E}\mathcal{D})$  sont de la forme  $\lambda_k P(x) + \mu_k xP(x)$  (car  $P$  et  $Q$  sont indépendants), et ont aux bornes un prolongement  $C^2$  nul ainsi que les deux premières dérivées. Leur recollement donne toutes les solutions sur  $\mathbb{R}$ , dont l'espace est de dimension  $2k$ .

4. Si  $a$  est un polynôme de degré  $m$ , il n'a pas plus de  $m$  racines réelles, ce qui délimite au plus  $m + 1$  intervalles ouverts, sur lesquels l'espace des solutions est de dimension 2. Par recollement, la dimension de l'espace des solutions sur  $\mathbb{R}$  ne peut dépasser  $2(m + 1)$ .
5. Il faut se garder de croire que le résultat demandé soit une conséquence directe du seul théorème de Cauchy-Lipschitz, car la fonction  $a$  peut s'annuler sur  $I$ , comme dans les questions précédentes.

La fonction  $a$  ne peut avoir une suite infinie de zéros tendant en décroissant strictement vers 0, car, d'après le théorème de Rolle, sa dérivée aurait elle aussi une infinité de zéros tendant vers 0 à droite, et sa dérivée seconde, etc., de sorte que tous les coefficients de Taylor de  $a$  en 0 seraient nuls, et  $a$  serait nulle (en fait, il en serait de même si  $a$  était à valeurs complexes mais on ne pourrait lui appliquer le théorème de Rolle : dans le cas complexe, c'est le *principe des zéros isolés* qu'on voit dans les exercices sur les séries entières). Il existe donc un intervalle  $J_\varepsilon = ]0, \varepsilon[$  sur lequel  $a$  ne s'annule pas. L'application  $\theta_\varepsilon$  qui associe à  $y \in E$  sa restriction à  $J_\varepsilon$  est linéaire de  $E$  dans l'espace vectoriel  $E_\varepsilon$  des solutions de notre équation différentielle sur  $J_\varepsilon$ . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la dimension de  $E_\varepsilon$  est exactement 2. Mais le même argument avec le théorème de Rolle nous dit que si  $\theta_\varepsilon(y) = 0$  alors  $y = 0$ , autrement dit que  $\theta$  est linéaire *injective*. D'où le résultat.

**21.** 1. Si  $y$  est une fonction deux fois dérivable sur  $I$  et  $f$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $I$  sur  $J$ , on posera  $y(x) = h(t) = h(f(x))$  i.e.  $y = h \circ f$ .

Pour éviter toute confusion, la seule variable utilisée dans toutes les formules suivantes est  $x$ . Si  $y = h \circ f$ ,  $y' = (h' \circ f) \cdot f'$ , et  $y'' = (h'' \circ f) \cdot f'^2 + (h' \circ f) \cdot f''$ . D'où :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(h \circ f)'' + b(h \circ f)' + c(h \circ f) \\ &= af'^2 \cdot (h'' \circ f) + (af'' + bf') \cdot (h' \circ f) + c \cdot (h \circ f). \end{aligned}$$

Si le difféomorphisme  $f$  est tel que les fonctions  $\alpha = \frac{af'^2}{c}$  et  $\beta = \frac{af'' + bf'}{c}$  sont constantes (notées encore  $\alpha$  et  $\beta$  dans ce cas), alors :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \alpha \cdot h'' \circ f + \beta \cdot h' \circ f + h \circ f = 0 \\ &\iff (\alpha h'' + \beta h' + h) \circ f = 0 \\ &\iff \alpha h'' + \beta h' + h = 0, \end{aligned}$$

vu la bijectivité de  $f$ , et  $h$  vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Il reste donc à savoir pour quelles fonctions  $a$ ,  $b$ ,  $c$  il peut exister un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $f$  rendant constantes les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  ci-dessus. La constante  $\alpha$  doit être du signe de  $a/c$ , et si l'on pose  $af'^2/c = \alpha$ , cela définit  $f'$  au signe près sur tout l'intervalle  $I$  car  $f'$  ne doit pas s'annuler. Soit  $\varepsilon$  le signe de  $a/c$ .

Il faut et il suffit donc que la fonction  $\sqrt{\varepsilon c/a}$  vérifie l'autre condition, à savoir que :

$$\frac{a \left( \sqrt{\varepsilon c/a} \right)' + b \sqrt{\varepsilon c/a}}{c} \text{ est constante.}$$

Une fois cette condition vérifiée nommons  $\beta$  cette constante. On peut alors choisir  $\alpha = \pm 1$  (du signe de  $c/a$ ), et poser  $f' = \sqrt{\epsilon c/a}$ . Notons que l'équation différentielle vérifiée par  $h$  est connue d'avance, c'est  $\alpha h'' + \beta h' + h = 0$ .

2. Dans ce cas un calcul facile donne  $\frac{a \left(\sqrt{\epsilon c/a}\right)' + b\sqrt{\epsilon c/a}}{c} = -1$  d'où  $\beta = -1$ . Comme  $\frac{c}{a} = \frac{1}{x^2(x+1)^2}$ , on pose  $\alpha = 1$ ,  $f' = \frac{1}{x(x+1)}$ , et  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ , changement de variable bijectif de  $\mathbb{R}^{*+}$  sur  $\mathbb{R}^{*-}$ . La fonction  $h$  vérifie  $h'' - h' + h = 0$ . Les racines de l'équation  $r^2 - r + 1 = 0$  sont  $-j$  et  $-\bar{j}$ , de sorte que  $h(t) = c_1 e^{t/2} \cos(t\sqrt{3}/2) + c_2 e^{t/2} \sin(t\sqrt{3}/2)$ . On récupère  $y$  en écrivant simplement  $t = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

22. Les deux équations homogènes sont à coefficients constants, et le second membre n'est pas une "exponentielle polynôme" donc la variation des constantes s'impose.

1. Les solutions sont de la forme  $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$ , avec :

$$\lambda' \cos 2x + \mu' \sin 2x = 0, \quad \text{et} \quad -2\lambda' \sin 2x + 2\mu' \cos 2x = 2 \tan x,$$

d'où  $\lambda' = -2 + 2 \cos^2 x$  et  $\mu' = -\tan x + 2 \sin x \cos x$ , et finalement :

$$\lambda = \lambda_0 - x + \sin x \cos x, \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 + \ln(\cos x) + \sin^2 x.$$

2. L'équation caractéristique  $r^2 + 6r + 9 = 0$  admet  $-3$  comme racine double donc  $y = \lambda e^{-3x} + \mu x e^{-3x}$ . On trouve  $\lambda' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $\mu' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , d'où

$$\lambda = \lambda_0 - \sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 + \operatorname{argsh} x.$$

Mais on peut aussi remarquer que la variation de la constante avec  $y_0 = e^{-3x}$ , en écrivant la solution générale sous la forme  $y(x) = y_0(x)z(x)$ , donne  $z''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , dont l'intégration est immédiate.

23. Dans ces exemples, on cherche deux solutions simples de l'équation homogène ( $\mathcal{E}\mathcal{H}$ ) linéairement indépendantes et une solution simple de l'équation complète ( $\mathcal{E}$ ), inspirées de la forme de l'équation.

1. Une solution de ( $\mathcal{E}\mathcal{H}$ ) de la forme  $\alpha e^{\beta x}$  est  $e^x$  ; voyant le second membre, on cherche une solution de ( $\mathcal{E}$ ) de la forme (polynôme de bas degré)  $\times e^{-x}$ , on trouve  $\frac{1+x}{2} e^{-x}$ , mais si l'on pousse le calcul jusqu'à chercher le polynôme de degré 2, on découvre la solution  $(5 + 6x + 2x^2) e^{-x}$  de l'équation homogène, ce qui par superposition, donne toutes les solutions.

2. Les fonctions  $e^x$  et  $x$  sont solutions de l'équation homogène. Mais la variation des constantes serait maladroite alors que la recherche d'une solution "exponentielle-polynôme"  $P(x)e^{2x}$  de  $(\mathcal{E})$  donne tout de suite  $y = \frac{x}{2}e^{2x} - e^{2x}$ .

24. Dans ces trois cas on va deviner sans mal une solution de l'équation homogène, mais pas deux, donc on utilisera la variation *de la* constante

1. Sur  $\mathbb{R}^{*+}$ , la fonction  $x$  est solution, et on cherche la solution générale sur  $\mathbb{R}^{*+}$  de la forme  $y(x) = xz(x)$ . La fonction  $z' = v$  vérifie l'équation différentielle d'ordre 1  $x^4v' + (2x^3 + x^2)v = -e^{1/x}$ . On en tire  $v = (1 + \lambda x)e^{1/x}/x^3$ , et par intégration  $z(x) = -\frac{e^{1/x}}{x} + e^{1/x} - \lambda e^{1/x} + \mu$  d'où  $y = (x - 1)e^{1/x} - \lambda x e^{1/x} + \mu x$ . Les solutions sur  $\mathbb{R}^*$  ont la même forme. On pouvait aussi commencer par un changement de variable  $x = 1/t$ .

2. La fonction  $x - 2$  est solution, et, pour  $x > 2$ , cherchons une solution de la forme  $y(x) = (x - 2)z(x)$ . La fonction  $z' = v$  vérifie l'équation différentielle :

$$-2x(x - 1)(x - 2)v' + (4 - 3x^2)v = 0.$$

La décomposition en éléments simples :

$$\frac{4 - 3x^2}{2x(x - 1)(x - 2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{2}{x - 2}$$

donne la solution générale :  $v = \frac{\lambda x}{\sqrt{x - 1}(x - 2)^2}$ .

En intégrant, avec le changement de variable  $t = \sqrt{x - 1}$ , on trouve :

$$z(x) = -2\lambda \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 2} + \mu.$$

La solution générale sur  $]2, +\infty[$  est donc (S)  $y = \mu(x - 2) - 2\lambda\sqrt{x - 1}$ . Sur  $]1, 2[$  elle a la même forme, avec des constantes *a priori* différentes. Les solutions sur  $]1, +\infty[$  sont de la forme (S), car pour que  $y$  soit de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$ , il faut que les constantes pour les restrictions à droite et à gauche de 2 soient les mêmes. On vérifie par ailleurs aisément que sur  $]-\infty, 1[$  les fonctions  $y = \mu(x - 2) - 2\lambda\sqrt{1 - x}$  sont encore solutions. Aucune solution n'a le point 1 dans l'intérieur de son domaine.

3. Ici encore,  $x$  est solution, et sur  $\mathbb{R}^{*+}$  on cherche  $y(x) = xz(x)$ . La fonction  $z' = v$  vérifie  $x(x^2 + 1)v' + (3x^2 + 2)v = 0$ , d'où  $v = \frac{\lambda}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}$  et  $z = -\frac{\lambda\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \mu$ . La solution générale en  $y$  est, toujours sur  $\mathbb{R}^{*+}$ ,



$y(x) = \mu x - \lambda\sqrt{x^2 + 1}$ . Mais cette forme convient aussi sur  $\mathbb{R}^{*-}$  avec *a priori* d'autres constantes d'intégration. Pour une solution sur  $\mathbb{R}$  tout entier il faut que les constantes à droite et à gauche de 0 soient les mêmes. L'espace des solutions sur  $\mathbb{R}$  est bien de dimension 2, comme le prédit le théorème de Cauchy car  $x^2 + 1$  ne s'annule pas.

25. 1. Si  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est solution sur un intervalle  $] -R, R[$  de  $(E_1)$  :

$$0 = A = x(x - 1) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1)a_n x^{n-2} + (1 - 3x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Une transformation immédiate de ces sommations pour faire apparaître  $x^n$  serait maladroite, car il faudrait ensuite, à cause des polynômes en facteur, faire un décalage d'indices dans l'autre sens. Il vaut mieux *d'abord développer l'expression*, voir à quel degré apparaît  $x$  dans chaque sommation, et décaler ensuite les indices de sommation, en veillant aux premiers indices. On regroupe enfin ces sommes de termes  $\mu_n x^n$  en isolant les premiers termes. Ces précautions sont importantes pour la discussion du système linéaire (à une infinité d'équations) obtenu. On évitera le confort fictif des sommations  $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n - 1) \dots$  dangereuses pour les exposants de  $x$  (qui ne doit jamais apparaître à un exposant négatif). Donc :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1)a_n x^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n + 1)n a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1)a_n x^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)a_{n+1} x^n - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= 2a_2 x + a_1 + 2a_2 x - 3a_1 x - a_0 - a_1 x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n + 1)n a_{n+1} - n(n - 1)a_n + (n + 1)a_{n+1} - 3n a_n - a_n) x^n \\ &= (4a_2 - 4a_1)x + a_1 - a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n + 1)^2 a_{n+1} - (n + 1)^2 a_n) x^n. \end{aligned}$$

Il est clair que les solutions développables en série entière au voisinage de 0 sont les fonctions  $\frac{\lambda}{1-x}$ ,  $\lambda$  constante. On peut alors utiliser la variation de la constante sur  $]0, 1[$  pour calculer les solutions sur cet intervalle. On pose donc  $y(x) = \frac{z(x)}{1-x}$ , et la fonction  $z$  vérifie  $xz'' + z' = 0$ , qui s'intègre immédiatement en  $z = \lambda + \mu \ln x$ . Sur chacun des trois intervalles  $]-\infty, 0[$ ,  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ , les solutions de  $(E_1)$  sont les fonctions  $\frac{\lambda + \mu \ln |x|}{1-x}$ , sans raccordement possible en 0. Le raccordement est naturellement possible en 1 lorsque  $\lambda = 0$ .

Signalons, sans qu'il s'agisse là d'une recette infaillible, que la présence de  $1-x$  en facteur de  $y''$  peut inciter à poser  $y = \frac{z}{1-x}$ . Dans le cas particulier de cet exercice, il se trouve que cela simplifie brutalement la question ...

2. Si  $(E_2)$  admet une solution développable en série entière  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , sur  $] -R, R[$ , un calcul analogue à celui de la première question donne :

$$B = xy'' + 3y' - 4x^3y = 3a_1 + 8a_2x + 15a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} ((n+3)(n+1)a_{n+1} - 4a_{n-1})x^n.$$

Les coefficients d'indice non multiple de 4 sont nuls, et pour les autres,  $a_{4p} = \frac{a_0}{(2p+1)!}$ . On reconnaît le développement de :

$$\frac{a_0 \operatorname{sh}(x^2)}{x^2} = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}.$$

La fonction  $y_0$  prolongement continu de  $\operatorname{sh}(x^2)/x^2$  (par 1 en 0) est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  tout entier et ne s'annule pas. A cause du dénominateur  $x^2$ , il faudra tout de même (provisoirement) séparer l'étude sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et  $\mathbb{R}^{*-}$  pour la variation de la constante, afin de chercher la solution générale sous la forme  $y(x) = y_0(x)z(x)$ . La fonction  $z' = v$  vérifie l'équation différentielle :  $-x \operatorname{sh}(x^2)v' + (\operatorname{sh}(x^2) - 4x^2 \operatorname{ch}(x^2))v = 0$ , qui s'intègre aisément en  $v = -\frac{x}{\operatorname{sh}(x^2)}$ , d'où  $z = \frac{\operatorname{ch}(x^2)}{2 \operatorname{sh}(x^2)}$ . Les solutions de  $(E_2)$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  sont donc les fonctions  $\frac{\alpha \operatorname{sh}(x^2) + \beta \operatorname{ch}(x^2)}{x^2}$ .

Elles ont la même forme sur  $\mathbb{R}^{*-}$  et ne se recollent en une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  que si le coefficient de  $\operatorname{ch}$  est nul. Donc l'espace des solutions sur  $\mathbb{R}$  est une droite engendrée par  $y_0$ .

**26** Une fonction  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  développable en série entière sur  $] -R, R[$  vérifie :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = \lambda a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((\lambda - n - n^2)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2})x^n,$$

qui est nul pour tout  $x$  si, et seulement si :

$$\forall n \geq 0, \quad (\lambda - n - n^2)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0.$$

Comme  $n+n^2$  croît strictement avec  $n$ , pour  $\lambda$  donné il existe *au plus une valeur* de  $n$  telle que  $\lambda = n + n^2$ .

Supposons d'abord qu'il n'en existe pas. Alors pour tout couple  $(a_0, a_1)$  ces relations définissent une suite  $(a_n)$  unique, et d'après la règle de d'Alembert appliquée à  $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n^2 + n - \lambda}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1$ , le rayon de convergence de la série entière obtenue est exactement 1 (si  $a_0$  ou  $a_1$  n'est pas nul).

Si  $\lambda = n + n^2$ , pour un  $n$  pair par exemple (l'autre cas est similaire), les termes d'indice strictement supérieur à  $n$  pairs sont nuls, et ceux d'indice inférieur à  $n$  (pairs) sont définis par récurrence descendante à partir de  $a_n$ , ce qui donne un polynôme pair de degré  $n$  si  $a_n \neq 0$ . Si  $a_1 \neq 0$ , les  $a_m$  (pour  $m$  impair) définissent une série entière impaire de rayon de convergence 1, et la fonction  $y$  n'est pas développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ . Pour que  $y$  soit développable en série entière sur tout  $\mathbb{R}$ , il faut donc que tous les  $a_m$ ,  $m$  impair, soient nuls, et que  $y$  soit le polynôme qu'on vient de construire. De même lorsque  $n$  est impair en échangeant les parités.

**27** Quelques reflexes simplificateurs pourront être salutaires. Dans ces deux cas, la présence de  $x$  en facteur de  $y''$  nous invite (!?) à poser  $y(x) = \frac{z(x)}{x}$ .

1. Pour la première, l'équation différentielle devient  $xz'' - z' - (1+x)z = 0$ , dont  $e^{-x}$  est évidemment solution. On trouve une solution sous la forme (polynôme de bas degré)  $\times x^{\lambda x}$  aisément, à savoir  $(2x-1)e^x$  (ou par variation de la constante à partir de  $e^{-x}$ , ce qui est immédiat).
2. Le même changement de fonction ramène la seconde équation à  $z'' + z = 0$ .

**28.** Une solution développable en série entière devrait vérifier :

$$a_0 - 3a_1x - 15a_2x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (4(n-1)(n-2)a_{n-2} - (2n-1)(2n+1)a_n) x^n = 0,$$

ce qui annule tous les coefficients. Il n'en existe donc pas de non triviale. La simplicité des relations de récurrence nous amène à chercher des *solutions de type FUCHS*, c'est-à-dire de la forme  $y(x) = x^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sur un intervalle  $]0, R[$ , où  $\sum a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence non nul,  $\beta$  un réel à déterminer, et  $a_0 \neq 0$  (pour fixer  $\beta$ ).

Un calcul identique à celui que l'on ferait pour une solution série entière (en triant les termes *après* développement) en mettant  $x^\beta$  en facteur, donne, pour toute fonction  $y$  de type Fuchs :

$$4x^2(x^2 - 1)y'' + 4x(2x^2 - 1)y' + y = x^\beta \left( (1 - 4\beta^2)a_0 + (1 - 8\beta n - 4n^2 - 4\beta^2)x + \sum_{n=2}^{+\infty} (4(\beta + n - 1)(\beta + n - 2)a_{n-2} - (2\beta + 2n + 1)(2\beta + 2n - 1)a_n)x^n \right).$$

Si  $y$  est solution, cela doit être nul, et comme  $a_0 \neq 0$  par hypothèse, il est nécessaire que  $1 - 4\beta^2 = 0$ , soit  $\beta = \pm \frac{1}{2}$  ; prenons  $\beta = -\frac{1}{2}$

Dans ce cas, une solution de type Fuchs doit vérifier :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} ((2n - 3)(2n - 5)a_{n-2} - 4n(n - 1)a_n)x^n = 0.$$

Cela définit, pour  $a_0 = 1$  et  $a_1 = 0$ , une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence 1 d'après la règle de d'Alembert. De plus  $a_2 = -\frac{1}{8}$ , et pour  $p \geq 2$ , par récurrence  $a_{2p} = -\frac{3 \cdot 5 \dots 2p - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2p}$ . On reconnaît les termes d'indice pair du développement en série entière de  $\sqrt{1-x}$ , donc :

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}).$$

Si l'on prend maintenant  $\beta = \frac{1}{2}$ , pour  $a_0 = 1$  et  $a_1 = 0$  on retrouve de la même manière le développement de type Fuchs de  $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ .

Ainsi, les solutions sur les intervalles ne contenant pas 0, 1, ou -1 sont les fonctions  $\frac{\lambda\sqrt{|1-x|} + \mu\sqrt{|1+x|}}{\sqrt{x}}$ , et ces formules donnent toutes les solutions (elles ne peuvent évidemment pas se recoller en une fonction de classe  $C^1$ ).

29. Par l'absurde, soit  $y$  une solution ne s'annulant pas. Comme  $y$  est continue, elle ne change pas de signe, et on peut supposer que  $y > 0$ . Dans ce cas,  $y'' = -py \leq 0$ , donc  $y$  est concave. Si  $y$  est constante non nulle, alors  $y'' = 0$ , donc  $p = 0$ . Sinon, soit  $x_0$  tel que  $y'(x_0) \neq 0$ . Supposons par exemple que  $y'(x_0) > 0$ . Alors évidemment  $y$  s'annule entre  $x_0$  et l'abscisse  $x_1$  de l'intersection de la tangente au graphe en  $(x_0, y(x_0))$  avec l'axe des  $x$  (car le graphe est en-dessous de cette tangente).

30. Comme  $y$  est continue, si une suite injective  $(x_n)$  de zéros de  $y$  convergeait vers un réel  $x \in I$ , il serait aussi un zéro de  $y$ . De plus comme  $y$  est de classe  $C^1$ , en choisissant pour tout  $n$  un nombre  $c_n$  sur  $[x, x_n]$  tel que  $y'(c_n) = \frac{y(x_n) - y(x)}{x_n - x} = 0$ , on voit que  $y'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y'(c_n) = 0$ . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $y$  serait alors nulle sur tout  $I$ .

31. 1. On développe les équations différentielles :

$$ky_1'' + k'y_1' + q_1y_1 = 0 \quad \text{et} \quad ky_2'' + k'y_2' + q_2y_2 = 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned} H' &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -k'y_1' - q_1y_1 & -k'y_2' - q_2y_2 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{k'H}{k} - \frac{y_1y_2(q_2 - q_1)}{k}. \end{aligned}$$

Donc  $(Hk)' = -y_1y_2(q_2 - q_1)$ . Supposons, par l'absurde, que  $y_2$  ne s'annule pas sur  $] \alpha, \beta [$ . On peut supposer que  $y_2 > 0$  sur  $] \alpha, \beta [$ , et que  $y_1 \geq 0$ . Donc  $(Hk)' \leq 0$ , et  $Hk$  est décroissante sur  $] \alpha, \beta [$ . Mais :

$$H(\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) \end{vmatrix} = -y_1'(\alpha)y_2(\alpha) \leq 0.$$

De même,  $H(\beta) = -y_1'(\beta)y_2(\beta) \geq 0$ . Donc  $H$  est constamment nulle sur  $] \alpha, \beta [$ . Or  $(Hk)(\beta) - (Hk)(\alpha) = -\int_{\alpha}^{\beta} y_1y_2(q_2 - q_1)(t) dt$ , et comme  $y_1y_2(q_2 - q_1)$  est continue positive, cela entraîne que  $q_2 - q_1$  est identiquement nulle sur  $] \alpha, \beta [$  (où  $y_1y_2$  ne s'annule pas), donc sur  $] \alpha, \beta [$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. Si  $\alpha$  est un zéro positif de  $y_2$ , et si l'on pose  $y_1(x) = \sin(x - \alpha)$ , alors en appliquant la question précédente à  $q_1 = 1$  et  $q_2(x) = e^x$ , on voit que  $y_2$  s'annule sur  $] \alpha, \alpha + \pi [$ .

D'après l'exercice précédent, pour tout zéro  $\alpha$  de  $y_2$  l'ensemble des zéros de  $y_2$  strictement supérieurs à  $\alpha$  admet un plus petit élément, et on peut ranger les zéros positifs de  $y_2$  en une suite croissante  $(\alpha_n)$ . Cette suite tend vers l'infini, sinon elle aurait un point d'accumulation, ce qui est impossible.

Pour le dernier point, montrons que  $\alpha_{n+1} - \alpha_n \leq \frac{\pi}{e^{\alpha_n/2}}$ .

Comme au début de la réponse à cette question soit  $y_1(x) = \sin(e^{\alpha_n/2}(x - \alpha_n))$ , solution de  $y'' + e^{\alpha_n}y = 0$  nulle en  $\alpha_n$ .

Comme, pour tout  $x > \alpha_n$ ,  $e^{\alpha_n} < e^x$ ,  $y_2$  s'annule sur  $]\alpha_n, \alpha_n + \frac{\pi}{e^{\alpha_n/2}}[$ .

3. Pour  $q_1 = q_2$ , on a vu à la première question que si  $y_2$  ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert  $]\alpha, \beta[$ ,  $H$  est constamment nulle sur  $[\alpha, \beta]$ . C'est impossible car ici  $H$  est le Wronskien de  $y_1$  et  $y_2$ , qui ne s'annule jamais.
32. 1. La fonction  $(yy')' = yy'' + y'^2 = y^2g(x) + y'^2$  est positive. Donc  $yy'$  est croissante au sens large. Si elle s'annule, c'est sur un intervalle  $I$ . Montrons qu'il est vide ou réduit à un point. En effet, sinon,  $y$  est constante sur  $I$  égale à un réel  $\lambda$ . Si  $\lambda \neq 0$ , en prenant un point  $x_0$  intérieur à  $I$  tel que  $g(x_0) \neq 0$ , on trouve une contradiction avec l'équation différentielle car  $y''(x_0) = g(x_0)\lambda \neq 0$ . Mais si  $\lambda = 0$ , alors, en prenant encore  $x_0$  intérieur à  $I$ ,  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$  et  $y$  est identiquement nulle d'après le théorème de Cauchy.
2. Soient  $y_a$  et  $y_b$ , avec  $a \neq b$ . Montrons que, pour tout  $x > 0$ ,  $y_a(x) \neq y_b(x)$ . La fonction  $y = y_b - y_a$  vérifie  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = b - a \neq 0$ . Quitte à prendre  $y_a - y_b$  on peut supposer que  $y'(0) > 0$ . Sur un petit intervalle  $]0, \varepsilon[$  à droite de 0,  $yy'(x)$  est strictement positif, et, d'après la première question,  $yy'$  est alors strictement positive sur  $\mathbb{R}^{++}$ . Mais alors  $\left(\frac{y^2}{2}\right)' > 0$  sur  $\mathbb{R}^{++}$ , et  $y^2$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{++}$  et ne peut plus s'annuler sur  $\mathbb{R}^{++}$ . Non seulement  $y_b(x) - y_a(x) \neq 0$ , mais cette différence ne cesse de croître.

33. Soient  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $0 < t_1 < t_2$ . Alors :

$$y''(t) + f(t)y(t) = 0 \implies y'(t_2) - y'(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} f y.$$

Si  $|y|$  est bornée par  $M$ , et si  $f$  est intégrable, étant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T \geq 0$  tel que, pour tous  $t_1, t_2 \geq T$ ,  $|\int_{t_1}^{t_2} f y| \leq M |\int_{t_1}^{t_2} f| \leq \varepsilon$ . La fonction  $y'$  est donc de Cauchy en  $+\infty$ , et a une limite finie en  $+\infty$ . Si cette limite n'est pas nulle, par intégration de  $y'$ ,  $|y(t)|$  tend vers  $+\infty$  si  $t$  tend vers  $+\infty$ , et  $y$  n'est pas bornée. Donc si  $y$  est bornée,  $y'(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Mais alors si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions linéairement indépendantes toutes deux bornées, leur Wronskien  $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$  tend vers 0 si  $t$  tend vers l'infini, ce qui n'est pas possible, car il est constant non nul.

Pour le contre-exemple, si  $y(t) = 2 + \sin(t^\alpha)$ , qui est supérieur ou égal à 1 :

$$f = -\frac{y''}{y} = \frac{\alpha^2 \sin(t^\alpha) (t^\alpha)^2}{t^2 (2 + \sin(t^\alpha))} - \frac{\alpha^2 \cos(t^\alpha) t^\alpha}{t^2 (2 + \sin(t^\alpha))} + \frac{\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha)}{t^2 (2 + \sin(t^\alpha))},$$

et si  $\alpha \in ]0, 1/2[$ ,  $f(t) = O(t^{2\alpha-2})$  dont l'exposant est strictement inférieur à  $-1$ , donc  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , et l'on peut modifier  $f$ , et donc  $y$  en conséquence, comme on veut sur  $[0, 1]$ .

- 34.**
1. S'il en existe deux, leur différence  $y$  est une solution non nulle de (E) :  $y'' - fy = 0$ , nulle en  $a$  et  $b$ . Il existe alors  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $y(x_0) \neq 0$ . Supposons  $y(x_0)$  positif. Comme l'ensemble des zéros de  $y$  est fermé, soit  $\alpha$  le plus grand zéro de  $y$  inférieur à  $x_0$  et  $\beta$  le plus petit supérieur à  $x_0$ . La fonction  $y$  vérifie  $y'' = fy$ , et est convexe, positive et nulle en  $\alpha$  et  $\beta$ , donc nulle sur  $[\alpha, \beta]$ , et partout d'après le théorème de Cauchy.
  2. L'existence de  $u$  et  $v$  est simplement une application du théorème de Cauchy en  $a$  et en  $b$ . Si  $u$  et  $v$  étaient linéairement liées par exemple par  $v = \gamma u$ ,  $\gamma \neq 0$ , la fonction  $u$  s'annulerait en  $a$  et en  $b$  et nous venons de voir que c'est impossible, car  $u \neq 0$ .
  3. Choisissons un réel  $x_0 \in [a, b]$  arbitrairement. La variation des constantes permet d'écrire toute solution  $y$  de l'équation (E) (avec second membre  $g$ ) sous la forme :

$$y(x) = u(x) \left( \lambda_0 - \int_{x_0}^x \frac{v g}{w} \right) + v(x) \left( \mu_0 + \int_{x_0}^x \frac{u g}{w} \right),$$

où  $w = uv' - u'v$  est le Wronskien de  $u$  et  $v$ . Or  $u(b) \neq 0$  et  $v(a) \neq 0$ , de sorte que le système  $y(a) = y(b) = 0$  équivaut à  $\lambda_0 - \int_{x_0}^b \frac{v g}{w} = 0$  et

$\mu_0 + \int_{x_0}^a \frac{u g}{w} = 0$ , d'où l'unique solution demandée :

$$y(x) = u(x) \int_x^b \frac{v g}{w} + v(x) \int_a^x \frac{u g}{w}.$$

- 35** Par variation des constantes la solution générale est :

$$y = A \cos x + B \sin x + \sin x \int_0^x g(t) \cos t dt - \cos x \int_0^x g(t) \sin t dt.$$

Si  $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$ , comme  $\sin x \int_0^x \ell \cos t dt - \cos x \int_0^x \ell \sin t dt = \ell$  on peut écrire :

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + \ell + \sin x \int_0^x (g(t) - \ell) \cos t dt - \cos x \int_0^x (g(t) - \ell) \sin t dt.$$

Quitte à remplacer  $g$  par  $g - \ell$ , on peut donc, et c'est ce que nous ferons, supposer que  $\ell = 0$ . Montrons que la fonction  $x \mapsto H(x) = \int_0^x g(t) \cos t \, dt$  a une limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . En effet, par intégration par parties :

$$H(x) = g(x) \sin x - \int_0^x g'(t) \sin t \, dt.$$

Or  $g(x)$  tend vers 0 si  $x$  tend vers l'infini. De plus, la fonction  $t \mapsto g'(t) \sin t$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , puisque  $|g'(t) \sin t| \leq |g'(t)| = -g'(t)$  et :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x g'(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - g(0)) = -g(0).$$

Soit  $M = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x)$ , et soit de même  $N = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x g(t) \sin t \, dt$ , d'où :

$$y(x) = (A - N) \cos x + (B + M) \sin x \\ + \sin x \int_x^{+\infty} g(t) \cos t \, dt - \cos x \int_x^{+\infty} g(t) \sin t \, dt,$$

ces intégrales étant des intégrales impropres. Lorsque  $x$  tend vers l'infini ces intégrales de  $x$  à  $+\infty$  tendent vers 0, donc :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin x \int_x^{+\infty} g(t) \cos t \, dt - \cos x \int_x^{+\infty} g(t) \sin t \, dt \right) = 0$$

Toutes les solutions  $y$  sont donc bornées, et n'ont de limite en  $+\infty$  que si  $A - N = 0$  et  $B + M = 0$ .

## Chapitre 24

- Supposons que  $y_\alpha$  ne soit pas maximale, et soit  $y$  la solution maximale  $I \rightarrow \mathbb{R}$  qui la prolonge. L'une des bornes de  $I_\alpha$  est dans  $I$ , disons la borne supérieure  $b$ . Il existe un unique  $\beta$  tel que  $y_\beta(b) = y(b)$ . La solution  $y_\beta$  est une restriction de  $y$  à un ouvert  $I_\beta$  contenant  $b$ . Mais alors  $y_\alpha$ ,  $y$ , et  $y_\beta$  coïncident sur un intervalle ouvert  $]b - \eta, b[$ . Donc par hypothèse  $\alpha = \beta$ .
- On remarque que  $y_0 = 0$  est solution sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de Cauchy pour une condition initiale  $y(x_0) = 0$  c'est la seule solution qui s'annule. Donc, si  $y$  est une solution non identiquement nulle définie sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $y$  ne s'annule jamais, et  $\frac{y'}{y^2} = 1$ , et il existe une constante  $\lambda$  telle que, pour tout  $x \in I$ ,  $\frac{1}{y(x)} = x - \lambda$ . Donc  $I$  est contenu dans  $]-\infty, \lambda[$  ou



$] \lambda, +\infty[$ . Ainsi,  $y$  est restriction de l'une des deux solutions  $y_{\lambda-}$  et  $y_{\lambda+}$  définies par la même formule  $x \mapsto \frac{1}{x - \lambda}$  mais respectivement sur  $] -\infty, \lambda[$  et  $] \lambda, +\infty[$ . Ces solutions  $y_{\lambda-}$  et  $y_{\lambda+}$  sont évidemment non prolongeables, donc sont maximales et forment, avec  $y_0$ , toutes les solutions de l'équation différentielle.

3. L'application  $z \mapsto \sqrt{|z|}$  n'est pas de classe  $C^1$ , et les hypothèses du théorème de Cauchy ne sont pas vérifiées : en particulier, l'unicité de la solution de condition initiale donnée n'est pas assurée. Nous cherchons encore les *solutions maximales*, naturellement définies ici comme les solutions définies sur un intervalle  $I$  qui ne puissent pas se prolonger en une solution sur un intervalle plus grand.

Toute solution  $y$  est croissante. Si  $y$  ne s'annule pas, par exemple  $y(x) > 0$ , alors  $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1$  : dans ce cas, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x$ ,  $2\sqrt{y(x)} = x - \lambda$ , et  $y$  s'annule. Donc toute solution s'annule.

Si l'intervalle fermé  $J$  sur lequel  $y$  s'annule est borné supérieurement, de borne supérieure  $b$ , pour tout  $x > b$ ,  $y(x) > 0$ , et il existe  $\lambda$  tel que  $y(x) = -\frac{(x - \lambda)^2}{4}$ . Par continuité en  $b$ ,  $\lambda = b$ .

De même si  $J$  est borné inférieurement, de borne inférieure  $a$ , alors pour  $x < a$ ,  $y(x) < 0$ , et  $y(x) = -\frac{(x - a)^2}{4}$ .

Les solutions maximales sont de l'une des formes suivantes :

1.  $y_0 = 0$  ;
2.  $y_{-,x_0} = -\frac{(x - x_0)^2}{4}$  sur  $] -\infty, x_0[$ , et 0 à droite de  $x_0$  ;
3.  $y_{+,x_0} = \frac{(x - x_0)^2}{4}$  sur  $] x_0, +\infty[$ , et 0 à gauche de  $x_0$  ;
4.  $y_{x_0,x_1} = -\frac{(x - x_0)^2}{4}$  sur  $] -\infty, x_0[$ ,  $\frac{(x - x_1)^2}{4}$  sur  $] x_1, +\infty[$ , et 0 entre les deux.

Ainsi, par exemple, par le point  $(0, 0)$  passent les graphes de toutes les solutions  $y_{x_0,x_1}$  où  $x_0 \leq 0 \leq x_1$ .

- 4 Transformons l'équation en posant  $u(x) = x + y(x)$ , de sorte que  $u' = 1 + \cos u$ . La fonction  $z \mapsto 1 + \cos z$  est de classe  $C^1$ , donc d'après le théorème de Cauchy, par tout point du plan passe une et une seule solution maximale de l'équation différentielle :

$$u' = 1 + \cos u. \tag{*}$$

Or les fonctions constantes  $u_k : x \mapsto (2k + 1)\pi$  sont solutions de l'équation (\*). Donc le graphe de toute autre solution  $u$  reste confiné dans une des bandes ouvertes  $B_k = \mathbb{R} \times ](2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi[$ , et  $\cos u$  ne s'annule pas.

On peut alors écrire  $\frac{u'}{1 + \cos u} = \tan(u/2)' = 1$ , et il existe une constante  $\lambda$  telle que  $\tan(u/2) = r + \lambda$ , ce qui correspond à la solution à valeurs dans  $](2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi[ : x \mapsto 2k\pi + 2 \arctg(x + \lambda)$ . Ces solutions, définies sur tout  $\mathbb{R}$ , sont maximales.

5. Une solution  $y$  est nécessairement de classe  $C^2$ , et convexe. Supposons que  $y$  ne s'annule pas. Si, pour tout  $x$ ,  $y(x) > 0$ , alors  $y'' = y$ , et  $y(x) = A \operatorname{ch}(x) + B \operatorname{sh}(x)$ . Les seules fonctions de cette forme ne s'annulant pas s'écrivent  $y(x) = \lambda \operatorname{ch}(x - x_0)$ ,  $\lambda$  et  $x_0$  constantes. Si, pour tout  $x$ ,  $y(x) < 0$ , alors  $y'' + y = 0$ , et  $y(x) = a \cos x + b \sin x$ , qui s'annule, ce qui est contradictoire.

Si  $y$  s'annule, comme elle est convexe, deux cas seulement peuvent se présenter :

1. Elle s'annule sur un intervalle fermé  $I$ , hors duquel elle est strictement positive. Si  $I$  est non réduit à un point, et borné supérieurement :

$$y(x) = A \operatorname{ch}(x - b) + B \operatorname{sh}(x - b),$$

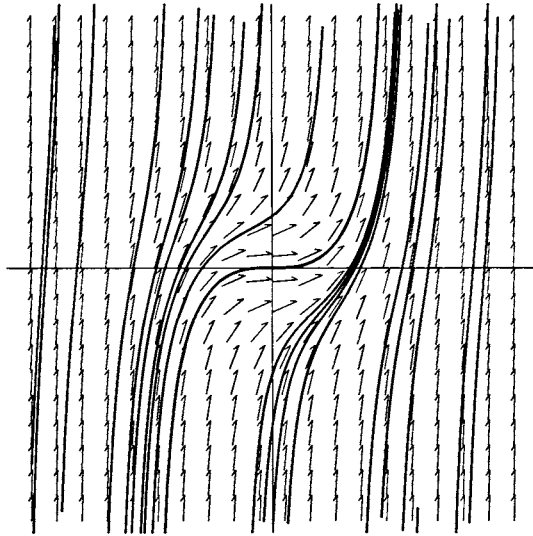
donc  $A = 0$ , et la dérivée de  $y$  n'est pas nulle en  $b$ , donc ce cas est exclu ; ainsi,  $y$  ne peut s'annuler, en restant positive ou nulle, que si elle est identiquement nulle.

2. Elle s'annule en deux points distincts  $a$  et  $b$  entre lesquels elle est strictement négative, et elle est strictement positive hors de  $[a, b]$ . Dans ce cas, si  $x < a$ ,  $y(x) = A \operatorname{sh}(x - a)$  ; si  $x \in ]a, b[$ ,  $y(x) = \lambda \sin(x - \theta)$ ,  $\lambda$  et  $\theta$  constants ; si  $x > b$ ,  $y(x) = B \operatorname{sh}(x - b)$ . Par continuité de la dérivée, il est clair que,  $A < 0$ ,  $\lambda = A$  en choisissant  $\theta = a$  (modulo  $2\pi$ ), et  $B = -A$ .

6. Soit  $x_0 > 0$  dans l'intervalle  $I$  de définition d'une solution maximale  $y$  définie en 0 (et en particulier non nulle en 0). Pour tout  $x \geq x_0$ ,  $0 \leq y'(x) \leq \frac{1}{x_0^2}$ , donc  $y'$  est bornée sur  $[x_0, \sup I]$ . Si  $\sup I = \omega < +\infty$ , la formule des accroissements finis entraîne que  $y$  est "de Cauchy" à gauche de  $\omega$ , et admet une limite à gauche de  $\omega$ . D'après le théorème de Cauchy  $\omega$  ne peut donc être fini. Le raisonnement est le même de l'autre côté.

7. 1. Si la fonction  $x \mapsto y(x)$  est une solution de l'équation (\*) sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $x \mapsto z(x) = -y(-x)$  est solution de (\*) sur  $-I$ . En effet :

$$z'(x) = y'(-x) = x^2 + y(-x)^2 = x^2 + z(x)^2.$$



En particulier, si  $I$  contient 0 et si  $y(0) = 0$ , il y a aussi une solution avec même condition initiale  $y(0) = 0$  sur  $-I$ , donc l'unique solution maximale dont le graphe passe par  $(0, 0)$  est définie sur un intervalle *symétrique* (autour de 0), et est elle-même impaire.

2. Soit  $y$  une solution maximale, évidemment croissante, définie sur l'intervalle ouvert  $I$  non vide. Supposons par l'absurde que  $I$  n'est pas borné supérieurement, et soit  $x_0$  un point de  $I$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Alors, pour tout  $x \geq x_0$ ,  $y'(x) \geq x^2 \geq x_0^2$ , donc  $y(x)$  tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers l'infini.

Dans ce cas, il existe un intervalle  $[x_1, +\infty[$  sur lequel  $y(x) > 0$ , et  $\frac{y'}{y^2} \geq 1$ .

En intégrant :

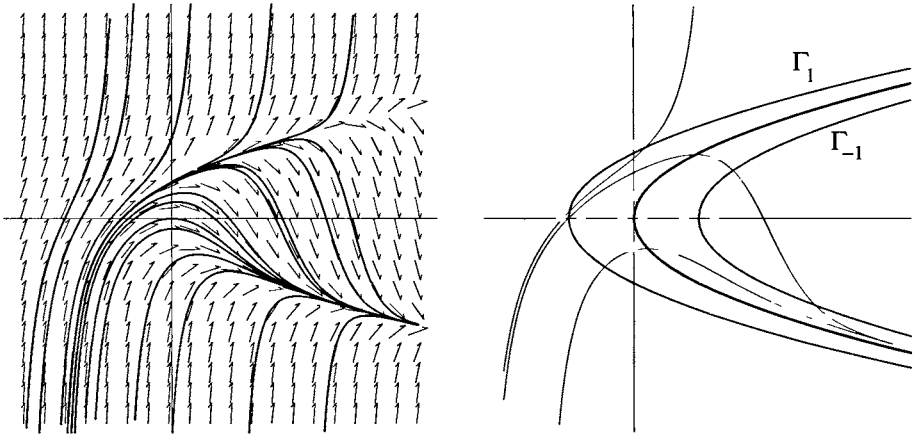
$$\frac{1}{y(x_1)} - \frac{1}{y(x)} \geq x - x_1 \implies x \leq x_1 + \frac{1}{y(x_1)}.$$

Donc  $I$  est borné supérieurement. Comme  $-y(-x)$  est aussi solution, par symétrie, toute solution maximale est définie sur un intervalle borné inférieurement et supérieurement.

Comme  $y$  est *monotone*, si elle ne tendait pas vers l'infini lorsque  $x$  tend vers  $\sup I$ , elle aurait une limite, ce qui contredit la maximalité de la solution, on l'a vu dans le cours. De même de l'autre côté, où elle tend vers  $-\infty$ .

8. Notons  $g_\alpha(x) = \sqrt{x + \alpha}$  et  $h_\alpha(x) = -\sqrt{x + \alpha}$ .

1. Si  $(x_0, y(x_0))$  est sur la frontière de  $\Gamma_0$ ,  $y'(x_0) = 0$ . Mais dans ce cas, lorsque  $y(x_0) = g_0(x_0)$ ,  $g'_0(x_0) > 0$ , et lorsque  $y(x_0) = h_0(x_0)$ ,  $h'_0(x_0) < 0$ .



Donc dans tous les cas où  $(x_0, y(x_0)) \in F_0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]x_0, x_0 + \eta[$ ,  $(x, y(x))$  soit dans l'ouvert  $U_0$ , c'est-à-dire que  $h_0(x) < y(x) < g_0(x)$ .

Supposons qu'il existe  $x \in ]x_0, +\infty[ \cap I$  tel que  $(x, y(x)) \notin U_0$ . La borne inférieure  $x'$  de l'ensemble des  $x \in I$  tels que  $y(x) \geq g_0(x)$  ou  $y(x) \leq h_0(x)$  vérifie :  $y(x') = g_0(x')$  ou  $y(x') = h_0(x')$ . Nous savons que  $x' > x_0$ . Or si  $y(x') = g_0(x')$ , comme  $y'(x') = 0$ , et  $g'(x') > 0$ , il existe  $\theta > 0$  tel que, pour  $x \in ]x' - \theta, x'[$ ,  $y(x) > g_0(x)$ , ce qui est faux. De même si  $y(x') = h_0(x')$ .

Donc, pour tout  $x > x_0$  dans  $I$ ,  $y(x) \in ]h_0(x), g_0(x)[$ , et en particulier,  $y'(x) < 0$ . Si  $I$  avait une borne supérieure  $b$  finie, la monotonie de  $y$  entraînerait que  $y(x)$  a une limite comprise entre  $h_0(b)$  et  $g_0(b)$ , ce qui contredit le théorème de Cauchy. Donc  $I$  n'est pas borné supérieurement.

Nous pouvons donc, quitte à changer de condition initiale pour la même solution  $y$ , supposer que  $x_0 \geq 1$ . Si  $y(x_0) = h_{-1}(x_0) = -\sqrt{x_0 - 1}$ , alors

$y'(x_0) = -1$  tandis que  $h'_{-1}(x_0) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0 - 1}}$ , qui est strictement supérieur

à  $-1$  dès que  $x_0 > 5/4$ . Cela entraîne que, pour  $x \in ]x_0, x_0 + \eta[$ ,  $\eta$  assez petit,  $y(x) < h_{-1}(x)$ . Choisissons donc  $x_0 > 5/4$ . Le raisonnement qui nous a permis plus haut de confiner  $y(x)$  entre  $h_0(x)$  et  $g_0(x)$  pour  $x > x_0$  entraîne ici que, lorsque  $x_0 > 5/4$  et  $y(x_0) \leq h_{-1}(x_0)$ , pour tout  $x > x_0$ ,  $y(x) \in ]h_0(x), h_{-1}(x)] = ]-\sqrt{x}, -\sqrt{x-1}]$ .

Si  $y(x_0) > h_{-1}(x_0)$ , distinguons deux cas.

- (a) Si  $h_{-1}(x_0) < y(x_0) \leq g_{-1}(x_0)$ , alors  $y$  est décroissante à droite de  $x_0$ , et, tant que  $y(x)$  est entre  $-\sqrt{x-1}$  et  $+\sqrt{x-1}$ , on a  $y'(x) \leq -1$ . Comme la dérivée de  $h_{-1}$  tend vers 0 à l'infini, il est clair qu'il existe  $x'' > x_0$  tel que  $y(x'') \leq h_{-1}(x)$ , et on est ramené au cas précédent à partir d'un certain  $x_1 \leq x''$ .

(b) Si  $y(x_0) \geq g_{-1}(x_0)$ , de tout manière  $y$  est décroissante à droite de  $x_0$ , et comme  $g_{-1}$  tend vers  $+\infty$ , il existe  $x_2 > x_0$  tel que  $y(x_2) \leq g_{-1}(x_2)$ . Cela nous ramène au cas précédent.

2. Soit  $y$  une solution vérifiant  $y(x_0) \geq \sqrt{x_0 + 1}$ , pour  $x_0 > 0$ , Pour tout  $x \geq x_0$  pour lequel  $y(x) = g_1(x) = \sqrt{x + 1}$  on a  $y'(x) = 1$  tandis que  $g_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} < 1$ . Donc, comme ci-dessus, pour tout  $x > x_0$  dans  $I$ ,  $y'(x) > g_1'(x)$ . En particulier, pour tout  $x > x_0$ ,  $y'(x) = y(x)^2 - x > 1$ .

Mais alors  $y(x) \geq y(x_0) + x - x_0$ .

Supposons, par l'absurde, que le domaine  $I$  de  $y$  ne soit pas borné supérieurement. cela entraîne que  $y(x)^2 - x \sim y(x)^2$  lorsque  $x$  tend vers l'infini, et il existe  $x_1 > x_0$  et  $A > 0$  tels que, pour tout  $x \geq x_1$ ,  $y'(x) \geq Ay(x)^2$ . Nous avons vu à l'exercice 7 comment cela entraînait que le domaine  $I$  est borné supérieurement et le graphe de  $y$  a une asymptote verticale.

3. Si l'on suppose que, pour tout  $x > x_0$ ,  $y(x) < h_0(x) = -\sqrt{x}$ , alors  $y'(x) = y(x)^2 - x > 0$  sur  $[x_0, \sup I[$ . Cette borne supérieure ne peut être finie, car  $y$  est croissante et majorée donc a dans ce cas une limite en  $\sup I$ , ce qui est impossible. Donc il existe  $x_1 > x_0$  tel que  $y(x_1) = -\sqrt{x_1}$ . À partir de là, le graphe de  $y$  entre dans  $F_0$  pour redescendre asymptotiquement à  $\Gamma_0$ .

9. 1. Calcul mécanique, où l'on veillera aux changements d'indices

2. De  $a_{n+1} = \frac{1}{3n + 4} (a_n + a_{n-1}a_1 + \dots + a_2a_{n-2} + a_1a_{n-1} + a_n)$  il résulte que

$$a_n = \frac{1}{3n + 1} (a_{n-1} + a_{n-2}a_1 + \dots + a_1a_{n-2} + a_{n-1}), \quad \text{d'où :}$$

$$(3n + 4)a_{n+1} - (3n + 1)a_n = a_n - a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2})a_1 + \dots + (a_2 - a_1)a_{n-2} + a_1a_{n-1} - a_{n-1} + a_n.$$

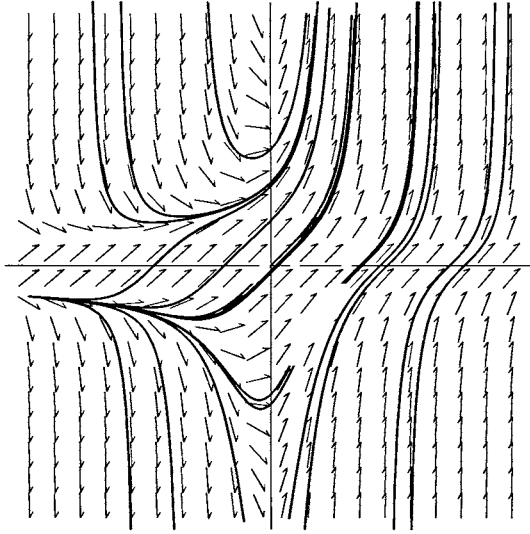
Si l'on suppose par récurrence que, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i - a_{i-1} \leq 0$ , on voit que  $(3n + 4)a_{n+1} - (3n + 1)a_n \leq a_n$ , d'où  $(3n + 4)a_{n+1} \leq (3n + 2)a_n$ , et  $a_{n+1} < a_n$ . Par construction, chacun des  $a_n$  est strictement positif.

3. Le rayon de convergence de la suite  $(a_n)$  définie par cette récurrence est donc au moins égal à 1, d'où le résultat.

4. Supposons que  $R > 1$  (sinon c'est terminé). Sur  $[0, R[$ ,  $y' \geq 1$ , donc  $y(x) \geq x$ . En reportant cela dans l'équation différentielle cela entraîne que  $y'(x) \geq 1 + x^3$ , et en intégrant encore cette inégalité,  $y(x) \geq x + \frac{x^4}{4}$ .

Donc  $y(1) \geq \frac{5}{4}$ . Mais alors, pour  $x \geq 1$ ,  $y'(x) \geq 1 + y(x)^2$ , d'où  $\arctan(y(x)) - \arctan(y(1)) \geq x - 1$ , d'où  $x \leq \frac{\pi}{2} + 1 - \arctan \frac{5}{4}$ .

Nous venons en fait de montrer que le domaine  $I$  de la solution maximale  $f$  était borné supérieurement, en fournissant un majorant de cette borne.



5. Sur  $J = I \cap \mathbb{R}^-$ ,  $f'(x) = 1 + xf(x)^2 \leq 1$  donc le graphe de la restriction de  $f$  à  $J$  est *au-dessus* de la bissectrice  $y = x$ . Le développement en série entière nous apprend même que c'est strictement, dès que  $x < 0$ .

Notons aussi que  $f'(0) = 1$ , donc pour  $x$  proche de 0 mais strictement négatif,  $f(x) < 0$ .

S'il existait  $x < 0$  tel que  $f(x) = 0$ , la plus grande valeur possible  $x'$  le vérifiant donnerait une contradiction, car  $f'(x') = 1$  alors que  $f(x) < 0$  sur  $]x', 0[$ .

De même, si  $f(x)$  pouvait prendre la valeur  $-1$  sur  $\mathbb{R}^-$  la plus grande valeur possible  $x''$  d'un tel  $x$  serait nécessairement strictement inférieure à  $-1$ . A droite de  $x''$ ,  $f(x) > -1$ , mais  $f'(x'') \geq 0$ , ce qui contredit la relation :

$$f'(x'') = 1 + x''f(x'')^2 = 1 + x'' < 0.$$

Donc le graphe de  $f_1 = f|_J$  reste confiné entre les droites  $y = 0$  et  $y = -1$ . Supposons, par l'absurde, que  $J$  soit borné inférieurement. Si  $f$  est croissante sur  $J$ ,  $f$  admet une limite  $L \in [-1, 0]$  en  $a = \inf J$ , ce qui est en contradiction avec le théorème de Cauchy. Donc il existe  $x_1 < 0$  tel que  $f'(x_1) = 0$ . Lorsque  $x$  décroît à partir de la plus grande valeur possible

de  $x_1$ ,  $(x, f(x))$  reste en-dessous de l'isocline  $\Gamma_0$  d'équation  $1 + xy^2 = 0$ , car si elle la recoupait, le plus grand réel inférieur à  $x_1$  où ce serait possible serait en un point où la dérivée de  $f$  serait nulle alors que la pente de l'isocline  $\Gamma_0$  est négative.

Donc  $f$  est décroissante à gauche de  $x_1$ , et si  $J$  était borné,  $f$  aurait une limite en  $\inf J$ , ce qui n'est pas le cas. Finalement,  $J$  n'est pas borné inférieurement. La discussion ci-dessus concernant  $x_1$  montre tout-de-même, même en supposant  $J$  non borné, que  $f$  est, lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à 0, décroissante puis croissante

10. Le vecteur  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  solution sur un intervalle  $I$  du système vérifie :  $X'(t) = \varphi(X(t)) + (1 - x(t)^2 - y(t)^2)X(t)$ , où  $\varphi$  est la rotation vectorielle de  $\pi/2$  dans le plan. Donc :

$${}^tX(t) \cdot X(t) = (1 - x(t)^2 - y(t)^2) {}^tX(t) \cdot X(t)$$

Si  $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ , nous avons donc :

$$(r^2)' = \frac{1}{2}(1 - r^2)r^2.$$

En particulier,  $r$  est croissant au voisinage de tout point où sa valeur est inférieure à 1. Ainsi, si  $r(t_0) > 0$ , alors pour tout  $t > t_0$ ,  $r(t) > 0$ . Nous nous plaçons dans ce cas, faisant varier  $t$  sur  $[t_0, +\infty[$ . D'après le théorème de relèvement, il existe donc une fonction  $\theta$  dérivable telle que, pour tout  $t$ ,  $x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ . Le système différentiel s'écrit alors avec des notations complexes :

$$(re^{i\theta})' = r'e^{i\theta} + i\theta're^{i\theta} = ire^{i\theta} + (1 - r^2)re^{i\theta},$$

ce qui équivaut à  $\theta' = 1$  et  $r' = (1 - r^2)r$ . Ainsi,  $\theta(t) = t + \lambda$ ,  $\lambda$  constante. Comme la fonction constante égale à 1 est solution de l'équation en  $r$ , d'après le théorème de Cauchy, les solutions non constantes égales à 1 de l'équation en  $r$  ne prennent jamais la valeur 1, et vérifient :

$$\frac{r'}{(1 - r^2)r} = 1.$$

On en tire aisément que :

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu e^{-2t}}}, \quad \mu \text{ constante.}$$

Ces solutions ont évidemment le comportement asymptotique annoncé.

11. 1. Si  $\varphi$  est, pour l'instant, n'importe quelle fonction de classe  $C^1$  ne s'annulant pas sur le domaine de  $f$  et si l'on pose  $u = f/\varphi$ , alors :

$$\begin{aligned} f' - (\alpha f^2 + \beta f + \gamma) &= u' \varphi + u \varphi' - (\alpha \varphi^2 u^2 + \beta \varphi u + \gamma) \\ &= \varphi \left( u' - \alpha \varphi u^2 + \left( \frac{\varphi'}{\varphi} - \beta \right) u - \frac{\gamma}{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Les fonctions  $\varphi = -\frac{1}{\alpha}$ ,  $a = \frac{\varphi'}{\varphi} - \beta$  et  $b = -\frac{\gamma}{\varphi}$  répondent à la première question. Ensuite, l'équation différentielle sans second membre  $y' - uy = 0$  a pour solution les fonctions  $x \mapsto \lambda \exp\left(\int_{x_0}^x u(t) dt\right)$  qui ne s'annulent pas si  $\lambda \neq 0$ , et évidemment,  $u$  vérifie  $(R')$  si et seulement si  $y$  vérifie  $y'' + ay' + by = 0$ . On dit parfois qu'il est équivalent de résoudre une équation de RICCATI et une équation linéaire d'ordre 2. Les hypothèses que nous avons dû faire (non annulation de  $\alpha$  d'un côté, non annulation de  $y$  de l'autre) sont les précautions à prendre pour cette "équivalence".

2. Ici,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , et  $\gamma(x) = \frac{1}{x^2}$ . Soit  $f$  une solution de  $(R)$  :  $f' = f^2 + \frac{1}{x^2}$  qui ne s'annule pas. La fonction  $u = -f$  vérifie  $u' = -u^2 - \frac{1}{x^2}$ , et si l'on peut écrire  $u = y'/y$ , la fonction  $y$  vérifie  $y'' + \frac{1}{x^2}y = 0$ . Sur  $\mathbb{R}^{*+}$ , il s'agit d'une équation d'Euler dont la solution générale sur  $\mathbb{R}^{*+}$  est :

$$y(x) = C_1 \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) + C_2 \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right),$$

qui peut s'écrire  $y(x) = C \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} (\ln(x) - \ln(x_0))\right)$ . Réciproquement, pour des constantes  $C$  et  $x_0$  données, cette formule détermine une solution maximale  $f = -\frac{y'}{y}$  de l'équation de Riccati  $(R)$  sur chaque intervalle maximal où  $y$  ne s'annule pas, et l'on peut simplifier  $f$  sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{2x} \left( \sqrt{3} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x/x_0)\right) - 1 \right).$$

Comme elle est définie sur  $\mathbb{R}^{*+}$ ,  $f$  est une solution maximale. Le lecteur vérifiera sans mal que par tout point du demi-plan  $x > 0$  passe un et un seul graphe de telle solution  $f$ , ce qui donne toutes les solutions en  $f$ , grâce au principe de partition.



12. 1. L'idée de James BERNOULLI (1695) est de diviser l'équation par  $y^\alpha$ , ce qui donne  $\frac{y'}{y^\alpha} = A(x) + \frac{B(x)}{y^{\alpha-1}}$ , et de reconnaître dans  $\frac{y'}{y^\alpha}$  la dérivée de  $\frac{-1}{\alpha-1} \times \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ . Ainsi, si  $y$  est une solution de (B) qui ne s'annule pas,  $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$  est solution de l'équation différentielle linéaire (L) :

$$-\frac{1}{\alpha-1} z' = A(x) + B(x)z.$$

Les hypothèses faites sur  $A$  et  $B$  entraînent que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. En particulier puisque 0 est évidemment solution de (B), aucune des autres solutions ne s'annule. Ainsi,  $y$  est solution non identiquement nulle de (B) si et seulement si,  $\frac{1}{y^{\alpha-1}}$  est solution de (L) (en générale non maximale).

Pour reconstituer les solutions de (B) à partir de celles de (L), remarquons d'abord que les solutions de (L) sont définies sur tout  $I$ . Il faut alors distinguer suivant la parité de  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  est pair, pour toute solution  $z$  de (L) qui ne s'annule pas,  $u = \frac{1}{z^{1/(\alpha-1)}}$  est solution de (B). Si  $\alpha$  est impair, la solution  $z$  donne deux solutions  $\pm \frac{1}{z^{1/(\alpha-1)}}$  de (B).

Étudions ici le cas où  $\alpha$  est pair. On vérifie alors facilement que sur un *intervalle maximal*  $J$  de non nullité de la solution  $z$  de (L), la fonction correspondante  $u$  est une solution *maximale* de (B). En effet, si par exemple  $b = \sup J \neq \sup I$ ,  $z(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow b$ , et  $u(x) \rightarrow \pm\infty$ . Les autres cas se voient de même. La technique de BERNOULLI donne donc *toutes* les solutions maximales de (B).

2. Ici,  $\alpha = 3$ , et  $z = \frac{1}{u^2}$  vérifie l'équation différentielle linéaire (L) :

$-\frac{z'}{2} = 1 - \frac{z}{x}$  dont les solutions sur  $\mathbb{R}^{**}$  sont  $z(x) = 2x + \lambda x^2$ . Pour  $\lambda \leq 0$ ,  $z(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}^{**}$ , et  $\pm \frac{1}{\sqrt{z}}$  est solution maximale de (B). Pour  $\lambda < 0$ ,

la fonction  $z_\lambda$  restriction de  $z$  à  $]0, -\frac{2}{\lambda}[$  donne les deux solutions  $\pm \frac{1}{\sqrt{z_\alpha}}$  de (B), qui sont maximales, comme on l'a vu car elles tendent vers l'infini en  $-2/\lambda$ . Par tout point de  $\mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}$  passe un et un seul graphe de ces solutions (sans oublier la solution nulle), donc le problème de Cauchy est complètement résolu.

- 13.** 1. Il est immédiat que  $u$  vérifie  $u' = \alpha u^2 + (2\alpha y_0 + \beta)u$ . Comme nous avons vu à l'exercice précédent comment résoudre l'équation de BERNOULLI, cela donne la solution des équations de RICCATI dont une solution particulière est connue. Ce n'est pas un miracle ! L'équivalence étudiée plus haut entre les équations de Riccati et les équations linéaires d'ordre 2 entraîne que la connaissance d'une solution particulière de  $(R)$  entraîne celle d'une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 (sans second membre) associée, et nous avons vu dans le cours que la *variation de la constante* permet de retrouver toutes les solutions.
2. On trouve comme solution particulière  $y_0(x) = x + a$ , découverte en la cherchant affine. La fonction  $u = y - y_0$  vérifie ici l'équation de Bernoulli  $(B)$  :  $u' = 2au + u^2$ . Sa méthode de résolution est exposée dans l'exercice (12). Outre la solution nulle (pour laquelle  $y = y_0$ ) cette équation admet pour solutions les fonctions  $u = 1/v$ , où  $v$  ne s'annule pas et vérifie  $v' + 2av = 1$ . Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de cette dernière équation différentielle linéaire sont les fonctions  $x \mapsto v_\lambda(x) = -\frac{1}{2a} + \lambda e^{-2ax}$ . Pour  $\lambda \leq 0$ ,  $v_\lambda$  ne s'annule pas et donne une solution maximale  $u_\lambda$  de  $(B)$ , et  $y = y_0 + u_\lambda$  est solution maximale de  $(R)$ . Pour  $\lambda > 0$ ,  $v_\lambda$  s'annule une fois en  $x_\lambda$  facile à calculer. De part et d'autre de  $\lambda$ , la fonction  $1/v_\lambda$  définit une solution *maximale* de  $(B)$  (puisqu'elle tend vers l'infini quand  $x$  approche de  $x_\lambda$ ). On voit aisément que ces solutions maximales de l'équation  $(B)$  sont toutes les solutions, car par tout point de  $\mathbb{R}^2$  passe un et un seul des graphes des solutions de  $(B)$  trouvées. De même pour l'équation  $(R)$ .
- 14** Nous allons chercher des solutions particulières, et vérifierons ensuite que ce sont exactement toutes les solutions maximales. Comme l'équation  $(E)$  est de la forme  $y' = f(y/x)$  (c'est une *équation homogène*), on cherche des solutions telles que la fonction  $x \mapsto \varphi(x) = y(x)/x$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme de l'intervalle de définition  $I$  de  $y$  sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Pour une telle solution,  $t = \varphi(x)$  peut servir de paramètre pour la courbe  $x \mapsto (x, y(x))$ , et si  $\psi = \varphi^{-1}$ ,  $g = y \circ \psi$  vérifie :

$$\frac{dg}{dt} = \left( \frac{dy}{dx} \circ \psi \right) \frac{d\psi}{dt} = f(t) \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} (t \psi(t)) = \psi(t) + t \frac{d\psi}{dt},$$

$$\text{d'où } (f(t) - t) \frac{d\psi}{dt} = \psi(t).$$

Il est commode d'écrire ce calcul de manière condensée :

$$dy = f(t)dx = d(tx) = tdx + xdt \implies (f(t) - t) \frac{dx}{dt} = x.$$

Dans le cas de notre exercice, cela donne  $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}x$ , soit :

$$x = \lambda \exp(-\operatorname{argsh} t), \quad \text{et} \quad t = \operatorname{sh}(\ln(x/\lambda)).$$

Cela donne les solutions suivantes de  $(E)$  :  $y_\lambda(x) = x \operatorname{sh}(\ln(x/\lambda))$ . Comme pour  $\lambda \neq 0$   $y_\lambda$  est définie sur tout  $\mathbb{R}^{*+}$ , ce sont nécessairement des solutions maximales. Mais pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ , l'équation  $y_0 = x_0 \operatorname{sh}(\ln(x_0/\lambda))$  admet une unique solution en  $\lambda$ . Il n'y a donc pas d'autre solution maximale.

15. 1. L'équation  $(E_1)$  équivaut à  $x - y' = e^{y'}$ . La fonction  $t \mapsto \varphi(t) = t + e^t$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , et si  $\psi$  est la fonction réciproque l'équation différentielle équivaut à  $y'(x) = \psi(x)$ , soit  $y(x) = y(0) + \int_0^x \psi(\xi) d\xi$ . Il va être avantageux d'écrire cette solution en utilisant directement le paramètre  $t$  tel que  $x = \varphi(t)$ . Pour cela, la fonction  $Y(t) = y(\varphi(t))$  vérifie  $\frac{dY}{dt} = y'(\varphi(t))\varphi'(t) = t\varphi'(t) = t(1 + e^t)$ , et  $Y(\varphi(t)) = \frac{t^2}{2} + (t - 1)e^t + \lambda$ , et  $x = \varphi(t) = t + e^t$ , autrement dit :

$$y(x) = \frac{\varphi^{-1}(x)}{2} + (\varphi^{-1}(x) - 1) \exp(\varphi^{-1}(x)) + \lambda.$$

Cela permet le calcul de l'intégrale donnée dans la première forme de la solution, mais évidemment, cela n'évite pas l'inversion de fonction.

2. En mettant en facteur  $e^x$ , on obtient une équation à variables séparées  $y' = e^x(1 + e^y)$ . Ainsi, si  $F$  est une primitive de  $z \mapsto 1/(1 + e^z)$   $y$  est solution de  $(E_2)$  si, et seulement si, pour tout  $x$ ,  $F(y(x)) - e^x$  est constant.

Or  $F(z) = \ln\left(\frac{e^z}{1 + e^z}\right)$ , donc  $y$  est solution de  $(E_2)$  si, et seulement si,

$\frac{e^y}{1 + e^y} = e^x + \lambda$ , ce qui s'écrit aussi :  $y = -\ln(-1 + \exp(-(e^x + \lambda)))$ . Cela donne les intervalles ouverts de définition de cette solution  $y$ , dont la forme est la seule possible.

3. Il s'agit encore d'une équation homogène dont les solutions doivent être cherchée sur des sous-intervalles de  $\mathbb{R}^{*+}$ . L'équation différentielle vérifiant sur  $\mathbb{R}^{*+}$  les conditions du théorème de Cauchy, nous chercherons des solutions maximales dont la forme nous sera commode, pour appliquer ensuite le principe de partition. Ici, nous cherchons des solutions positives telles que  $x \mapsto \frac{y(x)}{x}$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme, autrement dit nous allons paramétrer les courbes intégrales par  $t = y/x$ . Comme dans l'exercice 14 précédent, écrivons de manière condensée :  $dy = t dx + x dt = t(a + \ln t)dx$ , de sorte

que la fonction  $t \mapsto x(t)$  vérifie  $t(a-1+\ln t) \frac{dx}{dt} = x$ . Cela s'intègre immédiatement en  $x = \lambda(a-1+\ln t)$ , et l'on peut même en tirer  $t = \exp\left(\frac{x}{\lambda} + 1 - a\right)$

Les fonctions (paramétrées par  $\lambda \neq 0$ )  $x \mapsto y_\lambda(x) = x \exp\left(\frac{x}{\lambda} + 1 - a\right)$  sont solutions de  $(E_2)$  et leurs graphes recouvrent sans mal le quadrant  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Ce sont donc toutes les solutions.

**16. 1.** Soit  $x_0 \geq A$  tel que  $f(x_0) < \theta$ , et  $I$  l'intervalle des  $x \geq x_0$  tels que  $f(t) < \theta$  pour tout  $t \in ]x_0, x[$ . Si  $x \in I$ ,  $f'(x) \geq \varepsilon$ , et  $f(x) \geq f(x_0) + \varepsilon(x - x_0)$ , ce qui prouve que  $I$  est borné supérieurement. De plus, si  $x_1 = \sup I$ ,  $f(x_1) = \theta$ , et  $f'(x_1) \geq \varepsilon$ , donc  $f$  est strictement croissante sur un petit intervalle à droite de  $x_1$ . Mais s'il existait  $x_2 \geq x_1$  tel que  $f(x_2) \leq \theta$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait  $x_3 > x_1$  tel que  $f(x_3) = \theta$ . Par continuité de  $f$ , prenons le plus petit  $x_3$  possible. Sur  $]x_1, x_3[$ ,  $f(x) \geq \theta$ , donc  $f'(x_3) \leq 0$ , ce qui contredit  $f'(x_3) \geq \varepsilon$ . Donc, pour tout  $x \geq x_1$ ,  $f(x) \geq \theta$ .

**2.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrons que si  $x$  est assez grand,  $-\sqrt{2\varepsilon} \leq f(x) \leq \sqrt{2\varepsilon}$ . Pour cela, commençons par montrer qu'il existe  $x_1$  tel que, pour tout  $x \geq x_1$ ,  $f(x) \geq -\sqrt{2\varepsilon}$ . Il existe  $A$  tel que, pour tout  $x \geq A$ ,  $-\varepsilon \leq f'(x) - f(x)^2 \leq \varepsilon$ . En particulier, si  $x \geq A$  et si  $f(x) \leq -\sqrt{2\varepsilon}$ , alors  $f'(x) \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$ . Il suffit alors d'appliquer la première question à  $\theta = -\sqrt{2\varepsilon}$ .

Montrons par ailleurs que, pour tout  $x \geq A$ ,  $f(x) \leq \sqrt{2\varepsilon}$ . En effet, sinon soit  $x_0 \geq A$  tel que  $f(x_0) \geq \sqrt{2\varepsilon}$ . À partir de  $x_0$ ,  $f$  est croissante et tend même vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Pour le voir notons que  $f'(x_0) \geq f(x_0)^2 - \varepsilon \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$ . De plus, pour tout  $x > x_0$ ,  $f(x) > \sqrt{2\varepsilon}$ , car sinon, au plus petit  $x_1 > x_0$  tel que  $f(x_1) \leq \sqrt{2\varepsilon}$ ,  $f'(x_1)$  devrait être à la fois négatif, et supérieur ou égal à  $\varepsilon$ . Mais alors, pour tout  $x \geq x_0$ ,  $f'(x) \geq \varepsilon$ , et  $f(x) \rightarrow +\infty$ . La contradiction voulue lorsqu'on suppose l'existence de  $x_0$  provient de ce que si  $f(x) \rightarrow +\infty$ , pour  $x \geq x_4$  assez grand,  $f'(x) \geq f(x)^2 - \varepsilon \geq \frac{1 + f(x)^2}{2}$ , et  $\arctan f(x) \leq \arctan f(x_4) + \frac{x - x_4}{2}$ , donc l'intervalle de définition de  $f$  est borné à droite.

**17. 1.** Si  $]t_0, t_1[$  est un intervalle sur lequel une solution  $(X, Y)$  de  $(S)$  vérifie  $\alpha X(t) + \beta Y(t) \neq 0$ , la fonction  $X$  est sur  $]t_0, t_1[$  un  $C^1$ -difféomorphisme, dont la réciproque  $\varphi$  vérifie évidemment :

$$(Y \circ \varphi)(x) = Y'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{\gamma X(\varphi(x)) + \delta Y(\varphi(x))}{\alpha X(\varphi(x)) + \beta Y(\varphi(x))} = \frac{\gamma x + \delta y(x)}{\alpha x + \beta y(x)},$$

en notant  $y$  la fonction  $y = Y \circ \varphi$ .

Réciproquement si  $y$  est une solution de  $(E)$  sur un intervalle  $I$  où, par définition, la fonction  $x \mapsto \alpha x + \beta y(x)$  ne s'annule pas, on définit une fonction  $\varphi$  sur  $I$  (en choisissant  $x_0 \in I$ ) par  $\varphi(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{\gamma s + \delta y(s)}$ .

C'est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $I$  sur un intervalle  $J$ . Notons alors  $X = \varphi^{-1}$  et  $Y = y \circ \varphi$ . Par dérivation des fonctions composées on vérifie aisément que  $(X, Y)$  est solution de  $(S)$ .

2. Le système différentiel linéaire de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  peut se résoudre rapidement en posant  $X(t) + iY(t) = Z(t)$  de sorte que  $Z'(t) = (1 + i)Z(t)$ , et  $Z(t) = Z_0 e^{t(1+i)}$ . Les courbes intégrales (toujours de paramètre  $t$ ) sont  $X(t) = e^t(a \cos t + b \sin t)$  et  $Y(t) = e^t(b \cos t - a \sin t)$ . Ce sont des spirales dont on n'a plus qu'à extraire les arcs sans tangente verticale. Il aurait été maladroit de poser  $t = y/x$  et d'appliquer la méthode usuelle pour les équations homogènes, car la valeur  $x = 0$  n'a, nous le voyons sur les arcs du système différentiel, aucune signification géométrique intéressante, sinon de nous gêner dans les calculs. D'autre part, le "passage en coordonnées polaires" parfois suggéré pour cette équation n'est avantageux que parce que les coefficients sont très particuliers, sinon, avec d'autres coefficients constants (et des courbes intégrales qui spiralent) le "passage en polaire" fait perdre l'information intéressante, puisque le changement de base de  $\mathbb{R}^2$  pertinent pour résoudre le système linéaire n'a pas de raison d'être orthogonal.

18. Si  $y$  est une solution,  $|y| \leq 1$ , et l'ensemble des  $x$  tels que  $|y(x)| = 1$  est un fermé  $F$ . Son complémentaire est réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts. Soit  $I$  l'un d'eux. Par continuité de  $y'$ , sur  $I$ ,  $y'(x) = \varepsilon \sqrt{1 - y(x)^2}$ ,  $\varepsilon$  constant égal à  $\pm 1$  sur  $I$ . Donc  $\frac{y'}{\sqrt{1 - y(x)^2}} = \varepsilon$ , et  $\arcsin y(x) = \varepsilon(x - C)$ ,  $C$  constante, d'où  $y(x) = \varepsilon \sin(x - C)$ . Soit  $x_0 \in I$ . Si  $y'(x_0) > 0$   $y(x) = \sin(x - C)$  sur  $I$ , et  $y(x) \notin \{-1, 1\}$  sur  $I$ , ce qui entraîne naturellement que  $I$  est borné et de la forme  $]x_0, x_1[$ , avec  $x_1 - x_0 = \pi$ . L'ouvert  $\mathbb{R} \setminus F$  est réunion disjointe d'intervalles de largeur  $\pi$ , et  $F$  est donc réunion (finie ou) dénombrable disjointe d'intervalles  $K_n$  fermés isolés (ce que ne sont pas tous les fermés de  $\mathbb{R} \dots$ ). Les  $K_n$  sont rangés en ordre croissant, et  $b_n = \inf K_n = \sup K_{n-1} + \pi = a_{n-1} + \pi$ . Au signe près,  $y(x) = \pm 1$  sur  $K_n$ , et  $y(x) = \sin(x - a_{n-1} - \pi)$  sur  $]a_{n-1}, b_n[$ .

19. 1. Rappelons qu'on appelle facteur intégrant de  $P dx + Q dy$  toute fonction  $\lambda$  de classe  $C^1$  de deux variables telle que  $\lambda P dx + \lambda Q dy$  soit une forme différentielle

fermée, c'est-à-dire que  $\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$ , ce qui équivaut à (F) :

$$\lambda \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} Q - \frac{\partial \lambda}{\partial y} P.$$

Vue la convexité de  $U$ ,  $\lambda$  dépend de  $x$  seul si, et seulement si, (P) :  $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$ . La conjonction des deux relations (F) et (P) équivaut donc à  $\lambda(x, y) = h(x)$ , et :

$$\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{h'(x)}{h(x)}.$$

Si le membre de gauche  $R(x, y)$  de cette relation ne dépend que de  $x$ , l'existence de  $h$  vérifiant cette égalité est maintenant claire, par résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

2. Ici,  $P = x^2 + y^2 + x$  et  $Q = xy$ , donc  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$ , et l'on doit chercher  $h$  fonction de la variable  $x$  telle que  $\frac{h'}{h} = \frac{1}{x}$ . Une solution particulière en  $h$  est  $h(x) = x$ . On voit aisément que  $xP(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$  et  $xQ(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$  pour  $F(x, y) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$ , par exemple en intégrant  $xP(x, y)$  par rapport à  $x$ , ce qui donne  $F(x, y) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} + \varphi(y)$ , et la dérivation partielle par rapport à  $y$  donne  $xQ(x, y)$  lorsque  $\varphi$  est une constante. Les courbes intégrales ont pour équation  $F(x, y) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} = \lambda$  constante arbitraire.

- 20 Cherchons  $\lambda$  de la forme  $\lambda(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ . La relation (F) de l'exercice précédent s'écrit ici :

$$\lambda \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} Q - \frac{\partial \lambda}{\partial y} P \right) = 6xy(x+y) \left( (x^2 + y^2) \varphi'(x^2 + y^2) + 2\varphi(x^2 + y^2) \right).$$

Il suffit donc que  $t\varphi'(t) = 2\varphi(t)$  et pour cela  $\varphi(t) = 1/t^2$  convient. On peut donc chercher  $F$  dont la différentielle, ailleurs qu'en  $(0, 0)$ , soit  $dF = \frac{P dx + Q dy}{(x^2 + y^2)^2}$ . Une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{P(x, y)}{(x^2 + y^2)^2}$  est

$$F(x, y) = \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2}, \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y} \text{ est justement } \frac{Q(x, y)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Les courbes intégrales cherchées sont donc, ailleurs qu'en  $(0, 0)$ , les courbes d'équation cartésienne  $y^3 - x^3 = \lambda(x^2 + y^2)$ .

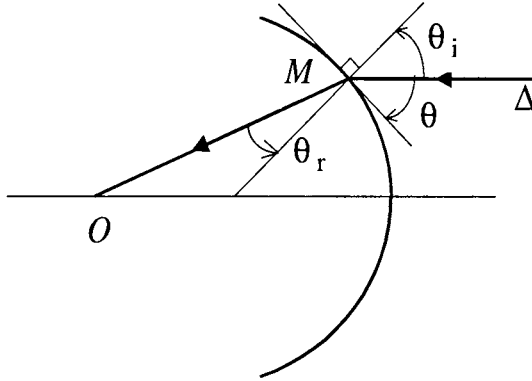
**21.** Le système différentiel équivalent est  $y' = u$  et  $u' = -y - y^3$ . La fonction  $\frac{y'^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}$  a pour dérivée  $y'(y'' + Y + y^3)$  nulle. Donc pour toute solution  $y$ ,  $\frac{y'^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}$  est constant. Mais le système différentiel équivalent est  $y' = u$  et  $u' = -y - y^3$ , et donc toute courbe intégrale de ce système autonome est tracée sur une courbe  $\Gamma_\lambda$  d'équation  $\frac{u^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = \lambda \geq 0$ . Pour  $\lambda > 0$ , ces courbes sont fermées homéomorphes à un cercle. Aucun point d'une de ces courbes autre que  $(0, 0)$  n'est un point où s'annule le champ de vecteurs  $(y, u) \mapsto (u, -y - y^3)$ , donc d'après la proposition 14 page 992 les solutions du système qui prennent valeurs dans  $\Gamma_\lambda$  sont périodiques.

**22.** Le système différentiel d'ordre 1 associé à cette équation scalaire d'ordre 2 est :  $y' = u$ ,  $u' = (1 - y^2 - 2u^2)u - y$ . Considérons une solution  $x \mapsto (y(x), u(x))$  de ce système. La fonction  $f(x) = y(x)^2 + u(x)^2$  a pour dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2y(x)y'(x) + 2u(x)u'(x) \\ &= 2y(x)u(x) + 2u(x) \left( (1 - y(x)^2 - 2u(x)^2)u(x) - y(x) \right) \\ &= 2u(x)^2(1 - y(x)^2 - 2u(x)^2). \end{aligned}$$

Montrons qu'au voisinage d'un point  $x_0$  où  $|f(x_0)| > 1$ ,  $f$  est strictement décroissante. Si  $|f(x_0)| > 1$ , *a fortiori*  $y(x_0)^2 + 2u(x_0)^2 > 1$ . Si  $u(x_0) \neq 0$ ,  $f'(x_0) < 0$ . Si en revanche  $u(x_0) = 0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ . Mais comme  $u(x)$  apparaît au degré 2 en facteur dans  $f'$ ,  $f''(x_0) = 0$ . En développant  $f'''(x_0)$  en un tel point, en veillant à chaque dérivation à remplacer la dérivée de  $y$  et celle de  $u$  par l'expression polynomiale donnée par le système différentiel, on voit que  $f'''(x_0) = 4y(x_0)^2(1 - y(x_0)^2)$ . Comme  $|f(x)| > 1$ , et  $u(x_0) = 0$ , nécessairement  $|y(x_0)| > 1$ , de sorte que  $f$  est bien encore strictement décroissante au voisinage de  $x_0$  dans ce cas. S'il existe  $x > x_0$  tel que  $f(x) \geq f(x_0)$ , soit  $x_1$  le plus petit réel strictement supérieur à  $x_0$  tel que  $f(x_1) = f(x_0)$ . Sur un petit intervalle  $]x_1 - \varepsilon, x_1[$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$ , ce qui contredit la décroissance stricte de  $f$  au voisinage de  $x_1$ . Donc pour tout  $x > x_0$ ,  $f(x) < f(x_0)$ . Cela prouve que les solutions de l'équation d'ordre 2 sont toutes bornées sur  $\mathbb{R}^+$  (ainsi que leur dérivée).

23.



Stigmatisme parfait

Par symétrie de révolution, la figure sera faite dans un plan contenant des rayons parallèles horizontaux, et l'intersection de la surface et de ce plan est le graphe  $\Gamma$  de la fonction  $x \mapsto y(x)$ . L'angle de l'axe horizontal et la tangente est  $\theta = \arctg(y')$ , donc  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ . L'angle incident  $\theta_i$  est son complémentaire, donc  $\sin \theta_i = \cos \theta$ . Si l'on prend pour origine le foyer  $O$  qui reçoit nos rayons et  $M$  est le point courant de  $\Gamma$ , l'angle de la demi-droite  $[OM)$  et de la tangente en  $M$  à  $\Gamma$  est celui du vecteur  $(x, y)$  et du vecteur  $(1, y')$ . C'est le complémentaire de  $\theta_r$  et son cosinus est  $\frac{x + yy'}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 + y'^2)}} = \sin \theta_r$ .

La relation de Descartes s'écrit  $\sin \theta_i = n \sin \theta_r$ , où  $n$  est l'indice de réfraction strictement supérieur à 1, ce qui se traduit donc par l'équation différentielle  $\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = n$ .

On reconnaît dans le membre de gauche la dérivée de  $n\sqrt{x^2 + y^2}$ , et il existe donc une constante  $\lambda$  telle que  $n\sqrt{x^2 + y^2} = x - \lambda$ . Si  $x_0$  est l'abscisse du point de la courbe à tangente verticale (où la courbe rencontre l'axe passant par  $O$  parallèle aux rayons incidents),  $nx_0 = x_0 - \lambda$ , donc la courbe a pour équation  $n\sqrt{x^2 + y^2} = x - (1-n)x_0$ , soit  $n^2(x^2 + y^2) = (x + (n-1)x_0)^2$  et  $x + (n-1)x_0 > 0$ . C'est l'équation d'une partie d'ellipse d'équation réduite :

$$\frac{\left(x - \frac{x_0}{n+1}\right)^2}{\frac{x_0^2 n^2}{(n+1)^2}} + \frac{y^2}{\frac{n-1}{n+1} x_0^2} = 1,$$

de centre  $\left(\frac{x_0}{n+1}, 0\right)$ , de grand axe  $a = \frac{x_0 n}{n+1}$  et de petit axe  $b = x_0 \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ .



Sa demi-distance focale est donc  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{x_0}{n+1}$ , ce qui entraîne que  $O$  est un foyer de l'ellipse (le plus éloigné du point  $(x_0, 0)$  de la courbe). Le foyer optique est donc aussi un foyer au sens de la théorie des coniques.

24. Pour tout  $x$ ,  $G(x, y(x), \lambda) = 0$ . En dérivant cette relation (à  $\lambda$  fixé) on trouve la relation  $(D)$  :

$$\frac{d}{dx} (G(x, y(x), \lambda)) = \frac{\partial G}{\partial x} (x, y(x), \lambda) + y'(x) \frac{\partial G}{\partial y} (x, y(x), \lambda) = 0.$$

Il reste à éliminer  $\lambda$  entre deux relations obtenues.

1. Dans ce cas, le paramètre  $\lambda$  a déjà disparu de  $(D)$  :  $xy'(x) + y(x) = 0$ , c'est l'équation différentielle voulue.
2. De même ici,  $(D) \iff 2x + 2y(x)y'(x) = 0$ .
3. L'équation d'une ellipse de foyers  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  et de petit axe  $b$  a pour équation  $\frac{x^2}{1+b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ . On peut paramétrer cette famille de courbes par  $\lambda = b^2 > 0$ , et transformer la relation obtenue pour la rendre polynomiale en  $\lambda$  :

$$G(x, y, \lambda) = \lambda x^2 + (1 + \lambda)y^2 - \lambda(1 + \lambda) = 0$$

Le graphe d'une fonction  $y$  de classe  $C^1$  vérifiant  $G(x, y(x), \lambda) = 0$  est contenu dans une demi-ellipse au-dessus ou au-dessous de l'axe des  $x$ , en excluant les points sur l'axe des  $x$ , où la tangente est verticale. Ici :

$$(D) \iff \lambda x + \lambda y y' + y y' = \lambda(x + y y') + y y' = 0.$$

Les points où  $x + y(x)y'(x) = 0$  vérifient  $y(x)y'(x) = 0$ , et comme on a exclu  $y(x) = 0$ , c'est le point où  $x = y'(x) = 0$ , sommet à tangente horizontale de la demi-ellipse. Ailleurs, on tire  $\lambda$  de  $(D)$  et on le reporter dans  $(G)$ , ce qui équivaut (après suppression légitime d'un facteur  $xy$ ) à :

$$-y' + x^2 y' + x y y'^2 - x y + y^2 y' = 0.$$

Aux points où  $x = y'(x) = 0$ , cette équation différentielle est encore vérifiée.

4. Ici,  $(D) \iff y'(x) = a'(x)\lambda + b'(x)$ . La relation  $a' \times (G) - a \times (D)$  s'écrit  $ay' - a'y = ab' - a'b$ , ce qu'on exprime en disant que les équations différentielles linéaires sont celles dont les solutions sont fonctions affines du paramètre.
5. On écrit  $(G)$  sous la forme  $(cy - a)\lambda = b - dy$  et :

$$(D) \iff (c'y + cy' - a')\lambda = b' - d'y - dy'.$$

L'équation différentielle désirée est obtenue en éliminant  $\lambda$  par la combinaison linéaire d'équations  $(c'y + cy' - a') \times (G) - (cy - a) \times (D)$ . Il est

remarquable que le terme en  $yy'$  disparaisse et l'on aboutisse à l'équation de RICCATI :

$$(ad - bc)y' = (cd' - dc')y^2 + (a'd - ad' + c'b - bc')y + ab' - a'b.$$

On exprime cela en disant que les équations de RICCATI sont les équations différentielles dont les solutions sont fonctions homographiques du paramètre.

25. 1. Nous supposons que les graphes arcs de courbes  $\Gamma_\lambda$  vérifient l'équation différentielle (dite *non résolue en  $y'$* )  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ . L'équation différentielle cherchée est donc  $F\left(x, y(x), -\frac{1}{y'(x)}\right) = 0$ .
2. (a) Dans ce cas,  $F(x, y, y') = xy' + y$ , et l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est  $-\frac{x}{y'} + y = 0$ . Cela équivaut, aux points où  $y'$  ne s'annule pas (que nous ne discuterons pas ici) à  $yy' - x = 0$ . On reconnaît ici la dérivée de  $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ , donc les trajectoires orthogonales aux hyperboles d'asymptotes les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont les hyperboles équilatères  $y^2 - x^2 = \mu$  d'asymptotes les deux bissectrices  $y =$  et  $y = -x$ .
- (b) De même, ici,  $F(x, y, y') = x + yy'$ , et l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est  $xy' - y = 0$ , et ce sont les droites passant par l'origine, ce qui n'est pas étonnant car les courbes  $\Gamma_\lambda$  sont les cercles de même centre  $(0, 0)$ .
- (c) Ici,  $F(x, y, y') = -y' + x^2y' + xyy'^2 - xy + y^2y'$ . Lorsqu'on remplace  $y'$  par  $-\frac{1}{y'}$  dans cette relation, on trouve  $\frac{-1}{y'^2}$  fois la même ! Il n'y a pas à résoudre cette équation différentielle, mais seulement à se rendre compte que les ellipses de foyers  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  ont pour équation  $\frac{x^2}{1+\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - 1 = 0$  avec  $\lambda > 0$ , tandis que les hyperboles de mêmes foyers ont la même équation avec  $\lambda$  négatif, ce qui explique qu'on retrouve à un facteur près la même équation.
26. Comme on a supposé que  $C$  est une courbe régulière dont la tangente en tout point coupe l'axe vertical et n'est donc pas verticale,  $C$  est bien le graphe d'une fonction de classe  $C^1$  d'un intervalle  $I$  ouvert de  $\mathbb{R}^{++}$  dans  $\mathbb{R}$ . L'équation de la tangente en  $M = (x, y(x))$  est  $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$ , en notant  $(X, Y)$  le point courant de cette tangente. On écrira cela en abrégé  $Y - y = y'(X - x)$ . L'ordonnée de son intersection avec l'axe vertical est  $Y = y - xy'$ , et  $C$  vérifie l'équation différentielle  $y - xy' = k\sqrt{x^2 + y^2}$  équivalente à  $y' = \frac{y}{x} - k\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}$ .

Cette équation homogène vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sur le demi-plan  $\mathbb{R}^{*+}$  où nous nous sommes placés, et il nous suffira de trouver des solutions particulières maximales et recouvrant le demi-plan. Pour cela, cherchons des solutions dont le graphe puisse se paramétrer par  $t = y/x$ . On écrit donc  $y = tx$ ,  $dy = t dx + x dt = (t - k\sqrt{t^2 + 1}) dx$ , ce qui donne  $\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{k\sqrt{t^2 + 1}}$ , soit  $\ln x = -\frac{1}{k} \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + C$ , et il existe une constante

$\lambda$  positive telle que :  $x = \frac{\lambda}{(t + \sqrt{t^2 + 1})^{1/k}} = \lambda(\sqrt{t^2 + 1} - t)^{1/k}$ . On en tire  $\sqrt{t^2 + 1} - t = (x/\lambda)^k$ , soit  $t = \frac{1 - (x/\lambda)^{2k}}{2(x/\lambda)^k}$ , et finalement  $y = x \frac{1 - (x/\lambda)^{2k}}{2(x/\lambda)^k}$ .

On tire aisément  $\lambda$  de cette expression lorsque  $(x, y)$  est donné, donc ce sont là toutes les solutions maximales sur  $\mathbb{R}^{*+}$ .

Lorsque  $k = 1$ , on reconnaît les paraboles de foyer  $O = (0, 0)$  et de directrice horizontale au-dessus de  $O$ . En effet lorsque  $M$  décrit une telle parabole, le pied  $H$  de la perpendiculaire menée de  $O$  à la tangente en  $M$  à la parabole reste sur la tangente à la parabole en son sommet, de sorte que  $OMT$  est bien isocèle en  $O$ .

## Chapitre 25

1. On trouve par exemple :

$$(x = a u \cos v, \quad y = b u \sin v, \quad z = c u)$$

pour le cône, puis :

$$(x = 2a u \cos v, \quad y = 2b u \sin v, \quad z = 2u^2)$$

pour le parabolôïde elliptique et enfin :

$$(x = a(u + v), \quad y = b(u - v), \quad z = 2uv)$$

pour le parabolôïde hyperbolique (dans ce dernier cas, le recours à la trigonométrie hyperbolique est évidemment possible, mais maladroit).

On peut trouver des représentations paramétriques rationnelles, par exemple en introduisant des tangentes d'angles moitiés, mais ces représentations laissent échapper (comme dans le cas banal d'un simple cercle) certains points correspondant à des valeurs infinies d'un paramètre. C'est ainsi que :

$$\left( x = a \frac{1 + uv}{u + v}, \quad y = b \frac{v - u}{u + v}, \quad z = c \frac{1 - uv}{u + v} \right)$$

est une représentation paramétrique rationnelle partielle, mais qui peut être utile, de l'hyperboloïde à une nappe d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

2. Un calcul immédiat de dérivées partielles montre que le plan tangent en  $M$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  a pour équation :

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = 1.$$

Il en résulte qu'un point  $N$  de la normale en  $M$  a pour coordonnées :

$$x = x_0(1 + ta), \quad y = y_0(1 + tb), \quad z = z_0(1 + tc)$$

où  $t$  décrit  $\mathbb{R}$  et vérifie l'égalité  $\overrightarrow{MN} = t\vec{\omega}$  où  $\vec{\omega}$  est le vecteur de coordonnées  $(ax_0, by_0, cz_0)$ . On obtient par exemple  $P$  pour  $x = 0$  ; c'est-à-dire  $t = -\frac{1}{a}$  d'où

$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{a}\vec{\omega}$  et ainsi de suite. Il en résulte que les trois vecteurs  $\overrightarrow{MP}$ ,  $\overrightarrow{MQ}$  et

$\overrightarrow{MR}$  sont entre eux comme les trois nombres  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  et  $\frac{1}{c}$ , ou encore comme les nombres  $bc$ ,  $ca$  et  $ab$ . Par exemple, ils sont égaux entre eux si la quadrique est une sphère ce qui est normal, puisqu'alors  $P = Q = R = O$ .

- 3 Le nombre  $\rho$  est le rang de la quadrique. On a clairement  $1 \leq \rho \leq 3$  et  $1 \leq \rho \leq r \leq 4$ . Il existe huit couples  $(r, \rho)$  répondant à la question (il n'existe pas de quadrique pour laquelle  $\rho = 1$  et  $r = 4$ ). Nous nous contenterons de donner ici les résultats, les démonstrations étant immédiates :

- $(r, \rho) = (4, 3)$  : types I, II, III, VI ; équation générale  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$ .
- $(r, \rho) = (3, 3)$  : types IV, V ; équation générale  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0$ .
- $(r, \rho) = (4, 2)$  : types VII, VIII ; équation générale  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 2z$ .
- $(r, \rho) = (3, 2)$  : types IX, X, XIII ; équation générale  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ .
- $(r, \rho) = (2, 2)$  : types XI, XII ; équation générale  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 0$ .
- $(r, \rho) = (3, 1)$  : type XIV ; équation générale  $\frac{x^2}{A} = 2z$ .
- $(r, \rho) = (2, 1)$  : types XV, XVII ; équation générale  $\frac{x^2}{A} = 1$ .
- $(r, \rho) = (1, 1)$  : type XVI ; équation générale  $x^2 = 0$ .

On remarquera que cette classification, plus grossière que celle du cours, reste intéressante pour l'étude des quadriques définies sur un corps autre que  $\mathbb{R}$ , mais de caractéristique différente de deux (par exemple  $\mathbb{Q}$ ). Par ailleurs les formules de transformation des matrices  $U$  et  $V$  par un changement de repère montrent que les rangs  $r$  et  $\rho$  sont alors invariants, ce qui montre que cette classification est affine et non métrique.

- Les quadriques telles que  $r = 4$  sont les quadriques propres (éventuellement vides).
- Les quadriques telles que  $\rho = 3$  sont les quadriques à centre au sens strict ( $r = 4$ ), éventuellement vides, ou les cônes, possédant également un centre ( $r = 3$ ), éventuellement réduits à un singleton.
- Les quadriques telles que  $r = 3$  sont les cylindres ( $\rho \leq 2$ ), éventuellement vides, ou les cônes ( $\rho = 3$ ), éventuellement réduits à un singleton.
- Les quadriques telles que  $r \leq 2$  sont les quadriques décomposées, réunions de deux plans sécants ( $r = \rho = 2$ ), éventuellement réduites à leur intersection qui est une droite, ou parallèles ( $r = \rho + 1 = 2$ ), éventuellement vides, ou enfin formées d'un plan double ( $r = \rho = 1$ ).
- Les quadriques telles que  $r - \rho = 2$  sont les paraboloides ( $\rho = 2$ ), ou les cylindres paraboliques ( $\rho = 1$ ).

4. L'équation mise sous la forme  $(2x + y)(2x - y) = 2z$  montre que l'intersection de  $P$  et du plan d'équation  $2x + y = \lambda$  est la droite  $D_\lambda$  intersection de ce plan et du plan d'équation  $2z = \lambda(2x - y)$  qui ne lui est pas parallèle. Il en est de même pour  $D_\mu$  et les coordonnées de leur point d'intersection  $M$  sont aussitôt obtenues :

$$x = \frac{\lambda + \mu}{4}, \quad y = \frac{\lambda - \mu}{2}, \quad z = \frac{\lambda\mu}{2}.$$

Des vecteurs dirigeant les droites  $D_\lambda$  et  $D_\mu$  ayant par exemple pour coordonnées  $(1, -2, 2\lambda)$  et  $(1, 2, 2\mu)$ , elles sont orthogonales si, et seulement si,  $4\lambda\mu = 3$ .

Le point commun  $M$  appartient alors au plan d'équation  $z = \frac{3}{8}$  et à  $H$  donc à leur courbe d'intersection, qui est une hyperbole, dont la projection orthogonale sur le plan d'équation  $z = 0$  a pour équation  $4x^2 - y^2 = \frac{3}{4}$ . Il est facile de voir que, inversement, tout point de cette hyperbole convient puisque l'on peut prendre alors :

$$\lambda = 2x + y, \quad \mu = 2x - y$$

ce qui redonne bien le point d'où l'on était parti.

5. Le calcul de l'expression  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  est immédiat, et donne  $1 + \frac{z^2}{c^2}$ . La surface donnée est donc incluse dans l'hyperboloïde à une nappe ainsi défini, mais coïncide en fait avec lui, ce que nous allons vérifier en partant de la représentation paramétrique donnée dans le cours :

$$(x = a \cos \theta \operatorname{ch} \varphi, \quad y = b \sin \theta \operatorname{ch} \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \varphi).$$

Cherchons à résoudre les équations en  $u$  où  $\theta$  et  $\varphi$  sont données :

$$\cos \theta \operatorname{ch} \varphi = \operatorname{sh} \varphi \cos u + \sin u$$

$$\sin \theta \operatorname{ch} \varphi = \cos u - \operatorname{sh} \varphi \sin u$$

qui donnent aussitôt :

$$\cos u = \frac{\cos \theta \operatorname{sh} \varphi + \sin \theta}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad \sin u = \frac{\cos \theta - \sin \theta \operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}.$$

Or l'égalité :

$$(\cos \theta \operatorname{sh} \varphi + \sin \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta \operatorname{sh} \varphi)^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 \varphi = \operatorname{ch}^2 \varphi$$

montre que les équations ci-dessus ont bien une solution.

Inversement, la détermination de  $\theta$  et de  $\varphi$  en fonction de  $t$  et  $u$  est facile : on commence par déterminer  $\varphi$  par l'égalité  $t = \varepsilon \operatorname{sh} \varphi$ , ce qui est possible en utilisant un logarithme :  $\varphi = \varepsilon \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$ , puis  $\theta$  par les égalités symétriques des précédentes :

$$\cos \theta = \frac{\cos u \operatorname{sh} \varphi + \sin u}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad \sin \theta = \frac{\cos u - \sin u \operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}.$$

Cette double représentation paramétrique est un peu plus complexe que celle du cours, mais est particulièrement bien adaptée à l'étude des génératrices de l'hyperboloïde. Les deux valeurs de  $\varepsilon$  correspondent aux deux types de génératrices (le choix de l'un des deux types suffit en effet pour retrouver toute la surface comme ensemble des génératrices du type choisi). La représentation elle-même correspond à l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin u \\ b \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \cos u \\ -b \sin u \\ \varepsilon c \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la représentation de la droite passant par un point de l'ellipse de gorge (c'est-à-dire de la section de l'hyperboloïde par le plan d'équation  $z = 0$ ) et ayant pour direction celle de la génératrice du type choisi passant par ce point.

6. 1. Un simple calcul de dérivées partielles montre que le plan tangent au point  $(x_0, y_0, z_0)$  à cette quadrique a pour équation :

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = 1.$$

Il en résulte que le quadruplet  $(u, v, w, h)$  convient si, et seulement si, l'on peut trouver un point  $(x_0, y_0, z_0)$  de la quadrique tel que le quadruplet  $(ax_0, by_0, cz_0, 1)$  lui soit lié puisque deux équations d'un même plan

doivent être proportionnelles. Nécessairement  $h$  doit être différent de 0, puis  $x_0 = \frac{u}{ah}$  et ainsi de suite, d où la condition nécessaire :

$$bcu^2 + cav^2 + abw^2 = abch^2, \quad h \neq 0.$$

Inversement, si  $(u, v, w, h)$  vérifie cette relation, le plan d'équation  $ux + vy + wz = h$  est bien le plan tangent à la quadrique au point de coordonnées calculées plus haut.

2. Ici le plan tangent a pour équation :

$$z_0 + z = ax_0x + by_0y.$$

La même méthode montre que le point de contact doit être tel que  $(u, v, w, h)$  soit lié à  $(ax_0, by_0, -1, z_0)$ , soit  $w \neq 0$ ,  $z_0 = -\frac{h}{w}$ ,  $x_0 = -\frac{u}{aw}$  et ainsi de suite, d'où la condition :

$$bu^2 + av^2 + 2abwh = 0, \quad w \neq 0.$$

La réciproque est immédiate.

7. La droite  $\Delta$  engendre un parabolôide hyperbolique. Soit en effet un repère orthonormé dans lequel les points  $A, B, C$  et  $D$  aient respectivement comme coordonnées  $(\lambda, 0, 1), (-\lambda, 0, 1), (0, \lambda, -1)$  et  $(0, -\lambda, -1)$  : un calcul simple montre que  $ABCD$  est régulier si par exemple  $\lambda = \sqrt{2}$ . On trouve alors comme coordonnées respectives de  $P$  et  $Q$  les triplets  $((2t - 1)\lambda, 0, 1)$  et  $(0, (2t - 1)\lambda, -1)$ . Un point arbitraire de  $\Delta$  a donc ses coordonnées données par les relations :

$$x = (2t - 1)\lambda\mu, \quad y = (2t - 1)\lambda(1 - \mu), \quad z = 2\mu - 1$$

où  $\mu$  décrit  $\mathbb{R}$ . L'élimination de  $t$  est immédiate et conduit à l'égalité  $(1 - \mu)x = \mu y$ , puis à  $(x + y)z = x - y$ . On obtient ainsi l'équation d'une quadrique dont on vérifie immédiatement que chaque point convient en posant  $\mu = \frac{z+1}{2}$  et  $2t - 1 = \frac{x+y}{\lambda}$ ; reste à déterminer la nature de cette quadrique. C'est un parabolôide hyperbolique, puisque le changement de repère orthonormé de matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = {}^tP = P^{-1}$$

donne comme équation de la quadrique avec les nouvelles coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  :

$$X^2 - Y^2 = 2Z.$$

8. 1. Définissons les quadriques recherchées par une équation de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

avec  $A, B, C, D, E, F$  non tous nuls. L'inclusion de la droite dans la quadrique signifie que tous les réels  $z$  doivent annuler le polynôme  $B(z+2)^2 + Cz^2 + 2F(z+2)z + 2H(z+2) + 2Iz + J$ , ce qui donne les relations  $B + C + 2F = 0$ ,  $2B + 2F + H + I = 0$  et  $4B + 4H + J = 0$ . L'inclusion de la parabole signifie que tous les réels  $y$  doivent annuler le polynôme  $\frac{A}{16}y^4 + By^2 + \frac{D}{2}y^3 + \frac{G}{2}y^2 + 2Hy + J$ , ce qui donne les relations  $A = 0$ ,  $D = 0$ ,  $2B + G = 0$ ,  $H = 0$  et  $J = 0$ . Enfin l'appartenance du point donne la relation  $A + 4B + 9C + 4D - 6E - 12F - 2G - 4H + 6I + J = 0$ . Nous disposons donc de neuf équations linéaires en dix inconnues définies à une constante près. Le calcul est facile et montre que l'unique quadrique solution est celle dont une équation est du type :

$$z^2 + 7xz - yz + 2z = 0.$$

Sous cette forme, il est facile de vérifier que les conditions imposées sont bien vérifiées.

2. L'équation se factorise aussitôt en :  $z = 0$ ,  $7x - y + z = -2$ , soit une réunion de deux plans. Il s'agit d'une quadrique de rang 2 et de type XI selon les notations du cours.
9. 1. L'équation de l'hyperboloïde est clairement  $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ . Cette relation est automatiquement vérifiée si  $x = 1$  et  $y = z$  par exemple. La droite donnée est évidemment l'une de celles qui forment la double famille de génératrices de l'hyperboloïde à une nappe ; on pourrait d'ailleurs vérifier que ce dernier n'est autre que la réunion des images de cette droite par toutes les rotations d'axe  $Oz$ .
2. Une équation de  $H$  peut être mise sous la forme  $(x-1)(x+1) = (z-y)(z+y)$ . Or l'on peut caractériser tous les quadruplets d'entiers non nuls  $(t, u, v, w)$  tels que  $tu = vw$  ; si  $u = ha$  et  $v = hb$ , avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux, en résultent les égalités  $tha = hbw$ , d'où  $ta = bw$ , puis  $t = kb$  par le théorème de Gauss et  $w = ka$ , soit finalement  $(t, u, v, w) = (kb, ha, hb, ka)$ . La réciproque est claire. Si  $(x, y, z)$  est un triplet de coordonnées rationnelles d'un point de  $H$ , on a donc  $x = \frac{p}{s}$ ,  $y = \frac{q}{s}$ ,  $z = \frac{r}{s}$  avec  $(p-s)(p+s) = (r-q)(r+q)$ , et finalement :
- $$x = \frac{ha + kb}{ha - kb}, \quad y = \frac{ka - hb}{ha - kb}, \quad z = \frac{ka + hb}{ha - kb}$$
- où  $(a, b, h, k)$  sont des entiers arbitraires avec  $ha \neq kb$



3. Une représentation paramétrique du triplet  $(A, B, C)$  est facile à déterminer : on peut prendre  $(\cos t, \sin t, 0)$  et  $(-\cos t, -\sin t, 0)$  pour coordonnées de  $B$  et  $C$ , d'où l'on déduit celles de  $A$  sous la forme  $(1, \tan t, \tan t)$  avec  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[ \cup ]0, \frac{\pi}{2}[$ . On constate facilement qu'il suffit de considérer les points alignés avec  $A$  et  $B$ , puisqu'il suffit de changer  $t$  en  $t + \pi$  pour obtenir les points alignés avec  $A$  et  $C$ . Un point  $M$  de  $AB$  a pour coordonnées :

$$x = (1 - s) \cos t + s, \quad y = (1 - s) \sin t + s \tan t, \quad z = s \tan t$$

où  $s$  est un paramètre décrivant  $\mathbb{R}$ . L'élimination de  $s$  est facile et donne les deux égalités :

$$x(y - z) = (y - xz) \cos t, \quad y(y - z) = (y - xz) \sin t$$

et enfin à l'égalité :

$$(y - z)^2(x^2 + y^2) - (y - xz)^2 = 0.$$

Developpant ce polynôme du quatrième degré, on constate qu'il s'y est glissé un facteur parasite  $y$  et il reste une équation de degré trois :

$$(x^2 + y^2)(y - 2z) + (z^2 - 1)y + 2xz.$$

Puisque les valeurs  $t = 0$  et  $t = \pi$  sont interdites, il en résulte qu'il faut ôter de cette surface les deux droites formées des points de coordonnées  $(x, 0, 0)$  (correspondant à  $t = 0$  et  $A = B$  pour  $x = 0$ , et à  $t = \pi$  et  $A = C$  pour  $x = 2s - 1$ ), ainsi que la droite formée des points de coordonnées  $(1, 0, z)$  pour lesquels le paramètre  $s$  devrait prendre une valeur infinie.

10. On peut écrire en effet :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J$$

$$= (x \ y \ z \ 1) \begin{pmatrix} A & D & E & G \\ D & B & F & H \\ E & F & C & I \\ G & H & I & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \\ = {}^tXUX$$

où  $U$  est une matrice symétrique d'ordre 4. Le changement de repère se traduit sur les coordonnées par une transformation de la forme  $X = PX'$ , qui conduit à l'annulation de la forme quadratique analogue  ${}^tX'U'X'$  avec  $U' = {}^tP^{-1}U^tP$  où la matrice  $P$  est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $M$  inversible (il en va clairement de même de son inverse  $P^{-1}$ )

11. 1. Une quadrique est transformée en quadrique. Partant en effet d'un repère orthonormé où son équation est :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

avec les nombres réels  $A, B, C, D, E, F$  non tous nuls, on voit que son image par l'automorphisme de matrice  $M$  dans ce même repère est définie par une équation de la forme :

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2D'xy + 2E'xz + 2F'yz + 2G'x + 2H'y + 2I'z + J = 0$$

où les nombres réels  $A', B', C', D', E', F'$  ne sont pas tous nuls comme le montre l'égalité :

$$\begin{pmatrix} A' & D' & E' & G' \\ D' & B' & F' & H' \\ E' & F' & C' & I' \\ G' & H' & I' & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tM^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D & E & G \\ D & B & F & H \\ E & F & C & I \\ G & H & I & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(noter que  $J$ , le dernier coefficient, n'est pas modifié). C'est donc bien une quadrique.

2. Une orthonormalisation du repère se traduit par un changement de coordonnées, les coordonnées par rapport à l'ancien repère s'exprimant en fonction des coordonnées par rapport au nouveau (et réciproquement) par des égalités de la forme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où  $M$  est une matrice inversible. Il en résulte bien une nouvelle écriture de l'équation de la surface sous la forme :

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'x'y' + 2E'x'z' + 2F'y'z' + 2G'x' + 2H'y' + 2I'z' + J = 0$$

où les nombres réels  $A', B', C', D', E', F'$  ne sont pas tous nuls, les coefficients  $A', B'$  etc. étant liés à  $A, B$  etc. par une relation matricielle analogue à celle de la question précédente.

12. La projection sur le plan  $z = 0$  de la conique d'intersection, lorsqu'elle existe, a pour équations  $(z = 0, (a + c)x^2 + (b + c)y^2 + c(2xy - 2\lambda(x + y) + \lambda^2) = 1)$ , ce qui représente effectivement une conique à centre ce dernier ayant pour coordonnées :

$$\left( x = \frac{\lambda bc}{ab + bc + ca}, \quad y = \frac{\lambda ca}{ab + bc + ca} \right).$$

Ces coordonnées sont également celles du centre de la conique elle-même auxquelles il convient d'ajouter :

$$z = \frac{\lambda ab}{ab + bc + ca}.$$

Le lieu cherché est donc inclus dans la droite vectorielle de vecteur directeur  $(ab, bc, ca)$ .

Ne conviennent que les points de cette droite pour lesquels la section n'est pas vide, cas qui ne peut se produire que lorsque cette conique (ou sa projection, ce qui revient au même) est une ellipse. Plus précisément, il faut que l'équation de la projection, après transport de l'origine du repère au centre de la conique, donc sous la forme :

$$\varphi(X, Y) = (a + c)X^2 + (b + c)Y^2 + 2cXY = k$$

représente une ellipse réelle, c'est-à-dire non vide. La forme quadratique  $\varphi$  s'écrit, par réduction de Gauss, comme  $(a+c)\varphi(X, Y) = ((a+c)X + cY)^2 + dY^2$  où  $d = ab + bc + ca$ . Pour obtenir une conique vide il est nécessaire et suffisant que  $d > 0$  et  $(a + c)k < 0$ . Le calcul de  $k$  est assez lourd ; on trouve, par identification à partir de l'équation de départ,  $k = 1 - \frac{abc\lambda^2}{d}$ , ce qui donne finalement la condition de vacuité de l'intersection :

$$ab + bc + ca > 0 \quad \text{et} \quad (a + c)(ab + bc + ca - \lambda^2 abc) < 0.$$

On pourrait d'ailleurs montrer, d'une manière générale, qu'une conique d'équation dans un repère affine donné :

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$$

n'est une ellipse vide que si, et seulement si, l'on vérifie les deux conditions simultanées :

$$\det \begin{pmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{pmatrix} > 0, \quad a \det \begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{pmatrix} > 0.$$

- 13. 1.** Il est possible, par un changement de repère approprié, de faire en sorte que le plan  $P$  ait pour équation  $z = 0$ , et que les trois droites en question aient pour équations respectives  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $x + y = 0$ . Si l'on note :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

avec  $A, B, C, D, E, F$  non tous nuls, on voit que l'hypothèse implique que  $By^2 + 2Hy + J$  soit nul pour tout réel  $y$ , donc que  $B = H = J = 0$  puis de même que  $A = G = 0$ , et enfin que  $D = 0$  ce qui donne  $Cz^2 + 2Exz + 2Fyz + 2Iz = 0$ , soit enfin :

$$z(Cz + 2Ex + 2Fy + 2I) = 0$$

qui montre que la quadrique contient le plan  $P$ . Inversement, toute quadrique contenant ce plan répond évidemment à la question ; elle est alors nécessairement de type XI, XV ou XVI selon les notations du cours, c'est-à-dire formée de deux plans sécants, ou de deux plans parallèles distincts ou d'un plan double.

2. L'équation donnant les paramètres des points d'intersection de cette courbe et d'un plan quelconque d'équation  $ux + vy + wz = h$  étant *a priori* du troisième degré, à savoir :

$$(w - h)t^3 + (v - w)t^2 + (3u + v + 2w)t + v - 2w + h = 0$$

il semble possible qu'il y ait plus de deux points d'intersection, alors que l'intersection générale d'un plan et d'une conique, section plane d'une quadrique, donne au plus deux points communs. En regardant pour voir s'il n'est pas possible de rendre cette équation triviale, c'est-à-dire vérifiée par tout réel  $t$ , on s'aperçoit qu'il suffit en effet de prendre  $u = -h$ ,  $v = w = h$  pour annuler chaque coefficient ce qui signifie que la courbe  $\Gamma$  est plane et incluse dans le plan  $P$  d'équation  $y + z = x + 1$ . Toute quadrique  $Q$  contenant ce plan répond évidemment à la question.

Pour démontrer que la réciproque est vraie, il suffit de remarquer que toute quadrique  $Q$  contenant  $\Gamma$  contient également une infinité de droites de  $P$  formant de véritables triangles, à savoir toutes les droites qui coupent en  $\Gamma$  en trois points deux à deux distincts (il suffit de se donner deux valeurs du paramètre  $t$  telles que le troisième point d'intersection — qui existe puisque toute équation du troisième degré qui a au moins deux racines en a une troisième — soit différent des deux autres). La question 1. permet alors de conclure.

- 14 La méthode de réduction de Gauss montre que, dans un autre repère où les coordonnées sont notées  $x' = x + y - 1$ ,  $y' = y - z + 2$  et  $z' = z$  l'équation de la surface s'écrit :

$$x'^2 + y'^2 + mz'^2 = 1 - m^2.$$

Supposons un instant que le nouveau repère soit orthonormé. La discussion du type de la surface, qui est alors une quadrique symétrique par rapport à l'origine, est immédiate :

- ellipsoïde pour  $0 < m < 1$  ;
- ellipsoïde imaginaire (vide) pour  $m > 1$  ;
- hyperboloïde à une nappe pour  $-1 < m < 0$  ;
- hyperboloïde à deux nappes pour  $m < -1$  ;
- cône pour  $m = -1$  ;
- cylindre elliptique pour  $m = 0$  ;
- cône réduit à un point pour  $m = 1$ .

Donc la surface étudiée est l'image par un endomorphisme de l'espace d'une telle quadrique. Comme un endomorphisme ne modifie pas la nature d'une quadrique, la décomposition donnée ci-dessus est générale

15. Il s'agit d'un paraboloides elliptique dont une équation réduite est :

$$2x'^2 + 3y'^2 + 2z'\sqrt{6} = 0.$$

On opère d'abord une rotation dans laquelle les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont pris comme nouveaux axes provisoires ce qui donne

par exemple la matrice de passage suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

relative aux valeurs propres 0, 2 et 3, puis une translation qui place la nouvelle origine du repère au point de coordonnées intermédiaires :

$$\left( X = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad Y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad Z = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right).$$

16. On peut choisir le repère orthonormé dans lequel nous allons travailler de façon que  $S$  et  $S'$  aient pour équations respectives :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + c = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2bx + c = 0$$

avec  $b^2 \neq a^2$ ,  $c < a^2$  et  $c < b^2$ . Étudions d'abord le calcul du rayon  $r$  du cercle section de  $S$  par le plan d'équation  $y = mx + p$  : ce rayon est donné par la formule  $2r = |x' - x''|\sqrt{m^2 + 1}$  où  $x'$  et  $x''$  sont les racines de l'équation obtenue en éliminant  $y$  entre les équations des intersections du plan donné et de la sphère avec leur plan de symétrie commun  $z = 0$ , à savoir :

$$(m^2 + 1)x^2 + 2(mp - a)x + p^2 + c = 0.$$

On trouve facilement :

$$(m^2 + 1)(x' - x'')^2 = 4((mp - a)^2 - (m^2 + 1)(p^2 + c)).$$

Changeant  $a$  en  $b$ , on obtient une autre relation donnant le rayon de l'intersection de ce plan d'équation  $y = mx + p$  avec  $S'$ , telle que l'égalité de ces deux rayons soit équivalente à la relation :

$$a^2 - 2amp = b^2 - 2bmp$$

ce qui donne la relation  $a + b = 2mp$ . Si l'énoncé est exact, c'est qu'il existe une parabole  $P$  du plan d'équation  $z = 0$ , d'axe  $Ox$ , dont la droite d'équation  $y = mx + p$  soit une tangente. Posant  $y^2 = 2kx + h$  comme équation d'une telle parabole, on constate que la tangente à cette courbe au point d'abscisse  $t \neq 0$  et

d'ordonnée  $t'$  a pour équation  $y = mx + p$  avec  $m = \frac{k}{t'}$  et  $p = \frac{kt + h}{t'}$ , d'où  $mp = k \frac{kt + h}{2kt + h}$ . L'identification avec la relation  $a + b = 2mp$  conduit à prendre  $h = 0$  et  $k = a + b \neq 0$ .

L'étude précédente est toutefois incomplète en ce sens que le plan qui nous a servi avait une équation du type  $y = mx + p$ , ce qui excluait un plan ayant une équation du type  $x = q$ ; on trouve ici  $r^2 = 2aq - q^2 - c$ , d'où la condition  $2aq - q^2 = 2bq - q^2$  qui équivaut à  $q = 0$ . Or l'axe  $Oy$  est également une tangente à la parabole  $P$  et le résultat est maintenant général.

Par suite, les plans coupant  $S$  et  $S'$  suivant deux cercles de mêmes rayons sont donc tangents au parabolôïde de révolution engendré par la rotation de la parabole  $P$  par rapport à l'axe  $Ox$ , à savoir la quadrique d'équation :

$$y^2 + z^2 = 2(a + b)z.$$

Bien entendu, tous les plans tangents à ce parabolôïde ne sont pas nécessairement des plans coupant  $S$  et  $S'$  suivant deux cercles de mêmes rayons : il faut de plus qu'ils coupent ces sphères suivant des cercles réels (il est d'ailleurs suffisant qu'ils rencontrent au moins l'une des deux, la réalité de l'autre intersection s'en déduisant alors sans peine).

17. Par affinité, ce volume est égal à  $\frac{b}{a}W$  où  $W$  est le volume compris entre le parabolôïde de révolution d'équation  $x^2 + y^2 = 2a^2z$  et le plan d'équation  $aux + bvy + awz = ah$ . On peut donc d'abord étudier le cas particulier  $a = b$ , puis passer au cas général. On peut de plus effectuer une rotation des axes mettant le plan donné sous la forme  $z = mX + \lambda$ , où  $m^2 = \frac{u^2 + v^2}{w^2}$  et  $\lambda = \frac{h}{w}$ . On sait que le volume cherché  $V(\lambda)$ , considéré comme une fonction de  $\lambda$ , est tel que  $\frac{dV}{d\lambda} = A(\lambda)$  où  $A(\lambda)$  est l'aire de la projection orthogonale de la section du parabolôïde par le plan considéré. Or il est facile de voir que cette projection est un cercle d'équations ( $z = 0, X^2 + Y^2 = 2a^2(mX + \lambda)$ ) dans les nouveaux axes après rotation, dont l'aire est  $A(\lambda) = \pi R^2 = \pi a^2(2\lambda + m^2 a^2)$  quantité que nous supposons positive (sinon l'intersection est vide). On en déduit aussitôt
- $$V = \frac{\pi a^2}{4} (\lambda^2 + m^2 a^2) = \frac{\pi a^2}{4w^4} (a^2(u^2 + w^2) + 2hw)^2 \text{ et enfin :}$$

$$V = \frac{\pi ab}{4w^4} [a^2u^2 + b^2v^2 + 2hw]^2.$$

La condition pour que l'intersection ne soit pas vide, ramenée aux conditions initiales, s'écrit  $a^2u^2 + b^2v^2 \geq -2hw$ ; le cas d'égalité est la condition nécessaire et suffisante pour que le plan soit tangent à la quadrique (équation tangentielle).

# Index

- Abel
  - lemme d', 638, 933
  - règle uniforme d', 458
  - transformation d', 281
- abelien (groupe) 13
- abscisse curviligne, 707
- absolue (convergence), 271
  - d'une série de fonctions 455
- absolument convergente, 271
- accroissements finis
  - formules des, 848
  - inégalité des, 512, 849
- action
  - d'un l'élément, 19
  - de groupe, 19
  - par automorphismes intérieurs, 21, 22
  - par translations, 21
- adaptée, 447
  - base, 96
  - base adaptée à un sous-espace, 97
  - subdivision, 507
- additif (groupe), 13
- additivité
  - par rapport à l'intervalle d'intégration, 477
- adhérence, 339
- adhérent (élément), 339
- adjoint(e)
  - d'un endomorphisme, 721
  - endomorphisme, 747
  - matrice, 748
- affine par morceaux (fonction) 449
- Alembert (règle de), 257
- algébrique, 70
- algébriquement lié, 69
- algébriquement libre, 69
- alternée (série), 279
- analytique, 834
- annulateur
  - idéal, 69, 182
    - d'un vecteur, 187
  - polynôme, 69, 182
- application
  - continûment différentielle, 829
  - de classe  $C^1$ , 829
  - de classe  $C^\infty$  853
    - de classe  $C^k$ , 853
    - différentielle, 824
    - indéfiniment différentielle, 853
    - $k$  fois continûment différentiable, 853
- arc (espace métrique), 408
- associés, 51
- autoadjoint (endomorphisme) 725, 750
- automorphisme intérieur, 21, 22
- autonome (équation différentielle) 997
- Banach
  - algèbre de, 383
  - espace de, 383
- base, 83
- Bernstein (polynôme de), 450
- Bertrand (série de), 254
- Bessel (inégalité de), 711, 789
- bicontinue (application), 360
- bilipschitzienne (application bilinéaire), 327
- bloc(s), 117
  - matrices, 117
  - opération, 118
- Bolzano-Weierstrass (théorème de), 405, 417
- Borel-Lebesgue (théorème de), 398
- bornée
  - application, 323
  - partie, 322
- boule
  - fermée, 320
  - ouverte, 320
- Bézout
  - relation de, 53, 65
  - théorème de, 53, 66
- Cantor (ensemble de), 402
- caractéristique, 58
  - polynôme, 201, 202
- carré intégrable (fonction de), 564
- carré sommable (famille de), 623
- Cartan (décomposition de), 744, 760
- Cauchy
  - critère de, 270, 271, 377
  - critère de Cauchy continue 392
  - produit de, 286, 625
  - règle de, 255
  - suite de, 377
  - suites de 270

- Cauchy-Lipschitz (théorème de), 929, 954, 981, 1000
- Cauchy-Riemann (équation de), 833
- Cauchy-Schwarz (inégalité de), 163, 493, 565, 692
- centralisateur, 26
- centre (groupe), 26
- cercle de convergence, 641
- chaîne (règle de), 840
- champ de vecteurs, 901, 988
- changement de variable, 519
- Chasles (relation de), 483
- chemin (espace métrique), 408
- chiffres, 264
- Chinois (lemme), 59
- Cholevski (décomposition de), 730 752
- circulation, 906
- classe  $C^1$ , 502, 829
  - fonctions de, 502
- classe  $C^k$ , 853
  - fonctions de, 505
  - par morceaux
    - fonctions de, 507
- classe  $C^\infty$ , 853
- classes (formules de), 29
- codimension, 102
- coefficient(s)
  - de Fourier, 781, 782
  - de la série entière, 637
  - équation différentielle linéaire 922
  - différentielle linéaire), 950
- cogradient, 902
- combinaison linéaire, 82
- commutatif (groupe), 13
- commutativité de la somme d'une série 616
- compact(e)
  - espace métrique, 395
  - partie, 395
- compagnon (matrice), 188
- comparaison logarithmique, 256
- compatible, 32, 54
  - système d'équations linéaires, 147
- complet (espace métrique), 380
- complète
  - équation différentielle linéaire, 922, 950
  - matrice, 150
  - partie, 380
- composante(s)
  - application, 355
  - suite, 365
  - vecteur, 84, 94
- condition
  - de Cauchy, 923, 951
  - initiale, 923, 951, 981
- congruence, 31
- congruente (matrice), 166
- conjugaison (classe de), 26
- conjugué, 21, 22
- connexe par arcs (espace métrique), 408
- constantes (caractérisation des fonctions) 501
- continûment
  - dérivables, 502
  - différentiable, 829
- continue (application), 353, 357
  - uniformément, 362
- continue par morceaux, 447
  - intégrale d'une fonction, 473
- continuité
  - de la fonction somme, 647
  - en un point, 352
  - sous le signe  $\int$ , 577
- contractante (application), 382
- converge (suite), 328, 329
- convergence
  - cercle de 641
  - disque de, 641
  - dominée (théorème de), 574, 591, 592
  - en moyenne, 484, 563
    - quadratique, 493, 566
  - monotone (théorème de), 568, 589
  - normale d'une série de fonctions, 456
  - rayon de, 639
  - simple, 437
    - d'une série de fonctions, 453
- convergence absolue, 271
  - d'une série de fonctions, 455
  - série, 389
- convergence uniforme, 438, 567
  - d'une série de fonctions, 453
  - sur tout compact, 441
    - d'une série de fonction 454
- convergente
  - absolument, 271
  - série, 247
- coordonnée(s)
  - polaires, 884
  - vecteur, 84
- cosinus
  - complexe, 659
  - hyperbolique complexe, 659
  - réel, 662
- cotangente complexe, 661
- courbe intégrale
  - equation differentielle, 988
  - équation de Pfaff, 1001
- critère de Cauchy, 271
  - uniforme, 441, 455
- critique (point), 850



- cyclique (groupe) 18
- cylindre, 1032
- cône 1031
- d'Alembertien, 861
- décimal(e), 264
  - développement, 264
  - nombre, 265
- définie positif(ve)
  - endomorphisme, 728, 751
  - forme bilinéaire symétrique, 161
  - indice, 752
  - matrice, 729
- degré (application polynomiale), 88
- demi-axes, 1018
- dénombrabilité, 603
- dénombrable, 618, 626
  - $\mathbb{R}$  est non, 628
  - ensemble, 3
- dense (partie), 342
- dérivabilité
  - à droite, 500
  - à gauche, 500
  - de la fonction somme, 649
- dérivable, 500
  - au sens complexe, 826
  - suivant un vecteur 821
- dérivation
  - d'une limite, 524
  - sous le signe  $\int$ , 528, 579
- dérivé(es), 500
  - à droite, 500
  - à gauche, 500
  - au sens complexe, 826
  - d'une fonction  $C^1$  par morceaux, 474
  - d'une fonction  $C^k$  par morceaux, 508
  - fonction, 502
  - $k$  *ème*, 506
  - partielle, 822
  - successives, 508
  - suivant un vecteur, 821
- détermination
  - principale du logarithme, 658
- développable en série entière
  - fonction, 665
- développement décimal, 264
- diagonalisable (simultanément), 220
- diagonalisation
  - base de, 211
  - base de diagonalisation simultanée, 220
  - matrice, 211
- diagonalisable (endomorphisme), 211
- diamètre 323
- difféomorphisme, 873
- différentiable, 827
- différentielle, 824, 825
  - d'une application composée, 839
- dilatation (matrice élémentaire), 126
- Dini (théorème de), 446, 570, 587
- direction principale, 1018
- Dirichlet
  - condition de, 542, 552
  - produit de, 626
  - théorème de, 792
- discriminant (forme bilinéaire symétrique), 166
- disque de convergence, 641
- distance, 315
  - canonique d'un espace vectoriel normé, 319
  - deux parties, 317
- distingué (sous-groupe), 22
- divergente (série), 248
- divise, 49
- diviseur, 49
- dominée, 331, 356
  - norme, 369
- double (suite) 610
- drapeau, 123
- droite
  - dérivée à, 500
  - dérivable à, 500
- dual(e)
  - base, 140
  - espace, 139
- échelonnée (matrice), 129
- ellipsoïde, 1019
- engendré(e)
  - idéal, 49
  - sous-algèbre, 68
  - sous-analyse, 180
  - sous-espace, 187
  - sous-groupe, 14
- ensemble directeur, 1031, 1032
- ensembles dénombrables, 3
- entière (série), 637
- équation différentielle, 997
  - autonome du premier ordre 979
  - linéaire
    - du premier ordre 922
    - scalaire d'ordre  $n$ , 950
    - méthode de  $l'$ , 672
  - équation de Pfaff, 1001
  - équation linéaire, 147
    - système, 147
  - équivalent(es), 332, 357

- matrices 111
- norme, 369
- système d'équations linéaires, 147
- escalier
  - fonction en, 448
  - intégrale de fonctions en, 472
- étale, 874
- étoilé, 910
- euclidien(ne)
  - distance, 693
  - espace, 688
  - norme, 693
- Euler (constante d') 251
- évaluation, 68
- exacte (forme différentielle), 907
- exhaustive (suite), 4, 540, 603
  - de partie finies, 603
  - de segments, 540
- exponentielle
  - complexe, 654
  - d'un endomorphisme, 937
  - élément, 392
  - réelle, 661
  - série, 392
- extraite (suite), 330
- facteur intégrant, 1002
- factorisation (morphisme), 35, 56
- famille
  - à support fini 612
  - sommable
    - positive, 602
    - somme d'une, 613
  - vectorielle, 611
- Fejér (théorème de), 802
- fermé(e), 336
  - forme différentielle, 909
  - partie, 336
  - relatif, 346
- Fermat (petit théorème de), 61
- fermeture, 339
- fidèle (action), 20
- fonction(s)
  - affine par morceaux, 449
  - composantes, 471
  - en escalier, 448
  - hyperbolique réelle 662
  - implicites (théorème des), 887
  - reste d'une série de fonctions, 453
  - somme d'une série de fonctions, 453
  - trigonométrique réelle, 662
- forme
  - coordonnée, 139
  - différentielle, 901
  - linéaire, 139
- Fourier (transformée de), 578
- frontière, 344
  - élément, 344
- Fubini (théorème de), 533
- Gamma (fonction), 583
- gauche
  - dérivable à, 500
  - dérivée à, 500
- Gauss
  - décomposition de, 169
  - théorème de, 54, 66
- générateur(trice), 1023, 1029, 1031, 1032
  - élément, 18
  - ensemble, 16
  - famille, 83
  - normalise, 64
  - partie, 16
  - positif, 30, 52
- géométrique (série), 248, 391
- gradient, 838, 902
- Hamilton-Cayley (théorème de), 209
- harmonique, 861
- Heine (théorème de), 408
- hermitien(ne)
  - endomorphisme, 750
  - espace, 688
  - forme, 686
  - matrice, 750
- Hilbert (espace de), 694
- holomorphe, 833
- homogène
  - application polynomiale, 88
  - équation différentielle linéaire, 922
  - équation différentielle linéaire) 950
  - équation linéaire), 147
- homéomorphisme, 361
- hyperboloïde
  - à deux nappes, 1025
  - à une nappe, 1021
- hyperplan, 104
- idéal, 47
- impropre (développement), 268
- indéfiniment dérivable 506
- indéfiniment différentiable, 853
- indicateur (d'Euler), 40
- induit(e)
  - distance 318
  - endomorphisme, 99
- inégalité
  - de la moyenne, 481

- triangulaire, 474
- intégrabilité, 549
  - d'une fonction vectorielle, 549
- intégrable
  - fonction
    - positive, 539
    - vectorielle, 549
- intégrale
  - curviligne, 903
  - d'une fonction
    - en escalier, 472
    - positive, 539
    - sommable, 551
  - des fonctions continues par morceaux, 473
  - impropre, 556
  - première, 993
- intégration
  - de la fonction somme, 648
  - par parties, 518
  - terme à terme d'une série, 488
- intérieur 338
  - élément, 338
- interpolateur (polynôme), 101
- intersection (idéal), 48
- intervalle de convergence, 641
  - d'une série entière, 641
  - de la série, 641
- invariance
  - de la différentielle, 842
  - par translation, 475
- inversion
  - globale (théorème de), 878
  - locale (théorème de), 874
- isométrie, 325
- Iwasawa (décomposition d'), 735, 756
- jacobienne, 823
- Jordan
  - décomposition de, 231
  - réduction de, 235
- $k$  fois continûment différentiable, 853
- Lagrange (théorème de), 27
- Laplace (transformée de), 578, 580
- Laplacien, 861
- Lebesgue (théorie de l'intégration de), 568
- Leibniz (formule de), 506, 528
- libre (famille), 83
- ligne de champ, 988
- limite
  - application, 349
  - simple, 437
- suite, 328
  - uniforme 438
- lipschitzienne (application), 324
- liée (famille), 83
- localement constante (application), 412
- logarithme
  - détermination principale du, 658
- logarithmique
  - comparaison, 256
- longueur (d'un arc paramétré), 707
- métrique (espace), 315
- matrice
  - jacobienne, 823
  - système d'équation linéaire, 150
- minimal (polynôme), 182
  - d'un vecteur, 187
- modulo (d'une congruence), 31
- monogène
  - espace, 188
  - groupe, 18
  - sous-algèbre, 69
- monôme (application), 86
- moyenne
  - convergence en, 484
  - inégalité de la, 481
  - quadratique (convergence en), 493
  - valeur, 481
- multiple, 49
- multiplicativité de l'exponentielle, 287
- multiplicité d'une valeur propre (ordre de) 207
- nappe
  - cartésienne, 896
  - paramétrée, 894
- nature
  - d'une série, 248
- négligeable, 332, 356
- nilpotent (endomorphisme), 227
- non dégénérée (forme bilinéaire symétrique), 166
- normal(e)
  - convergence d'une série de fonctions, 456
  - endomorphisme, 744, 760
- normalisé, 64
- norme, 305
  - d'algèbre, 306
  - deux, 309, 313
  - induite, 308
  - infinie, 309, 312
  - un, 309, 313
- normé

- espace vectoriel, 305
- vecteur 307
- norme de la convergence
  - en moyenne, 313, 485, 563
  - quadratique, 313, 492, 566
  - uniforme, 312, 773
- noyau(x)
  - idéal 48
  - lemme des, 190
- opérateur
  - d'Euler, 860
  - de Riemann, 861
  - différentiel linéaire, 857
- opération élémentaire, 125
- orbite (d'un élément), 24
- orthogonal(e), 143, 695
  - base, 167
  - endomorphisme, 730
  - famille de sous-espace, 699
  - famille de vecteurs, 695
  - fonction, 772
  - groupe, 732, 733
  - matrice, 733
  - partie, 695
  - projecteur, 701
  - somme directe, 699
  - supplémentaire, 699
  - symétrie, 701
  - vecteur, 694
- orthonormale (famille), 695
- orthonormalisation (théorème de Schmidt), 697
- orthonormalisée, 697
- orthonormée
  - base, 702
  - famille, 695
- ouvert
  - partie, 333
  - relatif, 346
- paquets (somme par), 605, 616
- paraboloïde
  - elliptique, 1026
  - hyperbolique, 1027
- parallélogramme (identité du), 692
- Parseval-Bessel (égalité de), 712, 805, 811
- partage, 116
- parties (intégration par) 518
- partition, 116
- pivot de Gauss, 128
- plan tangent
  - nappe, 895
  - surface, 898
- Poincaré (théorème de), 910
- polaire (forme), 160
- polarisation (identités de), 160, 691
- polynôme, 86
  - annulateur, 69, 162
  - d'endomorphisme, 179
  - minimal, 69
  - trigonométrique, 452
  - trigonométrique, 775
- polynomiale (application) 86
- positif(ve)
  - endomorphisme, 728, 751
  - forme bilinéaire symétrique, 161
  - indice, 752
  - matrice, 729
- potentiel, 908
- préduale (base), 142
- primitivation
  - d'une limite 524
- primitive
  - d'une fonction continue par morceaux, 510
  - d'une fonction continue 509
  - forme différentielle, 907
- principal(e)
  - anneau, 52
  - équation linéaire, 148
  - idéal, 49
  - inconnue, 151
  - sous-système, 148
- problème de Cauchy, 923, 981
- produit
  - de Cauchy, 286, 625, 638
  - de deux séries entières, 638
  - de Dirichlet, 626
  - distance, 318
  - espace métrique, 318
  - espace vectoriel, 90
    - normé, 309
  - groupe, 13
  - loi, 13
  - mixte, 737
  - norme, 309
  - scalaire, 687
    - de deux fonctions 771
- projecteurs, 94
  - système de, 94
- projection, 94
- prolongement d'une application linéaire
  - continue, 395, 472, 613
- propre
  - développement, 268
  - décimal, 265
  - projecteur, 217

- sous-espace, 195
- valeur, 195
- vecteur, 195
- pré-orthogonal, 143
- préhilbertien (espace), 688
- Pythagore (théorème de), 696
- période, 767
- périodique (fonction) 767
- quadratique (forme), 159
- quadrique, 1013
  - propre, 1018
  - à centre, 1018
- quotient
  - addition, 33
  - anneau, 55
  - ensemble, 31
  - groupe, 34
  - loi, 34
  - multiplication, 54
- racine carrée (d'un endomorphisme positif), 743
- rang, 103
- forme bilinéaire symétrique, 166
- rationnel (nombre), 265
- rayon de convergence, 639
  - $\rho$  de la série entière produit, 644
  - de la somme des deux séries, 643
- recouvrement, 398
- réflexion, 731
- réglée
  - fonction, 473
  - surface, 1023
- règles
  - de Cauchy, 641
  - de d'Alembert, 641
- régulier(ère)
  - (point) d'une courbe, 893
  - (point) d'une surface 898
  - (point) de l'intersection de deux surfaces, 899
- arc 893
- équation différentielle linéaire, 950
- nappe, 895
- relèvement (théorème du), 515
- Relation de Chasles, 483
- représentant(s), 32
  - orbite, 25
  - système, 25, 32
- reste d'une série, 250
- restreinte (action), 20
- Riemann
  - règle de, 254
  - série de, 253
  - somme de, 481
- Riemann-Lebesgue (théorème de), 790
- Riesz (théorème de), 417
- rotations, 732
- Rouché-Fontené (théorème de), 149
- Schwarz (théorème de), 857
- scindé
  - endomorphisme, 208
  - polynôme, 208
  - simple
    - endomorphisme, 208
    - polynôme, 208
- second membre d'une équation différentielle linéaire, 922, 950
- secondaire
  - équation linéaire, 148
  - inconnue, 151
- semblable (matrices) 113
- semi-linéaire (application), 685
- semi-norme, 308
  - de la convergence en moyenne, 773
  - quadratique, 771
- série(s), 601
  - absolument convergente, 615
  - alternées, 279
  - d'un espace vectoriel normé, 329
  - de fonctions, 452
  - de Fourier, 783
  - entière, 637
    - complexe de variable réelle, 637
    - dérivée, 638
    - développable en (fonction), 665
    - primitive, 638
    - réelle de variable réelle, 638
  - numériques, 247
  - positive, 603
  - produit de deux séries entières, 638
  - somme de deux séries entières, 638
  - trigonométrique, 777
- sesquilinéaire (application), 686
- signature (forme bilinéaire symétrique), 172
- simple
  - convergence, 437
  - groupe, 22
- singularité, 950
- singulière (équation différentielle linéaire) 950
- sinus
  - complexe, 659
  - hyperbolique complexe, 659
  - réel, 662
- solution

- équation différentielle
  - linéaire, 922, 950
- équation différentielle, 979, 997
- maximale (équation différentielle), 981
- sommable
  - famille, 611
    - positive, 602
    - vectorielle, 611
  - fonction
    - positive, 539
    - vectorielle, 549
  - somme des familles, 613
  - suite, 615
- sommation par paquets, 605, 616
- somme
  - d'une famille à support fini, 612
  - d'une famille sommable, 613
    - positive, 602
  - de deux séries entières, 638
  - de Fourier, 783
  - de la série, 247
    - entière, 641
  - de Riemann, 481
  - directe, 92
    - applications linéaires, 96
    - décomposition en, 93
  - idéal, 48
  - partielle, 329, 452
    - d'une série, 247
  - de la série de fonction, 452
  - sous-espaces vectoriels, 91
- sous-recouvrement, 398
- sous-suite, 330
- spécial orthogonal (groupe), 732, 733
- spécial unitaire (groupe), 753
- spectral
  - projecteur, 227
  - sous-espace, 227
  - théorème, 739, 758
- spectre d'un endomorphisme 198
- sphère, 321
- stabilisateur, 25
- stabilise, 98
- stable
  - partie, 20
  - sous-espace, 98
- stationnaire (point) 989
- Stirling (formule de), 289
- subdivision, 447
- derives), 508
- suite
  - double 610
  - exhaustive, 4
  - sommable, 615
- superflue (équation linéaire), 151
- superposition
  - principale, 952
  - principe de, 923
- support
  - compact (fonction à), 552
  - d'une famille, 81, 612
    - sommable, 626
  - fini (familles à), 81, 612
- surface, 898
- Sylvester (théorème d'inertie de) 172
- symétrique
  - endomorphisme, 725
  - forme bilinéaire, 159
- système
  - différentiel autonome du premier ordre 980
  - fondamental de solutions, 931, 955
- tangente, 500
  - à l'intersection de deux surfaces, 900
  - application linéaire, 824
  - à une courbe, 894
  - complexe, 661
- taux d'accroissement 500
- Taylor
  - avec reste intégral (formule de), 521
  - développement de, 863
  - série de, 666
- Taylor-Lagrange (inégalité de), 522
- Taylor-Laplace (formule de), 521
- Taylor-Young (formule de), 523, 863
- télescopique (série), 250
- tend (application) 348
- terme général d'une série, 247
- topologie, 334
- torsion (élément de), 37
- totale (famille orthonormée), 713
- trace, 114
- tranches
  - sommation par, 282
- transcendant, 70
- transformation d'Abel, 281
- transitive (action), 25
- translation, 21
- transposition (matrice élémentaire), 126
- transvection (matrice élémentaire), 126
- triagonalisable
  - base, 221
  - matrice, 221
- triangulaire (inégalité), 307, 474, 553
- trigonalisable (endomorphisme), 221
- trigonométrique (polynôme), 452
- type fini (groupe), 16

- uniforme
  - convergence, 438, 567
  - limite, 438
- uniformément
  - de Cauchy, 441
- unitaire
  - endomorphisme, 753
  - groupe, 753
  - matrice, 754
  - vecteur, 307
- valeur(s)
  - d'adhérence, 330
  - d'un polynôme, 67
  - décimale approchée, 262
  - intermédiaires (théorème des), 410
  - moyenne, 481
- variable (changement de), 519
- variation
  - de la constante, 961, 964
  - des constante, 964
  - des constantes, 936
- vitesse, 500
- voisinage(s), 333
  - base de, 335
  - relatif, 346
- Weierstrass, 450
  - (théorème de) trigonométrique, 452, 799
- Wilson (théorème de), 62
- wronskien, 932, 955
  - méthode de, 961